Capitolo B65:

teoria assiomatica degli insiemi

Contenuti delle sezioni

B65:0.01 Questo capitolo concerne le teorie assiomatiche degli insiemi e primariamente la teoria individuata dalla sigla ZFC, cioè la teoria proposta da Zermelo e Fraenkel comprendente l'assioma della scelta.

Si inizia con una panoramica storica sulla nascita e sul consolidamento delle teorie assiomatiche da porre a fondamento della matematica e sulla sinergica crescita della logica matematica. In questo contesto vengono anche delineate le teorie formali in generale e quelle più specifiche dedicate alla matematica.

Nella sezione :c vi è una presentazione, costituita dalle formule essenziali accompagnate da commenti discorsivi, della teoria degli insiemi largamente assunta come standard e nota con la sigla ZFC. Sono presenti anche considerazioni sopra i problemi generali per ZFC, come coerenza e completezza. La sezione :c viene preceduta da una sezione dedicata agli elementi del calcolo del primo ordine necessari alla assiomatica ZFC.

Vengono poi presentati a grandi linee le formalizzazioni delle teorie matematiche basate sopra ZFC.

La successiva sezione :e è dedicata alla assiomatizzazione della teoria dei numeri naturali, la più semplice delle teorie basate sopra ZFC.

Viene poi esaminato l'assioma della scelta attraverso diverse formulazioni equivalenti, tra le quali il lemma di Zorn, e vengono presentate sue conseguenze più deboli, anche per chiarire

Si termina con una panoramica sopra altre possibili impostazioni assiomatiche della teoria degli insiemi e sopra altri sistemi formali che vengono proposti per i fondamenti della matematica.

Per questo capitolo sono stati consultati, in particolare, [[Mathematical logic]] e Drake, Singh (1982): *Intermediate set theory*.

B65:a. emergere delle teorie assiomatiche

B65:a.01 Per perseguire sistematicamente gli obiettivi della matematica (dai teorici ai computazionali), impegnativi e di vasta portata, si è reso necessario disporre di apparati formali affidabili, versatili ed efficienti i quali consentano di trattare con gli opportuni procedimenti dimostrativi gli oggetti delle indagini (numeri, configurazioni geometriche, strutture, equazioni, ...) e la rete delle loro relazioni.
Agli apparati formali innanzi tutto si chiede che non portino a contraddizioni; inoltre si chiede che, in quanto strumenti di indagine in un proprio settore, abbiano qualche genere di completezza.

Gli apparati formali utilizzati per la maggior parte dei problemi si servono di insiemi di oggetti e di nozioni direttamente riconducibili agli insiemi. Quindi occorre sviluppare una conoscenza degli insiemi che comprenda anche quelli non costruibili, cioè gli insiemi che non si riescono a individuare con i procedimenti costruttivi utilizzabili per gli insiemi finiti ed i procedurali.

B65:a.02 Una caratteristica che distingue piuttosto nettamente gli insiemi trattabili costruttivamente da quelli che non lo sono è la loro cardinalità. Gli insiemi costruibili sono trattabili con procedure o con macchine MSPG individuate da definizioni o rappresentazioni costruttive finite che in casi particolari si riducono ad espressioni in un opportuno linguaggio formale, e quindi costituiscono insiemi che hanno la cardinalità del numerabile.

Le entità non trattabili con procedimenti costruttivi si possono conoscere ed utilizzare solo attraverso proprietà che possano essere oggetto di procedimenti dimostrativi e che possano essere considerati elementi di insiemi che hanno cardinalità superiore al numerabile, e che chiamiamo genericamente **insiemi più che numerabili**.

Al livello del più che numerabile va collocato un primo gruppo di problemi che sono stati affrontati fin dalle civiltà antiche (Mesopotamia, Egitto, India, Cina, Maya, mondo greco-ellenistico, ...) e riguarda la trattazione della linea retta, degli ambienti geometrici (piano, spazio euclideo, ...) che alla retta si possono ricondurre e delle "forme" (funzioni, curve, superfici, ...) che in questi ambienti si collocano ed eventualmente si evolvono.
Questi problemi matematici sono stati imposti da una quantità di problemi del mondo reale per i quali è stata impostata una vasta gamma di modelli fisico-matematici o discreti per il mondo materiale e per attività di organizzazione. Tra le attività che hanno richiesto modelli matematici e conseguenti strumenti computazionali citiamo: misurazioni del terreno, architettura, costruzioni di macchine, balistica, controllo delle acque, astronomia, fisica, scienze e tecnologie, economia, attività amministrative, gestionali, finanziarie, legali.

B65:a.03 I cultori della matematica fino alla prima metà del XIX secolo hanno fatto ampio ricorso all'intuizione, soprattutto all'intuizione geometrica. In relazione a questo, nei confronti dei fondamenti si è assunto, più o meno consapevolmente, un atteggiamento euristico.

In alcuni settori della matematica sono stati fatti notevoli sforzi per giungere alla stesura di trattazioni rigorose. Sono esemplari la redazione degli [[Elementi di Euclide]] e le opere di [[Archimede]] nell'ambito della scienza greco-ellenistica e opere di pensatori indiani come [[Panini]] e [[en:Aksapada Gotama]].

Nel passato comunque l'atteggiamento prevalente è consistito nella ricerca di risultati coerenti all'interno di singoli campi, mentre si rinviavano il chiarimento dei fondamenti e, non di rado, anche le definizioni rigorose di alcune nozioni.
Questo in particolare si riscontra nella geometria greco-ellenistica, nell'analisi infinitesimale delle scuole antiche e nella matematica europea dal rinascimento a tutto il XVIII secolo. Esemplare in questo senso

è l'atteggiamento euristico di un matematico sistematico e fecondo come [[Eulero]].

B65:a.04 Nella seconda metà del secolo XIX si verifica un cruciale avanzamento del pensiero matematico consistente nella nascita della teoria degli insiemi e della logica matematica. Questo progresso si verifica sulla spinta di vari filoni di ricerca.

Nella prima parte del secolo XIX si era iniziata la definizione di formalizzazioni precise per le costruzioni dell'analisi infinitesimale reale. Grande importanza ebbero i sistematici lavori di [[Louis Augustin Cauchy]], mentre purtroppo fu piuttosto ridotta la risonanza dei lavori pionieristici di [[Bernhard Bolzano]].

Queste ricerche in analisi incrociano un problema filosofico e scientifico fondamentale che si era discusso da secoli (Zenone da Elea, Aristotele, Avicenna, ...), la comprensione della nozione di infinito. I primi approfondimenti in proposito sono dovuti ai lavori con i quali [[Bernhard Bolzano]] affrontò dal 1837 al 1847 lo studio di alcuni paradossi dell'infinito. A lui si deve l'introduzione del il termine **insieme** e l'attenzione rivolta a questa entità.

B65:a.05 Un altra linea di pensiero concerne l'impostazione matematica della logica avviata in Inghilterra da studiosi come Charles Babbage, Boole e De Morgan; va ricordato che essi furono profondamente influenzati dallo studio delle opere indiane sulla logica.

Nel 1847 [[George Boole]], con la sua analisi delle leggi del pensiero, propose quella che ora è nota come algebra di Boole. Sulla sua scia [[Augustus De Morgan]] espose le leggi note con il suo nome (v. B19:c09) e l'americano [[Charles Sanders Peirce]] iniziò ad affrontare per primo un'ampia serie di problemi riguardanti gli insiemi, la logica ed i fondamenti della matematica. Purtroppo le sue molte idee ebbero un'influenza limitata e su vari temi tardiva. In particolare già nel 1860 aveva proposto di caratterizzare gli insiemi infiniti con dei numeri cardinali.

Va inoltre ricordato che, sulla spinta degli studi sulle geometrie non euclidee e delle successive ricerche di [[Bernhard Riemann]], si è fatta forte l'esigenza di un riesame approfondito dei fondamenti della geometria e dei sistemi continui.

B65:a.06 Due questioni importanti studiate in quegli anni da matematici autorevoli come [[Karl Weierstrass]] e [[Richard Dedekind]], anche in relazione con lo studio di funzioni reali non intuitive, riguardavano la definizione dei numeri reali e la individuazione di basi logiche per la teoria dei numeri interi.

Fondamentali progressi nello studio dell'infinito si deve a [[Georg Cantor]] che con una serie di lavori dal 1868 al 1874 pose le basi della teoria degli insiemi.

Queste entità fino allora erano state considerate solo in contesti particolari e non nella loro generalità e ad un insufficiente livello di astrazione. Cantor considerò invece gli insiemi come entità caratterizzate solo dal contenere elementi che soddisfano proprietà alle quali non si imponeva alcun requisito.

Egli portò l'attenzione sopra la cardinalità degli insiemi, definendo due insiemi come equicardinali quando sia possibile porli in biiezione. Sulla base di questa definizione dimostrò la equicardinalità per svariate coppie di insiemi utilizzati in matematica, mentre dimostrò che l'insieme delle parti di un insieme S ha una cardinalità superiore a $|S|$ e di conseguenza individuando una successione di classi di equicardinalità caratterizzate dai numeri transfiniti $\aleph_0 := |\mathbb{N}|$, $\aleph_1 := |\mathfrak{P}(\mathbb{N})|$, $\aleph_2 := |\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))|$, ..., $\aleph_n$, ...

B65:a.07 Queste idee furono accolte da molti dei matematici interessati ai fondamenti (in particolare da Weierstrass e Dedekind) e si cominciò ad utilizzare gli insiemi come basi per lo studio sistematico dei fondamenti della matematica, a cominciare dalle impostazioni assiomatiche dell'aritmetica e della geometria.

Gli insiemi concepiti da Cantor trovarono però forti oppositori, in particolare in [[Leopold Kronecker]], che le accusavano di ricorrere a nozioni troppo vaghe come quella di insieme astratto e quella di non meglio precisate biiezioni basi delle cardinalità, mentre criticavano l'allontanando dalle problematiche costruttive e dai loro metodi.

Per contro ci si rese conto che gli insiemi trattati come entità astratte consentivano di proporre teorie di rilevante generalità in grado di conglobare diverse teorie concernenti entità più concrete e di portata più specifica. In effetti nell'ultimo quarto del XIX secolo è prevalsa l'idea dell'utilità di una teoria degli insiemi astratti, sia come strumento di sistemazione della matematica, sia per i vantaggi in termini di concisione espositiva e di generalità dei risultati ottenibili.

