

Capitolo I30 integrali curvilinei

Contenuti delle sezioni

- a. nozione di integrale curvilineo p. 2
- b. area di regione delimitata da circuiti regolari p. 8
- c. quadrature mediante integrali curvilinei p. 13
- d. volumi di solidi di rotazione p. 18
- e. integrali definiti dipendenti da un parametro p. 20
- f. lavoro di una forza espresso da integrale curvilineo p. 21
- g. differenziali esatti p. 23

24 pagine

I300.01 Questo capitolo inizia con la introduzione della nozione di integrale curvilineo.

Si tratta di una costruzione formale un poco elaborata, ma che costituisce uno strumento di notevole utilità per lo studio delle figure bidimensionali e tridimensionali.

Una prima applicazione geometrica consiste il calcolo delle aree delle figure piane delimitate da circuiti sufficientemente maneggevoli: con il calcolo di integrali curvilinei si possono ottenere facilmente varie quadrature.

Essi inoltre nell'ambito delle applicazioni tridimensionali consentono di calcolare i volumi di molti solidi di rotazione.

Una seconda costruzione formale qui trattata riguarda gli integrali definiti di integrandi dipendenti da parametri.

In particolare vengono esaminati gli integrali curvilinei che consentono di definire e calcolare grandezze fisiche importanti come i lavori dovute a forze variabili.

Il capitolo si conclude con la introduzione dei differenziali esatti, un altro strumento con notevoli applicazioni alla geometria di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e di $\mathbb{R}^{\times 3}$ e con conseguenti importanti applicazioni alla fisica classica.

130 a. nozione di integrale curvilineo

130a.01 Consideriamo l'intervallo $[a, b] \in \text{IntvlR}$ con $a < b$ e la curva Γ nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ individuata da equazioni parametriche della forma

$$(1) \quad \mathbf{r}(t) = \langle \xi(t), \eta(t), \zeta(t) \rangle \quad \text{per} \quad a \leq t \leq b .$$

Una tale curva si dice **curva regolare** sse le funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ sono continue insieme alle loro derivate prime nell'intero intervallo $[a, b]$ e soddisfano la proprietà

$$(2) \quad \forall t \in [a, b] \setminus \bar{T} : \xi'^2(t) + \eta'^2(t) + \zeta'^2(t) > 0 .$$

Una tale curva si dice invece **curva regolare a tratti** sse le funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ sono continue insieme alle loro derivate prime nell'intero intervallo $[a, b]$ eccettuati al più i valori di un sottoinsieme finito di $[a, b]$ $\bar{T} := \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_k\}$ ($k \in \mathbb{N}$) nei quali potrebbe mancare qualcuna delle derivate, ma tali per cui

$$(2) \quad \forall t \in [a, b] \setminus \bar{T} : \xi'^2(t) + \eta'^2(t) + \zeta'^2(t) > 0 .$$

Osserviamo che con semplici modifiche delle definizioni precedenti si possono definire le curve piane regolari e regolari a tratti e le curve in generici spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ regolari e regolari a tratti.

Le curve piane si possono considerare casi particolari delle tridimensionali nelle quali una variabile, per esempio la $z(t)$, assume valore costante.

La definizione in d dimensioni invece si ottiene adattando la precedente a funzioni della forma

$$(3) \quad \mathbf{r}(t) = \langle \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_d(t) \rangle ,$$

alle d funzioni-RtR $\xi_j(t)$ e alle loro derivate.

130a.02 Adottiamo inoltre le scritture $P_{[a]} := \mathbf{r}(a)$ e $P_{[b]} := \mathbf{r}(b)$ per le due estremità della curva Γ che intendiamo studiare.

Intendiamo ora introdurre una costruzione del genere integrale di Stieltjes sopra le curve regolari a tratti.

