1

Capitolo T50
teoria delle categorie

Contenuti delle sezioni

4 pagine

T500.01 In questo capitolo si introducono le nozioni basilari della teoria delle categorie.
Questa teoria viene qui considerata primariamente per il linguaggio con elevate potenzialità unificatrici che essa mette a disposizione di chi tratta una estesa varietà di specie di strutture matematiche.

Il suo inquadramento negli studi sui fondamenti delle teorie matematiche, quindi, non viene molto approfondito, ma viene presentato facendo ricorso a vari esempi in buona parte affrontati in modo semiintuitivo.

T50 a. categorie, oggetti e frecce

T50a.01 Per **categoria** si intende una coppia della forma $\big\langle \mathsf{Obj}[\mathfrak{C}], \mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}] \big\rangle =: \mathfrak{C}$ arricchita da tre assegnazioni e da una composizione parziale.

$\mathsf{Obj}[\mathfrak{C}]$, denotata anche con $\mathsf{Obj}_{\mathfrak{C}}$, è una classe chiamata **collezione degli oggetti della categoria**;
$\mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}$, è una classe detta **insieme delle frecce della categoria**.

Due assegnazioni $\mathsf{srce}_{\mathfrak{C}}$ (chiamata source) e $\mathsf{trgt}_{\mathfrak{C}}$ (chiamata target), associano ad ogni freccia un oggetto: se $f \in \mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}]$ si dice che f stabilisce un collegamento dall'oggetto $\mathsf{srce}(f)$ all'oggetto $\mathsf{trgt}(f)$; questa situazione concisamente viene rappresentata con la scrittura (diremo anche "raffigurata con il diagramma")

$$\mathsf{Obj}[\mathfrak{C}] \ni A := \mathsf{srce}(f) \longrightarrow f \longrightarrow \mathsf{trgt}(f) =: B \in \mathsf{Obj}[\mathfrak{C}] \quad .$$

La terza assegnazione associa a ogni oggetto A una freccia chiamata identità di A e denotata con $\mathbf{1}_A$ che collega A ad A, ovvero che si può raffigurare con la scrittura

$$\mathsf{Obj}[\mathfrak{C}] \ni A \longrightarrow \mathbf{1}_A \longrightarrow A \in \mathsf{Obj}[\mathfrak{C}] \quad .$$

La composizione parziale a una opportuna coppia di frecce associa un'altra freccia; se

$$A \longrightarrow f \longrightarrow B \qquad \text{e} \qquad B' \longrightarrow g \longrightarrow C \ ,$$

f e g si dicono **frecce compatibili** sse $B = B'$ e in tal caso, e solo in esso, esse sono componibili e forniscono la freccia caratterizzata dalla scrittura

$$A \longrightarrow f \circ_{lr} g \longrightarrow C \ .$$

Alla composizione si chiede di essere associativa: se abbiamo una terna di frecce compatibili, cioè se

$$A \longrightarrow f \longrightarrow B \quad , \quad B \longrightarrow g \longrightarrow C \quad , \quad C \longrightarrow h \longrightarrow D \quad ,$$

allora

$$(f \circ_{lr} g) \circ_{lr} h \ = \ f \circ_{lr} (g \circ_{lr} h) \quad .$$

Infine si chiede che per ogni oggetto A la freccia identità $\mathbf{1}_A$ agisca come agente neutro a sinistra e a destra per ogni freccia che riguarda A:

$$\forall \langle A, f, B \rangle \; ∏ \; A \longrightarrow f \longrightarrow B \quad : \quad \mathbf{1}_A \circ_{lr} f \ = \ f \ = \ f \circ_{lr} \mathbf{1}_B \ .$$

T50a.02 Riteniamo opportuno dare una seconda definizione più formale della nozione di categoria.

Per **categoria** $\mathfrak{C}$ si intende un sistema della forma $\mathfrak{C} = \Big\langle \mathsf{Obj}[\mathfrak{C}], \mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}], \mathsf{srce}_{\mathfrak{C}}, \mathsf{trgt}_{\mathfrak{C}}, \mathsf{Id}_{\mathfrak{C}}, \circ_{lr\ \mathfrak{C}} \Big\rangle$ con le caratteristiche che seguono.

