1

Capitolo W75
prontuario: relatività

Contenuti delle sezioni

8 pagine

W75 a. relatività galileiana ed etere luminifero

W75 a.01 trasaformazioni di Galileo

Osservatori $\mathcal{O}$ con coordinate spaziotemporali $\langle t, x, y, z\rangle = \langle t, \mathsf{x}\rangle$ e $\mathcal{O}'$ con coordinate spaziotemporali $\langle t', x', y', z'\rangle = \langle t', \mathsf{x}'\rangle$.

Consideriamo il semplice saso in cui coincidono nell'istante $t = t' = 0$ e $\mathcal{O}'$ si muove rispetto $\mathcal{O}$ di moto rettilineo uniforme con velocità $V\mathbf{e}_x$, ossia nella direzione dell'asse O_x; dunque $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ costituiscono una coppia coinerziale.

Equazioni di collegamento:

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + V\ t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Composizione delle velocità $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} + V$ ossia $v'_x = v_x - V\,t$.

W75 a.02 Più in generale se $\mathcal{O}'$ si muove rispetto $\mathcal{O}$ con velocità costante $\mathbf{V}$

$$\begin{cases} t' = t \\ \mathsf{x}' = \mathsf{x} - \mathbf{V}\ t \end{cases}$$

Principio della dinamica $\mathbf{F} = \mathrm{m}\,\mathbf{a}$ con m massa invariante per i diversi osservatori.

Per il moto uniformemente accelerato $v(t) = at + v(0) = \dfrac{F}{m}\,t + V(0)$

Se si potesse applicare illimitatamente la forza costante F non vi sarebbero limitazioni alle velocità raggiungibili dai corpi pesanti.

Quantità di moto $\mathbf{q} = m\,\mathbf{v}$; $\mathbf{F} = \dfrac{\Delta\mathbf{q}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta m\,\mathbf{v}}{\Delta t}$

energia cinetica $\frac{E_c = (1}{2)\, m\, v^2}$

W75 a.03 ipotesi dell'etere ed esperimento di Michelson

Per analogia con la propagazione delle onde sonore e delle oscillazioni di corde tese si pensa che le onde elettromagnetiche siano portate da una entità materiale ovunque diffusa che deve essere impercettibile: l'etere luminifero. Per la velocità della luce, misurata in circa 300 000 km/s, ci si aspetta valga la legge di composizione precedente.

Si impone l'ipotesi dell'etere solidale con il Sole.

Dato che la velocità media della Terra è $\nu \approx 30km/s$, si prevede che in due posizioni opposte dell'orbita di rivoluzione della Terra intorno al Sole si riscontrino per la velocità della luce i valori $300000 \pm 30)km/s$.

Schema dell'interferometro di Michelson con lamina semitrasparente (p. 104) in moto rispetto all'etere con velocità costante v da sinistra verso destra.

Consideriamo i due tratti da lamina a specchio riflettente, il primo parallelo e il recondo ortogonale alla velocità dell'interferometro rispetto all'etere; supponiamo entrambi i tratti abbiano lunghezza l.

Il tempo di percorrenza del primo tratto, andata e ritorno, sia $t_{//}$ e sia $rt_{\perp}$ il tempo per il secondo.

$$t_{//} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \qquad t_{\perp} = \frac{2l}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Evidentemente $t_{//} > t_{\perp}$ e lo sfasamento temporale $\Delta t := t_{//} > t_{\perp}$ determina formazione di frange di interferenza sullo schermo finale.
Ruotando l'interferometro di $90^{\cdot}$ si ha lo sfasamento $-\Delta t$; lo spostamento delle frange che dovrebbe seguire non è stato mai osservato e quindi l'etere non esiste.

W75 c. relatività ristretta

W75 b.01 Motivazione: rendere conciliabili meccanica newtoniana ed elettromagnetismo
Si può basare sui due postulati seguenti.
Principio di relatività ristretta: le leggi fondamentali della fisica sono invarianti nei diversi sistemi di riferimento coinerziali.
Costanza di c, velocità della luce nel vuoto $(c := 299\,792\,458 \text{ m/s})$.

La simultaneità fra due eventi è relativa al particolare osservatore (e sistema di riferimento); non è fisicamente giustificabile la simultaneità assoluta e quindi non lo è il tempo assoluto; simultaneità e tempo dipendono dal sistema di riferimento.

Consideriamo i due osservatori inerziali $\mathcal{O}$, con variabili di evento generico $\langle t, x, y, z\rangle$, e $\mathcal{O}'$ con variabili di evento generico $\langle t', x', y', z'\rangle$.

