1

Capitolo I49
operatori su campi scalari e vettoriali

Contenuti delle sezioni

20 pagine

I490.01 In questo capitolo si riprendono alcuni risultati dei capitoli sulle funzioni di più variabili reali a valori reali per riformularli servendosi di operatori differenziali vettoriali, in particolare facendo uso dell'operatore nabla.
Molti risultati vengono estesi, in particolare servendosi di vari sistemi di coordinate curvilinee ortogonali.

I49 a. operatore nabla

I49a.01 I risultati che presenteremo riguardano campi scalari e vettoriali che si possono basare su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, su $\mathbb{R}^{\times 3}$ e sul più generale $\mathbb{R}^{\times d}$. Taluni di essi possono anche riguardare coordinate e variabili complesse.

Data la varietà delle situazioni che possono essere coinvolte, molti simboli possono avere interpretazioni diverse. Chiaramente i simboli con più significati dovranno essere usati solo in contesti in grado di evitare ogni ambiguità.

Ci serviremo di riferimenti cartesiani denotando i sistemi di vettori di base ortonormali con $\langle \mathsf{e}_x, \mathsf{e}_y \rangle$ per $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, con $\big\langle \mathsf{e}_x, \mathsf{e}_y, \mathsf{e}_z \big\rangle$ o con l'equivalente terna $\big\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, \mathsf{e}_3 \big\rangle$ per $\mathbb{R}^{\times 3}$ e con $\langle \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ per $\mathbb{R}^{\times d}$.

Useremo la variabile posizionale r che, facendo uso delle coordinate cartesiane, potrà essere interpretata come $\mathsf{r} = \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, come $\mathsf{r} = \langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^{\times 3}$ o come $\mathsf{r} = \langle x_1, ..., x_d \rangle := \big\langle x_1, ..., x_d \big\rangle \in \mathbb{R}^{\times d}$.

Prenderemo in considerazione campi scalari denotati con $\Phi(\mathsf{r})$ e $\Psi(\mathsf{r})$ che nei tre casi si esplicitano scrivendo, risp., $\Phi(x, y), \Psi(x, y) \in \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, $\Phi(x, y, z), \Psi(x, y, z) \in \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ e $\Phi(x_1, ..., x_d), \Phi(x_1, ..., x_d) \in \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$.
Inoltre esamineremo campi vettoriali denotandoli con $\mathsf{F}(\mathsf{r})$ e $\mathsf{G}(\mathsf{r})$ esplicitandoli nei tre casi, risp., con scritture come $\mathsf{F} = \langle X, Y \rangle \in \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$, come $\mathsf{G} = \langle P, Q, R \rangle \in \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$ o come $\mathsf{F} = \big\langle F_1, ..., F_d \big\rangle \in \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil$.

I49a.02 Definiamo **operatore nabla**, risp., in due, in tre e in d dimensioni con le seguenti espressioni

$$\nabla := \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle = \mathsf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathsf{j} \frac{\partial}{\partial y} \in \Big\{ \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil \longrightarrow \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil \Big\} ;$$

$$\nabla := \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \mathsf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathsf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathsf{k} \frac{\partial}{\partial z} \in \Big\{ \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil \longrightarrow \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil \Big\} ;$$

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_d} \right\rangle = \mathsf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \mathsf{e}_d \frac{\partial}{\partial x_d} \in \Big\{ \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil \longrightarrow \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil \Big\} .$$

Evidentemente ciascuno di essi coincide con l'operatore gradiente nelle corrispondenti dimesioni; per ciascuno di essi si usano anche i termini operatore del e operatore di Hamilton.

I49a.03 Gli operatori nabla, come gli operatori derivate parziali, sono lineari e sul prodotto di funzioni agiscono e come l'operatore derivata; in termini algebrici quindi sono chiamati operatori derivata, ovvero operatoi per l quali valgono le proprietà

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \;\; \vdots \;\; \nabla(\alpha\Phi + \beta\Psi) = \alpha \nabla \Phi + \beta \nabla \Psi \qquad , \qquad \nabla(\Phi \, \Psi) = \Phi \nabla \Psi + \Phi \nabla \Psi \; .$$

I49a.04 L'operatore nabla trasforma un campo scalare in un campo vettoriale conservativo e viceversa ogni campo vettoriale conservativo $\mathsf{E}(\mathsf{r})$ si può esprimere come trasformato da nabla di un campo scalare $V(\mathsf{r})$, chiamato **campo potenziale** di $\mathsf{E}(\mathsf{r})$.
Evidentemente questo $V(\mathsf{r})$ è definito a meno di una arbitraria costante additiva: $\nabla(V(rSd) + \mathtt{C}) = \nabla V(\mathsf{r})$.

I49 b. divergenza e rotore

I49b.01 Come l'operatore gradiente, anche l'operatore divergenza si può definire in uno spazio d-dimensionale ed appartiene al genere $\lceil\, \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil \;\longrightarrow\; \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil\, \rceil$.

Esso si può esprimere, talora vantaggiosamente, come il prodotto scalare dell'operatore nabla per il campo vettoriale cui si applica:

$$\operatorname{div}[\mathbf{F}(\mathbf{r})] \;:=\; \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}) \;:=\; \frac{\partial}{\partial x_1}F_1(\mathbf{r}) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_d}F_d(\mathbf{r}) \;.$$

I49b.02 L'operatore rotore si applica solo a spazi tridimensionali ed appartiene al genere $\lceil\, \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil \;\longrightarrow\; \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil\, \rceil$.

Talora conviene esprimerlo come il prodotto vettore dell'operatore nabla per il campo vettoriale cui si applica:

$$\operatorname{rot}[\mathbf{F}(\mathbf{r})] \;=\; \operatorname{curl}[\mathbf{F}(\mathbf{r})] \;:=\; \nabla\wedge\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}Z - \frac{\partial}{\partial z}Y\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}X - \frac{\partial}{\partial x}Z\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}Y - \frac{\partial}{\partial y}X\right) \;.$$

I49b.03 Sia la divergenza che il rotore sono operatori lineari

$$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \;\;:\;\; \nabla\cdot(\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G}) = \alpha\nabla\cdot\mathbf{F}+\beta\nabla\cdot\mathbf{G} \quad,\quad \nabla\wedge(\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G}) = \alpha\nabla\wedge\mathbf{F}+\beta\nabla\wedge\mathbf{G} \;.$$

È interessante osservare come si comportano quando si applicano ad un campo vettoriale esprimibile come prodotto di un campo scalare per un campo vettoriale: dalle definizioni si ricava

$$\nabla\cdot[\Phi\,\mathbf{F}] = \Phi\,\nabla\cdot\mathbf{F} + [\nabla\Phi]\cdot\mathbf{F} \qquad \text{e} \qquad \nabla\wedge[\Phi\mathbf{F}] = \Phi\,\nabla\wedge\mathbf{F} + [\nabla\Phi]\wedge\mathbf{F} \;.$$

Entrambi gli operatori si comportano similmente alla derivata: questo dipende dal fatto che nelle definizioni di entrambi gli operatori compaiono linearmente gli operatori di derivazione parziale.