B65:a.08 Intorno al 1970 Peirce aveva iniziato a proporre un sistema logico di ampio respiro riguardante in particolare relazioni e quantificatori. Proseguendo questi studi egli giunse anche a distinguere la logica del primo ordine dalla logica del secondo ordine.

Nell'ambito degli studi sulla definizione assiomatica dell'aritmetica nel 1879 [[Gottlieb Frege]] propose con determinazione nell'opera *Begriffschrift* (≈ linguaggio di concetti), il **logicismo**, programma che, richiamando l'utopia della *characteristica universalis* di [[Leibniz]] e l'opera di Boole, si proponeva di ridurre l'aritmetica alla logica.

Frege propose con determinazione il paradigma della teoria formale, cioè di un sistema che si basa sopra enunciati proposti come veri, gli assiomi, e sopra regole di inferenza puramente simboliche che dagli assiomi consentono di derivare come formule ben formate tutti e soli gli enunciati da considerare veri. Questo programma per la formulazione precisa delle catene deduttive, richiede un linguaggio artificiale che riguardi anche i quantificatori. Si venne inoltre precisando che una teoria matematica deve avere le seguenti proprietà:

coerenza o **consistenza** o **non-contradditorietà**, cioè l'impossibilità di dimostare proprietà contradditorie;

completezza, cioè possibilità di dimostrare ogni enunciato ben formulato, oppure di o confutarlo, cioè di dimostrare la sua negazione;

decidibilità, ossia disponibilità di un metodo o di un algoritmo in grado di decidere la validità di ogni enunciato ben formulato.

B65:a.09 Frege, con l'opera *Grundgesetze der Arithmetik* riuscì a dare base assiomatica all'aritmentica. Per questo propose un linguaggio formale che riguardava formule disposte in due dimensioni. Purtroppo tale strumento si rivelò pesante ed il suo uso fu assai limitato. Un linguaggio più semplice venne proposto da Dedekind e successivamente [[Giuseppe Peano]] espose una formulazione dell'aritmetica ancora più semplice che venne ampiamente adottata e viene tuttora proficuamente studiata (v. :e.10-14)

L'assiomatizzazione dell'aritmetica influenzò anche altri studi sul metodo assiomatico e sulla fondazione formale della matematica ai quali si stavano dedicando alcuni tra i più influenti matematici di quel tempo, come [[Henry Poincaré]], [[David Hilbert]] ed [[Hermann Weyl]], oltre al programma di [[Bertrand Russell]] che vedremo più oltre.

In questo periodo le teorie matematiche formalizzate hanno cominciato ad imporsi come i soli apparati di vasta portata in grado di garantire procedimenti rigorosi capaci di condurre a risultati ad un alto livello di attendibilità. Questa riguardava soprattutto il pericolo della contradditorietà dei risultati, ovvero delle antinomie. In una teoria nella quale dagli assiomi si possono dimostrare sia un enunciato che il suo opposto si dimostra la possibilità di contraddire ciascuno dei teoremi dedotti dagli assiomi e quindi la contradditorietà degli assiomi stessi e la inutilità della teoria nei confronti delle applicazioni.

B65:a.10 La pubblicazione nel 1899 dei *Grundlagen der Geometrie* di [[David Hilbert]] fornì la prima impostazione deduttiva completa e logicamente soddisfacente della geometria. Va segnalato che l'impostazione di Hilbert contraddisse la radicata convinzione di Kant (accolta da Frege) della natura innata delle idee riguardanti lo spazio.

I fondamenti della geometria di Hilbert ebbero vasta influenza, anche in virtù della loro capacità di unificare le diverse geometrie (la euclidea, l'ellittica e l'iperbolica) intorno alle quali nel passato si erano riscontrati accesi dibattiti, anche in ambito filosofico.

Il programma del logicismo per i fondamenti però ha incontrato gravi difficoltà con la scoperta o la ripresa di alcuni cosiddetti paradossi, enunciazioni che conducono a contraddizioni, ossia antinomie: [[paradosso di Epimenide]], [[paradosso di Burali-Forti]], [[paradosso di Russel]] (e di Zermelo), [[paradosso del barbiere]], paradosso del più piccolo intero privo d'importanza, ...

Particolarmente preoccupante fu il paradosso che Russel individuò leggendo un testo di Frege. Esso riguarda l'entità definita come

$$\text{l'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi .}$$

Se tale insieme fosse membro di se stesso contraddirebbe la definizione, mentre se non appartenesse a se stesso dovrebbe contenere se stesso.

Furono individuati anche oggetti geometrici paradossali: ad esempio Peano trovò una curva piana continua che passa per tutti i punti di una regione quadrata.

B65:a.11 Ci si è dunque resi conto che la teoria degli insiemi proposta da Frege consentiva di trattare l'insieme di tutti gli insiemi, ossia accettava l'enunciato $\mathbf{Set} \in \mathbf{Set}$, affermazione alla quale si potevano ricondurre molte antinomie.

L'evidenziazione dei paradossi che conducono a contraddizioni preoccupò profondamente gli studiosi della teoria degli insiemi e del problema dei fondamenti.
In effetti si ebbe anche un gran numero di matematici che, osservando che gli "insiemi" generatori di antinomie erano molto più estesi ed indefiniti di quelli che, più o meno esplicitamente, venivano utilizzati nelle attività matematiche più feconde, videro con un certo distacco il dibattito sui fondamenti e proseguirono nei loro studi specifici rimuovendo le preoccupazioni per le questioni di principio.

È risultato evidente che servirsi di definizioni basate sulla sola intuizione e di nozioni basilari poco approfondite comportava il rischio di giungere a situazioni insostenibili in molti campi di indagine.
Una teoria degli insiemi che non pone vincoli per le proprietà in grado di caratterizzare gli insiemi stessi venne considerata ingenua, *naïve*. Per avere buone garanzie di non-contradditorietà e di affidabilità doveva essere rafforzata con precise richieste formali.

Si impose dunque la necessità di sviluppare accurate impostazioni formali che consentissero di definire teorie basate su assiomi e su regole di inferenza in grado di ottenere enunciati, i teoremi, da considerare veri nell'ambito di ciascuna specifica teoria. In particolare tra i 23 problemi che Hilbert al II Congresso Internazionale di Matematica nel 1900 aveva segnalato come cruciali per l'avanzamento della ricerca si trovano l'ipotesi del continuo, cioè l'assenza di insiemi con cardinalità compresa fra quella degli interi e quella della retta reale, e la coerenza della teoria dei numeri naturali.

B65:a.12 Per perseguire la definizione formale-deduttiva di una matematica libera da contraddizioni ed affidabile dai primi anni del XX secolo furono proposti vari programmi; in quali differivano anche per obiettivi ed aspetti contrastanti.
Questi studi fondazionali complessivamente ottennero molti risultati importanti, ma incontrarono anche difficoltà e fallimenti i quali hanno condotto ad una situazione con elementi di . frammentarietà che durano tuttora e che accenneremo in :g.

Gli studi sui sistemi formali deduttivi su fondamenti condussero a introdurre e consolidare la [[logica matematica]], cioè la disciplina che si occupa delle leggi del ragionamento in matematica servendosi di strumenti formali rigorosi.

Questa disciplina si è sviluppata in stretto contatto con le problematiche della teoria degli insiemi e dei fondamenti della matematica traendo vari spunti dalle esigenze di questi settori. Essa tuttavia si pone obiettivi di ampio raggio e sistematici, sviluppa propri strumenti e rivendica una propria autonomia.

B65:a.13 La logica matematica studia lo sviluppo e l'applicazione delle **teorie formali**. Queste sono sistemi simbolici costituite da un linguaggio e da un apparato deduttivo.
Il linguaggio L si basa su un alfabeto A costituito da simboli aventi ruoli diversi:

- variabili: x, y, z, ... X, Y, x_1, x_2, ... costituenti insiemi finiti prefissati o ampliabili illimitatamente secondo necessità;
- costanti;
- parentesi delimitatrici e simboli di punteggiatura;
- connettivi proposizionali: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$;
- quantificatore universale $\forall$ e quantificatore esistenziale: $\exists$;
- predicati: "essere un insieme", $=$, $\in$.

Il linguaggio $L \subset A^\star$ è individuato da regole sintattiche ben determinate, ad esempio da una grammatica acontestuale (v. C14:). Le sue stringhe hanno il compito di rappresentare formalmente degli enunciati. e sono dette **formule ben formate** o **formule ammissibili**. Queste possono essere:

- **formule atomiche** come le seguenti $x = y$, $x \in S$, S è uninsieme ;
- **formule derivate** ottenute applicando anche più volte le regole di riscrittura costituenti i meccanismi per la formazione dei predicati.

L'apparato deduttivo è costituito un insieme $\mathcal{A} \subset L$ di enunciati privilegiati chiamati **assiomi** (o postulati) e da regole di inferenza.

Gli assiomi (o postulati) vengono assunti come enunciati veri o più precisamente enunciati validi nell'ambito della teoria.

Ogni regola di inferenza è una regola di riscrittura che da alcune formule ammissibili consente di ricavare una nuova formula ammissibile.

Le regole di inferenza sono usate per produrre formule valide a partire dagli assiomi e da formule valide precedentemente prodotte.

B65:a.14 Tra le teorie formali sono state messe a fuoco le più specifiche [[teorie matematiche]] concernenti obiettivi più specificamente collegati alle possibilità di elaborazioni e caratterizzate dal richiedere la relazione di uguaglianza. Tra queste teorie quasi tutti viene data particolare importanza alla teoria degli insiemi (nelle sue non poche varianti).
Nelle teorie matematiche gli enunciati veri in talune esposizioni sono chiamati indistintamente **teoremi**; in altre esposizioni per essi vengono usati nomi come proposizioni, lemmi e corollari, a seconda del ruolo che viene attribuito a ciascuno di essi nel corso dell'esposizione della teoria.

Gli enunciati veri di una teoria matematica hanno lo scopo di esprimere le proprietà delle entità formali che si trova opportuno introdurre per rendere la teoria stessa in grado di individuare strumenti conoscitivi, algoritmi e metodi per la risoluzione dei problemi che, insieme ai modelli di oggetti concreti che possono essere rappresentati dalle entità formali, sono considerati gli obiettivi applicativi della teoria stessa.