Si abbiano $\mathcal{O}$ su un treno che si muove su un binario nella direzione $\mathbf{e}_x$ con velocità costante $v\mathbf{e}_x$ e $\mathcal{O}'$ posizionato nella stazione a distanza Δy dal binario.
Consideriamo il fenomeno invio sul treno di segnale luminoso in verticale da sorgente a specchio, sua riflessione e sua rilevazione al ritorno alla sorgente.
Denotiamo con $\Delta t'$ la durata misurata da $\mathcal{O}'$ e con Δt la durata misurata da $\mathcal{O}$; assumiamo che la distanza da sorgente a specchio sia la stessa, Δs per entrambi gli osservatori.

$$\Delta t = \Delta s/c \ ; \ c^2 {\Delta t'}^2 \ = \ v^2 {\Delta t'}^2 + c^2 \Delta t^2 \ ; \ \Delta t' \ = \ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Introduciamo il parametro di velocità $\beta := \dfrac{v}{c}$ e il fattore di Lorentz $\gamma := \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Per v crescente da 0 a c il fattore γ cresce da 1 a $+\infty$
dilatazione dei tempi $\quad \Delta t' \ = \ \gamma \Delta t$ ovvero $\Delta t_{dilatato} \ = \ \gamma \Delta t_{proprio}$

W75 b.02 Dalla relatività del tempo (delle durate) discende la relatività dello spazio (delle lunghezze).

Consideriamo un corpo astiforme che si $\mathcal{O}$ considera in quiete e di lunghezza L, mentre $\mathcal{O}'$ in moto con velocità costante rispetto a $\mathcal{O}$ considera in moto e di lunghezza L'.
contrazione delle lunghezze $\quad L' \ = \ \frac{L}{\gamma}$ ovvero $L_{contratta} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} L_{propria}$
La lunghezza propria costituisce la massima lunghezza determinabile in un riferimento inerziale.

Un osservatore che esamina un corpo valutandolo in moto uniforme, con velocità costante $\mathbf{v}$, trova che le estensioni trasversali di tale corpo non variano con $v = |\mathbf{v}|$.

W75 b.03 Per rispettare la costanza della velocità della luce nel vuoto c misurata dai due osservatori le equazioni di collegamento richiedono le trasformazioni di Lorentz.

$$\begin{cases} t \ = \ \dfrac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \ = \ \gamma\left(t' + \dfrac{vx'}{c^2}\right) \\ x \ = \ \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \ = \ \gamma(x' + vt') \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \ = \ \gamma(x - vt') \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \ = \ \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \end{cases}$$

Si osserva che $\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} = c$ implica $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = c$; quindi vale la invarianza della velocità della luce nel vuoto per due osservatori coinerziali.

Si osserva che per velocità $v << c$, ovvero per v tendente a zero, β tende a 0 e γ tende a 1; quindi le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasformazioni di Galileo.

Il fatto che le velocità tradizionalmente e comunemente osservate siano molto inferiori a c rend conto della non intuitività della relaticità ristretta e la validità entro determinati limiti della meccanica newtoniana.

La velocità della luce per un corpo dotato di massa va considerata una velocità limite.

Dalle trasformazioni di Lorentz si possono dedurre contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi.

Composizione delle velocità

in tre dimensioni $\dfrac{\Delta \mathsf{x}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta \mathsf{x}' + \mathsf{v}\,\Delta t'}{\Delta t'\,\dfrac{\mathsf{v}\,\Delta t'}{c^2}}$

in una dimensione $u = \dfrac{u' + v}{1 + \dfrac{u' v}{c^2}}$, $u' = \dfrac{u - v}{1 - \dfrac{u\,v}{c^2}}$

W75 b.04 paradosso dei gemelli di Langevin (1911)

I gemelli Q ed M su ue astronavi inizialmente sincronizzano gli orologi.
Successivamente Q resta in quiete, mentre M parte per un viaggio a velocità relativistica, ossia poco inferiore a c.
M torna a sostare presso Q; ci si aspetta che M sia invecchiato meno di Q.

La soluzione del paradosso non è del tutto chiarita. Serve la relatività generale, in quanto M effettua accelerazioni in direzioni diverse. Inoltre servirebbero verifiche sperimentali accurate.

W75 b.05 invariante intervallo spazio-temporale

Spazio-tempo di Minkowski, spazio con coordinate t, x, y, e z e quadrivettore spostamento $\Delta\sigma = \langle c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\rangle$.
Il modulo al quadrato $(\Delta\sigma)^2 = (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ è un invariante relativistico; esso determina la metrica del cronotopo

Diagrammi di Minkowskiper gli eventi osservati da un osservatore $\mathcal{O}$; diagrammi bidimensionali in M_2 per le dimensioni ct e x e tridimensionali in M_3 per le dimensioni ct, x e y.

Consideriamo M_3 in quanto più significativo; rinunciamo a un più completo M_4 in quanto di difficile intuizione e rappresentabile solo mediante animazioni.