$\mathsf{Obj}[\mathfrak{C}]$ è una classe i cui elementi sono detti oggetti della categoria.

$\mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}]$ è una classe i cui elementi sono chiamati frecce della categoria o anche morfismi della categoria.

$\mathsf{srce}_{\mathfrak{C}}$ e $\mathsf{trgt}_{\mathfrak{C}}$ sono due associazioni (cioè due classi funzionali di coppie) che a ogni freccia associano un oggetto; se $f \in \mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}]$ e se introduciamo $A := \mathsf{srce}_{\mathfrak{C}}(f)$ e $B := \mathsf{trgt}_{\mathfrak{C}}(f)$, si dice che f è una freccia da A a B e si scrive $A \longrightarrow f \longrightarrow B$.

Denotiamo con $\mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}](A, B)$ la classe di tutte le frecce da A a B.
Conviene segnalare che per talune coppie di oggetti $\langle A, B \rangle$ può accadere che sia $\mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}](A, B) = \emptyset$.

L'entità $\mathsf{Id}_{\mathfrak{C}}$ è una biiezione che a ogni $A \in \mathsf{Obj}_{\mathfrak{C}}$ associa una freccia di $\mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(A, A)$ che denotiamo con $\mathbf{1}_A$.

$\circ_{lr\ \mathfrak{C}}$ è una legge di composizione binaria parziale tra frecce definita solo per coppie di frecce $\langle f, g\rangle$ con $\mathsf{trgt}_{\mathfrak{C}}(f) = \mathsf{srce}_{\mathfrak{C}}(g)$ e tale da fornire $f \circ_{lr} g \in \mathsf{Arrw}[\mathfrak{C}](\mathsf{srce}(f), \mathsf{trgt}(g))$; questa caratteristica della composizione di frecce si ricorda dicendo che opportunamente ridotta $\circ_{lr}$ è del genere

$$\lceil \mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(A,B) \times \mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(B,C) \longmapsto \mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(A,C) \rceil \ .$$

La categoria $\mathfrak{C}$ inoltre soddisfa i tre assiomi che seguono

[Cat 1] Due classi di frecce delle forme $\mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(A,B)$ ed $\mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(A',B')$ aut coincidono sse $A = A'$ e $B = B'$, aut sono disgiunte.

[Cat 2] Per la composizione $\circ_{lr\ \mathfrak{C}}$ e per ogni $f \in \mathsf{Arrw}\mathfrak{C}(A,B)$ la freccia $\mathbf{1}_A$ agisce da identità a sinistra, mentre la $\mathbf{1}_B$ agisce da identità a destra.

[Cat 3] La $\circ_{lr\ \mathfrak{C}}$ quando è definita è associativa, ovvero

$$\forall A,B,C,D \in \mathsf{Obj}_{\mathfrak{C}}\ ,\ \forall f \in \mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(A,B), g \in \mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(B,C), h \in \mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}(C,D)\ :\ (f \circ_{lr\ \mathfrak{C}} g) \circ_{lr\ \mathfrak{C}} h \ = \ f \circ_{lr\ \mathfrak{C}} (g \circ_{lr\ \mathfrak{C}} h)\ .$$

T50a.03 Precisiamo alcuni esempi piuttosto evidenti di categorie.

Osserviamo preliminarmente che in genere una categoria prende il nome e l'identificatore dagli oggetti che la costituiscono.
Osserviamo anche che in genere, quando si tratta una sola determinata categoria $\mathfrak{C}$, le notazioni vengono alleggerite trascurando la sua indicazione e in particolare semplificando $\mathsf{Obj}[\mathfrak{C}]$ in Obj e $\mathsf{Arrw}_{\mathfrak{C}}$ in Arrw.

Denotiamo con $\mathfrak{Set}$ la categoria degli insiemi: i suoi oggetti sono gli insiemi, le sue frecce le funzioni tra insiemi, srce e trgt esprimono, risp., il dominio e il codominio delle funzioni, per ogni insieme A $\mathbf{1}_a$ corrisponde a Id_A e la composizione tra frecce alla composizione di funzioni.