I49b.04 Occorre inoltre evidenziare come si comportano gli operatori divergenza e rotore quando agiscono sopra un campo vettoriale esprimibile come prodotto vettore di due campi vettoriali.

$$\nabla\cdot[\mathbf{F}\wedge\mathbf{G}] = \mathbf{G}\cdot[\nabla\wedge\mathbf{F}] - \mathbf{F}\cdot[\nabla\wedge\mathbf{G}] \;,$$
$$\nabla\wedge[\mathbf{F}\wedge\mathbf{G}] = [\mathbf{G}\cdot\nabla]\mathbf{F} - [\mathbf{F}\cdot\nabla]\wedge\mathbf{G} + \mathbf{F}[\nabla\cdot\mathbf{G}] - \mathbf{G}[\nabla\cdot\mathbf{F}] \;.$$

I49b.05 L'operatore nabla viene spesso applicato su un campo scalare esprimibile come prodotto scalare di due campi vettoriali: con il seguente effetto:

$$\nabla[\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{r})] \;=\; [\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\nabla]\,\mathbf{G}(\mathbf{r}) + [\mathbf{G}(\mathbf{r})\cdot\nabla]\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \mathbf{F}(\mathbf{r})\wedge[\nabla\wedge\mathbf{G}(\mathbf{r})] + \mathbf{F}(\mathbf{r})\wedge[\nabla\wedge\mathbf{G}(\mathbf{r})] \;.$$

I49b.06 Esplicitiamo altre proprietà riguardanti l'applicazione ripetuta dell'operatore nabla.

$\forall\Phi\in\lceil \mathbb{R}^{\times d}\longrightarrow\mathbb{R}\rceil \;:\; \nabla\wedge[\nabla\Phi] = \mathbf{0}$.

Più globalmente si ha che in alcune regioni, per esempio in ogni insieme convesso:

$\mathbf{F} = \nabla\Phi \iff \nabla\wedge\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Una funzione Φ che gode di questa proprietà viene detta **potenziale scalare** della $\mathbf{F}$.

$\forall\mathbf{F}\in\lceil \mathbb{R}^{\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^{\times d}\rceil \;:\; \nabla\cdot[\nabla\wedge\mathbf{F}] = 0$.

Più globalmente si ha che in alcune regioni, per esempio in ogni insieme convesso accade:

$\mathbf{F} = \nabla\wedge\mathbf{G} \iff \nabla\mathbf{F} = 0$.

In una tale situazione la funzione $\mathbf{G}$ viene detta **potenziale vettore** della $\mathbf{F}$.

$\forall\mathbf{F}\in\lceil \mathbb{R}^{\times d}\longrightarrow\mathbb{R}^{\times d}\rceil \;:\; \nabla\cdot[\nabla\wedge\mathbf{F}] = 0$.

I49 c. operatore laplaciano e operatore biarmonico

I49c.01 Come il gradiente e la divergenza, anche l'**operatore laplaciano** si può definire in uno spazio d-dimensionale; esso si può applicare sia ai campi scalari che ai campi vettoriali e appartiene al genere

$$\lceil\ \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil \ \longrightarrow\ \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil\ \rceil \bigcup \lceil\ \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil \ \longrightarrow\ \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil\ \rceil\ .$$

Esso si definisce come prodotto ripetuto dell'operatore nabla: $\nabla^2 \ :=\ \text{div}[\text{grad}]$.
Spesso l'operatore laplaciano viene identificato con il simbolo Δ e talvolta con la scrittura Δ_2.

Più esplicitamente, per il piano, per lo spazio tridimensionale e per il generico spazio d-dimensionale, risp., si scrive

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad , \qquad \nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad , \qquad \nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial {x_d}^2}$$

I49c.02 Il laplaciano si incontra nella espressione per l'applicazione doppia dell'operatore rotore

$$\nabla \wedge [\nabla \wedge \mathbf{F}] \ =\ \nabla[\nabla \cdot \mathbf{F}] - \nabla^2 \mathbf{F}\ .$$

I49c.03 Le funzioni che soddisfano le equazioni $\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0$ si dicono **funzioni armoniche**. Ricordiamo che sono funzioni armoniche la parte reale e la parte immaginaria di ogni funzione olomorfa. .

I49c.04 Si dice **operatore biarmonico** l'operatore ottenuto applicando due volte l'operatore laplaciano. Anch'esso si può applicare sia a campi scalari che a campi vettoriali. Si trova facilmente la seguente espressione

$$\nabla^4 = \text{div grad div grad} = \frac{\partial^4}{\partial {x_1}^4} + \cdots + \frac{\partial^4}{\partial {x_d}^4} + 2 \sum_{i=1}^{j} \sum_{j=i+1}^{d} \frac{\partial^4}{\partial {x_i}^2 \partial {x_j}^2}\ .$$

Si dice **funzione biarmonica** ogni funzione che soddisfa un'equazione della forma $\nabla^4 \Phi(\mathbf{r}) \ =\ 0$.
Evidentemente ogni funzione armonica è anche biarmonica, ma vi sono funzioni biarmoniche che non sono armoniche.

I49 d. formule differenziali in coordinate curvilinee ortogonali

I49d.01 Cominciamo ora a vedere come si esprimono le entità che si incontrano nello studio differenziale dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ quando si passa da un sistema di riferimento basato su coordinate cartesiane ortogonali (che si suppongono monometriche e caratterizzate da una terna destrorsa) ad un generico sistema basato su coordinate curvilinee ortogonali.
Per le terne di coordinate cartesiane useremo sia la notazione $\langle x,y,z\rangle$ che la $\big\langle x_1,x_2,x_3\big\rangle$ che consideriamo equivalenti; per le terne di coordinate curvilinee useremo come equivalenti le notazioni $\langle u,v,w\rangle$ e $\big\langle u_1,u_2,u_3\big\rangle$.
I due sistemi di riferimento, supposto che le origini siano O e $\overline{O}$, verranno denotati, risp., con Oxyz e con $\overline{O}uvw$. Nel seguito tuttavia, salvo avviso contrario supponiamo che i due sistemi abbiano origini coincidenti, $\overline{O}=O$, in modo da evitare di avere a che fare con traslazioni.