A tale fine rivolgiamo la nostra attenzione a due funzioni reali del punto $\mathbf{r}$ appartenente alla curva Γ $f(\mathbf{r})$ che chiediamo sia limitata, e $\phi(\mathbf{r})$; inoltre introduciamo le funzioni composte aventi come dominio $[a, b]$

$$F(t) := f(\mathbf{r}(t)) \quad \text{e} \quad \Phi(t) := \phi(\mathbf{r}(t)) .$$

Dobbiamo occuparci di suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ e per questo denotiamo con $\mathbf{D}(a, b)$ l'insieme delle suddivisioni di questo intervallo e con $\mathbf{D}_\Gamma$ l'insieme delle corrispondenti suddivisioni di Γ .

Consideriamo poi una particolare suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in m subintervalli

$$\langle t_0 := a < t_1 < t_2 < \dots < t_m := b \rangle ;$$

denotiamo con $\mathbf{t}$ la $(m+1)$ -upla $\langle t_0, t_1, \dots, t_m \rangle$, con $\mathbf{t}_\Gamma$ la suddivisione indotta dalla $\mathbf{t}$ sulla curva, cioè la suddivisione della Γ determinata dai punti

$$P_0 := \mathbf{r}(t_0) = P_{[a]} := \mathbf{r}(a) , \quad P_1 := \mathbf{r}(t_1) , \quad P_2 := \mathbf{r}(t_2) , \quad \dots , \quad P_m := \mathbf{r}(t_m) = P_{[b]} = \mathbf{r}(b) .$$

Inoltre per gli archi corrispondenti alla suddivisione $\mathbf{t}$ scriviamo $\gamma_j := \Gamma|_{P_{j-1}, P_j}$ per $j = 1, 2, \dots, m$.

130a.03 Per ogni $j = 1, 2, \dots, m$ introduciamo le differenze

$$d_j := t_i - t_{j-1} , \quad x_j := \xi(t_j) , \quad y_j := \eta(t_j) , \quad z_j := \zeta(t_j) ,$$

in modo che si possa scrivere $P_j = \langle x_j, y_j, z_j \rangle$,

$$\Delta_j \phi := \phi(P_j) - \phi(P_{j-1}) \quad , \quad f_j^{[i]} := \inf\{P \in \gamma_j : (f(P))\} \quad , \quad f_j^{[s]} := \sup\{P \in \gamma_j : (f(P))\} \quad ,$$

e le m -uple $\vec{f} := \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ con $\forall j = 1, \dots, m : f_j^{[i]} \leq f_j \leq f_j^{[s]}$.

Denotiamo inoltre con $MD(\mathbf{t})$ la massima tra le differenze d_j per $j = 1, 2, \dots, m$.

Veniamo dunque alle costruzioni

$$S^{[i]} := \sum_{j=1}^m f_j^{[i]} \Delta_j \phi \quad , \quad S^{[\vec{f}]} := \sum_{j=1}^m f_j \Delta_j \phi \quad , \quad S^{[s]} := \sum_{j=1}^m f_j^{[s]} \Delta_j \phi$$

Evidentemente valgono le disuguaglianze $S^{[i]} \leq S^{[\vec{f}]} \leq S^{[s]}$.

Ricordiamo anche che date due suddivisioni di $[a, b]$ si trova una suddivisione più fine di entrambe e che riducendo progressivamente la massima ampiezza dei sottointervalli $MD(\mathbf{t})$ si ottengono suddivisioni sempre più fini di $[a, b]$.

Inoltre prendendo in considerazione suddivisioni via via più fini la differenza $S^{[s]} - S^{[i]}$, cioè l'intervallo di variabilità delle costruzioni $S^{[\vec{f}]}$ presenta valori noncrescenti.

I30a.04 È dunque pienamente sensato e prevedibilmente utile chiedersi se esiste il limite per $MD(\mathbf{t})$ tendente a zero dell'espressione $S^{[\vec{f}]}$.

