1

Capitolo K12
inquadramento pragmatistico della matematica

Contenuti delle sezioni

16 pagine

K12 0.01 In queste pagine si descrive il punto di vista della matematica al quale fanno riferimento le scelte di questa *esposizione*.

Il presente capitolo non pretende di essere approfondito in effetti esso si basa su letture di testi divulgativi, non su letture di contributi originali. Esso in particolare riprende temi contenuti nelle pagine di Wikipedia sopra la filosofia della matematica (`Filosofia della matematica` (wi), `Philosophy of Mathematics` (we) e pagine connesse) e contenute nelle pagine di testi sui fondamenti e sulle caratteristiche generali della matematica: per esempio i testi citati in W81 di Gabriele Lolli e Willard Van Orman Quine.

Il presente discorso non ha la pretesa di essere completo. Esso cerca di dare giustificazione al punto di vista visione della matematica considerata innanzi tutto come disciplina delle attività di calcolo, punto di vista nel quale si percepisce un atteggiamento assai vicino al pragmatismo.

Questa posizione conduce a cercare le basi delle costruzioni di conoscenza, e in particolare le basi della matametica, nalle stringhe, sequenze di segni riconoscibili dei soggetti delle attività informative e delle più articolate attività conoscitive, come mezzi per la comunicazione intersoggettiva e come oggetti che possono essere elaborati per vari scopi.
L'analisi delle stringhe, dei loro raggruppamenti, delle loro possibili connessioni porta ai primi problemi trattabili condivisibilmente, alla nozione di algoritmo e alle prime nozioni dalla matematica del finito (liste, numeri interi, loro relazioni e operazioni).
Le elaborazioni di queste entità inducono anche a introdurre precocemente un semplice linguaggio di programmazione.

K12 0.02 Una fase successiva vede l'introduzione dell'infinito potenziale in collegamento con alcune macchine formali, in particolare con le macchine di Turing.

Successivamente emerge la necessità di attività volte ad organizzare i risultati ottenuti dalle indagini e dalle osservazioni sugli algoritmi con formalizzazioni proprie della matematica, giudicate le più adatte a una circolazione affidabile, estesa e versatile delle conoscenze sopra gli algoritmi richieste dalla esigenza di risolvere i problemi che continuamente ci dobbiamo fronteggiare.

Il continuo presentarsi dei problemi impegnativi, cioè dei problemi che possono portare a rilevanti vantaggi, o consentono di contrastare situazioni dannose o azioni potenzialmente o attivamente offensive, si rivela coinvolgere sempre più estesi campi applicativi.
Questo implica che le conoscenze sugli algoritmi e sopra gli strumenti, mentali e materiali, che consentono di implementarli, cioè di rendere conreti i procedimenti per la loro esecuzione, devono continuare a crescere e devono diventare sistematiche.
Tutte le attività che sono richieste per conseguire la sistematicità della soluzione dei problemi impegnativi devono continuare a svilupparsi per rispondere al perdurante ripresentarsi dei problemi stessi; questo in particolare vale per il ruolo che la matematica viene chiamata a svolgere.

K12 0.03 Si procede quindi alla definizione del linguaggio (matematico) come strumento finalizzato alla circolazione delle conoscenze di interesse potenzialmente generale concernenti gli algoritmi in vista di applicazioni alle quali non si intendono porre delimitazioni.

Per questo si tiene ben presente la ricchezza dei successi riscontrabili nella storia della matematica e delle sue applicazioni, a cominciare dalla fisica e tenedo ben presenti le prestazione dell'informatica.
Si osserva che essi portano a dare importanza, sia sul piano pratico che su quello delle idee, al progresso delle conoscenze dell'umanità, alle generalizzazioni, alle conseguenti astrazioni e al metodo assiomatico e, in stretto collegamento, agli strumenti della logica matematica.

Questi argomenti di sapore teorico si ritiene che siano essenzialmente indispensabili per la effettiva pratica della organizzazione dei risultati della matematica e della loro messa a disposizione dei ricercatori delle sue molteplici aree e e degli operatori delle sue apparentemente illimitate applicazioni.

Queste considerazioni ci si sforza di renderle condivisibili anche a chi si manifesta scettico nei confronti della opportunità delle astrazioni, oggi spesso assai spinte, e sulla conseguente difficile comprensibilità del linguaggio e delle notazioni delle pubblicazioni avanzate.

Nel far questo pensiamo opportuno insistere sulla necessità di raggiungere un compromesso tra i cultori del rigore e della unitarietà delle presentazioni e i sostenitori dell'utilizzo di linguaggi settoriali e specialisticamente semplificati rispetto a quelli delle formalizzazioni che nella logica si propongono come onnivalenti. Si ritiene infatti che ogni presentazione che cercasse di rinunciare a queste semplificazioni risulterebbe prolissa, poco leggibile, tutt'altro che attraente e complessivamente inefficace.

K12 a. problemi, attività algoritmiche e loro comunicazione

K12 a.01 Cominciamo con una prima assegnazione di compiti alla matematica con lo scopo di fornire una prima orientazione per le pagine che seguono; ci proponiamo tuttavia di ritornare più volte sulle finalità e sulle caratteristiche della disciplina per puntualizzarle meglio dopo aver definiti alcuni dei suoi elementi principali: prime entità componenti, primi schemi costruttivi, scopi complessivi, applicazioni e relazioni con la cosiddetta realtà.

Cominciamo dunque ad assegnare alla matematica il ruolo di disciplina che organizza sistematicamente le attività volte a dare soluzioni a una ampia gamma di problemi, soluzioni che vogliamo di buon livello, ossia alle quali chiediamo di essere chiaramente definite, precise, efficienti e tanto affidabili da poter essere proposte come ampiamente condivisibili.