B65:a.15 Il più importante ed influente programma per la fondazione assiomatica della matematica è quello proposto da Hilbert nel 1900 che va sotto il nome di **finitismo**.
Esso si propone di individuare una assiomatizzazione della teoria degli insiemi priva di ricorsi alla intuizione, ma espressa solo con richieste formulate finitamente. Si voleva poi che questa teoria fosse in grado di dimostrare la propria coerenza servendosi solo dei suoi assiomi e dei suoi teoremi. Si chiedeva inoltre che si potesse individuare un procedimento o un algoritmo in grado di stabilire per ogni enunciato della teoria se fosse dimostrabile oppure confutabile a partire dagli assiomi (*Entscheidungsproblem*) Infine si chiedeva che dalla teoria degli insiemi fossero deducibili i primi teoremi riguardanti i numeri naturali.

Questo programma fu portato avanti con importanti successi dallo stesso Hilbert e da suoi molti seguaci ed influenzò positivamente la crescita della logica matematica.

B65:a.16 Un importante risultato del finitismo fu la assiomatizzazione della teoria degli insiemi formulata da [[Ernst Zermelo]] (1908), arricchita da [[Adolf Abraham Fraenkel]] (1922) e completata negli anni immediatamente successivi da [[Thoralf Skolem]].
Le sue caratteristiche sono esposte dettagliatamente nella sezione :c. Va comunque subito detto che questa teoria è quella che dalla sua presentazione viene utilizzata nella maggior parte delle esposizioni di teorie matematiche e che può considerarsi la formalizzazione standard degli insiemi.

Il finitismo invece fallì l'obiettivo della dimostrazione a partire dai suoi assiomi della coerenza della teoria stessa, in conseguenza della dimostrazione da parte di [[Kurt Gödel]] nel 1931 dei teoremi di incompletezza. Il finitismo quindi dovette ridurre i suoi obiettivi, ma con entro i limiti accertati continuò ad essere praticato.

B65:a.17 A fianco del finitismo va considerato il progetto di formalizzazione della teoria degli insiemi e dei fondamenti della matematica che ha condotto alla pubblicazione negli anni 1910, 1912 e 1913 dei *Principia mathematica* di Russel ed [[Alfred North Whitehead]].
In questa opera nata con vasti obiettivi si evitano i paradossi introducendo per gli insiemi una gerarchia consistente una successione di tipi di cardinalità crescenti.
La trattazione risulta però piuttosto pesante, ben più della teoria di Zermelo-Fraenkel; inoltre alcuni obiettivi proposti all'inizio dell'opera risultano irrealizzabili, ancora in conseguenza dei teoremi di incompletezza di Gödel.

B65:a.18 Una questione che per molti anni venne assai dibattuta riguarda l'inserimento o meno tra gli assiomi della teoria e dei fondamenti della matematica del cosiddetto **assioma della scelta**, in sigla ZF_C.
Questo verrà introdotto in :c.10 e discusso con una certa ampiezza in :f .

Attualmente la diatriba sull'assioma della scelta si è molto attutita, in quanto prevale l'idea che non sia necessario concordare un sistema unico per i fondamenti. Si consente invece di prendere in considerazione diverse teorie degli insiemi oppure di adottare altri approcci che si servono di entità diverse dagli insiemi (ad esempio delle categorie). In questa ottica di "eclettismo" si da importanza all'esame delle relazioni di equivalenza o di dipendenza tra i diversi sistemi formali. In particolare viene evidenziata la distinzione fra i risultati dimostrati a partire da un sistema di assiomi che prescinde da ZF_C da quelli derivati da un sistema che lo include.
La teoria di Zermelo-Fraenkel che include l'assioma della scelta viene solitamente identificata con la sigla ZFC, mentre la teoria che non ricorre a ZF_C viene identificata con ZF.

B65:a.19 Un importante approccio ai fondamenti della matematica è partito dalla critica di molti strumenti per lo studio degli insiemi che vengono introdotti con motivazioni giudicate inadeguate. In particolare sono stati messi sotto accusa un uso smodato del principio del terzo escluso e l'assioma della scelta.

In contrapposizione al finitismo venne dunque proposto il programma di costruire la matematica con rigida esclusione degli strumenti non pienamente giustificati. Questo approccio, chiamato **intuizionismo**, venne proposto e sviluppato inizialmente dall'olandese [[Luitzen E. J. Brouwer]]. Tra intuizionisti e finitisti, in particolare fra Brouwer ed Hilbert, si ebbero anche accese polemiche.

B65:a.20 Una posizione con molti punti in comune con l'intuizionismo venne sviluppata nell'Unione Sovietica da [[Andrei Andreevic Markov jr.]]. Anche questo approccio fu critico nei confronti degli strumenti ammissibili e, per contro, insistette sopra l'opportunità di ottenere dimostrazioni costruttive dei risultati della matematica mediante strumenti algoritmici che fossero in grado di consentire un controllo più effettivo dei risultati formali e una migliore consapevolezza della realizzabilità delle applicazioni.

B65:a.21 Segnaliamo anche a grandi linee gli aspetti della logica matematica che più qui interessano.
Una nozione basilare per questa disciplina è qualla di **calcolo formale**, termine che in questo capitolo sostituiamo con la sola parola "calcolo". Possiamo definire calcolo una terna costituita da un linguaggio formale, da un sistema di assiomi espressi nel suddetto linguaggio e da un sistema di regole di inferenza.
Con queste ultime si può dare una precisa definizione di dimostrazione e questa apre la possibilità di stabilire quando è impossibile dimostrare un enunciato per una teoria che su quel calcolo si basa.
Questa tematica si è esercitata nel cosiddetto **problema della parola** introdotto da [[Axel Thue]] (1902) e approfondito negli anni 1940, in particolare, da [[Emil Leon Post]] e [[Stephen Cole Kleene]].

B65:a.22 Un importante risultato della logica matematica consiste nella definizione matematica della nozione di algoritmo, cioè di una procedura affettiva in grado di risolvere una classe, spesso infinita, di problemi.
Questa nozione risponde all'auspicio di Leibniz di individuare un meccanismo in grado di risolvere ogni problema della matematica (*characteristica universalis*).

Accadde però che [[Alonso Church]] nel 1936 dimostrò l'impossibilità di trovare un algoritmo esprimibile nel cosiddetto **lambda calcolo** che, dato un arbitrario enunciato sugli interi naturali espresso in un linguaggio formale in grado di formalizzare l'aritmetica elementare, consentisse di decidere la validità o meno dell'enunciato per ogni intero naturale. Venne quindi dimostrata l'impossibilità di risolvere quello che Hilbert aveva chiamato *Entscheidungsproblem*, problema che si era dimostrato equivalente alla decisione della validità di un qualsiasi enunciato della matematica.
Nello stesso anno si ebbe un risultato equivalente: [[Alan Mathison Turing]] introdusse la macchina che porta il suo nome come strumento in grado di eseguire ogni algoritmo, nonché la variante specifica detta macchina di Turing universale, macchina in grado di simulare ogni evoluzione di macchina di Turing ed in particolare in grado di simulare se stessa. Tale strumento gli permise di individuare un altro problema algoritmicamente indecidibile, quello dell'arresto della suddetta macchina. Segnaliamo che il,termine "macchina di Turing" si abbrevia spesso con **TurM**.
I vari strumenti formali noti in grado di realizzare algoritmi si dimostrarono equivalenti; quindi Church e Turing avanzarono la congettura che ogni algoritmo sia eseguibile da una macchina di Turing, ovvero con il λ-calcolo, ovvero con la teoria della ricorsione di Gödel, ovvero da qualsiasi altro degli accennati strumenti.

Negli anni successivi furono individuati molti altri problemi indecidibili e quindi molti aspetti limitativi della matematica. A questi sviluppi contribuirono in particolare matematici dell'Unione Sovietica come [[Anatoly Ivanovich Maltsev]], [[Piotr Sergeievich Novikov]] ed [[Aleksander Alexandrevich Markov jr]].

B65:a.23 Le considerazioni precedenti riguardano la branca sintattica della logica matematica. Gli studi più profondi di questa branca riguardano la nozione di dimostrazione nei diversi calcoli logici ed oggi costituiscono un settore della logica matematica dotato di una certa autonomia chiamato **teoria della dimostrazione**.

Vi sono poi gli studi semantici i quali si devono applicare ai linguaggi formali dei diversi calcoli logici. Per ciascun linguaggio si tratta di indagare sopra la verità delle sue espressioni. Le nozioni semantiche vengono precisamente definite e questo rende possibile uno studio rigoroso di vari concetti di verità.

La semantica del linguaggio del calcolo dei predicati ha costituito un ricco settore della logica matematica chiamato **teoria dei modelli**. Questa disciplina fu fondata da Alfred Tarski e da Anatoly Maltsev e molti dei suoi risultati e dei suoi metodi sono utilizzati in altri settori della matematica, ad esempio nell'algebra e nell'analisi infinitesimale.

B65:b. calcolo del primo ordine per ZFC

B65:b.01 Come segnalato in :a, per la introduzione assiomatica di una teoria formale impegnativa è opportuno disporre di uno strumento in grado di trattare le sue basi logiche. Qui consideriamo il cosiddetto calcolo del primo ordine, in sigla Calord1, limitandoci alle sole nozioni di questa teoria che sono necessarie per l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel.

Iniziamo con la definizione del relativo linguaggio, cioè della componente lessicale-sintattica del Calord1.
Questo linguaggio ancillare per la teoria di Zermelo-Fraenkel, che abbrevieremo con la sigla LngZF, si serve di simboli elementari (i termini, i simboli che rappresentano predicati, i simboli dei quantificatori ed i connettivi logici) ed è costituito da costrutti sintattici che chiamiamo **formule ben formate**; questo termine nel seguito del capitolo lo sostituiremo con il semplice "formule".

B65:b.02 I termini sono simboli di variabili che rappresentano gli oggetti che tratta la teoria, sostanzialmente gli insiemi. Per i termini ci serviremo di lettere eventualmente affette da esponenti o deponenti come v_1, v_2, ... costituenti un alfabeto illimitato.
Risulta conveniente servirsi di lettere diverse dalle variabili con il ruolo di **metavariabili**, ossia di simboli che rappresentano generiche variabili. Qui useremo le lettere a, b, c, ..., x, y, z, ..., t, u e v, eventualmente arricchite con esponenti e deponenti. Inoltre risulta assai opportuno servirsi di simboli abbreviativi da introdurre con definizioni specifiche (in particolare di simboli di costanti, come $\emptyset$) e di termini di astrazione aventi una forma del genere $\{x ∯ \boldsymbol{P}(xP)\}$.