Il collegamento sia stabilito da un sistema di trasformazioni della forma

$$\begin{cases} x = X(u,v,w) \\ y = Y(u,v,w) \\ z = Z(u,v,w) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x_1 = X_1(u_1,u_2,u_3) \\ x_2 = X_2(u_1,u_2,u_3) \\ x_3 = X_3(u_1,u_2,u_3) \end{cases} .$$

Alle trasformazioni inverse diamo la forma

$$\begin{cases} u = U(x,y,x) \\ v = V(x,y,x) \\ w = W(x,y,x) \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} u_1 = U_1(x_1,x_2,x_3) \\ u_2 = U_2(x_1,x_2,x_3) \\ u_3 = U_3(x_1,x_2,x_3) \end{cases} .$$

Un punto dello spazio viene individuato mediante i versori di base con espressioni come le seguenti $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = x_1\widehat{x_1} + x_2\widehat{x_2} + x_3\widehat{x_3}$ e da $\mathbf{r} = u\widehat{u} + v\widehat{v} + w\widehat{w} = u_1\widehat{u_1} + u_2\widehat{u_2} + u_3\widehat{u_3}$.
Ricordiamo che in altri punti usiamo le notazioni $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y$ e $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z$.

Un campo scalare sarà individuato da $\Phi(x,y,z)$ o da $\overline{\Phi}(u,v,w)$.
Un campo vettoriale da $\mathbf{F}(x,y,z) = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y + F_z\mathbf{e}_z$ o da $\overline{\mathbf{F}}(u,v,w) = F_u\widehat{u} + F_v\widehat{v} + F_w\widehat{w}$.
La condizione di ortogonalità per le coordinate $\langle u,v,w\rangle$ sono espresse dalle equazioni

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_j} = k_i\delta_{i,j} \qquad \text{per} \quad i,j = 1,2,3 \ .$$

Il sistema delle $\langle u,v,w\rangle$ risulta destrorso sse per il determinante jacobiano si ha $\dfrac{\partial\langle x,y,z\rangle}{\partial\langle u,v,w\rangle} > 0$.

I49d.02 I versori del sistema $\big\langle u_1,u_2,u_3\big\rangle$ sono ottenuti come

$$\widehat{u_i} = \frac{\nabla U_i}{|\nabla U_i|} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_i} \Big/ \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_i}\right| \qquad \text{per} \quad i = 1,2,3 \ .$$

Per il collegamento tra i due sistemi conviene riferirsi ai tre parametri chiamati **fattori di scala**

$$h_i \ := \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u_i}\right| = \frac{1}{|\nabla U_i|} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u_i}\right)^2} \qquad \text{per} \quad i = 1,2,3 \ .$$

Osserviamo esplicitamente che i fattori di scala possono essere funzioni di $\mathbf{r} = \langle u,v,w\rangle$.

I49d.03 Per le componenti di un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ si trova

$$F_{u_i} \ = \ \frac{1}{h_i}\left(F_x\frac{\partial X}{\partial u_i} + F_y\frac{\partial Y}{\partial u_i} + F_z\frac{\partial Z}{\partial u_i}\right) \qquad \text{per} \quad i = 1,2,3 \ .$$

Per il vettore spostamento infinitesimo

$$\mathrm{d}\,\mathbf{r} \;=\; h_1\,\mathrm{d}u_{\,1}\,\mathbf{u}_1 + h_2\,\mathrm{d}u_{\,2}\,\mathbf{u}_2 + h_3\,\mathrm{d}u_{\,3}\,\mathbf{u}_3\ .$$

Per la lunghezza dell'arco infinitesimo

$$\mathrm{d}\,s^2 = |\mathrm{d}\,\mathbf{r}|^2 = {h_1}^2\mathrm{d}{u_{\,1}}^2 + {h_2}^2\mathrm{d}{u_{\,2}}^2 + {h_3}^2\mathrm{d}{u_{\,3}}^2\ .$$

Per gli elementi infinitesimi di superficie

$$h_1\,h_2\,\mathrm{d}u_{\,1}\,\mathrm{d}u_{\,2} \qquad , \qquad h_2\,h_3\,\mathrm{d}u_{\,2}\,\mathrm{d}u_{\,3} \qquad , \qquad h_3\,h_1\,\mathrm{d}u_{\,3}\,\mathrm{d}u_{\,1}\ .$$

Per il volume infinitesimo

$$\mathrm{d}\,V = h_1\,h_2\,h_3\,\mathrm{d}u_{\,1}\,\mathrm{d}u_{\,2}\,\mathrm{d}u_{\,3}\ .$$

I49d.04 Veniamo ora alle espressioni per l'operatore nabla e le sue applicazioni.

$$\nabla\,\overline{\Phi} = \mathrm{grad}\,\overline{\Phi} \;=\; \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial u_1}\,\mathbf{u}_i \quad ,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\;\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1\,h_2\,h_3}{h_i}F_{u_i}\right) \quad ,$$

$$\nabla\wedge\mathbf{F} \;=\; \mathrm{rot}\mathbf{F} \;=\; \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\;\det\begin{bmatrix} h_1\,\widehat{u_1} & h_2\,\widehat{u_2} & h_3\,\widehat{u_3} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1\,F_{u_1} & h_2\,F_{u_2} & h_3\,F_{u_3}\end{bmatrix} \quad ,$$

$$\nabla^2\overline{\Phi} \;=\; \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\;\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1\,h_2\,h_3}{h_i}\,\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial u_i}\right)\ .$$

I49 e. coordinate polari e coordinate cilindriche

I49e.01 Definiamo **coordinate cilindriche in 3D** le tre variabili $\rho \in \mathbb{R}_{0+}$, $\phi \in (-\pi, \pi]$ e $z \in \mathbb{R}$.
Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dai due sistemi delle trasformazioni mutuamente inverse

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \operatorname{atan2}(y,x) \\ z = z \end{cases} .$$

Ricordiamo che si definisce

$$\operatorname{atan2}(y,x) := \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{sse} \quad x > 0 \\ \arctan(y/x) + \frac{\pi}{2} & \text{sse} \quad x < 0 \ \text{ e } \ y > 0 \\ \arctan(y/x) - \frac{\pi}{2} & \text{sse} \quad x < 0 \ \text{ e } \ y < 0 \end{cases}$$

e che si usa questa funzione ridondante per ottenere valori di ϕ nell'intero $(-\pi, \pi]$.
Se ci si limita a considerare il piano $z = 0$ si hanno le **coordinate polari piane**.