Questa richiesta preliminare esige subito qualche chiarimento di termini. Il primo é "problemi" e per questo ricorriamo a qualche richiamo storico.
Problemi di rilievo hanno innescati i primi sviluppi della matematica: enumerazione di beni (scorte alimentari, oggetti di scambi commerciali, denari da scambiare con beni materiali, prestazioni lavorative, tasse, ...), calcoli finanziari ed amministrativi, misurazioni di terreni, costruzioni di edifici e ponti, controllo delle acque, consapevolezza del succedersi delle stagioni, padronanza della navigazione, previsioni astronomiche ed astrologiche.
Si tratta di problemi che nel passato sono risultati assai impegnativi e che quindi sono stati affrontati limitandosi a cercare soluzioni specifiche tendenzialmente semplici, spesso poco precise, poco efficienti e poco affidabili; inoltre in genere le soluzioni non erano chiaramente giustificate.
Di molte soluzioni del passato si sono perse le tracce, sia per stravolgimenti politici e per catastrofi naturali, sia per la mancanza di adeguate giustificazioni, sia per perdita delle documentazioni.
Il continuo pericolo del degrado e dello svanire delle conoscenze ha costretto a riscoprire faticosamente molte soluzioni del passato, anche più volte e talora in versioni più deboli.

K12 a.02 Con il tempo negli ambienti di studio più impegnati (osservatori astronomici dai Maya, del Kerala, ..., grandi lavori pubblici, scuole greco-ellenistiche, ...) ci si resi conto che la risoluzione di buon livello di molti problemi richiedeva un forte impegno cognitivo.
In particolare ci si rese conto della opportunità di considerare i problemi e le relative soluzioni sforzandosi di giungere a procedimenti risolutivi di portata il più possibile ampia.
Occorreva passare da soluzioni ad hoc a procedimenti risolutivi applicabili a intere classi di problemi, e quindi precisare procedimenti più versatili e a definire metodi applicabili a problematiche.
L'ampliamento degli obiettivi richiedeva anche maggiore precisione nella formulazione dei procedimenti, nella definizione della loro portata e nei risultati ottenibili, cioè nella esattezza dei calcoli.
Per queste richieste si dovevano trovare più solide giustificazioni dei procedimenti risolutivi e di conseguenza si sentiva la necessità di fornire "dimostrazioni rigorose" degli enunciati su cui basare i procedimenti risolutivi.

Sul piano dell'impostazione generale si dovevano chiarire i rapporti tra le situazioni reali nelle quali si ponevano i problemi, le loro schematizzazioni preliminari per le soluzioni e le interpretazioni dei risultati.

Tutte queste esigenze hanno portato alla diversificazione dei vari settori della matematica e ai loro crescenti sviluppi; inoltre queste esigenze possono essere invocate per rendere ben comprensibili le caratteristiche dei detti settori.

K12 a.03 La presente introduzione graduale inizierà tenendo conto che le esigenze sopra espresse comportano che le attività matematiche solo in situazioni particolari possono essere affrontate da singoli studiosi, ma che in generale, per la tendenza a superare le esigenze contingenti, devono essere affrontate da collettivi di ricercatori e operatori ingrado di far tesoro di molteplici acquisizioni precedenti e e capaci di agire congiuntamente e coerentemente.

Nei tempi più recenti, in particolare nella seconda metà del secolo XX, la soluzione di gran parte dei problemi di ampia portata ha coinvolto sempre più l'uso degli strumenti per il calcolo automatico, per la gestione di grandi archivi e per le comunicazioni a distanza.

L'esame delle prestazioni di questi strumenti, o meglio di questi sistemi di strumenti, e della loro perdurante rapida evoluzione porta molte argomentazioni a favore della opportunità di considerare che le attività di soluzione di problemi matematici siano svolte da collettivi di operatori, in parte umani ed in parte artificiali.

Questo atteggiamento molto recentemente viene rafforzato dalla cosiddetta **formal turn**, svolta formale, adozione di procedimenti di controllo delle dimostrazioni dei fatti matematici condotto al livello dello sviluppo formale dettagliato delle derivazioni dimostrative.

Con questi procedimenti consentiti dalla disponibilità di strumenti per la deduzione formale, si possono controllare i passi dimostrativi, la loro completezza, le relazioni tra risultati che presentano elementi comuni o collegabili per maggiore generalità o per maggiore specificità, con notevoli possibili ricadute sulla documentazione complessiva (banche dati di formule e catene deduttive) e sulla divulgazione dei risultati.

K12 a.04 Esaminiamo le questioni poste dalle attività della comunicazione tra quanti portano avanti attività rigorose di natura scientifica e tecnologica.

Le considerazioni precedenti portano a proporre uno scenario nel quale si vedono diversi esecutori di procedure risolutive che devono cooperare. Questi esecutori umani ed artificiali, che chiameremo agenti matematico informatici (in sigla AMI) innanzi tutto devono potersi scambiare informazioni che essi possano interpretare in modi coerenti, cioè utilizzabili per operazioni condivisibili ed orientate a fini comuni.

A questo proposito si possono prospettare moltissime situazioni; qui ci limitiamo a prendere in considerazione solo alcuni tipici gruppi di agenti che operano in comunicazione tra di loro.

Potrebbero essere: due telegrafisti al lavoro intorno alla metà del XIX secolo; un contabile che utilizza una calcolatrice elettromeccanica; una operatore di laboratorio che si serve di una calcolatrice elettronica; i controllori di un evento collettivo da due diversi punti di osservazione; l'addetto responsabile di un monitoraggio con il relativo complesso di sensori; la squadra degli operatori di una torre di controllo con i sistemi radar a loro disposizione.

In particolare può essere inteessante fermare l'attenzione su agenti che raccolgono i dati forniti dalle osservazioni di un fenomeno fisico, per esempio del comportamento termico di un nuovo materiale artificiale. Queste osservazioni sono motivate dalla necessità di precisare le caratteristiche termiche del materiale in modo da prevedere il suo comportamento quando fosse utilizzato in apparecchiature istallate in una gamma abbastanza ampia di condizioni ambientali.