B65:b.03 LngZF si serve di due soli simboli predicativi, ovvero di due simboli concernenti relazioni fra formule, $=$ e $\in$.
Il segno $=$ denota il predicato di identità e va considerato un predicato logico, cioè un predicato applicabile a formule di LngZF indipendentemente dalle loro interpretazioni ed applicazioni.
Il segno $\in$ esprime la relazione di appartenenza e va considerato un predicato non logico, in quanto riguarda proprietà legate alla interpretazione delle formule, per quanto questa interpretazione insiemistica sia generalmente comprensibile.

Va segnalato che più avanti si introdurranno vari altri segni di predicati mediante definizioni che si possono interamente ricondurre ai due precedenti e che possono essere considerati delle mere abbreviazioni.

B65:b.04 Si dice **formula atomica** una stringa di simboli della forma $x = y$ o $x \in y$, ove x ed y denotano dei termini; per quanto finora detto siamo in grado di considerare termini solo semplici varibili.
Le formule atomiche esprimono le proposizioni basilari della teoria, proposizioni che quando si passerà al piano semantico della teoria ed esse verranno opportunamente interpretate, saranno qualificate aut come vere aut come false.

B65:b.05 Si introducono due **connettivi logici**, $\neg$ e $\Longrightarrow$; il primo denota la negazione di un enunciato, il secondo la relazione di implicazione tra due enunciati.
In seguito verranno introdotti come abbreviazioni che si possono ricondurre ai soli connettivi $\neg$ e $\Longrightarrow$ anche gli altri connettivi logici tradizionali: $\wedge$, $\vee$, $\Longleftrightarrow$, ...
Osserviamo che in genere nei testi di logica si usano $\rightarrow$ o $\supset$ invece di $\Longrightarrow$: viene preferito quest'ultimo per evitare di confondere l'implicazione con il segno $\rightarrow$ usato per il passaggio al limite e con il segno $\supset$ usato per la relazione di sovrainsieme.

Si introduce poi il segno $\exists$ per denotare il cosiddetto **quantificatore esistenziale**, leggibile come "esiste". Verranno in seguito usati anche il quantificatore universale $\forall$, esprimente "per ogni", e la variante $\exists_1$, da leggere "esiste un solo"; questi vengono introdotti come abbreviazioni riconducibili al solo $\exists$.

B65:b.06 Si introducono le **formule ben formate** della teoria, stringhe che come detto in seguito chiameremo anche semplicemente **formule**. Esse sono introdotte mediante le cosiddette definizioni induttive, ossia mediante definizioni che si servono di schemi costruttivi riconducibili ad una grammatica a struttura di frasi (v. C14:) e di metavariabili come ϕ, ψ e χ. Chiediamo dunque:

(1) Le formule atomiche sono formule.

(2) Se ϕ e ψ sono formule, allora $\neg\phi$ e $\lfloor \phi \Longrightarrow \psi \rfloor$ sono formule.

(3) Se ϕ è una formula ed x una variabile, allora $\exists x\phi$ è una formula.

Il processo di costruzione di una formula non atomica Φ si può descrivere con una o più derivazioni ciascuna ottenibile con una sequenza di applicazioni delle precedenti regole (produzioni).
Il complesso dei possibili processi di costruzione della formula Φ si può descrivere con un digrafo graduato monoradice che scriviamo $DgrfDer(\Phi)$ il quale sulla radice presenta la formula in esame e sulle foglie le formule atomiche che sono sue sottostringhe.
Più in generale in ogni formula non atomica Φ si individuano delle **sottoformule**, le sue sottostringhe che sono formule; ciascuna sottoformula corrisponde ad un nodo ν di $DgrfDer(\Phi)$ ed al sottodigrafo dei discendenti di ν.
Si osserva che si sono usate le coppie di parentesi coniugate $\lfloor$ e $\rfloor$ come delimitatori di formule aventi lo scopo di distinguere entro una formula tendenzialmente estesa ed elaborata alcune stringhe che costituiscono sottoformule, e che in mancanza delle dette parentesi possono risultare non univocamente identificabili.
Una coppia di parentesi coniugate si potrebbe usare anche per delimitare le sottoformule della forma $\neg\phi$; il contesto consente di economizzare queste parentesi sulla base della precedenza (che andrebbe esplicitata) dell'operatore unario $\neg$ rispetto all'operatore binario $\Longrightarrow$ ed al simbolo $\exists$. Inoltre può essere trascurata la coppia di parentesi che delimita una intera formula della forma $\exists x\, \phi$.
Considerazioni sulle parentesi delimitatrici sono valide per ogni linguaggio generato da una grammatica acontestuale, come discusso esaurientemente in C14: .

B65:b.07 In una formula della forma $\exists x\, \phi$ la stringa suffissa ϕ è chiamata **scope**, **campo d'azione**, del prefisso (quantificatore) $\exists x$; quando la formula viene combinata per ottenere una formula più estesa il suo campo d'azione non cambia.

Le variabili che compaiono in una formula si assegnano a due tipi contrapposti: una tale x si dice variabile **vincolata**, *bound*, sse compare nel campo d'azione di un quantificatore $\exists x$, mentre si dice **libera** sse altrimenti. Le variabili libere di una formula sono dette anche **parametri** della formula.

Intuitivamente: una variabile libera riguarda un oggetto che la formula contribuisce a qualificare. Un candidato x potrebbe soddisfare o meno la proprietà espressa dalla formula; in altre parole si lascia aperta la possibilità che un oggetto rappresentato dalla x soddisfi o meno la formula.

Una variabile vincolata, al contrario, si potrebbe definire "segnaposto"; la formula $\exists x\, \phi(x)$ si può leggere: esiste un oggetto che denotiamo con x tale che per esso vale la formula $\phi(x)$, dove l'aver fatto seguire (x) alla metavariabile ϕ serve solo a segnalare che nella ϕ compare la variabile x. Evidentemente se si sostituisce la x con una qualsiasi y diversa dalle variabili che compaiono nella ϕ si ottiene la formula $\exists y\, \phi(y)$ del tutto equivalente alla precedente.
Nella pratica talora conviene distinguere le lettere che individuano variabili vincolate (ad esempio x, y, z) dalle lettere che denotano variabili libere (ad esempio a, b, c).

B65:b.08 Vediamo i segni dei connettivi e dei quantificatori che si introducono mediante abbreviazioni. Per definirli usiamo espressioni che si servono delle metavariabili ϕ e ψ per rappresentare formule generiche, in queste espressioni compare il segno ::= con il ruolo del separatore fra formula contenente il segno introdotto come abbreviazione tendenzialmente concisa e formula con contenuti più elementari che viene sostituita dall'abbreviata.

(1) $\lfloor \phi \vee \psi \rfloor$ ::= $\lfloor \neg\phi \implies \psi \rfloor$ (connettivo or)

(2) $\lfloor \phi \wedge \psi \rfloor$ ::= $\neg \lfloor \phi \implies \neg\psi \rfloor$ (connettivo and)

(3) $\lfloor \phi \iff \psi \rfloor$ ::= $\lfloor \phi \implies \psi \rfloor \wedge \lfloor \psi \implies \phi \rfloor$ (doppia implicazione)

(4) $\forall x\phi$ ::= $\neg\exists\neg\phi$ (quantificatore universale)

(5) $\exists_1 x\phi(x)$ ::= $\exists y\forall x \lfloor \phi(x) \iff x = y \rfloor$ (esistenza e unicità)

B65:b.09 Se la formula ϕ presenta come variabili libere x_1, x_2, ... ,x_m, si dice **chiusura universale** della ϕ la formula

(1) $$\forall x_1\, x_2 \ldots x_n\, \phi \ .$$

B65:b.10 Vediamo le formule del linguaggio LngZF alle quali si assegna il ruolo di **assiomi logici**. Come al solito ϕ, ψ e χ sono metavariabili che rappresentano formule.

(1) $\lfloor \phi \implies \lfloor \psi \implies \phi \rfloor \rfloor$.

(2) $\lfloor \phi \implies \lfloor \psi \implies \chi \rfloor \rfloor \implies \lfloor \lfloor \phi \implies \psi \rfloor \implies \lfloor \phi \implies \chi \rfloor \rfloor$.

(3) $\lfloor \neg\phi \implies \neg\psi \rfloor \implies \lfloor \psi \implies \phi \rfloor$.

(4) $\forall x\, \phi \implies \phi$, se x non è variabile libera in ϕ .

(5) $\forall x\, \phi \implies \phi(y)$, per ogni variabile y per x in $\phi(x)$, cioè tale che x non compare libera in $\phi(x)$ nel campo d'azione di un quantificatore $\exists$ o $\forall$.

(6) $\forall x \lfloor \phi \implies \psi \rfloor \implies \lfloor \phi \implies \forall x\, \psi \rfloor$, se x non è variabilr libera in ϕ .

(7) $x = x$.

(8) $x = y \implies \lfloor \phi(x) \iff \phi(y) \rfloor$, per ogni formula ϕ, tale che $\phi(y)$ contiene almeno una occorrrenza di y, mentre $\phi(x)$ contiene x libera e non all'interno del campo d'azione di $\exists y$ o di $\forall x$.

B65:b.11 Le deduzioni del calcolo del primo ordine per la teoria degli insiemi si servono di due **regole di inferenza**:

(1) **Modus ponens**: dalla formula ϕ e dalla $\phi \Longrightarrow \psi$ si inferisce ψ .

(2) **Regola di generalizzazione**: dalla formula ϕ si inferisce $\forall x\, \phi$.

B65:b.12 Se $\boldsymbol{H}$ è un insieme di formule, eventualmente vuoto, si dice **deduzione** da HBi che conduce a ϕ_m una sequenza di formule $\langle \phi_1, \phi_2, ..., \phi_m\rangle$ tali che per ogni $i = 1, 2, ..., m$ accada

(a) ϕ_i è un assioma ;

(b) $\phi_i \in \boldsymbol{H}$;

(c) ϕ_i si può inferire dalle formule ϕ_h con $h < i$ mediante il modus ponens o la regola di generalizzazione.