Le relazioni tra i vettori di base ricavate da d02(1) sono

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \widehat{\rho}\cos\phi - \widehat{\phi}\sin\phi \\ \mathbf{e}_y = \widehat{\rho}\sin\phi + \widehat{\phi}\cos\phi \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases} \iff \begin{cases} \widehat{\rho} = \mathbf{e}_x\cos\phi + \mathbf{e}_y\sin\phi \\ \widehat{\phi} = -\mathbf{e}_x\sin\phi + \mathbf{e}_y\cos\phi \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \end{cases} ,$$

I tre fattori di scala [d02(2)) sono $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$ e $h_3 = 1$.

I49e.02 Le relazioni tra le componenti dei campi vettoriali sono

$$\begin{cases} F_x = F_\rho\cos\phi - F_\phi\sin\phi \\ F_y = F_\rho\sin\phi + F_\phi\cos\phi \\ F_z = F_z \end{cases} \iff \begin{cases} F_\rho = F_x\cos\phi + F_y\sin\phi \\ F_\phi = -F_x\sin\phi + F_y\cos\phi \\ F_z = F_z \end{cases} .$$

$\mathrm{d}\mathbf{r} = \widehat{\rho}\,\mathrm{d}\rho + \widehat{\phi}\,\rho\,\mathrm{d}\phi + \mathbf{e}_z\,\mathrm{d}z$

$\mathrm{d}\,s^2 = \mathrm{d}\,\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^{\,2} + \mathrm{d}z^{\,2}$

$\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\phi \quad , \quad \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \quad , \quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

$\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$

I49e.03 Per gli operatori differenziali abbiamo le seguenti relazioni:

$$\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\widehat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\widehat{\phi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \operatorname{div}\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

$$\nabla\wedge\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\widehat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\widehat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial\rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial\phi}\right)\mathbf{e}_z$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

I49 f. coordinate sferiche

I49f.01 Le **coordinate sferiche** in $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono: $r \in \mathbb{R}_{0+}$, $\theta \in (0,\pi]$ e $\phi \in (-\pi,\pi]$.
Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle seguenti trasformazioni mutuamente inverse

$$\begin{cases} x = r\,\sin\theta\,\cos\phi \\ y = r\,\sin\theta\,\sin\phi \\ z = r\,\cos\theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ \phi = \operatorname{atan2}(y,x) \end{cases} .$$

Le relazioni tra i vettori di base ricavate da d02(1) sono

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \widehat{r}\sin\theta\cos\phi + \widehat{\theta}\cos\theta\cos\phi - \widehat{\phi}\sin\phi \\ \mathbf{e}_y = \widehat{r}\sin\theta\sin\phi + \widehat{\theta}\cos\theta\sin\phi + \widehat{\phi}\cos\phi \\ \mathbf{e}_z = \widehat{r}\cos\theta - \widehat{\theta}\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \widehat{r} = \mathbf{e}_x\sin\theta\cos\phi + \mathbf{e}_y\sin\theta\sin\phi + \mathbf{e}_z\cos\theta \\ \widehat{\theta} = \mathbf{e}_x\cos\theta\cos\phi + \mathbf{e}_y\cos\theta\sin\phi - \mathbf{e}_z\sin\theta \\ \widehat{\phi} = -\mathbf{e}_x\sin\phi + \mathbf{e}_y\cos\phi \end{cases}$$

I tre fattori di scala, introdotti in d02(2), sono $h_1 = 1$, $h_2 = r$ e $h_3 = r\sin\theta$.

I49f.02 Le relazioni tra le componenti dei campi vettoriali sono

$$\begin{cases} F_x = F_r\sin\theta\cos\phi + F_\theta\cos\theta\cos\phi - F_\phi\sin\phi \\ F_y = F_r\sin\theta\sin\phi + F_\theta\cos\theta\sin\phi + F_\phi\cos\phi \\ F_z = F_r\cos\theta - F_\theta\sin\theta cr \end{cases} \iff \begin{cases} F_r = F_x\sin\theta\cos\phi + F_y\sin\theta\sin\phi + F_z\cos\theta \\ F_\theta = F_x\cos\theta\cos\phi + F_y\cos\theta\cos\phi - F_z\sin\theta \\ F_\phi = -F_x\sin\phi + F_y\cos\phi \end{cases} .$$

$\mathrm{d}\mathbf{r} = \widehat{r}\,\mathrm{d}r + \widehat{\theta}\,r\,\mathrm{d}\theta + \widehat{\phi}\,r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\phi$

$\mathrm{d}\,s^2 = \mathrm{d}r^{\,2} + r^2\,\mathrm{d}\,\theta^2 + r^2\,\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$

$r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, $r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\phi$, $r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$

$\mathrm{d}V = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\phi$

I49f.03 Tra gli operatori differenziali abbiamo le seguenti uguaglianze:

$$\nabla\Phi = \operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\widehat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\widehat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\widehat{\phi}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \operatorname{div}\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

$$\nabla\wedge\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial F_\phi\sin\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}\right)\widehat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial rF_\phi}{\partial r}\right)\widehat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\widehat{\phi}$$

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

$$= \lfloor\, \kappa := \cos\theta \,\rfloor = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial\kappa}\left((1-\kappa^2)\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}\right) + \frac{1}{1-\kappa^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\right]$$

I49 g. coordinate paraboliche

I49g.01 Le **coordinate paraboliche** sono utilizzate sia nel piano che nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$. Le prime sono caratterizzate da linee coordinate costituite da parabole confocali; le seconde si ottengono dalle prime ruotando le suddette parabole intorno al loro asse di simmetria

I49g.02 Denotiamo le due coordinate con σ e τ. Le parabole hanno come fuoco comune l'origine $\langle x, y\rangle = \langle 0, 0\rangle$ e come asse comune la retta $x = 0$.

$$\begin{cases} x &= \sigma\,\tau \\ y &= \frac{1}{2}\,(\tau^2 - \sigma^2) \end{cases}$$

Fattori di scala sono $h_\sigma \;=\; h_\tau \;=\; \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$.
L'elemento infinitesimo di area è $\,\mathrm{d}A \;=\; (\sigma^2 + \tau^2)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$.