K12 a.05 Le osservazioni sperimentali, ragionevolmente, sono organizzate in modo da riguardare condizioni semplificate rispetto a quelle prospettate per l'utilizzo delle apparecchiature che si intendono produrre industrialmente.

L'organizzazione delle osservazioni e le prospettive di utilizzo applicativo sono state ricavate da un modello teorico del comportamento termico dei materiali del genere al quale appartiene il nuovo;

questo modello teorico non viene considerato definitivo, ma sottoponibile a critiche e possibile di miglioramenti.

Tutte queste considerazioni dicono che si sta effettuando un processo conoscitivoche segue i principi del metodo scientifico e che rispetta tutte i requisiti per lo sviluppo della conoscenza richiesti dai principi del pragmatismo (v. per esempio `Encyclopedia of Philosophy - Pragmatism (we)`).

Altro tipo di processo conoscitivo che conviene tenere presente lo si trova nella linguistica computazionale e consiste nell'analisi di un corpus di testi volta a individuare statistiche sui termini adottati e sulle loro correlazioni.
Due agenti che si occupano di ogni processo conoscitivo di questo genere devono potersi scambiare informazioni condivisibili, ossia tali da presentare significati coerenti.
Questa esigenza è sentita, anche a maggior ragione, quando si scambiano informazioni due o più squadre di operatori che si occupano di fenomeni complessi e multiformi che richiedono risorse mentali e sperimentali impegnative; si pensi alle previsioni meteorologiche o a studi di medicina che richiedono calcoli statistici su grandi quantità di dati che a loro volta sono indirizzate da conclusioni spra osservazioni precedenti effettuate su larga scala.

K12 a.06 Le esperienze fenomenologiche dicono che gli operatori di molti processi conoscitivi devono potersi servire di più tipi di canali. In altre parole l'esperienza dice che le informazioni riguardanti i processi conoscitivi condotti razionamente devono potersi veicolare attraverso oggetti concreti, ossia attraverso segni, di diversa natura e devono poter assumere forme diverse.

Le informazioni nella fisica vanno rappresentate da grandezze, ovvero da numeri razionali esprimenti rapporti tra i risultati di misurazioni e corrispondenti unità di misura.
Nella linguistica computazionale le informazioni riguardano soprattutto parole e locuzioni associate a numeri naturali o razionali aventi valenze statistiche.
In altri campi di indagine condotte razionalmente conviene che le informazioni siano espresse mediante dati registrati (visivi, sonori, termici, ...), mediante complessi numerici (tabelle di dati osservati, serie storiche, ...), mediante immagini e grafici, attraverso formule, ...
Queste informazioni è opportuno possano essere veicolate attraverso svariati generi di mezzi di comunicazione.
Come mezzo di comunicazione basilare scegliamo la comunicazione scritta, ossia rappresentata da sequenze di segni.

K12 a.07 Due agenti esecutori di procedure (per i quali usiamo anche la sigla EP) per comunicare scritture, ossia testi, devono servirsi di più tipi di segni caratterizzati da forme diverse, mutuamente distinguibili, che chiamiamo caratteri.

Le comunicazioni tra agenti possono essere costituite da processi elementari, ciascuno costituito dalla trasmissione di un messaggio per il quale si riconoscono un mittente e un ricevente.
Processi più compositi possono consistere in scambi di messaggi bidirezionali o possono riguardare più agenti intercomunicanti, in particolare un broadcasting con un trasmittente e più riceventi contemporanei.

Ogni messaggio consiste nella trasmissione di una sequenza di segni elementari da un mittente a un ricevente.
I segni trasmessi, che chiamiamo preferibilmente **caratteri**, devono essere stati preliminarmente concordati attraverso la assegnazione di ciascuno di essi a un tipo distinguibile fisicamente da tutti gli agenti che possono farne uso per comunicare tra di loro.

Operativamente si chiede che gli agenti che ne fanno uso siano in grado di decidere se due istanze di carattere appartengono allo stesso tipo o a tipi diversi.

K12 a.08 Gli agenti di ciascun tipo di carattere certificato e comunicabile possono disporre di più istanze, ossia di più repliche materiali.
Queste repliche nell'ambito del mittente sono fisicamente distinguibili, ma nell'ambito di ogni ricevente sono distinguibili solo come occorrenze diverse entro un messaggio o entro successivi messaggi diversi.

Gli agenti impegnati in una attività determinata, realisticamente, possono servirsi solo di caratteri assegnati a una gamma finita di tipi.
Tuttavia nel corso di una serie di attività si consente che si possano introdurre nuovi tipi di caratteri che vengono resi necessari dal mutare delle esigenze.

I caratteri utilizzati nei processi di comunicazione li denotiamo con a_1, a_2, ...,a_m oppure con a, b, ... g.
Questa gamma di segni la chiamiamo alfabeto della comunicazione tra agenti esecutori.
Affiancando questi segni di base in sequenze nelle quali possono occorrere delle repliche si ottengono quelle che chiamiamo stringhe di base.
Sono stringhe *abab*, *abbcccdcccbba* ed $a_1a_2a_1a_3a_1a_4$.

K12 a.09 Per poter esprimere considerazioni più significative e con validità generale risulta necessario servirsi di segni diversi da quelli utilizzati nelle trasmissioni tra agenti esecutori di procedure.
Questi segni servono innanzi tutto a individuare stringhe di base specifiche o generiche, ossia stringhe che potrebbero rappresentare diverse stringhe specifiche che si lasciano inspecificate del tutto o parzialemete; per queste ultime si posssono avere limitazioni nella forma.