Se tale limite esiste viene detto **integrale curvilineo** sulla curva Γ di $f d\phi$ e viene denotato con la scrittura $\int_{\Gamma} f d\phi$. Possiamo quindi scrivere

$$(1) \quad \int_{\Gamma} f d\phi := \lim_{MD(\mathbf{t}) \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m f_j \Delta_j \phi .$$

Questo si può esprimere dicendo che esiste un reale $\int_{\Gamma} f d\phi$ tale che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipip) si può determinare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che per ogni suddivisione $\mathbf{t}$ di $[a, b]$ con $MD(\mathbf{t}) < \delta$ si abbia

$$\left| \int_{\Gamma} f d\phi - \sum_{j=1}^m f_j \Delta_j \phi \right| < \epsilon .$$

Osserviamo esplicitamente che se l'arco di curva Γ si riduce all'intervallo reale $[a, b]$ e se $\phi(x) = x$ l'integrale introdotto si riduce al semplice $\int_a^b dx f(x)$.

Abbiamo quindi introdotta una notevole generalizzazione dell'integrale di Riemann per la quale sono prevedibili rilevanti applicazioni.

I30a.05 Diamo ora un enunciato che consente di garantire l'esistenza di gran parte degli integrali curvilinei richiesti dalle applicazioni.

Teorema Se esiste un insieme C di $\mathbb{R}^3$ del quale fa parte la curva Γ e nel quale le funzioni $f(\mathbf{r})$ e $\phi(\mathbf{r})$ sono continue e la $\phi(\mathbf{r})$ ammette derivate parziali del primo ordine anch'esse continue, allora esiste $\int_{\Gamma} f d\phi$.

Dim.: Le funzioni $F(t) := f(\mathbf{r}(t))$ e $\Phi(t) := \phi(\mathbf{r}(t))$, per le ipotesi, sono funzioni continue della t variabile in $[a, b]$.

La $\Phi(t)$ possiede la derivata rispetto a t :

$$(1) \quad \Phi'(t) = \frac{\partial}{\partial x} \phi \cdot \xi'(t) + \frac{\partial}{\partial y} \phi \cdot \eta'(t) + \frac{\partial}{\partial z} \phi \cdot \zeta'(t) .$$

Per il teorema degli accrescimenti finiti

$$(2) \quad \forall j = 1, 2, \dots, m : \Delta_j \phi = \Phi'(\bar{t}_j) (t_j - t_{j-1}) = \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j ,$$

per opportuni $\bar{t}_j \in (t_{j-1}, t_j]$ e avendo definiti $\tau_j := t_j - t_{j-1}$ per ogni $j = 1, 2, \dots, m$.

Introduciamo le scritture $\bar{P}_j := \langle \xi(\bar{t}_j), \eta(\bar{t}_j), \zeta(\bar{t}_j) \rangle$ e $\bar{F}_j := F(\bar{t}_j) = f(\bar{P}_j)$ e otteniamo

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \bar{F}_j \Delta_j \phi &= \sum_{j=1}^m \bar{F}_j \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j + \sum_{j=1}^m [f_j - \bar{F}_j] \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j \\ &= \sum_{j=1}^m F(\bar{t}_j) \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j + \sum_{j=1}^m [f_j - \bar{F}_j] \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j . \end{aligned}$$

Il primo addendo trovato con una opportuna suddivisione di $[a, b]$ differisce da $\int_a^b dt F(t) \Phi'(t)$ meno di un numero positivo prefissato.