L'origine rappresenta il presente per $\mathcal{O}$; le diagonali di M_2 rappresentano i segnali luminosi ($x = ct$); tali segnali sono rappresentati in M_3 dalle rette $ct = \sqrt{x^2 + y^2}$ le generatrici del cono con vertice nell'origine e ottenuto per rotazione intorno all'asse della dimensione ct delle diagonali del piano del tempo e di una mensione spaziale.
Si distinguono punti (eventi) del passato interni al cono per tempi negativi, punti del futuro interni al cono e per tempi positivi, eventi altrove esterni al cono non raggiungibili e non in grado di influenzare il presente.
Le rette per l'origine all'interno del cono dei segnali luminosi rappresentano moti uniformi osservabili dal presente; queste rette, e solo esse, consentono di presentare i moti degli osservatori coinerziali con $\mathcal{O}$.

Le linee interne al cono, rette o meno, e con pendenze rispetto ct inferiori a 45$^{\cdot}$ rappresentano tutti e soli i moti osservabili da $\mathcal{O}$. Le linee di moti osservabili sono dette **linee di universo**.
Gli eventi che $\mathcal{O}$ giudica simultanei e verificati all'istante $\bar{t}$ si trovano nel cerchio all'interno del cono per il quale $\sqrt{x^2+y^2}=c\bar{t}$

W75 b.06 effetto Doppler relativistico

La sorgente, sonora o di onde elettromagnetiche, si muove rispetto al ricevitore e la frequenza percepita f_r varia in funzione della frequenza emessa f_e e del moto tra sorgente e ricevitore.

Allontanamento relativo tra sorgente e ricevitore con velocità costante v

$$f_r = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \cdot f_e$$

La lunghezza d'onda ricevuta $\lambda_r = \dfrac{c}{f_r}$ aumenta con v; si percepiscono suoni più bassi e colori spostati verso il rosso (redshift).

Avvicinamento relativo tra sorgente e ricevitore con velocità costante v

$$f_r = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \cdot f_e$$

All'aumentare di v la lunghezza d'onda ricevuta $\lambda_r = \dfrac{c}{f_r}$ diminuisce; quindi si percepiscono suoni più acuti e colori spostati verso il violetto (blueshift).

W75 b.07 massa relativistica

Nella dinamica classica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e quindi $\mathbf{v} = \mathbf{a}t + \mathbf{v}_0 = \frac{F}{m}t + \mathbf{v}_0$ con m costante: quindi applicando illimitatamente una data forza si può far crescere illimitatamente la velocità di un corpo, in conflitto con la non superabilità della velocità della luce.
Quindi occorre abbandonare la costanza della massa.
Per un corpo un osservatore distingue la massa a riposo m_0 dalla massa del corpo che osserva muoversi con velocità costante v.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0$$

La massa cresce con la velocità che si avvicina a c; quindi per far crescere la sua velocità bisogna esercitare una forza crescente e quindi si incontra un limite alla velocità dei corpi in moto.
L'aumento relativistico della massa diventa rilevante intorno alla velocità dii 600 000 km/s.

Si osserva che un corpo che viene accelerato risente della dilatazione del tempo; quindi per avvicinare la sua velocità a quella della luce serve sempre più tempo.

W75 b.08 quantità di moto relativistica

Variando la massa con la velocità occorre riesaminare la quantità di moto.

$$\mathbf{q} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0\mathbf{v}$$

Per il secondo principio della dinamica relativistica si ottiene.

$$\mathbf{F} = m_0\frac{\mathrm{d}(\gamma\mathbf{v})}{\mathrm{d}t} = m_0\gamma\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\right) + m_0\mathbf{v}\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)$$

W75 b.09 massa-energia relativistica

Se si fanno scontrare e fondere (urto totalmente anelastico) due particelle aventi uguale massa a riposo m_0, secondo la dinamica classica si ottiene una particella di massa $2m_0$.
Secondo la relatività ristretta si ottiene una particella di massa $2m = 2m = 2m_0\gamma > 2m_0$, come effettivamente verificato.
Infatti la massa dei due corpi iniziali ha un contenuto energetico che il corpo dopo l'urto, essendo in quiete, provoca l'aumento della sua massa.

Servono nuove definizioni per le energie in gioco.

Energia cinetica a riposo $E_{c0} := m_0c^2$

Energia cinetica del corpo in moto $E_c = m_0c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}-1\right) = E_{c0}\,(\gamma-1)$

Dato che $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \cong 1+\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}$, per velocità $v << c$ abbiamo

$$E_c \cong m_0c^2\left(1+\tfrac{1}{2}\tfrac{v^2}{c^2}-1\right) = \tfrac{1}{2}m_0v^2\ .$$

Si giunge alla energia totale di un corpo $E := E_c + E_0 = \gamma m_0c - m_0c + m_0c = mc^2$.
Anche il corpo a riposo possiede una energia che corrisponde alla sua massa a riposo.