Si scrive $\boldsymbol{H} \vdash \phi$ e si dice che $\boldsymbol{H}$ **comporta** ϕ sse esiste una deduzione da HBi che conduce a ϕ.
Si dice **dimostrazione** della formula ϕ una deduzione della forma $\emptyset \vdash \phi$.

B65:b.13 Al calcolo CalcOrd1 si vuole dare un significato formalmente definito; da questo si ricava la **semantica** del linguaggio LngZF.

La semantica è fornita da una **interpretazione** che consiste in due parti: una struttura ed un'assegnazione.

Per la struttura non imponiamo richieste precise, ma segnaliamo che un esempio interessante è dato dalla **struttura dei tipi cumulativi** introdotta da Mirimanoff.
Essa inizia con gli individui o insiemi di livello 0, entità prive di membri e tendenzialmente semplici. Presenta poi insiemi di livello 1, insiemi i cui membri sono individui. Seguono gli insiemi di livello 2, collezioni i cui membri sono insiemi dei livelli 0 e 1. In generale si hanno insiemi di livello $n(= 2, 3, 4, ...)$, collezioni i cui membri sono insiemi dei livelli 0, 1, ..., $n - 1$.

L'**interpretazione** di LngZF è individuata da un **dominio** D, una collezione non vuota di oggetti che costituisce il campo di variabilità delle variabili, da una relazione binaria entro D $\boldsymbol{A}$ e da un'**assegnazione** v, una funzione che ad ogni variabile associa un membro di D. Una coppia $\langle \sigma, \tau\rangle \in \boldsymbol{A}$ viene interpretata come la relazione di appartenenza $\sigma \in \tau$.

B65:b.14 Ci proponiamo ora di dare un significato a LngZF definendo per le sue formule l'attributo chiamato **attributo di soddisfazione** relativa ad una interpretazione $\langle D, \boldsymbol{A}, v\rangle$ del linguaggio stesso. Esprimeremo questa qualifica con la scrittura

(1) $$\langle D, E\rangle \models \phi(v) \ ,$$

da leggersi "la struttura $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle$ soddisfa la formula ϕ per l'assegnazione v" , oppure "la formula ϕ è vera nella struttura $\langle D, E\rangle$ per l'assegnazione v" . Useremo anche la negazione della $\models$ che denotiamo con $\not\models$.
Procederemo induttivamente sul digrafo di buona formazione delle formule.

Se ϕ è la formula atomica $x = y$, allora $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor x = y \rfloor(v)$ sse $v(x) = v(y)$, ossia sse x e y sono assegnate allo stesso oggetto.
Caso $\phi = \lfloor x \in y \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor x \in y \rfloor$ sse $\langle v(x), v(y)\rangle \in \boldsymbol{A}$.
Caso $\phi = \lfloor \neg\psi \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \phi$ sse $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \not\models \psi(v)$.
Caso $\phi = \lfloor \psi \Longrightarrow \chi \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \phi$ sse $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \psi(v)$ implica $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \chi(v)$.
Caso $\phi = \lfloor \exists x\, \psi(x) \rfloor$: $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \phi(x)$ sse vi è una assegnazione x-variante di v v' per la quale $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \psi(v')$; qui diciamo che v' è un'assegnazione x-variante della v sse $v(y) = v(y)$ per ogni variabile $y \neq x$ (con la possibilità che sia $v(x) \neq v'(x)$).

B65:b.15 Vogliamo ora considerare la relazione di soddisfazione per le formule ottenute componendo formule più semplici con i costrutti definiti in :b.08 come abbreviazioni; riteniamo sia utile esplicitare come ciascuna di queste cinque relazioni si riconduce a relazioni di soddisfazione per le formule più semplici.

(1) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi \wedge \chi \rfloor(v)$ sse valgono sia la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ che la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$.

(2) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi \vee \chi \rfloor$ sse valgono o la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ o la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$ o entrambe.

(3) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi \iff \chi \rfloor$ sse la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ implica la $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$ e questa seconda implica la prima; ossia sse abbiamo $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v) \rfloor$ e $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \chi(v) \rfloor$ oppure $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle | \neg \lfloor \psi(v) \rfloor$ e $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle | \neg \lfloor \chi(v) \rfloor$.

(4) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \forall x\, \psi(x) \rfloor$ sse per ogni assegnazione x variante v' della v si ha $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v') \rfloor$.

(5) $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \exists_1 x\, \psi(x) \rfloor$ sse si ha una ed una sola assegnazione x-variante v' della v per la quale $\langle D, \boldsymbol{A}\rangle \models \lfloor \psi(v') \rfloor$.

B65:b.15 La versione base di LngZF consente che i termini possano essere soltanto delle variabili. Risulta però estremamente oneroso sviluppare la teoria degli insiemi e le sue estensioni senza consentire che si abbiano termini opportunamente definiti. In effetti conviene essere permissivi e consentire una buone varietà di termini definiti, a condizione che con i termini aggiunti non si possa raggiungere ad alcuna conclusione che non sia raggiungibile servendosi della versione base di LngZF.

A questo proposito diamo la seguente definizione formale.
Data una prima teoria T espressa in un linguaggio $\boldsymbol{L}$ ed una seconda $T\prime$ formulata nel linguaggio $\boldsymbol{L}\prime$ che amplia $\boldsymbol{L}$, si dice che $T\prime$ è una **estensione conservativa** della T sse $T \subseteq T\prime$ e per ogni $\phi \in \boldsymbol{L}$ accade che se $T\prime \vdash \phi$ allora si aveva $T \vdash \phi$.

Questa definizione ci interessa in particolare nei casi per i quali $\boldsymbol{L}$ è la versione di LngZF senza termini aggiuntivi, T è la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel, $T\prime$ è ottenuta aggiungendo a $\boldsymbol{T}$ come assiomi le definizioni di tutti i termini aggiuntivi.
Occorre assicurarsi che $T\prime$ sia un'estensione conservativa della T in modo che se quest'ultima si trova essere coerente risulta coerente anche $T\prime$, mentre se $T\prime$ si trova incoerente risulta tale anche T.

B65:c. teoria assiomatica degli insiemi ZFC

B65:c.01 ZF_1, **assioma di estensione**:

$$\forall a\, \forall b \left\lfloor \forall X \lfloor x \in a \iff x \in b \rfloor \implies a = b \right\rfloor .$$

Questo assioma in parole povere dice che due insiemi a e b che contengono gli stessi membri sono lo stesso insieme, ossia che due insiemi sono uguali sse contengono gli stessi elementi.
Questo assioma ha il compito di formalizzare la nozione intuitiva di uguaglianza di due insiemi.

Da questo assioma segue anche che nella teoria si ha un solo urelement, l'insieme vuoto $\emptyset$; infatti se vi fosse un altro urelement non conterrebbe alcun membro e per l'assioma dovrebbe coincidere con $\emptyset$.

Esso inoltre dice che non serve considerare insiemi con i membri ripetuti: un insieme con ripetizioni deve coincidere con il corrispondente insieme senza ripetizioni. Si può quindi dire che un insieme non presenta membri ripetuti.

B65:c.02 ZF_2, **assioma dell'insieme vuoto**:

$$\exists x\ \forall y \lfloor y \in x \iff y \neq y \rfloor .$$

Si può leggere: "esiste un insieme non contenente alcun elemento", in quanto nessun y può essere diverso da se stesso. L'insieme vuoto viene denotato con il segno abbreviativo $\emptyset$.
Si osserva che questo assioma giustifica il termine di astrazione $\{y \mid y \neq y\}$.

B65:c.03 ZF_3, **assioma del duetto**:

$$\exists x\, \forall y \lfloor y \in x \iff y = a \vee y = b \rfloor \ .$$

Si può leggere: "dati due oggetti a e b, esiste un insieme i cui elementi sono esattamente a e b".
Questo assioma giustifica la considerazione del termine $\{y \mid y = a \vee y = b\}$; questo insieme si usa denotarlo con $\{a, b\}$.

Mediante particolari duetti si possono introdurre le coppie ordinate di oggetti definendole come

$$\langle a, b\rangle := \big\{a, \{a, b\}\big\} \neq \langle b, a\rangle := \big\{b, \{a, b\}\big\} \ .$$

B65:c.04 ZF_4, **assioma dell'unione**:

$$\exists x\, \forall y \Big\lfloor y \in x \iff \exists z \lfloor y \in z \wedge z \in a \rfloor \Big\rfloor \ .$$

"Se a è un insieme di insiemi, esiste un insieme x i cui elementi sono tutti e soli gli elementi degli elementi di a."
L'assioma giustifica il termine $\{y \mid \exists z \lfloor y \in z \wedge z \in a \rfloor\}$, il quale si abbrevia con la scrittura $\bigcup_{z \in a} z$.

B65:c.05 ZF_5, **assioma dell'insieme delle parti** o **assioma della potenza**:

$$\exists x\, \forall y \lfloor y \in x \iff y \subseteq a \rfloor \ ,$$

ove $y \subseteq a$ è l'abbreviazione del termine $\forall z \lfloor z \in y \Longrightarrow z \in a \rfloor$.
Può leggersi: "per ogni insieme a esiste un insieme i cui membri sono esattamente i sottoinsiemi di a."

Esso consente di servirsi, per ogni insieme a, dell'insieme delle sue parti $\mathfrak{P}(a)$.

B65:c.06 ZF_6, **assioma di separazione** o **assioma dei sottoinsiemi**:

$$\forall a\, \exists x\, \forall y \lfloor y \in x \iff y \in a \wedge \phi(y) \rfloor \ .$$

Per ogni insieme a ed ogni predicato ϕ definito per ogni elemento di a, esiste un insieme i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di a che soddisfano ϕ; questo insieme viene detto sottoinsieme di a caratterizzato dalla formula ϕ.
L'assioma apre la possibilità di trattare sottoinsiemi di un insieme, $Y \subseteq X$, specificati mediante un predicato, cioè una proprietà che distingue i suoi elementi. Si possono quindi trattare tutti i sottoinsiemi $S \subseteq X$ grazie a predicati della forma $p(y) = (y \in S)$ e di passare da un tale S al suo complementare in X (spesso denotato con $\overline{S}$), grazie al predicato $y \notin S$. Successivamente si può introdurre l'intersezione di insiemi.

A partire dai precedenti assiomi si possono sviluppare tutte le proprietà generali delle operazioni insiemistiche, delle nozioni relazioni e delle funzioni; si possono inoltre trattare in modo costruttivo tutti gli insiemi finiti. Per rendere lecita la trattazione di insiemi infiniti è necessario l'assioma dell'infinito ZF_9.