In altre parole, scelto un arbitrario $\frac{\epsilon}{2} \in \mathbb{R}_+$, si trova un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che ogni suddivisione di $[a, b]$ con $MD < \delta$ implica

$$\left| \int_a^b dt F(t) \Phi'(t) - \sum_{j=1}^m F(\bar{t}_j) \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j \right| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Per le suddette suddivisioni possiamo supporre sia

$$\left| \sum_{j=1}^m [f_j - \bar{F}_j] \Phi'(\bar{t}_j) \tau_j \right| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Infatti, denotato con M il massimo della funzione $|\Phi(t)|$ continua in $[a, b]$, si può determinare un $\eta \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni suddivisione $\mathbf{D}$ di $[a, b]$ con $\max \text{wid}(\mathbf{D}) < \eta$ per le corrispondenti ampiezze τ_j accade che

$$\sum_{j=1}^n \tau_j \omega_j < \frac{\epsilon}{2M} ,$$

dove ω_j denota la oscillazione della $F(t)$ nel subintervallo j -esimo.

Dato che $|f_j - \bar{F}_j| \leq \omega_j$ si ha

$$\left| \sum_{j=1}^n (f_j - \bar{F}_j) \tau_j \right| \leq M \left| \sum_{j=1}^n \tau_j \omega_j \right| \leq M \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2} .$$

Questa disuguaglianza, la (5) e la (4) implicano che per qualunque suddivisione di $[a, b]$ con massima ampiezza dei subintervalli inferiore sia a ϵ che a η si ha

$$\left| \int_a^b F(t) \Phi'(t) dt - \sum_{j=1}^n f_j \Delta_i \phi \right| < \epsilon .$$

I30a.06 Dalle considerazioni per la dimostrazione precedente si ha che nelle ipotesi enunciate per le funzioni f e ϕ si ha

$$(1) \quad \int_{\Gamma} f \, d\phi = \int_a^b dt f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \frac{d\phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]}{dt}.$$

Conviene ricordare che questa formula vale quando f e ϕ sono funzioni continue di P variabile in Γ e $\Phi(t) := \phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]$ ammette derivata rispetto a t continua.

Essa consente di esprimere l'integrale curvilineo mediante un integrale di funzione-RtR e questa possibilità giustifica l'uso del sostantivo “integrale” per il nome dato a $\int_{\Gamma} f \, d\phi$.

In effetti possiamo scrivere

$$d\Phi = \frac{d\phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]}{dt} dt.$$

Nel seguito assumeremo prevalentemente le suddette ipotesi di continuità delle funzioni f , ϕ , $\frac{\partial}{\partial x}\phi$, $\frac{\partial}{\partial y}\phi$ e $\frac{\partial}{\partial z}\phi$ in una regione contenente Γ .

Dalla (1), tenendo presente la a05(1), si ottiene la più esplicita

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, d\phi &= \int_a^b dt f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \frac{\partial}{\partial x}\phi \cdot \xi'(t) \\ &+ \int_a^b dt f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \frac{\partial}{\partial y}\phi \cdot \eta'(t) + \int_a^b dt f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \frac{\partial}{\partial z}\phi \cdot \zeta'(t). \end{aligned}$$

I tre addendi dell'espressione trovata si possono considerare tre integrali curvilinei estesi alla curva Γ , come si chiarisce con la seguente riscrittura

$$\int_{\Gamma} f \, d\phi = \int_{\Gamma} dx f \frac{\partial}{\partial x}\phi + \int_{\Gamma} dy f \frac{\partial}{\partial y}\phi + \int_{\Gamma} dz f \frac{\partial}{\partial z}\phi.$$

Segnaliamo che gli integrali curvilinei spesso vengono riferiti non a una curva (qui la Γ), ma, dando la curva per sottintesa, ai suoi estremi (qui $P_{[a]}$ e $P_{[b]}$ introdotti in a03).

I30a.07 Consideriamo l'esempio nel quale Γ è l'arco dell'elica che proiettata su un piano ortogonale al suo asse Oz fornisce una circonferenza di raggio R . Più precisamente consideriamo la curva

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad z = \alpha t \quad \text{per } t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e le funzioni $f(P) = x^2$ e $\phi(P) = x + y + z$.