I nuovi caratteri fanno parte di un alfabeto che diciamo **alfabeto per considerazioni generali** il quale può venire ampliato con il procedere degli sviluppi
Gli alfabeti per la comunicazione tra agenti e quelli per considerazioni generali li pensiamo definiti in relazione a un problema o a una problematica.
Si consente che si ponga un problema che richiede di trattare come caratteri di comunicazione dei segni che per un problema precedente più circoscritto avevano il ruolo di caratteri per considerazioni generali; la distinzione tra caratteri di base e caratteri per considerazioni generali, quindi, non vuole avere validità assoluta, ma si consente abbia portata relativa, collegta alla problematica che si sta affrontando.

K12 a.10 Gli accennati caratteri per considerazioni generali vengono utilizzati, più in generale, per rendere l'*esposizione* più concisa: molte entità la cui rappresentazione richiede notazioni composite conviene siano identificate da segni semplici o da combinazioni molto semplici di segni; questo permette di trattare notazioni non eccessivamente eleborate.
Due esempi riguardano l'alfabeto di base, per il quale useremo il segno $\mathfrak{A}$, e la stringa generica, per la quale useremo spesso, ma non sempre, il segno w.
Per denotare una stringa generica sull'alfabeto costituito da a_1, a_2, ...,a_m useremo notazioni come $a_{i_1}\, a_{i_2} \ldots a_{i_k}$, intendendo che ciascuna delle notazioni i_1, i_2, ...,i_k rappresenti uno degli indici 1, 2 ...,m che distinguono i caratteri dell'alfabeto.

Vediamo dunque due agenti o esecutori, che identifichiamo con E_1 ed E_2, i quali si scambiano attraverso una linea di trasmissione che li pone in collegamento delle stringhe su $\mathfrak{a}$.
In molte azioni di comunicazione i due esecutori si possono scambiano i ruoli del mittente e del ricevente.
Un processo di comunicazione reale può comportare manovre fisiche piuttosto complesse, atte a rendere il processo efficiente e materialmente affidabile; qui vogliamo essere semplici ed essenziali e quindi

immaginiamo che i soli segni a_{i_j} vengano trasferiti da E_1 ad E_2 mantenendosi nell'ordine stabilito all'avvio. Sempre per semplicità, ricordando la tradizionale telegrafia o l'uso di nastri perforati risalente a Jaquart ed agli organetti che diffondevano musica nelle strade, supponiamo che un messaggio da inviare sia disponibile per E_1 su un nastro e dopo la ricezione sia disponibile per E_2 su un nastro simile.

K12 a.11 Le procedure che consentono di risolvere istanze di problema si possono ricondurre a trasformazioni di stringhe di caratteri per la comunicazione.

Queste trasformazioni vengono effettuate sulla base dei sistemi di regole o di istruzioni che chiamiamo algoritmi.
Anche queste regole sono esprimibili mediante stringhe nelle quali occorrono segni per la trasmissione a distanza che realizza la intercomunicazione e segni che riguardano manipolazioni dei segni suddetti e scelte che possono essere molto articolate, ma che assumiamo essere riconducibili alla decisione se due di tali segni sono dello stesso tipo o di due tipi diversi.
Nelle stringhe delle istruzioni devono comparire segni specifici esprimenti le manovre che servono alle manipolazioni dei segni per la intercomunicazione.

Con i segni della intercomunicazione si devono poter esprimere i dati delle istanze dei problemi che si intendono risolvere e i risultati delle manovre messe in atto secondo i dettami dell'algoritmo che sovraintende la elaborazione attuativa.
Questi dati sono definiti nell'ambito di un modello che sta alla base di un problema e sono quindi associati ad oggetti e processi che fanno parte del campo applicativo cui si rivolge il problema; in termini più semplici si parla di dati associati a oggetti e processi reali.

Le stringhe che sono manipolate per risolvere i problemi possono essere collegate a una vastissima gamma di oggetti di natura materiale o mentale, gamma in continua espansione.

In effetti si continua a constatare che mediante gli algoritmi si cercano di risolvere gamme via via più estese di problemi.

K12 b. finitezza delle attività per la matematica

K12 b.01 Tutte le attività di calcolo che si possono osservare si possono descrivere soddisfacentemente come processi che si svolgono nel finito.

La cosa è ben evidente per le attività di calcolo specifiche, sia quando sono richieste da singole circoscritte esigenze applicative, sia quando riguardano sperimentazioni finalizzate al chiarimento di fatti matematici come il comportamento delle soluzioni di un'equazione differenziale o la determinazione di un ulteriore componente di una successione di numeri speciali, per esempio un nuovo numero di Mersenne.

La gamma delle accennate sperimentazioni va da quelle che sono effettuate con carta e matita da un singolo studioso a quelle che che sono eseguite da complesse apparecchiature di calcolo automatico dotate di sistemi software sviluppati da attività che richiedono prestazioni che si misurano in migliaia di anni-uomo.

Per tutte le accennate attività di calcolo vengono utilizzate registrazioni di dati finite (su fogli di carta, lavagne, schermate o dispositivi di memoria elettromagnetici (nastri, dischi, a stato solido).
Per queste registrazioni si adottano rappresentazioni finite per tutte le numerose ma in numero finito entità in gioco (numeri approssimati, grafi, formule, configurazioni discrete, figure e animazioni digitalizzate).

K12 b.02 Ogni esecuzione di un calcolo consiste in una sequenza finita di manovre che riguardano operazioni eseguite manualmente o mentalmente da persone, oppure realizzate da dispositivi elettronici attraverso sequenze finite di operazioni che in prevalenza consistono in trasformazioni di sequenze di cifre decimali o, meglio, binarie.
Queste manovre sono governate da algoritmi che essenzialmente esprimono complessi di istruzioni imperative.

Nel passato gli algoritmi erano formulati in un linguaggio naturale e trasmesse ad operatori in carne ed ossa; un primo ampliamento si è avuto con Jacquard, Samuel Morse e Hollerith con l'uso di nastri perforati.
Oggi invece sono prevalentemente implementati da programmi consistenti in testi redatti in qualche linguaggio artificiale leggibile e interpretabile da un computer.
In ogni caso gli algoritmi sono formulati finitamente e tutte le loro esecuzioni sono effettuate in tempi finiti (quando non si sono ancora concluse).