B65:c.07 ZF_7, **assioma di sostituzione**:

$$\forall z\, \forall u\, \forall v \lfloor \psi(z, u) \wedge \psi(z, v) \Longrightarrow u = v \rfloor \quad \Longrightarrow \quad \exists x\, \forall y \Big\lfloor y \in x \iff \exists z \lfloor z \in a \wedge \psi(z, y) \rfloor \Big\rfloor \ .$$

"Data una funzione ψ, esiste un insieme i cui elementi costituiscono l'immagine di tale ψ." Esso consente di trattare funzioni definite attraverso proprietà caratteristiche, anche senza conoscerne l'insieme immagine.

B65:c.08 ZF_8, **assioma di regolarità** o **assioma di fondazione**:

$$\exists x \lfloor x \in a \rfloor \quad \Longrightarrow \quad \exists x \lfloor x \in a \land x \cap a = \emptyset \rfloor \ .$$

"Ogni insieme non vuoto a contiene un membro che è disgiunto da a".

B65:c.09 ZF_9, **assioma dell'infinito**:

$$\exists w \left\lfloor \emptyset \in w \land \forall x \lfloor x \in w \Longrightarrow x \cup \{x\} \in w \rfloor \right\rfloor \ .$$

"Esiste un insieme che contiene l'insieme vuoto e che, per ogni suo elemento x, contiene $\{x\}$, elemento che svolge il ruolo di successore di x. Questo assioma permette di trattare costruttivamente $\mathbb{N}$ e altri insiemi numerabili. Si osservi che con questo formalismo si individua come primo insieme numerabile

$$\{\emptyset \ , \ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \ , \ \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \ , ...\} \ .$$

Successivamente, attraverso il passaggio all'insieme delle parti, si possono affrontare insiemi più che numerabili.

B65:c.10 $ZF_C \ = \ AxCh1$ **assioma della scelta**:

$$\forall x \forall y \lfloor x \in a \land y \in a \land x \neq y \ \Longrightarrow \ x \cap y = \emptyset \ , \ \forall x \lfloor x \in a \Longrightarrow x \neq \emptyset \rfloor$$

$$\Longrightarrow \quad \exists c \forall x \left\lfloor x \in a \Longrightarrow \exists u \, c \cap x = \{u\} \rfloor \right\rfloor \ .$$

"Per ogni collezione di insiemi disgiunti non vuoti esiste un insieme di scelta". Oppure "Data una partizione P di un insieme S, esiste una funzione $C \in \{\mathrm{dom}(P) \longmapsto S\}$, chiamata funzione di scelta, t.c. $\forall x \in \mathrm{dom}(P) : \ C(x) \in S$."

Esso riguarda l'esistenza di una funzione di scelta anche se non si fornisce un criterio in grado di indirizzare la scelta stessa.

La sensatezza e l'opportunità di adottare questo assioma sono state ampiamente controverse.

B65:c.11 Va rilevato che il sistema di assiomi presentato è ridondante. Lo schema di sostituzione ZF_7 implica lo schema dei sottoinsiemi ZF_6, mentre ZF_7 e l'assioma dell'insieme delle parti ZF_5 implicano l'assioma del duetto ZF_3. Inoltre l'assioma dell'insieme vuoto ZF_2 si può far discendere dall'assioma dei sottoinsiemi ZF_6.

Non aver scelto un sistema minimale è dovuto a due ragioni espositive. La presentazione di tutti gli assiomi dati può risultare più leggibile e motivata. Inoltre con il sistema dato si possono più chiaramente delineare i vari sistemi più deboli che vngono studiati, sistemi che si possono più agevolmente comprendere se ottenuti indebolendo o eliminando qualcuno degli assiomi presentati, ma mantenendo gruppi di conseguenze degli assiomi rimanenti.

B65:d. sviluppi della matematica basati sopra ZFC

B65:d.01 Come già segnalato, la teoria ZFC è la base formale che è stata più estesamente utilizzata per introdurre le teorie delle strutture matematiche nel modo attualmente giudicato (a maggioranza) rigoroso, ossia in un modo che rispetti la richiesta di condivisibilità degli sviluppi formali garantiti dalla logica matematica.

Ci proponiamo qui di presentare le linee che vengono usualmente seguite per basare sulla teoria ZFC alcune delle teorie matematiche più importanti, anche dal punto di vista storico.

B65:d.02 Volendo essere del tutto rigorosi nelle pagine che seguono si dovrebbe utilizzare solo il linguaggio con il quale si à formulata la teoria ZFC.
Così facendo, però, si avrebbero esposizioni estremamente prolisse e difficilmente comprensibili dagli studiosi, soprattutto da quelli interessati agli sviluppi di teorie specifiche ed alle applicazioni.

Per avere esposizioni praticamente leggibili della nozioni matematiche risulta necessario adottare linguaggi parzialmente formalizzati nei quali vengono introdotte grandi varietà di abbreviazioni e conseguenti scelte di notazioni.
Evidentemente questo comporta notevoli problemi di coordinamento delle convenzioni che vengono adottate, convenzioni che sono fortemente condizionate dai molteplici legami tra i concetti trattati.
I problemi di coordinamento, stante la grande e crescente varietà delle nozioni sviluppate e la variabilità nel tempo delle scelte dovute al crescere dei risultati e delle problematiche, vengono affrontati con una certa determinazione solo restringendosi ad ambiti settoriali e con limitate pretese di definitezza.

B65:d.03 In positivo vanno segnalate le possibilità fornite dagli strumenti informatici per la gestione delle esposizioni e dei repertori della matematica. In particolare si possono ricordare le iniziative collegate al termine Mathematical Knowledge Management e le innovazioni al Mathematics Classification Scheme attuate per la versione del 2010 ed a quelle in cantiere per la futura versione 2020.

B65:d.04 Per sviluppare la teoria ZFC sono necessari studi preliminari di due temi: lo studio dei numeri cardinali degli insiemi e l'esame degli insiemi muniti di relazioni d'ordine.
Le considerazioni sopra la numerosità degli insiemi sono presentate in B19:f e nel successivo B19:g dedicato ai numeri transfiniti. Le relazioni d'ordine sono esaminate in B55: .

B65:e. assiomatizzazione degli interi naturali

B65:e.01 Presentiamo in questa sezione la definizione assiomatica dei numeri interi naturali che si basa sulla teoria degli insiemi ZF.
Iniziamo con la definizione di un attributo per gli insiemi.

B65:e.02 Un insieme S si dice essere un **insieme induttivo** e si scrive

$$Indnset\left[S\right] \quad \text{sse} \quad \emptyset \in S \ \wedge\ \forall x \in S \left\lfloor x \cup \{x\} \in S \right\rfloor \ .$$

L'insieme $x \cup \{x\}$ si dice successivo di x e si denota anche con $x+1$; si usa inoltre la funzione successore di x

$$succ := \ulcorner x \in S \mapsto x \cup \{x\} \urcorner \ .$$

Si dice che x è un **intero naturale**, ovvero un intero non-negativo, e si scrive $Int\left[x\right]$, sse

$$\forall S \left\lfloor Indnset\left[S\right] \implies x \in S \right\rfloor .$$

In altre povere per intero naturale si intende un oggetto matematico che fa parte di ogni insieme induttivo.

B65:e.03 In vari punti dell'esposizione che segue utilizzeremo spesso le cosiddette variabili per i numeri naturali, lettere come la i utilizzata nelle seguenti abbreviazioni concernenti una qualsiasi formula ϕ:

$$\forall i\, \phi(i) \quad \text{abbrevia} \quad \forall x \left\lfloor Int(x) \Longrightarrow \phi(x) \right\rfloor \quad \text{e}$$

$$\exists i\, \phi(i) \quad \text{abbrevia} \quad \exists x \left\lfloor Int(x) \Longrightarrow \phi(x) \right\rfloor \quad .$$

Nel ruolo di variabili per i numeri naturali utilizzeremo spesso anche le lettere j, k, l, m ed n.

B65:e.04 Siamo ora in grado di enunciare il teorema che esprime lo **schema di induzione matematica**. Cominciamo con il seguente lemma.

(1) Lemma: $\{x ⁋ Int(x)\}$ è un insieme.

Dim.: L'assioma dell'infinito :c.09 afferma che esiste un insieme induttivo, ossia che $\exists S\, Indnset\left[S\right]$. Facendo riferimento a questo S postulato (e non identificato), abbiamo $Int(x) \Longrightarrow x \in S$ e quindi $\{Int(x)\} = \{x ⁋ x \in S \wedge Int(x)\}$; grazie all'assioma dei sottoinsiemi :c.06 l'oggetto $\{x ⁋ x \in S \wedge Int(x)\}$ è un insieme ▮

Va notato che l'assioma dell'infinito viene invocato solo per il teorema che segue. D'ora in avanti verrà invocato solo il teorema sull'induzione matematica :e.05.

Ora possiamo introdurre la notazione che usiamo più spesso per l'insieme dei naturali: $\mathbb{N} := \{x ⁋ Int(x)\}$. In genere però nei testi di logica si usa prevalentemente la notazione $\omega := \mathbb{N}$.

B65:e.05 Teorema Per ogni formula di ZF ϕ:

$$\left\lfloor \phi(\emptyset) \;\wedge\; \forall n \left\lceil \phi(n) \Longrightarrow \phi(n+1) \right\rfloor \right. .$$

Per una relazione come la precedente $\phi(\emptyset$ viene detto **base per l'induzione**, la formula $\phi(n)$ viene chiamata **ipotesi induttiva** e l'implicazione $\phi(n) \Longrightarrow \phi(n+1)$ viene chiamata **passo induttivo**.

Dim.: Consideriamo l'insieme $S := \{n ⁋ \phi(n)\}$; per l'ipotesi induttiva $\left\lfloor \phi(\emptyset) \wedge \forall n \left\lceil \phi(n) \Longrightarrow \phi(n+1) \right\rfloor \right.$ S è un insieme induttivo. Dato che ogni insieme induttivo contiene ogni numero naturale deve valere $\phi(n+1)$, cioè la conclusione richiesta ▮

B65:e.06 Introduciamo anche le notazioni più usuali per i numeri interi.