Dato che $\frac{\partial}{\partial x}\phi = \frac{\partial}{\partial y}\phi = \frac{\partial}{\partial z}\phi = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \, d\phi &= \int_{\Gamma} f \, dx + \int_{\Gamma} f \, dy + \int_{\Gamma} f \, dz \\ &= \int_R^0 dx x^2 + \int_0^{\pi/2} dt R^2 \cos^2 t R \cos t + \int_0^{\pi/2} dt R^2 \cos^2 \alpha t \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_R^0 + R^3 \int_0^{\pi/2} dt \cos^3 t + \alpha R^2 \int_0^{\pi/2} dt \cos^2 t \\ &= -\frac{R^3}{3} + R^3 \frac{2!!}{3!!} + \alpha R^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{R^2}{12} [4R + 3\alpha\pi]. \end{aligned}$$

I30a.08 Se come parametro t si adotta la lunghezza s dell'arco di curva a partire da un certo punto al quale si è dato il ruolo di punto iniziale e si assume che in corrispondenza degli estremi $P_{[a]}$ e $P_{[b]}$ si

abbia, risp., $s = a$ ed $s = b$, dalla a06(1) si ricava

$$\int_{\Gamma} f \, d\phi = \int_a^b ds \, f[\xi(s), \eta(s), \zeta(s)] \frac{d\phi[\xi(s), \eta(s), \zeta(s)]}{ds}.$$

I30a.09 Dato che, sotto le condizioni di derivabilità suddette, gli integrali curvilinei si riducono a integrali ordinari, è ragionevole aspettarsi che per essi valgano proprietà derivate dalle proprietà degli integrali ordinari.

(1) Prop.: Se si inverte il senso di percorrenza della curva l'integrale curvilineo cambia di segno:

$$\int_{\ominus\Gamma} f \, d\phi = - \int_{\Gamma} f \, d\phi \quad \blacksquare$$

(2) Prop.: Se si bipartisce la curva Γ sulla quale si effettua l'integrazione si ha l'additività dell'operatore di integrazione curvilinea; supposto che l'estremità finale della curva Γ_1 coincida con l'estremità iniziale delle Γ_2 :

$$\int_{\Gamma_1 \oplus \Gamma_2} f \, d\phi = \int_{\Gamma_1} f \, d\phi + \int_{\Gamma_2} f \, d\phi.$$

Dim.: L'operazione di passaggio al limite dell'integrale complessivo può ridursi a prendere in esame le sole suddivisioni che toccano il punto di collegamento delle curve parziali $\blacksquare$

(3) Prop.: L'operatore di integrazione curvilinea è lineare nella funzione integranda:

$$f(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) \implies \int_{\Gamma} f \, d\phi = \alpha_1 \int_{\Gamma} f_1 \, d\phi + \alpha_2 \int_{\Gamma} f_2 \, d\phi \quad \blacksquare$$

(4) Prop.: Se la funzione $\Phi(t) := f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]$ è monotona rispetto ai valori della variabile t ai quali corrisponde la Γ , in conseguenza del teorema della media, per qualche $\bar{f}$ compreso tra estremo inferiore ed estremo superiore della $f(P)$ si ha:

$$\int_{\Gamma} f \, d\phi = \int_a^b dt \, f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \Phi'(t) = \bar{f} \int_a^b dt \, \Phi'(t) = \bar{f} (\phi(P_{[b]}) - \phi(P_{[a]})) \quad \blacksquare$$

I30a.10 Quando non solo la funzione f , ma anche la funzione ϕ soddisfa le condizioni di derivabilità e continuità, hanno senso sia l'integrale $\int_{\Gamma} f \, d\phi$ che $\int_{\Gamma} \phi \, df$.

In queste condizioni si può estendere l'operazione di integrazione per parti.