K12 b.03 Altre attività significative e sistematiche afferenti alla matematica riguardano le definizioni delle sue entità, le formulazioni degli assiomi delle sue teorie, le dimostrazioni dei suoi enunciati più o meno direttamente collegati alla esecuzione di calcoli, la organizzazione formale dei suoi risultati, il suo insegnamento e la sua divulgazione e, ovviamente e primariamente, la ricerca di suoi nuovi risultati.
Definizioni, dimostrazioni e formalizzazioni sono esprimibili con testi leggibili da persone o macchine, ovviamente finiti e la ricerca di nuovi risultati.

I temi della didattica e della divulgazione della matematica sono molto sfaccettati e richiedono argomentazioni nelle quali intervengono tanti temi: studi di natura psicologica sull'apprendimento e sull'insegnamento, analisi dei processi cognitivi, esperienze di etnomatematica, analisi del linguaggio matematico e delle sue semplificazioni, tecniche della comunicazione, collegamenti con altre discipline (fisica, tecnologia, economia, storia, ...) strategie educative, valutazioni di studenti e docenti e molto altro.

Qui rinunciamo ad analizzare queste tematiche, per noi troppo complesse, e ci limitiamo a osservare che le comunicazioni riguardanti l'insegnamento della matematica sono rappresentabili con testi (scritti, sonori o animati) in continua rilevante espansione, ma evidentemente finiti.

K12 b.04 Attività matematiche ancor più difficoltose da osservare sono quelle che riguardano la ricerca matematica.
Sono disponibili vari testi che toccano questo tema e alcuni di essi giungono anche a toccare temi di psicologia della scoperta.
Si tratta comunque di testi contenenti molti elementi ipotetici

Per sostenere la finitezza di queste attività non facciamo altro che osservare la finitezza delle pubblicazioni relative, pur nella sua estensione e nella sua notevole crescitanegli anni.

Osserviamo anche che tra tutte queste attività finite una gran parte riguarda entità dichiarate infinite, a cominciare dall'insieme dei numeri interi naturali.

K12 c. introduzione dell'infinito potenziale discreto

K12 c.01 Una prima comparsa dell'infinito si ha quando si enunnciano fatti riguardanti entità singolarmente esprimibili nel finito, (come le stringhe su un alfabeto finito, i numeri interi, i numeri razionali e i digrafi) ma che si possono presentare con caratteristiche estensive (grandezza degli interi, precisione dei razionali, numero di nodi e spigoli, lunghezza delle stringhe) che in linea di principio non ammettono limitazioni.

Le caratteristiche estensive di queste entità non costituiscono ostacoli alla dimostrazione delle loro proprietà generali; esse invece possono incontrare ostacoli molto forti quando si cerca di disporre concretamente qualche loro singola istanza: ad esempio quando si cercasse di scrivere la notazione decimale del fattoriale della costante di Avogadro, ben maggiore del numero presunto delle molecole dell'universo osservabile.
Altri evidenti limiti possono trovare nei tempi che sarebbero richiesti per particolari elaborazioni su numeri razionali e digrafi.

Consideriamo la dimostrazione di Euclide della esistenza di infiniti numeri primi.
Se ci si vuole limitare a trattare solo situazioni concretamente realizzabili possiamo pensare una costruzione su numeri primi effettivamente utilizzata fino a un particolare primo p_1 e alla opportunità di applicarla per un successivo primo p_2. Il risultato di Euclide garantisce che questo è sicuramente fattibile e che un tale p_2 si può sicuramente trovare; in particolare si potrebbe assumere $p_2 = p_1! + 1$, prescindendo dall'impegno richesto dalla elaborazione successiva.

Consideriamo poi l'affermazione che due stringhe non mute commutano sse sono entrambe esprimibili come potenze di una loro sottostringa.
Si richieda di stabilire se due date stringhe w_1 e w_2 commutano e nel caso affermativo trovare la sottostringa delle quale sono entrambe potenze.
Si constata facilmente che il controllo della commutatività e la ricerca della sottostringa minima comune fattore sono idelmente fattibili, mentre in opportuni casi concreti si troverebbe necessaria una elaborazione estremanente costosa che rende praticamente impossibile la sua realizzazione.

K12 c.02 Considerazioni analoghe si possono svolgere per risultati che riguardano tutte le coppie di interi o di stringhe che dovrebbero soddisfano determinati requisiti, risultati per i quali si sono trovati metodi di verifica costruttivi sicuramente validi per tutte le coppie di interi o stringhe.

Nelle applicazioni specifiche si dispone di costruzioni eseguibili concretamente che consentono di risolvere tutte le esigenze singole che si possono presentare.
Ciascuna di queste situazioni riguarda problemi dei quali si sanno risolvere concretamente tutte le istanze specifiche ma che fanno emergere delle **esigenze di illimitatezza**.

Di fronte a uno di questi compiti che possono essere enormememente impegnativi, sul piano della pratica computazionale dobbiamo sottostare ai limiti realistici, mentre sul piano della condivisione di conoscenze operative condivisibili si riscontra una situazione di disagio: ai procedimenti attuabili solo in linea di principio si devono sostituire manovre ad hoc che implicano ulteriore studio e rischi di approssimazioni e di incertezze.

Si sente la forte opportunità di disporre di presentazioni di procedimenti costruttivi di ampia afficacia che si basa su enunciati tendenzialmente concise, che consentano a molti lettori di evitare di adentrarsi in analisi di algoritmi specifici al di fuori dei suoi interessi.

K12 c.03 Questa esigenza di concisione espositiva contribuisce anche alla disponibilità di presentazioni dei risultati che siano giudicate "più eleganti" e quindi favoriscano il procedere degli studi da parte delle persone.