I49g.03 L'operatore laplaciano è

$$\nabla^2\Phi \;=\; \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right) \;.$$

I49g.04 Le superfici coordinate sono paraboloidi confocali

$$\begin{cases} x &= \sigma\,\tau\,\cos\phi \\ y &= \sigma\,\tau\,\sin\phi \\ z &= \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \sigma^2\right) \end{cases} ,$$

ove $\;\phi = \operatorname{atan2}(y, x)$. Il tensore metrico di Riemann è

$$g_{i,j} - \begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 + \tau^2 \end{bmatrix}$$

Fattori di scala sono $\;h_\sigma \;=\; h_\tau \;=\; \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\;$ e $\;h_\phi \;=\; \sigma\,\tau$.
L'elemento infinitesimo di volume è $\,\mathrm{d}V \;=\; \sigma\,\tau(\sigma^2 + \tau^2)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$.

I49g.05 L'operatore laplaciano è

$$\nabla^2\Phi \;=\; \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right)\right] + \frac{1}{\sigma^2\,\tau^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} \;.$$

I49 h. coordinate ellittiche e coordinate ellittico-cilindriche

I49h.01 Le **coordinate ellittiche** sono coordinate ortogonali per il piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ caratterizzate da linee coordinate costituite da ellissi e iperboli confocali. Per i due fuochi assumiamo che siano i punti $\langle -a,0\rangle$ e $\langle a,0\rangle$ appartenenti all'asse Ox e denotiamo le due coordinate con $\mu\in\mathbb{R}_{0+}$ e con $\nu\in[0,2\pi)$.

Il collegamento con le coordinate cartesiane è dato dai sistemi di uguaglianze

$$\begin{cases} x &= a\ \cosh\mu\ \cos\nu \\ y &= a\ \sinh\mu\ \sin\nu \end{cases} .$$

Il primo sistema si può riesprimere concisamente con l'uguaglianza $x+\mathrm{i}\,y=a\ \cosh(\mu+\mathrm{i}\,\nu)$.

I49h.02 I fattori di scala sono dati da $h_\mu=h_\nu=a\ \sqrt{\sinh^2\mu+\sin^2\nu}=a\ \sqrt{\frac12\,(\cosh\,2\mu=-\cos\ 2\nu)}$.

L'elemento infinitesimale di area è dato da $\mathrm{d}A\ =\ a^2\ \left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)\ \mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu$.

L'operatore laplaciano è $\nabla^2\Phi=\dfrac{1}{a^2\left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)}\ \left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2}\right)$.

I49h.03 Le **coordinate ellittico-cilindriche** sono le più semplici estensioni a $\mathbb{R}^{\times 3}$ delle coordinate ellittiche e si ottengono aggiungendo semplicemente la coordinata z alle ellittiche piane. Vedremo in seguito le altre estensioni costituite dalle coordinate ellissoidali, sferoidali oblate e sferoidali prolate.

Le coordinate sono $\mu\in\mathbb{R}$, $\nu\in[0,2\pi)$ e $z\in\mathbb{R}$ e il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x &= a\ \cosh\mu\ \cos\nu \\ y &= a\ \sinh\mu\ \sin\nu \\ z &= z \end{cases} .$$

I49h.04 I fattori di scala sono dati da $h_\mu=h_\nu=a\ \sqrt{\sinh^2\mu+\sin^2\nu}=a\ \sqrt{\frac12\,(\cosh\,2\mu=-\cos\ 2\nu)}$ e $h_z=1$.

L'elemento infinitesimale di volume è dato da $\mathrm{d}V\ =\ a^2\ \left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)\ \mathrm{d}\mu\ \mathrm{d}\nu\ \mathrm{d}z$.

L'operatore laplaciano è $\nabla^2\Phi=\dfrac{1}{a^2\ \left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)}\ \left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2}\right)+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$.

I49 i. coordinate ellissoidali

I49i.01 Definiamo una famiglia di coordinate indicizzata da tre parametri reali, a, b e c che soddisfano le disuguaglianze $c^2 < b^2 < a^2$. Una terna di **coordinate ellissoidali** si denota con $\langle\lambda, \mu, \nu\rangle$ e si chiede che valgano le disuguaglianze $-a^2 < \nu < -b^2 < \mu < -c^2 < \lambda$.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x^2 & = & \dfrac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 & = & \dfrac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)} \\ z^2 & = & \dfrac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)} \end{cases} .$$

Conseguentemente le superfici relative a λ costante, dato che si ha

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} \;=\; 1$$

e dato che i tre denominatori sono positivi, sono ellissoidi.
Le superfici relative a μ costante, dato che si ha

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} - \frac{z^2}{-(c^2+\mu)} \;=\; 1$$

e dato che i tre denominatori sono positivi, sono iperboloidi a una falda.
Le superfici relative a ν costante, dato che si ha

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} - \frac{y^2}{-(b^2+\nu)} - \frac{z^2}{-(c^2+\nu)} \;=\; 1$$

e dato che i tre denominatori sono positivi, sono iperboloidi a due falde.

I49i.02 Per semplificare le formule che seguono introduciamo la funzione polinomiale

$$T(\sigma) := (a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma) .$$

I fattori di scala si possono allora scrivere

$$h_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{T(\lambda)}} \quad , \quad h_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}{T(\mu)}} \quad , \quad h_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{T(\nu)}} .$$

Di conseguenza l'elemento infinitesimale di volume è dato da

$$\mathrm{d}V \;=\; \frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{8\sqrt{-T(\lambda)\,T(\mu)\,T(\nu)}}\,\mathrm{d}(\lambda)\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu .$$

I49i.03 L'operatore laplaciano è dato dall'espressione

$$\nabla^2\Phi \;=\; \frac{4\sqrt{T(\lambda)}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{T(\lambda)}\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\right] + \frac{4\sqrt{T(\mu)}}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{T(\mu)}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right] + \frac{4\sqrt{T(\nu)}}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{T(\nu)}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right] .$$

I49 j. coordinate sferoidali oblate e prolate

I49j.01 Vediamo ora una famiglia di coordinate indicizzata da un parametro $a \in \mathbb{R}_+$. Definiamo coordinate sferoidali associate ad a le tre variabili $\mu \in \mathbb{R}_{0+}$, $\nu \in (-\pi/2, \pi/2]$ e $\phi \in (-pi, \pi]$; la ν è una coordinata angolare analoga alla latitudine e ϕ una coordinata azimutale, cioè analoga alla longitudine. Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x &= a\ \cosh\mu\ \cos\nu\ \cos\phi \\ y &= a\ \cosh\mu\ \cos\nu\ \sin\phi \\ Z &= a\ \sinh\mu\ \sin\nu \end{cases} .$$

Conseguentemente si trova che

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\cosh^2\mu} + \frac{z^2}{a^2\sinh^2\mu} \;=\; \cos^2\nu + \sin^2\nu \;=\; 1\ ;$$

quindi le superfici relative a μ costante sono sferoidi oblate.
Similmente, dato che si ha

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\cos^2\nu} - \frac{z^2}{a^2\sin^2\nu} \;=\; \cosh^2\mu + \sinh^2\mu \;=\; 1\ ,$$

le superfici relative a ν costante sono iperboloidi di rivoluzione.