Considerando che massa ed energia sono due aspetti di una unica entità fisica, si sostituiscono i principi classici della conservazione della massa e della conservazione con il principio delle conservazione della massa-energia.

Questo principio relativistico è in accordo con i fenomeni che vedono trasformazioni di masse in energie e viceversa. Esempi: annichilazione particella- antiparticella, processi della radioattività, produzione di energia da reazioni nucleari controllate o esplosive, evoluzione delle stelle in quanto produttrici di radiazioni elettromagnetica attraverso la fusione di nuclei di idrogeno, con consumo atori fenomeni dell'astrofisica.
Si ha inoltre il processo di materializzazione di fotoni; per la meccanica quantistica un fotone è una particella-onda con massa a riposo nulla ed energia data dal prodotto della sua frequenza per la costante di Planck; si osserva che elettroni con sufficiente energia (sufficiente frequenza) si annichilano e producono una particella dotata di massa e la sua antiparticella di uguale massa, ad esempio un elettrone e un positrone.

Per l'energia può risultare conveniente l'unità elettronvolt, eV, definita come l'energia acquisita (o persa) da un elettrone che si muove nel vuoto tra due punti tra i quali vi è una differenza di potenziale elettrostatico di 1 volt, ossia 1 J/C.
Dato che si definisce per la carica dell'elettrone $e := 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$C, si può scrivere 1 eV $= e \cdot 1\text{V} = 1,602 \cdot 10^{-19}$ J.

Per la massa può essere opportuno servirsi dell'unità di misura eV$/c^2$; la massa di 1 eV $/c^2$ corrisponde a $\dfrac{1 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}}{(2,997 \cdot 10^8)^2} \cong 1,78 \cdot 10^{-36}$ kg

W75 b.10 invariante energia quantità di moto massa relativistica

Per i calcoli della dinamica relativistica conviene introdurre un invariante simile all'invariante intervallo spazio-temporale.

Definiamo il **quadrivettore energia - quantità di moto**: $\left\langle \frac{E}{c}, q_x, q_y, q_z \right\rangle$

Per il suo modulo al quadrato abbiamo $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - q^2 = \left(\frac{\gamma m_0 c^2}{c}\right)^2 - (\gamma m_0 v)^2 = \gamma^2 {m_0}^2 (c^2 - v^2) = \frac{c^2}{c^2 - v^2}\, {m_0}^2\, (c^2 - v^2)\, {m_0}^2\, c^2$, evidentemente invariante.

Per il quadrato dell'energia totale relativistica di un corpo abbiamo quindi $E^2 = (qc)^2 + (m_0\, c^2)^2$
Considerando la radice positiva $E = \sqrt{(qc)^2 + (m_0 c^2)^2}$

La radice negativa nel caso di una particella elementare è stata interpretata da Dirac nel 1930 come energia della sua antiparticella.

Utile visualizzare il triangolo rettangolo con i cateti rappresentanti $q\, c$ e la massa a riposo e l'ipotenusa rappresentante l'energia totale.

Consideriamo un'onda elettromagnetica; essa porta l'energia $E = \gamma\, m_0\, c^2$ e la sua quantità di moto è $q = \gamma\, m_0\, v$; dato che essa si sposta alla velocità c, si conclude $q = \frac{E}{c}$; questa è l'espressione della quantità do moto della radiazione.

Dato che $\left(\frac{E}{c}\right)^2 - q^2 = {m_0}^2\, c^2$, per una particella com massa a riposo nulla abbiamo ancora $q = \frac{E}{c}$.
La coincidenza delle due espressioni porta a pensare che la luce sia trasmessa da particelle con massa a riposo nulla, i **fotoni**, entità caratterizzate da frequenze che si riscontrano proporzionali alla loro energia e quindi soggette a comportamenti omdulatori.

W75 b.11 elettromagnetismo e relatività

Si trovano coppie di sistemi di riferimento coinerziali $\langle S_1, S_2 \langle$ e fenomeni elettromagnetici tali che S_1 riconosce un campo magnetico M_1 con un certo effetto e un campo elettrico ESd_1 nullo, mentre S_2 osserva un campo elettrico E_2 che produce il suddetto effetto e un campo magnetico M_2 nullo.

La teoria della relatività vuole leggi fondamentali invarianti al mutare dei riferimenti coinerziali e quindi richiede che campo magnetico e campo elettrico non possono essere considerati separatamente ma come due manifestazioni di una stessa entità fisica, il **campo elettromagnetico**, che si comporta come dicono le equazioni di Maxwell e che al cambiare dei riferimenti coinerziali si trasforma come chiedono le trasformazioni di Lorentz.

W75 c. relatività generale

W75 c.01