Va osservato che la eleganza delle presentazioni, anche se non è spiegabile facilmente con argomentazioni pienamente condivisibili, viene ampiamente lodata e sicuramente influisce molto sulla crescita della diffusione delle acquisizioni degli studi scientifico-tecnologici e più in generale alla crescita culturale.

Di più: in matematica (e non solo) la presentazione concisa di risultati facilita grandemente la individuazione di possibili generalizzazioni e approfondimenti dei risultati; inoltre la tendenza alla generalizzazione e alla spesso concomitante astrazione possiede un importante valore nella organizzazione complessiva dei risultati della matematica (per il valore degli approfondimenti ogni commento è superfluo).

Aggiungiamo che la formulazione concisa dei risultati favorisce la loro memorizzazione, la loro armonizzazioe e la conseguente maggiore disponibilità dei risultati stessi.

K12 c.04 Tornando ai risultati senza limitazioni di principio sui numeri interi, sulle stringhe su due o più caratteri e sui digrafi (ossia sulle relazioni), la possibilità di enunciati concisi si ottiene facilmente con la introduzione di ambienti potenzialmente infiniti come $\mathbb{N}$ insieme dei numeri interi naturali, come $\mathcal{A}^*$ insieme di tutte le stringhe su un alfabeto finito $\mathcal{A}$, come $\mathbb{Q}$ e come **Dgrf**.

Con tali strumenti, con le relazioni di appartenenza che li riguardano, con le loro varie composizioni (prodotti e potenze cartesiane, passaggio ai sottoinsiemi) e con tutte le elaborazioni sui loro elementi (operazioni insiemistiche, operazioni sulle stringhe, funzioni e biiezioni calcolabili, ...) si risulta in grado di presentare enunciati concisi leggibili con una certa facilità e spesso una vastissima gamma di enunciati spesso molto efficaci anche sul piano computazionale.

Di questi enunciati ci limitiamo a presentare i seguenti.
$\forall n \in \mathbb{P} \;:\; \sum_{i=1}^{n} (2\,i+1) = n^2$
uguaglianza di espressioni di stringhe.

K12 c.05 Fin qui abbiamo considerato risultati esprimibili con espressioni evidentemente calcolabili, senza preoccuparci delle risorse che essi richiedono.
Si presenta anche l'opportunità di consentire la illimitatezza delle risorse utilizzabile nelle procedure.
Risulta assai vantaggioso permettere di parlare di procedimenti che possono servirsi di rappresentazioni illimitatamente precisabili di entità singolarmente definibili nel finito come scritture decimali di numeri algebrici non razionali.

È anche vantaggioso presentare macchine che possono procedere nei calcoli attraverso un numero illimitato di passi, ovvero servedosi illimitatamente della risorsa tempo, grandezza che qui si può considerare discreta e rappresentabile ricorrendo al solo $\mathbb{Z}$.
Inoltre risulta vantaggioso presentare macchine che possono basarsi su programmi illimitatamente articolati, ossia controllabili con complessi illimitati di istruzioni.

K12 c.06 Come vedremo tra poco, risulta decisamente opportuno introdurre altre forme di infinito.

Il primo passo lo vediamo consolidarsi con una congettura di illimitatezza per la estensione delle stringhe finite e in particolare per le scritture dei numeri interi in qualche base B.
Questo fa parte della illimitatezza di tutte le entità definibili con costruzioni dirette; questa comporta la possibilità di operare con le rappresentazioni specifiche e generiche di queste entità e di giungere a enunciati delle loro proprietà a un qualche livello di generalità.

In effetti ciascuna di queste entità (accettata la ipotesi della utilizzabilità della espressione "tutte le entità direttamente costruibili") si possono rappresentare con stringhe , oppure anche con interi naturali (grazie alle possibili cosiddette Goedelizzazioni delle stringhe).

Per segnalare una successione di interi naturali che cresce illimitatamente risulta conveniente disporre di una entità che denotiamo con la scrittura $+\infty$. Molti enunciati evidentemente si semplificano.
Ad essa si affiancano l'entità opposta che si denota con $-\infty$ e la più generica scritta identificata dal simbolo ∞; per queste entità risulta utile estendere la portata delle operazioni aritmetiche.

K12 c.07 Un passo ulteriore è consentito dalla congettura della possibilità di descrivere e trattare processi che sono in grado di evolversi illimitatamente servendosi, oltre che della risorsa consentita illimitata "numero di passi eseguibili", di risorse illimitate di memorie (in modo da potere trattare moltitudini illimitate di stringhe che codificano entità discrete definite da costruzioni dirette che si servono di numeri interi, digrafi, funzioni su interi e/o stringhe e qunt'altro.
Nella realtà non siamo in grado, né lo saremo mai, di osservare un processo che produce interi, stringhe o altre entità simili in numero illimitatamente alto.
A questo proposito conviene osservare che gli elaboratori di procedure operano nel tempo: una osservazione di un processo illimitato dovrebbe avere durata illimitata e solo in una fase successiva se ne potrebbero utilizzare i risultati, cosa mai vista.

K12 c.08 Consideriamo una funzione $f(n)$ che a ogni intero naturale associa un intero naturale e si sia verificato per tutti gli n fino a un certo valore M si tratta di una funzione cprogressivamente crescente in senso stretto.
Si sia anche stabilito che se si disponesse di ulteriori risorse illimitate la f continuerebbe ad essere crescente in senso stretto in quanto le sue condizioni operative non cambiano.
Un scenario di questo genere si può sostenere anche meglio facendo riferimento a macchine finitamente costruibili che si possono giudicare perfettamente funzionanti, ossia completamente affidabili; le macchine di Turing costituiscono esempi di tali macchine presentabile in modo particolarmente semplice.