Per le trasformazioni inverse si trova innanzi tutto $\phi = \mathrm{atan2}(y,x)$. Si ha inoltre che la distanza dall'asse $)z$ è $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$; introdotte le distanza dai due fuochi delle sferoidi e degli iperboloidi, $d_1 := (\rho+a)^2+z^2$ e $d_2 := (\rho-a)^2+z^2$, si giunge alle $\cosh\mu \;=\; \dfrac{d_1+d_2}{2\,a}$ e $\cos\nu \;=\; \dfrac{d_1-d_2}{2\,a}$

I49j.02 Per i fattori di scala si trova

$$h_\mu \;=\; h_\nu \;=\; a\sqrt{\sinh^2\mu+\sin^2\nu} \qquad \text{e} \qquad h_\phi \;=\; a\ \cosh\mu\ cos\,\nu\ .$$

Di conseguenza l'elemento infinitesimale di volume è dato da

$$\mathrm{d}V \;=\; a^3\ \cosh\mu\ \cos\nu\left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)\ d\mu\ d\nu\ \mathrm{d}\phi\ .$$

I49j.03 Per l'operatore laplaciano si ottiene

$$\nabla^2\Phi \;=\; \frac{1}{a^2\left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)}\left[\frac{1}{\cosh\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\cosh\mu\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}\right) + \frac{1}{\cos\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\cos\nu\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\right] + \frac{1}{a^2\left(\cosh^2\mu\ \cos^2\nu\right)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\ .$$

I49j.04 Definiamo una famiglia di coordinate indicizzata da un parametro $a \in \mathbb{R}_+$. Le coordinate sono $\mu \in \mathbb{R}_{0+}$, $\nu \in (0, \pi]$ e $\phi \in (0, 2\pi]$; come nelle ν è una coordinata angolare analoga alla latitudine e ϕ una coordinata azimutale, cioè analoga alla longitudine.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x &= a\ \sinh\mu\ \sin\nu\ \cos\phi \\ y &= a\ \sinh\mu\ \sin\nu\ \sin\phi \\ Z &= a\ \cosh\mu\ \cos\nu \end{cases} .$$

Conseguentemente si trova che

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\,\sinh^2\mu}+\frac{z^2}{a^2\,\cosh^2\mu} \;=\; \cos^2\nu+\sin^2\nu \;=\; 1\ ;$$

quindi le superfici relative a μ costante sono sferoidi prolate.

Similmente, dato che si ha

$$-\frac{x^2+y^2}{a^2\,\sin^2\nu}+\frac{z^2}{a^2\,\cos^2\nu} \;=\; \cosh^2\mu-\sinh^2\mu \;=\; 1\ ,$$

le superfici relative a ν costante sono iperboloidi di rivoluzione.

Per le trasformazioni inverse si trova innanzi tutto $\phi = \text{atan2}(y,x)$. Si ha inoltre che la distanza dall'asse $)z$ è $\rho := \sqrt{x^2+y^2}$; introdotte le distanza dai due fuochi delle sferoidi e degli iperboloidi, $d_1 \;=\; (\rho+a)^2+z^2$ e $d_2 \;=\; (\rho-a)^2+z^2$, si giunge alle $\cosh\mu \;=\; \dfrac{d_1+d_2}{2\,a}$ e $\cos\nu \;=\; \dfrac{d_1-d_2}{2\,a}$.

I49j.05 Per i fattori di scala si trova

$$h_\mu \;=\; h_\nu \;=\; a\sqrt{\sinh^2\mu+\sin^2\nu} \qquad \text{e} \qquad h_\phi \;=\; a\,\sinh\mu\; sin\nu\ .$$

Di conseguenza l'elemento infinitesimale di volume è dato da

$$\mathrm{d}V \;=\; a^3\,\sinh\mu\,\sin\nu\left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)\,d\mu\,d\nu\,\mathrm{d}\phi\ .$$

I49j.06 Per l'operatore laplaciano si ottiene

$$\nabla^2\Phi \;=\; \frac{1}{a^2\left(\sinh^2\mu+\sin^2\nu\right)}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2}+\coth\mu\,\frac{\partial\Phi}{\partial\mu}+\cot\nu\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right]+ \frac{1}{a^2\sinh^2\mu\,\sin^2\nu}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}\ .$$

I49 k. coordinate coniche

I49k.01 Si tratta di una famiglia di coordinate ortogonali indicizzata da due parametri reali b e c per i quali si chiede che sia $c^2 < b^2$.

Trattiamo come **coordinate coniche** le tre variabili reali $r \in \mathbb{R}_+$, μ e ν sottoposte alle limitazioni $\nu^2 < c^2 < \mu^2 < b^2$.
Le corrispondenti famiglie di superfici coordinate sono costituite da sfere con centro nell'origine, da coni ellittici con il vertice nell'origine e asse di simmetria Oz e da coni ellittici con il vertice nell'origine e asse di simmetria Oz.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x &= \dfrac{r\mu\nu}{bc} \\ y &= \frac{r}{b}\sqrt{\dfrac{(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)}{b^2-c^2}} \\ z &= z \end{cases} .$$

Dalle precedenti uguaglianze si ricavano le seguenti

$$x^2+y^2+z^2 = r^2 \;;$$
$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2} = 0 \;;$$
$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2} = 0 \;.$$

La prima dice che le superfici con r costante sono sfere con centro nell'origine; la seconda e la terza dicono che le superfici con μ costante e quelle con ν costante sono coni con vertici nell'origine.
Le superfici delle tre famiglie sono mutuamente ortogonali.

I49k.02 Fattori di scala

$$h_r = 1 \quad , \quad h_\mu = r\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{(b^2-\mu^2)(\mu^2-c^2)}} \quad , \quad h_\nu = r\sqrt{\frac{\mu^2-\nu^2}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}$$

I49k.03 Per il laplaciano si trova

$$\nabla^2\Phi = \frac{\nu(2\nu^2-b^2-c^2)}{(\mu-\nu)(\mu+\nu)r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} + \frac{(b-\nu)(b+\nu)(\nu-c)(\nu+c)}{(\nu-\mu)(\nu+\mu)r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\nu^2} +$$
$$\frac{\mu(2\mu^2-b^2-c^2)}{(\nu-\mu)(\nu+\mu)r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} + \frac{\mu-c)(\mu+c)\mu-b)(\mu+b)}{(\nu-\mu)(\nu+\mu)r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mu^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} \;.$$

Le coordinate coniche consentono di separare le variabili dell'equazione differenziale di Laplace e dell'equazione differenziale di Helmholtz.