(5) Prop.: Se nella regione C sono continue le due funzioni $f(P)$ e $\phi(P)$ insieme alle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x}\phi$, $\frac{\partial}{\partial y}\phi$, $\frac{\partial}{\partial z}\phi$, $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial y}f$ e $\frac{\partial}{\partial z}f$, allora vale la **formula di integrazione curvilinea per parti**

$$\int_{\Gamma} f \, d\phi = [f\phi]_{P_{[a]}}^{P_{[b]}} - \int_{\Gamma} \phi \, df.$$

Dim.: Basta esprimere il primo membro con l'integrale sulla variabile t , applicare a esso l'integrazione per parti ed esprimere sinteticamente quanto trovato:

$$\int_{\Gamma} f \, d\phi = [f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b dt \, \phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \frac{df[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]}{dt} \quad \blacksquare$$

Nel caso in cui Γ sia una curva chiusa, cioè quando $P_{[b]} = P_{[a]}$, abbiamo

$$[f\phi]_{P_{[a]}}^{P_{[b]}} = f(P_{[b]})\phi(P_{[b]}) - f(P_{[a]})\phi(P_{[a]}) = 0;$$

Di conseguenza

$$\int_{\Gamma} f \, d\phi = - \int_{\Gamma} \phi \, df \quad \text{ossia} \quad \int_{\Gamma} d(f\phi) = 0 .$$

130 b. area di regione delimitata da circuiti regolari

130b.01 Ricordiamo che una curva piana chiusa nonintrecciata viene detta anche **curva di Jordan**, circuito piano o circuito-RR.

Consideriamo un circuito piano che denotiamo con Γ definito dalle equazioni parametriche $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$ per t variabile nell'intervallo reale $[a, b]$; abbiamo quindi $\xi(b) = \xi(a)$ ed $\eta(b) = \eta(a)$ e che non si trovano due valori diversi t_1 e t_2 di (a, b) per i quali sia $\xi(t_1) = \xi(t_2)$ e $\eta(t_1) = \eta(t_2)$.

Chiediamo inoltre che questa curva abbia tangente in ciascuno dei suoi punti ovvero chiediamo che per ogni t le funzioni $\xi(t)$ e $\eta(t)$ siano derivabili e sia $\xi'^2(t) + \eta'^2(t) > 0$.

In tal caso si dice che Γ è un **circuito piano regolare**. Nel seguito di questa sezione spesso semplificheremo dicendo sbrigativamente che si tratta di un “circuito regolare”.

Ricordiamo anche il teorema sulle regioni interna ed esterna rispetto un circuito regolare.

(1) Teorema (teorema di Jordan) Un circuito piano regolare Γ tripartisce il piano nell'insieme dei propri punti, in una regione limitata e in una regione illimitata.

I punti della regione limitata sono detti **punti interni al circuito**, mentre i punti della regione illimitata sono detti **punti esterni al circuito**. Mentre due punti interni alla Γ si possono collegare con una curva regolare che non interseca la Γ e la stessa proprietà vale per i duetti di punti esterni, un punto interno e un punto esterno non si possono collegare con una tale curva.

130b.02 Si osserva che presentando un circuito piano mediante le equazioni parametriche $\xi(t)$ e $\eta(t)$ viene suggerita una sua orientazione.

Un circuito regolare si dice essere percorso nel verso positivo o antiorario sse un mobile che lo percorre lascia alla sua immediata sinistra punti interni a Γ ; all'opposto, si dice che viene percorso nel verso negativo od orario sse un mobile che lo percorre lascia alla sua immediata destra i punti interni a Γ .

Ogni curva Γ in uno spazio $\mathbb{R}^{x,d}$ determinata dalla funzione $\mathbf{r}(t)$ per $t \in [a, b]$ si trova in corrispondenza biettiva, o più precisamente in corrispondenza involutoria, la sua curva opposta, determinata dalla funzione $\mathbf{r}(\tau)$ con $\tau := a + b - t$ e t ancora da considerare variabile da a a b ; questa curva la denotiamo con $\ominus\Gamma$ e possiamo immaginare un mobile che la percorre in senso opposto rispetto al mobile che immaginiamo percorre la Γ .