Introduciamo come modello iniziale quello che favorisce la semplicità di presentazione della sua struttura, il modello finalizzato solo al progressibo ampliamento di un nastro di uscita destinato a contenere le codifiche unadiche dei successivi interi naturali.
Modelli con capacità più vicine ad applicazioni di interesse pratico sono le macchine in grado di generare stringhe su alfabeti di due o più caratteri via via crescenti secondo un ordine totale, ad esempio secondo un ordine lessicografico.
Tra queste macchine di secondo livello si trovano le macchine in grado di generare le notazioni posizionali degli interi naturali in una base $B = 2, 3, 4, ...$
L'equivalenza delle portate di queste macchine e del modello iniziale non presenta difficoltà e si ottiene dimostrando la possibilità di simulare con la macchina iniziale ogni macchina del secondo livello.

K12 c.09 In effetti le classi di equivalenza rispetto alla capacità generativa delle macchine di Turing risultano molto estese e variegate.
Per dimostrare che due macchine di Turing T_1 e T_2 sono equivalenti quando una delle due non è evidentemente meno ricca di prestazioni dell'altra, vanno individuati due meccanismi di simulazione: uno che permette a T_1 di simulare T_2 e l'altro che consente che T_2 simuli T_1.
Procedendo in tal modo si dimostra che una macchina di Turing con un solo nastro di lavoro equivale a macchine con più nastri; i nastri di macchine equivalenti possono essere ridotti a una sola casella o all'opposto diventare spazi discreti di registrazione bidimensionali o multidimensionali.

Con questi e simili ampliamenti delle prestazioni e dei dispositivi si possono avere macchine munite di vari tipi di sottomacchine che consentono loro comportamenti estremamente versatili.
Si possono avere sottomacchine molto specializzate rette da algoritmi elaborati e in grado di risolvere problemi circoscritti in un numero finito di passi.
Queste macchine si avvicinano quindi ai computers odierni,anzi a loro versioni idealizzate che si assume possano operare per tempi illimitati e possano essere dotati di memorie illimitatamente estendibili in relazione delle necessità che si rendono evidenti nel corso di una loro evoluzione.

Questi successi delle macchine di Turing inducono a prospettare la possibilità di individuare una macchina di Turing universale, cioè una macchina in grado di simulare ogni altra macchina che possa essere costruita.
In effetti Turing ha dimostrata questa possibilità nel 1936.

K12 c.10 L'esame delle prestazioni di queste macchine e dei molti meccanismi che si sono trovati loro equivalenti ha consentito di constatare che ogni elaborazione effettiva (e quindi finitaria) che si era constatato attuabile può essere eseguita da una macchina di Turing.
Tra queste elaborazioni vi sono anche quelle finalizzate alle elaborazioni simboliche di ogni genere, purché riguardanti entità definite in modo sufficientemente chiaro.
Questa caratterizzazione espressa in termini di auspicio può essere chiarita servendosi ancora di macchine di Turing o di macchine loro equivalenti.
Un genere di entità $\mathcal{E}$ va considerato definito in modo sufficientemente chiaro se è disponibile un alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ tale che ogni entità del genere $\mathcal{E}$ può essere descritta da una stringa sul detto alfabeto e se si dispone di un algoritmo $\mathcal{R}$ in grado di stabilire se una qualsiasi stringa sul nostro alfabeto esprime o meno una entità del genere $\mathcal{E}$.
Dalla disponibilità di $\mathcal{R}$ segue la possibilità di contare su una macchina in grado di procedere alla generazione progressiva di tutte le entità del genere $\mathcal{E}$; tale macchina consente un buon controllo delle entità di questo genere.

Si trova inoltre relativamente facile trasformare una macchina finalizzata alla soluzione di un dato problema in una macchina in grado di risolvere un secondo problema riconducibile algoritmicamente al primo.
Queste considerazioni e la conoscenza della macchina di Turing universale hanno indotto a formulare la cosiddetta congettura di Church-Turing: secondo essa ogni elaborazione sufficientemente ben formulata è eseguibile da una macchina di Turing o da uno dei molti meccanismi equivalenti.

K12 c.11 La macchina di Turing universale ha consentito anche di individuare problemi che risulta impossibile risolvere.
Si è posto il **problema dell'arresto per le macchine di Turing**: esiste un algoritmo in grado di decidere per ciascuna macchina di Turing e per ciascuno dei possibili sistemi di dati iniziali se la sua evoluzione si arresterà o meno?
Per rispondere basta porre il problema dell'arresto per la sola macchina universale, in quanto essa può simulare ogni altra macchina ed anche se stessa.
Turing stesso ha dimostrato in modo relativamente evidente che questo è impossibile.

Questo risultato negativo si è aggiunto ai teoremi di incompletezza di Goedel nello stabilire dei limiti alla portata delle possibili apparecchiature per il calcolo e quindi dei limiti della portata della stessa matematica.

La indecidibilità del problema dell'arresto comporta che non è decidibile in generale il problema di stabilire se una procedura è o non è algoritmica.

Da questo è seguita la individuazione di molti altri problemi indecidibili, espressi soprattutto come problemi concernenti linguaggi formali.

Queste limitazioni fanno emergere la opportunità di raggiungere dei compromessi nei progetti di attività computazionali.
Si tratta di abbassare la generalità della portata di problemi indecidibili per renderli decidibili in ambiti più ridotti e di fare riferimento a procedure riguardanti decisioni che effettuano i loro esami fornendo solo indicazioni favorevoli o sfavorevoli ad una soluzione e quindi portano alla opportunità di ricercare soluzioni empiriche, in particolare soluzioni approssimate e soluzioni che si possono considerare solo valide con buona probabilità.

Considerando questi temi in termini di linguaggi formali si giunge alla netta distinzione tra i linguaggi ricorsivi e i rimanenti linguaggi ricorsivamente enumerabili.