I49 l. coordinate bipolari e coordinate bipolari cilindriche

I49l.01 Le **coordinate bipolari** costituiscono una famiglia di coordinate indicizzata da un parametro reale positivo che denotiamo con a. Esse fanno riferimento ai due fuochi $F_1 = \langle -a, 0\rangle$ e $F_2 = \langle -a, 0\rangle$ e si denotano con $\sigma \in [0, 2\pi)$ e $\tau \in \mathbb{R}$.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x \;=\; a\,\dfrac{\sinh\tau}{\cosh\tau - cos\sigma} \\ y \;=\; a\,\dfrac{\sin u}{\cosh\tau - cos\,\sigma} \end{cases} .$$

I49l.02 Dalle uguaglianze precedenti si ricavano le seguenti

$$\begin{aligned} x^2 + (y - a\ \cot\sigma)^2 &= a^2 \csc{}^2\sigma \\ (x - a\ \coth\tau)^2 + y^2 &= a^2\, \mathrm{csch}\,{}^2\tau \end{aligned} .$$

La prima dice che le curve per σ costante sono circonferenze non concentriche i cui centri possono trovarsi in ogni punto dell'asse Oy che si intersecano nei due fuochi. Le circonferenze con $\sigma > 0$ hanno ordinata positiva, quelle con $\sigma < 0$ stanno al di sotto dell'origine.
La seconda uguaglianza dice che le curve per τ costante sono circonferenze non concentriche i cui centri possono trovarsi in ogni punto dell'asse Oy; quelli con $\tau > 0$ hanno i centri con ascissa positiva, quelli con $\tau < 0$ hanno i centri a sinistra dell'origine.
In effetti, denotato con P il punto variabile nel piano, la σ esprime l'angolo $\widehat{F_1PF_2}$, mentre $\tau = \ln\dfrac{d_1}{d_2}$, dove d_1 e d_2 denotano, risp., le distanze di P da F_1 e da F_2.
I fattori di scala sono $h_\sigma \;=\; h_\tau \;=\; \dfrac{a}{\cosh\tau - cos\sigma}$.

I49l.03 L'operatore laplaciano è $\nabla^2\Phi \;=\; \dfrac{\cosh\tau - \cos\sigma)^2}{a^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right)$.

Utilizzando queste coordinate si rende l'equazione di Laplace separabile.

I49l.04 Le **coordinate bipolari cilindriche** costituiscono un sistema ortogonale di coordinate per $\mathbb{R}^{\times 3}$ ottenuto proiettando il sistema delle coordinate bipolari del piano secondo la direzione dell'asse Oz. Anche questo sistema di coordinate dipende da un parametro estensivo a che corrisponde alla metà della distanza tra i due fuochi; questi sono canonicamente definiti come $F_1 := \langle -a, 0, 0\rangle$ ed $F_2 := \langle a, 0, 0\rangle$.

Queste coordinate sono $\sigma \in [0, 2\pi)$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x \;=\; a\,\dfrac{\sinh\tau}{\cosh\tau - cos\,\sigma} \\ y \;=\; a\,\dfrac{\sin u}{\cosh\tau - cos\,\sigma} \\ z \;=\; z \end{cases} .$$

I49l.05 Dalle uguaglianze precedenti si ricavano le uguaglianze riportate in l02 che ora vanno interpretate come equazioni di superfici cilindriche per σ costante e per τ costante, superfici che proiettano nella direzione dell'asse Ox le circonferenze di Apollonio descritte in l02. Per completare la terna delle superfici coordinate, a queste superfici cilindriche vanno aggiunti i piani paralleli a Oxy relativi a z costante.

I fattori di scala per le coordinate bipolari cilindriche sono quindi

$$h_\sigma = h_\tau = \frac{a}{\cosh\tau - \cos\sigma} \quad \text{e} \quad h_z = 1 \ .$$

L'elemento di volume infinitesimo è $\dfrac{a^2}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^2}\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau\, dz$.

I49I.06 L'operatore laplaciano è $\nabla^2\Phi = \dfrac{\cosh\tau - \cos\ \sigma)^2}{a^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right) + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$.

I49 m. coordinate bisferiche

I49m.01 Si tratta di una famiglia di coordinate ortogonali indicizzata da un parametro reale positivo che denotiamo con a. Il loro sistema si può considerare ottenuto ruotando il sistema di coordinate bipolari intorno all'asse che passa per i due fuochi la cui distanza è $2\,a$

Denotiamo come **coordinate bisferiche** le variabili $\sigma \in (0, 2\pi]$, $\tau \in \mathbb{R}$ e $\phi \in (-\pi, \pi]$.

La coordinata σ esprime l'angolo $\widehat{F_1PF_2}$; $\tau = \ln \frac{d_1}{d_2}$ dove d_1 e d_2 esprimono le distanze di P, risp., da F_1 e de F_2; la ϕ è una coordinata azimutale: $\phi = \text{atan2}(y, x)$.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x &= a \dfrac{\sin\sigma}{\cosh\tau - cos\sigma} \cos\phi \\ y &= a \dfrac{\sin\sigma}{\cosh\tau - cos\sigma} \sin\phi \\ z &= a \dfrac{\sinh\tau}{\cosh\tau - cos\sigma} \end{cases} .$$

I49m.02 Dalle uguaglianze precedenti si ricavano le seguenti

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\ \cot\sigma\right)^2 = \frac{a^2}{\sin^2\sigma} ;$$

$$\left(x^2 + y^2\right) + (z - a\ \coth\tau)^2 = \frac{a^2}{\sinh^2\tau} .$$

La prima dice che le superfici con σ costante sono tori di diversi raggi che passano tutti per i fuochi e non sono concentrici, ma hanno i centri nel piano Oxy. La seconda dice che le superfici con τ costante sono sfere di raggi differenti che contengono i fuochi, non si intersecano ed hanno i centri sull'asse Oz.

I fattori di scala sono

$$h_\sigma = h_\tau = \frac{a}{\cosh\tau - \cos\sigma} \qquad , \qquad h_\phi = \frac{a\ \sin\sigma}{\cosh\tau - \cos\sigma} .$$

Quindi l'elemento infinitesimo di volume è $\mathrm{d}V = \dfrac{a^3\ \sin\sigma}{(\cosh\tau - \cos\sigma)^3}\, \mathrm{d}\sigma\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}\phi$.