Talora conviene prendere in considerazione curve regolari chiuse prescindendo da un loro senso di percorrenza; queste entità possono essere definite formalmente come duetti $\{\Gamma, \ominus\Gamma\}$ e si possono chiamare circuiti nonorientati, ritenendo quindi che i circuiti definiti in precedenza possano dirsi “circuiti orientati”.

Ogni retta tangente a una curva regolare orientata può essere arricchita da una orientazione; una scelta conveniente che viene qualificata come scelta canonica stabilisce che la tangente sia orientata in modo da avere senso di percorrenza concorde con quello dei punti della curva adiacenti al punto di tangenza. Quindi la tangente orientata ad un circuito piano Γ in un suo punto P lascia alla immediata sinistra di P punti interni al circuito.

La retta ortogonale alla tangente nel punto P si dice la retta normale a Γ in P . Essa può essere arricchita con l'orientazione qualificata come canonica tale che i suoi punti da considerare immediatamente successivi a P siano interni al circuito.

//input pI30b02

I30b.03 Si constata che le poligonali del piano-RR chiuse e orientate si possono considerare curve piane regolari e orientate.

Come funzione $\mathbf{r}(t) = \langle \xi(t), \eta(t) \rangle \in \llbracket [a, b] \rrbracket \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che definisce una tale poligonale Ψ si può scegliere una funzione che inizia e finisce in un qualsiasi suo punto $P_{[a]} = P_{[b]} = \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ e che è costituita da successivi segmenti rettilinei in ciascuno dei quali è espressa da una funzione lineare nel parametro t .

La funzione $\mathbf{r}(t)$ è continua, ma data da una sequenza di espressioni diverse riguardanti i successivi segmenti. Le derivate $\xi'(t)$ e $\eta'(t)$ sono invece solo continue a tratti (e in ciascun tratto costanti) e presentano discontinuità con salti nei punti vertici della poligonale le quali corrispondono a cambiamenti di orientazione delle derivate che il mobile della metafora cinematica deve compiere istantaneamente.

Si possono considerare tra le curve piane regolari anche curve costituite da sezioni determinate da funzioni $\xi(t)$ e $\eta(t)$ continue che diciamo tratti lisci (*smooth*) e da segmenti rettilinei; ad esempio curve con la forma delle piste di atletica.

//input pI30b03

Le curve piane, come vedremo, sono strumenti importanti dell'analisi infinitesimale e il fatto di considerare una loro ampia casistica riconosce l'opportunità di definire con precisione un'ampia strumentazione.

I30b.04 Come per i circuiti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e più in generale per le poligonali chiuse orientate in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ alla regione interna di un circuito regolare orientato canonicamente nel verso antiorario si attribuisce area positiva, mentre si attribuisce area negativa alla regione interna di un circuito regolare orientato nel verso orario.

Stante la grande varietà dei circuiti piani regolari che come si è visto possono presentare punti nei quali viene meno la derivabilità continua delle funzioni $\xi(t)$ ed $\eta(t)$, si apre la possibilità di assegnare un'area a una grande varietà di figure piane.

Per le definizioni di circuiti e aree conviene andare oltre in modo simile a quello adottato per attribuire un'area ad ogni poligonale orientata, anche se intrecciata.

I30b.05 Diciamo **multicircuito piano regolare** una struttura individuata da un certo numero $m + 1$ di circuiti regolari orientati nel verso antiorario $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ tali che $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ sono contenuti nella regione interna di Γ_0 , sono reciprocamente esterni (e quindi privi di punti interni comuni).