K12 d. metodo assiomatico

K12 d.01 A partire, all'incirca, dall'inizio del secolo XIX si è riscontrato un progressivo allargamento delle conoscenze matematiche e dell'approfondimento dei suoi temi. Inoltre nulla fa pensare che questo progredire debba venir meno nei prossimi anni; viceversa la progressiva crescita della richiesta di contributi matematici a un insieme via via più esteso di applicazioni e gli stimoli che le provengono alla matematica dall'utilizzo dei computers per lgli sviluppi scientifico-tecnologici, rafforzano la fiducia della possibilità di ulteriori rilevanti futuri avanzamenti.

La tendenza alla generalizzazione e alla astrazione risultano sostanzialmente indispensabili per realizzare le sintesi dei risultati, le accurate distinzioni della relativa casistica e la complessiva economia di pensiero che rendono possibili il mantenimento del ritmo di crescita degli sviluppi scientifico-tecnologici.

K12 d.02 Un altro fenomeno rilevante riguarda l'opportunità pratica di sostituire molti modelli discreti con modelli continui quasi equivalenti al fine di rendere più fattibili le relative attività computazionali. In particolare si possono ricordare la sostituzione di distribuzioni statistiche su fenomeni che si presentano discreti con distribuzioni continue che si sanno meglio trattare con calcoli simbolici e le espressioni asintotiche per $n!$ e per simili funzioni discrete.

Non sono poche le espressioni di processi nel continuo che risultano molto più maneggevoli delle espressioni dei processi discreti che approssimano, espressioni queste che in genere non sono disponibili ma sono solo ipotizzate.
I processi nel continuo che sostituiscono processi nel discreto spesso conducono a sviluppi più avanzati e approfonditi grazie alla mole di risultati della matematica del continuo e delle corrispondenti tecniche computazionali che si sono potute accumulare a partire dal XVIII secolo (Eulero, Lagrange, Laplace, Gauss, ...).

Trattando vari modelli continui risulta possibile giungere, oggi anche attraverso elaborazioni simboliche effettuabili mediante sistemi automatici (si parla di CAS, Computer Algebra Systems) ad espressioni che si servono di funzioni continue.
Queste spesso costituiscono la base di calcoli approssimati eseguibili facilmente ed efficientemente con procedure automatiche i quali consentono di giungere a soluzioni praticamente soddisfacenti di problemi specifici posti da una vasta gamma di applicazioni.

K12 d.03 Riteniamo opportuno presentare anche alcune considerazione sul piano pratico riguardanti il ruolo che stanno avendo gli odierni strumenti informativi resi ampiamente disponibili dalle tecnologie elettronico-telematiche a favore dello sviluppo delle attività matematiche e, di conseguenza, sulla fiducia che continua ad appoggiarle, nonostante la odierna caduta di molte precedenti certezze.

Un primo settore influenzato è, evidentemente, quello dei calcoli effettivi. Tutti ora hanno accesso a strumenti efficienti per il calcolo numerico, per la produzione di grafici e per il calcolo simbolico.
Moltissime apparecchiature, dalle lavatrici alle sonde spaziali, hanno incorporati strumenti di calcolo specializzati sempre più raffinati e affidabili.
Inoltre per affrontare i problemi più impegnativi vengono via via proposti e realizzati strumenti computazionali, riassumibili con il termine supercomputers, sempre più poderosi; molti di questi sono i gangli di sistemi reticolari con portata planetaria per fini quali il controllo dei traffico aereo, la conduzione delle previsioni meteorologiche, il monitoraggio ambientale planetario, la gestione di reti logistiche, la utilizzazione a distanza degli osservatori astronomici (per non parlare di attività belliche, di spionaggio e di disinformazione).

Questo ha consentito in particolare lo sviluppo di una matematica sperimentale che consente di esaminare con tecniche di simulazione equazioni, strutture formali e procedimenti costruttivi al fine di ampliare la conoscenza di entità o problemi recentemente proposti e di controllare congetture per rafforzarle con esempi parziali o per smentirle con controesempi.
I molti strumenti computazionali attuali sono ampiamente usati anche nelle attività che si servono di modelli matematici ed i loro risultati talora sono dei notevoli stimoli alle indagini dei matematici di professione.

K12 d.04 Un altro settore influenzato riguarda le attività di pubblicazione: oggi la maggioranza dei cultori diretti e indiretti della matematica possono produrre personalmente dei documenti contenenti formule e grafici servendosi di prodotti software che in buona parte aderiscono ai principi dell'open source.

In particolare ha grande importanza il sistema di typesetting TEX dovuto a Donald Knuth, insieme al derivato LaTeX sviluppato da Leslie Lamport.

Questi sistemi, ormai standard de facto, hanno ridotto tempi e costi di redazione ed hanno favorito la condivisione di simboli, di notazioni e di stili tipografici e la loro unificazione, almeno nell'ambito di varie singole aree.

Forte impulso alla comunicazione tempestiva dei risultati di una disciplina ad alto livello di obiettività e di rigore come la matematica viene dato dalla rete Internet.
Molte ricerche possono essere svolte con ridotto consumo di risorse da piccoli gruppi di ricercatori che operano anche in località lontane e che spesso non si sono mai viste di persona.
La rete Internet ha inoltre consentito lo sviluppo di riviste elettroniche, di pagine di ricercatori ricche di preprints, di siti divulgativi di alto livello e di banche dati internazionali riguardanti soprattutto recensioni di pubblicazioni scientifiche.

Si è quindi costituita una infrastruttura per la condivisione della matematica in posizione privilegiata nell'ambito della più ampia infrastruttura per il complesso delle discipline scientifico-tecnologiche.

Un ultimo accenno va fatto all'appoggio che possono avere gli strumenti di documentazione per i ricercatori anziani che spesso sono colpiti da riduzione della di memoria e della capacità di concentrazione e che il maggiore isolamento potrebbe demotivare e tenere lontano dagli avanzamenti nel loro campo di interessi.

`Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`