0 sta per $\emptyset$;

1 sta per $\{\emptyset\}$;

2 sta per $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ovvero $\{0, 1\}$;

3 sta per $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, , ovvero $\{0, 1, 2\}$;

. . . .

Si osserva che $\{\emptyset\} = \emptyset \cup \{\emptyset\}$, ovvero $1 = 0\dot{+}1$, che $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\}$, ovvero $2 = 1\dot{+}1$ etc. .

Le precedenti esplicitazioni dei numeri naturali sono dovute a J. von Neumann. Anticipando le definizione della relazione "minore" tra numeri naturali (:e.07), possiamo dire che ogni intero naturale è l'insieme di tutti gli interi naturali minori di esso.

B65:e.07 Si definisce la relazione $x < y$, x minore di y, come abbreviazione della $Int(x) \wedge Int(y) \wedge x \in y$.

Si definisce inoltre la relazione $x \leq y$, x minore o uguale a y, come abbreviazione di $x < y \vee x = y$. Quindi la relazione di appartenenza serve anche per definire la relazione d'ordine per gli interi naturali definiti come insiemi di tutti i naturali loro inferiori.

B65:e.08 Occorre però di stabilire che $\leq$ è un ordine totale.
Per questo si introduce l'attributo essere insieme transitivo:

$$Transset(S) \quad \text{sse} \quad \forall x \forall y \left\lfloor \lfloor x \in y \wedge y \in S \rfloor \Longrightarrow x \in S \right\rfloor .$$

Introduciamo inoltre l'abbreviazione

$$x \in y \in S \quad \text{sse } x \in y \ \wedge \ y \in S .$$

Si dimostra allora che $\forall i \lfloor Int(i) \Longrightarrow Transset(i)$ e successivamente che $Transset(\omega)$.

Occorre poi dimostrare che l'ordinamento $\leq$ è discreto, ovvero che

$$\forall i, j \in \omega \lfloor i < j \Longrightarrow i\dot{+}1 \leq j \rfloor .$$

B65:e.09 **(1) Teorema** $\forall i, j \in \omega \lfloor i \in j \ \vee \ i = j \ \vee \ j \in i \rfloor$. Con questo risulta dimostrata la proprietà di tricotomia per gli interi naturali, cioè la tripartizione delle coppie di naturali rispetto alla relazione $\leq$, e quindi che questa è una relazione d'ordine totale.

B65:e.10 Ci proponiamo ora di accennare presentare quella che chiamiamo **aritmetica di Peano**, cioè al sistema di assiomi proposti da Giuseppe Peano nel 1889 come semplificazione al sistema di assiomi proposto l'anno prima da Dedekind e t7uttora ampiamente usato.
Per l'aritmetica di Peano, in sigla PeAr, ci serviamo delle notazioni usuali, cioè dei simboli delle operazioni binarie $+$ e $\times$ per addizione e moltiplicazione, del postfisso $\dot{+}1$ per l'operazione unaria di passaggio al successore e delle variabili i, j, k per i generici interi naturali. Inoltre ci serviremo della versione più colloquiale delle formule del calcolo logico.

B65:e.11 La PeAr si basa sui seguenti 7 assiomi.

PeAx1: $\forall i \in \omega \ : \ 0 \neq i\dot{+}1$;
PeAx2: $\forall i, j \in \omega \ : \ i\dot{+}1 = j\dot{+}1 \Longrightarrow i = j$;
PeAx3: $\forall i \in \omega \ : \ i + 0 = i$;
PeAx4: $\forall i, j \in \omega \ : \ i + (j\dot{+}1) = (i + j)\dot{+}1$;
PeAx5: $\forall i \in \omega \ : \ i \times 0 = 0$;
PeAx6: $\forall i, j \in \omega \ : \ i \times (j\dot{+}1) = (i \times j) + i$;
PeAx7: $\forall i \in \omega$, $\forall \phi$ formula della PeAr $cLP \left\lfloor \phi(0) \wedge \forall i \lfloor \phi(i) \Longrightarrow \phi(i\dot{+}1) \rfloor \right\rfloor \Longrightarrow \forall i \, \phi(i)$.

B65:e.12 Si trova che PeAx1 e PeAx2 discendono dagli assiomi all'inizio della sezione attuale. Gli assiomi PeAx3 e PeAx4 si possono considerare definizioni dell'addizione, mentre PeAx5 e PeAx6 si possono considerare definizioni della moltiplicazione. L'assioma PeAx7 ha invece il ruolo del principio di induzione matematica.

Questo consente di ricavare dalla teoria ZF quello che ora è noto come teorema di ricorsione di Dedekind.

B65:e.13 **Teorema di ricorsione di Dedekind** Per ogni insieme A, per ogni membro $a_0 \in A$ e per ogni $f \in \{A \longrightarrow A\}$ esiste una unica funzione $h \in \{\omega \longrightarrow A\}$ tale che

(a) $h(0) = a_0$;

(b) $\forall i \in \omega : h(i\dot{+}1) = f(h(i)$. La dimostrazione può essere data in termini quasi discorsivi. Se la si vuole collegare strettamente alla teoria ZF conviene servirsi della nozione di buona funzione.

B65:e.14 Il teorema di Dedekind consente di dedurre da ZF gli assiomi PeAx3-6 come proprietà dell'addizione e della moltiplicazione.

Inoltre esso consente di dimostrare che l'insieme ω strutturato dall'addizione e dalla moltiplicazione è unico.

B65:f. assioma della scelta

B65:f.01 Come vedremo in parte nel seguito, gli sviluppi delle teorie che assumono l'assioma della scelta richiedono di affrontare svariate questioni. Dell'assioma della scelta risulta opportuno prendere in considerazione diverse formulazioni che si devono dimostrare equivalenti. In effetti ciascuna di queste varianti formali risulta la più conveniente in alcuni dei suoi molteplici utilizzi.

Cominciamo con il ripresentare l'enunciato esposto in :c.10.

$$\forall x \forall y \lfloor x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y \implies x \cap y = \emptyset \ , \ \forall x \lfloor x \in a \Longrightarrow x \neq \emptyset \rfloor$$

AxCh1 $$\implies \exists c \forall x \Big\lfloor x \in a \Longrightarrow \exists u \, c \cap x = \{u\} \rfloor \Big\rfloor \ .$$

Questa formulazione non richiede definizioni specifiche ed è la più semplice da accostare e da descrivere in termini discorsivi.

Una formulazione che fa riferimento alle cosiddette funzioni di scelta è la seguente

AxCh2 $$\forall X \, \exists f \Big\lfloor Func(f) \ \wedge \ \mathrm{dom}(f) = X \ \wedge \ \forall x \in X \ \lfloor x \neq \emptyset \Longrightarrow f(x) \in x \rfloor \Big\rfloor \ .$$

B65:f.02 Dimostriamo l'equivalenza delle due formulazioni date.

(1) Lemma: AxCh1 $\Longleftrightarrow$ AxCh2 .

Dim.:

▮

B65:f.03 Una formulazione chiamata anche assioma di moltiplicazione

Una quarta formulazione è detta assiona di uniformazione.

B65:f.04

Dimostriamo l'equivalenza delle quattro formulazioni date.

(1) Lemma: AxCh3 $\Longleftrightarrow$ AxCh4 $\Longleftrightarrow$ AxCh1 .

Dim.: Procediamo con i seguenti passi: AxCh2 $\Longleftrightarrow$ AxCh3 $\Longleftrightarrow$ AxCh4 $\Longleftrightarrow$ AxCh2 .

▮

B65:f.05 Ricordiamo che un poset $\langle S, \preceq \rangle$ si dice **insieme ben ordinato** sse ogni sottoinsieme di S contiene un elemento minimo.

Si osserva che ogni insieme ben ordinato deve essere totalmente ordinato: infatti per ogni duetto di suoi elementi (diversi) $\{a, b\}$ deve essere aut $a \prec b$, aut $b \prec a$.

Tra i posets ben ordinati si trovano gli insiemi finiti muniti di ordinamento totale (ovviamente) ed i posets $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{Z}_-, \geq \rangle$.
Non sono invece ben ordinati $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}_-, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ e $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

Osserviamo che i due posets ben ordinati infiniti menzionati sono isomorfi. Isomorfi ad essi sono tutti gli insiemi generati da una macchina MSPG (B16:) ordinati dall'ordine di emissione sul nastro di uscita.
Conviene segnalare anche altri posets ben ordinati che non sono isomorfi ai precedenti. Uno di questi è il poset che si può presentare con la scrittura

$$\Big\langle 1 \prec 3 \prec 5 \prec ... \prec 2 \prec 4 \prec 6 \prec ... \Big\rangle \ .$$

Più in generale si hanno i posets caratterizzati da un qualsiasi intero $m = 2, 3, 4, ...$ e presentabili con una scrittura della forma

$$\Big\langle 1 \prec 1 + m \prec 1 + 2m \prec ... \prec 2 \prec 2 + m \prec 2 + 2m \prec ... \prec m \prec 2m \prec 3m \prec ... \Big\rangle \ .$$

B65:f.06 Teorema Consideriamo un insieme ben ordinato $\langle S, \preceq \rangle$. Per ogni endofunzione entro S che conserva l'ordinamento (isotona) $I \in \{S \longmapsto S\}$, si ha $\forall x \in S \ :\ x \preceq I(x)$.

Dim.:

▮

B65:f.07 Coroll.: Due distinti segmenti iniziali di un buon ordinamento non sono isomorfi.
Dim.:

▮

B65:f.08 Teorema Assunto AxCh, ogni insieme è equinumeroso di qualche ordinale.
Dim.:

▮

B65:f.09 Per un poset $\langle S, \preceq \rangle$ introduciamo l'attributo *woposet* ponendo

$$woposet\big[\, S, \preceq \,\big] \qquad \text{sse} \qquad \langle S, \preceq \rangle \ \text{è ben ordinato} \ .$$

(1) Teorema $\forall X \; \exists \preceq \; ¶ \; \Big\lfloor woposet\big[\, S, \preceq \,\big] \Big\rfloor \quad \Longrightarrow \quad AcCh2$
Dim.:

▮

B65:f.10 Teorema Assunto AxCh, due qualsiasi insiemi sono confrontabili in termini di numerosità.
Dim.:

▮

B65:f.11 (1) Teorema (di Hausdorff) Assunto AxCh, ogni poset presenta una catena massimale. **Dim.**:

▮

(2) Teorema (lemma di Zorn) Assunto AxCh, se $\langle S, \preceq \rangle$ è un poset nel quale ogni catena possiede un estremo superiore, allora S possiede un elemento massimale per $\preceq$.
Dim.:

▮

B65:f.12 Teorema Il lemma di Zorn implica AxCh1.
Dim.:

▮

B65:f.13 Dopo aver presentati vari enunciati equivalenti all'assioma della scelta, trattiamo alcuni risultati la cui dimostrazione richiede AxCh ma che hanno portata inferiore; alcuni di questi enunciati sono utilizzati per definire teorie più deboli di altre che postulano ZFC, in particolare teorie con una portata intermedia tra quella di ZF e quella di ZFC.