Denotiamo con $\mathfrak{Grp}$ la categoria dei gruppi: i suoi oggetti sono i gruppi, le sue frecce gli omomorfismi di gruppo, le altre componenti si ricavano facilmente dalle omologhe individuate per $\mathfrak{Set}$.

Considerazioni analoghe riguardano
la categoria dei monoidi $\mathfrak{Mnd}$ (le cui frecce sono gli omomorfismi di monoide),
la categoria degli anelli $\mathfrak{Rng}$ (le cui frecce sono gli omomorfismi di anello)
la categoria degli anelli uniferi $\mathfrak{Rngu}$ (le cui frecce sono gli omomorfismi di anello-U)
la categoria degli spazi vettoriali sopra un dato campo $\mathbb{F}$ $\mathfrak{Vsp}_{\mathbb{F}}$ (le cui frecce sono le trasformazioni lineari-$\mathbb{F}$)
la categoria degli spazi topologici $\mathfrak{Top}$ (le cui frecce sono le classi di omotopia delle funzioni continue: in effetti l'omotopia è compatibile con la composizione delle funzioni e la categoria degli spazi topologici viene chiamata anche categoria dei tipi omotopici).

Tutte queste categorie a eccezione dell'ultima hanno gli oggetti costituiti da insiemi che sono terreni di strutture matematiche e le frecce da funzioni che conservano le proprietà che derivano dagli assiomi che caratterizzano le specie di strutture.

T50a.04 Denotiamo inoltre:

con $\mathfrak{RelA}$ la categoria degli insiemi le cui frecce sono le relazioni binarie,

con $\mathfrak{RelH}_R$ la categoria degli insiemi muniti di una relazione R che rispetti un sistema di assiomi (per esempio gli assiomi degli ordini) le cui frecce sono le funzioni che rispettano la detta relazione (funzioni isotoniche),

con $\mathfrak{Ord}$ la categoria degli insiemi parzialmente ordinati le cui frecce sono le funzioni monotone.

Si deve segnalare anche la categoria $\mathfrak{Cat}$ che ha come oggetti le categorie stesse e come frecce i funtori, le entità che definiamo in T50a.

T50a.05 In effetti sono molto numerose le strutture matematiche che si possono considerare categorie.
In particolare vi sono varie categorie cartterizzate da un unico oggetto.

A ogni gruppo G si fa corrispondere una categoria con un solo oggetto, il terreno dello stesso G; tutti i suoi elementi si possono considerare frecce che hanno G come source e come target, e la sua composizione è costituita dal prodotto del gruppo e l'identità è la freccia 1_G, l'identità dell'insieme G.

La stessa constatazione si può fare per ogni monoide. anzi la classe dei monoidi si può definire come la classe di tutte le categorie con un solo oggetto (i gruppi essendo particolari monoidi).

Anche ogni poset $\langle P, \preceq\rangle$ si può vedere come una categoria: gli elementi di P sono i suoi oggetti, e il suo insieme delle frecce è l'insieme delle coppie $\langle a, b\rangle$ con $a \preceq b$, la transitività della relazione d'ordine garantendo la componibilità delle frecce e la riflessività assicurando la presenza dell'identità tra le frecce.

Si può quindi affermare che la nozione di categoria generalizza quella di poset, considerazione utile in quanto molte proprietà delle categorie si possono utilmente considerate generalizzazioni di ben consolidate proprietà dei posets.

Osserviamo esplicitamente che vi sono categorie che hanno la stessa collezione di oggetti ma diverse collezioni di frecce.

T50a.06 Dalle definizioni di categoria si ricava che a ogni oggetto è associata una unica freccia identità: questo fatto consente di dare una definizione più economica di categoria nella quale gli oggetti sono nozioni derivate associate alle corrispondenti frecce identità.

Questo fatto fa pensare che le frecce siano le componenti più importanti della teoria delle categorie; questa impressione viene confermata dagli sviluppi della teoria, ma si trova in contrasto con la consolidata abitudine di individuare le categorie con i nomi dei loro oggetti.

Nella definizione di categoria gli oggetti possono costituire delle classi e solo in alcune di esse riescono a costituire degli insiemi.
Queste ultime per distinguerle sono chiamate **categorie piccole**.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`