I49m.03 Per il laplaciano si trova

$$\nabla^2\Phi = \frac{(\cosh\tau - \cos\ \sigma)^3}{a^2\ \sin\ \sigma} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sin\ \sigma}{\cosh\tau - \cos\ \sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right) + \sin\sigma\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\cosh\tau - \cos\sigma}\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{\sin\ \sigma(\cosh\tau - \cos\ \sigma)}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Phi^2}\right]$$

I49 n. coordinate paraboloidali

I49n.01 Definiamo una famiglia di coordinate indicizzata da due parametri reali, A e B che soddisfano la disuguaglianza $B < A$. Una terna di **coordinate paraboloidali** la denotiamo con $\langle\lambda,\mu,\nu\rangle$ e per le sue componenti si chiede che valgano le disuguaglianze $\lambda < B < \mu < A < \mu$.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x^2 &= \dfrac{(A-\lambda)(A-\mu)(A-\nu)}{(B-A)} \\ y^2 &= \dfrac{(B-\lambda)(B-\mu)(B-\nu)}{(A-B)} \\ z &= \dfrac{1}{2}(A+B-\lambda-\mu-\nu) \end{cases} .$$

Da queste uguaglianze si ricavano le seguenti

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\lambda-A}+\frac{y^2}{\lambda-B} &= 2\,z+\lambda\ ; \\ \frac{x^2}{\nu-A}+\frac{y^2}{\nu-B} &= 2\,z+\nu\ ; \\ \frac{x^2}{\mu-A}+\frac{y^2}{\mu-B} &= 2\,z+\mu\ . \end{aligned}$$

Dalla prima di queste si ricava che le superfici con λ costante sono paraboloidi ellittici; dalla seconda che anche le superfici con ν costante sono paraboloidi ellittici; dalla terza si ottiene che le superfici con μ costante sono paraboloidi iperbolici.

I49n.02 I fattori di scala sono

$$h_\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)}{(A-\lambda)(B-\lambda)}} \quad , \quad h_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\mu)(\lambda-\mu)}{(A-\mu)(B-\mu)}} \quad , \quad h_\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}{(A-\nu)(B-\nu)}} \ .$$

Di conseguenza l'elemento infinitesimo di volume è

$$\mathrm{d}V = \frac{(\mu-\lambda)(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{8\sqrt{(A-\lambda)(B-\lambda)(A-\mu)(\mu-B)(\nu-A)(\nu-B)}}\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu\ .$$

I49n.03 Per l'operatore nabla abbiamo

$$\nabla = \left[\frac{(\mu-b)(\mu-c)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\right]^{1/2}\mathsf{e}_\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \left[\frac{(\nu-b)(\nu-c)}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\right]^{1/2}\mathsf{e}_\nu\frac{\partial}{\partial\nu} + \left[\frac{(\lambda-b)(c-\lambda)}{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}\right]^{1/2}\mathsf{e}_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\ .$$

Di conseguenza per l'operatore laplaciano si trova

$$\begin{aligned}\nabla^2 = {}& \left[\frac{(\mu-b)(\mu-c)}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(\mu-b)^{1/2}(\mu-c)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\mu}\right]+ \\ & \left[\frac{(\nu-b)(\nu-c)}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[(b-\nu)^{1/2}(c-\nu)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\nu}\right]+ \\ & \left[\frac{(\lambda-b)(c-\lambda)}{(\lambda-\nu)(\mu-\lambda)}\right]^{1/2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[(b-\lambda)^{1/2}(\lambda-c)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]\ .\end{aligned}$$

I49 o. coordinate toroidali

I49o.01 Si tratta di una famiglia di coordinate ortogonali indicizzata da un parametro reale positivo che denotiamo con a. Il loro sistema si può considerare ottenuto ruotando il sistema di coordinate bipolari intorno all'asse che passa per i due fuochi la cui distanza è $2\,a$

Come **coordinate toroidali** assumiamo $u \in [0, 2\,\pi)$, $v \in \mathbb{R}_{0+}$ e $\phi \in [0, 2\,\pi)$.

Il loro collegamento con le coordinate cartesiane è dato dalle uguaglianze

$$\begin{cases} x &= a\,\dfrac{\sinh\,v}{\cosh\,v - \cos\,u}\,\cos\phi \\ y &= a\,\dfrac{\sinh\,v}{\cosh\,v - \cos\,u}\,\sin\phi \\ z &= a\,\dfrac{\sin\,u}{\cosh\,v - \cos\,u} \end{cases} .$$

I49o.02 Dalle uguaglianze precedenti si ricavano le seguenti

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + a^2 &= 2\,a\,\sqrt{x^2+y^2}\,\coth\,v \\ x^2 + y^2 + (z - a\cot\,u)^2 &= \frac{a^2}{\sin^2 u} \\ \tan\,\phi &= \frac{y}{x} \end{aligned} .$$

La prima dice che le superfici con v costante sono toroidi. La seconda dice che le superfici con u costante sono tazze sferiche, sfere con centro in $\langle 0, 0, a\cot\,u\rangle$ e raggio uguale a $a\,|\csc\,u|$. La terza dice che le superfici con ϕ costante sono semipiani.

I fattori di scala sono

$$h_u = h_v = \frac{a}{\cosh\,v - \cos\,u} \quad , \quad h_\phi = \frac{a\,\sinh\,v}{\cosh\,v - \cos\,u} .$$

Quindi l'elemento infinitesimo di volume è $\mathrm{d}V = \dfrac{a^3\,\sinh\,v}{(\cosh\,v - \cos\,u)^3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\phi$.

I49o.03 Per il laplaciano si trova

$$\nabla^2\Phi = \frac{\mathrm{csch}\,v\,(\cosh\,v - \cos\,u)^3}{a^2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sinh\,v}{\cosh\,v - \cos\,u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sinh\,v}{\cosh\,v - \cos\,u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\mathrm{csch}\,v}{\cosh\,v - \cos\,u}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right)\right] .$$

I49 p. alcuni sistemi di coordinate non ortogonali

I49p.01 Si dicono **coordinate iperboliche** delle particolari coordinate non ortogonali che servono per il solo I quadrante del piano cartesiano; le denotiamo con $u \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{cases} x = v\,\mathsf{e}^{u} \\ y = v\,\mathsf{e}^{-u} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} u = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ v = \sqrt{x\,y} \end{cases}$$

I49p.02 Si dicono **coordinate bipolari bicentriche** le coordinate piane che esprimono le distanze di un punto corrente da due punti fissi.

I49p.03 Si dicono **coordinate biangolari** le coordinate piane che esprimono gli angoli che i due segmenti che congiungono un punto corrente con due punti fissi formano con l'asse $\mathsf{O}x$.