B65:f.14 È necessario assumere AxCh per dimostrare che $\mathbb{N}$ è l'insieme infinito di minima numerosità.

(2) Prop.: Sia $\langle n \in \mathbb{N} :| A_n \rangle$ una famiglia numerabile di insiemi contabili e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $B_n := \{\mathbb{N} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright A_n\}$.
Allora $\forall n \in \mathbb{N} \because B_n \neq \emptyset$ si può applicare AxCh3 al prodotto cartesiano $\times\{n \in \mathbb{N} :| B_n\}$ per ottenere una funzione di scelta f tale che $\forall n \in \mathbb{N} \because f(n) \in B_n$, ossia tale che $f(n) \in \{\mathbb{N} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright A_n\}$.

Dim.: ▮

B65:f.15 **Prop.** Se A è un insieme diverso da $\emptyset$ ed $\mathcal{R} \subseteq A \times A$, allora

$$\forall a \in A\, \exists y \in A s.t. x\mathcal{R}y \quad \Longrightarrow \quad \exists f \in \mathbb{N} \longmapsto A \left\lfloor \forall n \in \mathbb{N} \left\lfloor f(n)\mathcal{R}f(n+1) \right\rfloor \right\rfloor \ .$$

B65:f.16 Il lemma di Zorn può essere invocato per dimostrare l'esistenza di filtri e di ideali massimali propri.

B65:f.17 **Teorema di Fodor** Assunto AxCh, se S è stazionario in un cardinale κ con $\kappa > \omega$ 4d $f \in \{S \longrightarrow \kappa\}$, allora f è costante su qualche insieme stazionario.

Dim.:

B65:g. altre teorie assiomatiche degli insiemi

B65:g.01 Come si è detto, della teoria degli insiemi sono state studiate varie assiomatizzazioni diverse da ZFC e da ZF.
La maggior parte di queste teorie richiede che gli insiemi facciano parte di una **gerarchia cumulativa**. Questa si limita a considerare gli **insiemi puri**, insiemi i cui membri sono tutti insiemi che a loro volta sono insiemi puri. Ciascuno di questi insiemi, chiamiamolo S, è caratterizzato da un ordinale chiamato rango di S definito come il minimo maggiorante dei successori dei membri di X: all'insieme vuoto si assegna rango 0, a $\{\emptyset\}$ rango 1, ecc. Per ogni ordinale α si considera l'insieme V_α costituito da tutti gli insiemi puri di rango inferiore ad α e il complesso dei V_α per $\alpha = 0, 1, 2, 3, ..., \omega, \omega + 1, ...2\omega, ..., 3\omega, ...$ costituisce il cosiddetto **universo di von Neumann**.
Limitarsi a questi insiemi riduce la generalità in modo inessenziale, mentre porta rilevanti vantaggi per la formulazione.
Limitarsi ad una gerarchia cumulativa evita i paradossi che portano a contradditorietà.

Si distinguono poi teorie degli insiemi che trattano solo insiemi puri, come ZFC, e teorie che considerano sia gli insiemi che le cosiddette **classi pure**, entità che non sono membri di un'altra entità. In particolare, mentre la nozione di insieme di tutti gli insiemi porta a contraddizioni e deve essere evitata, è lecito servirsi della classe di tutti gli insiemi. Le classi pure sono sicuramente utili: in particolare la totalità di strutture di un dato genere costituiscono classi pure, non insiemi: si trattano, ad esempio, la classe di tutti i gruppi, la classe di tutti gli spazi vettoriali e simili; partendo dalle classi pure gli insiemi sono detti anche **piccole classi**.

B65:g.02 Di ZFC si studiano alcuni riduzioni (chiamate anche frammenti), cioè sistemi che omettono e/o indeboliscono alcuni assiomi.

La **teoria degli insiemi di Zermelo** sostituisce lo schema di assioma di sostituzione (:c.08) con l'assioma di separazione (:c.05).

La **teoria generale degli insiemi** è un frammento della precedente e presenta il vantaggio di essere sufficiente per l'assiomatizzazione di Peano dell'aritmetica e per il controllo degli insiemi finiti.

La **teoria di Kripke-Pistek** omette gli assiomi dell'infinito, dell'insieme delle parti e della scelta e indebolisce gli schemi di rimpiazzamento e di sostituzione.

B65:g.03 Tra le assiomatizzazioni degli insiemi che trattano anche le classi proprie la più rilevante è l'assiomatizzazione di von Neumann, Bernays e Gödel, nota come **assiomatizzazione NBG** ([[en:von Neumann-Bernays-Gödel set theory]]).

Anche la NBG conduce alla gerarchia di von Neumann degli insiemi, mentre in essa non è lecito trattare la classe di tutte le classi. Va segnalato che questa teoria può essere formulata finitamente, cioè mediante assiomi espressi finitamente; viceversa la ZFC, come varie altre, richiede degli schemi di assioma (:c.06, :c.07), cioè richieste che dipendono da un oggetto variabile in un insieme infinito.

Si dimostra che NBG è sostanzialmente equivalente alla ZFC: ogni enunciato nel linguaggio della ZFC è dimostrabile nella NBG sse lo è nella ZFC: questa situazione si caratterizza dicendo che NBG è un'**estensione conservativa** della ZFC.

B65:g.04 Una estensione più forte della ZFC è invece la teoria degli insiemi di Morse-Kelly, nota anche con la sigla MK e presentata da Kelly nel 1955 come Skolem-Morse theory e da Morse nel 1965. Contrariamente a NBG, MK non può essere assiomatizzata finitamente. (V. [[Morse-Kelly set theory]]). Taluni considerano MK più agile di ZFC e di NBG.

Un'altra estensione più forte della ZFC è la teoria degli insiemi di di Tarski e Grothendieck ([[Tarski-Grothendieck set theory]]), nota anche con la sigla TG. Si tratta di una estensione non conservativa di ZFC introdotta come parte di un sistema chiamato Mizar per la verifica automatica delle dimostrazioni. Essa è caratterizzata dall'assioma di Tarski che afferma che ad ogni insieme è associato un cosiddetto [[universo di Grothendieck]].

B65:g.05 Un altro elemento distintivo per le teorie assiomatiche degli insiemi è la comparsa o l'assenza dei cosiddetti **urelementi**, oggetti che possono appartenere ad insiemi ma non possono contenere alcun elemento, cioè non possono essere un insieme diverso da $\emptyset$.
Nella teoria ZF si incontra un solo urelemento, proprio l'insieme vuoto.

Nel 1937 [[Willard Van Orman Quine]] ha proposto un sistema di assiomi chiamato [[New Foundations]] o [[Nuova Fondazione]], in particolare con lo scopo di semplificare la teoria dei tipi dei Principia Matematica di Whitehead e Russel. Questa teoria non prevedeva urelementi ed è nota anche con la sigla NF. Nel 1969 Jensen propose la sua estensione comprendente urelementi, ora individuata dalla sigla NFU.
NF ed NFU non si basano sopra una gerarchia cumulativa, mentre includono un "insieme di tutti gli oggetti" rispeto al quale ogni insieme possiede un complemento. Da notare che NF, contrariamente ad NFU, tratta insiemi per i quali non vale l'assioma della scelta.

B65:g.06 Mentre le teorie sopra accennate si basano sul calcolo del primo ordine, si studiano teorie costruttive degli insiemi che incorporano assiomi della logica intuizionistica, invece degli assiomi suddetti.

Tra queste si collocano la teoria degli insiemi sfumati ([[Fuzzy set theory]]) e la teoria degli insiemi rozzi [[Rough set theory]] di Pawlak.
Altre impostazioni pongono alla base dei fondamenti entità diverse degli insiemi: ricordiamo in particolare la teoria delle categorie e la più generale teoria dei topoi.

B65:g.07 Gli studiosi sui fondamenti della matematica, dopo il consolidamento sul piano della coerenza di teorie come ZFC ed NBG, si sono posti le questioni della completezza e della decidibilità delle teorie. Sul successo di questi studi ha particolarmente insistito Hilbert, fino agli anni 1930, probabilmente, il più influente tra i matematici.
L'obiettivo della dimostrazione della completezza venne invece dimostrato irraggiungibile nel 1931 in conseguenza dei teoremi di incompletezza di Gödel.

Questi hanno posto dei limiti alla portata della matematica ed hanno costituito per molti matematici motivo di una profonda crisi.

B65:g.08 Un ulteriore passo è stato effettuato da [[Alan Turing]] nel 1936. Egli propose come modello degli algoritmi i meccanismi formali ora chiamati macchine di Turing (C21:) ed individuò la cosiddetta **macchina universale di Turing**, macchina di Turing in grado di simulare l'evoluzione di qualsiasi macchina di Turing, anche ciascuna delle sue evoluzioni. Inoltre dimostrò l'impossibilità di trovare un algoritmo che, assegnate una qualsiasi macchina di Turing T e una qualsiasi stringa w, fosse in grado di decidere se sottoponendo w a T l'evoluzione di questa si sarebbe arrestata dopo una sequenza finita di passi.
Questo teorema limitativo si colloca sullo stesso piano dei teoremi di Gödel e di un risultato equivalente di [[Alonzo Church]] ottenuto sul sistema formale chiamato λ-calcolo. Esso risulta porò molto più facile da comprendere e consente di mostrare con relativa facilità l'equivalenza della portata del modello macchina di Turing con la portata dei molti altri modelli di sistemi di computazione (λ-calcolo, sistemi di Post, sistemi di Thue, ...). Questo conduce alla congettura di Church-Turing sulla sostanziale equivalenza di tutti i modelli di calcolo formale e quindi ad una visione unitaria di tutte le attività di calcolo.

`Le varie componenti di questo testo sono accessibili in   http://www.mi.imati.cnr.it/∼alberto`