Questo multicircuito lo denotiamo con l'espressione

$$\Gamma := \Gamma_0 \ominus \Gamma_1 \ominus \dots \ominus \Gamma_m ,$$

Definiamo inoltre come sua regione interna, che denotiamo con $\text{Intrn}(\Gamma)$, l'insieme dei punti interni a Γ_0 ed esterni a ciascuno dei rimanenti $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ e definiamo come insieme dei suoi punti di frontiera, che scriviamo $\partial\Gamma$, l'unione dei punti appartenenti a vari circuiti Γ_i per $i = 0, 1, 2, \dots, m$.

L'insieme dei punti di $\text{Intrn}(\Gamma)$ è connesso, intendendo con questo che dati due suoi punti è possibile collegarli con una curva regolare tutta costituita da punti appartenenti allo stesso $\text{Intrn}(\Gamma)$ o da punti comuni alle frontiere di circuiti Γ_j per $j = 0, 1, \dots, m$.

Più in particolare definiamo **multicircuito piano regolare distinto** una struttura che differisce dalla precedente solo per non consentire che due suoi circuiti possano avere punti di frontiera comuni.

Si osserva che ad ogni multicircuito regolare si può associare un corrispondente multicircuito regolare distinto nel quale i circuiti precedentemente in contatto presentano mutue distanze piccole quanto si vuole.

//input pI30b05

Due multicircuiti regolari con le suddette differenze li diciamo multicircuiti arealmente equivalenti.

I30b.06 Intendiamo ora attribuire un'area ai multicircuiti e più in generale a figure piane che chiameremo **figure piane quadrabili**.

A questo fine per l'insieme dei punti interni e di frontiera di Γ adottiamo la notazione

$$\bar{\Gamma} := \text{Intrn}(\Gamma) \cup \partial\Gamma .$$

Inoltre per la collezione degli insiemi-RR costituiti da tutti i punti interni di Γ e una qualsiasi parte dei suoi punti di frontiera scriviamo

$$\Gamma^{\text{mFr}} := \{ G \text{ s.t. } \text{Intrn}(\Gamma) \subseteq G \subseteq \bar{\Gamma} \} .$$

Osserviamo che la introduzione di Γ^{mFr} è coerente con la nozione di insieme modulo un suo opportuno sottoinsieme presentata in I25. Questa collezione si può chiamare **multicircuito piano regolare modulo la propria frontiera** e anche **figura piana orientata**.

Ci proponiamo dunque di attribuire formalmente un'area a questi oggetti.

Accade tuttavia che in molti dei successivi sviluppi per evitare appesantimenti di linguaggio e di notazioni conviene procedere con termini e formule semplificate confondendo le collezioni Γ^{mFr} con i multicircuiti confidando nella capacità del lettore di evitare fraintendimenti.

Dopo aver attribuito un'area alle figure piane orientate regolari definiamo l'area dei multicircuiti regolari a partire dalle aree dei circuiti che li definiscono: ad ogni multicircuito regolare Γ attribuiamo come area l'area attribuita al circuito Γ_0 diminuita delle aree attribuite ai circuiti $\ominus\Gamma_j$ per $j = 1, 2, \dots, m$.

I30b.07 Definiamo ora l'area di un generico circuito piano regolare orientato Γ_0 che denotiamo con $\text{Circuit}[a, b, \xi, \eta]$ passando per la costruzione di un integrale curvilineo.

Consideriamo innanzi tutto due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per $x \in [a, b]$ con $a < b$ funzioni le quali sono continue insieme alle loro derivate parziali e soddisfano la condizione $\forall x \in (a, b) : f(x) < g(x)$.

Consideriamo il circuito orientato delimitato dal diagramma della $f(x)$ $\{x \in [a, b] : \langle x, f(x) \rangle\}$, dal segmento dal punto $\langle b, f(b) \rangle$ al punto $\langle b, g(b) \rangle$, dal diagramma della $g(x)$ percorso secondo ascisse decrescenti e dal segmento verticale discendente da $\langle a, g(a) \rangle$ a da $\langle a, f(a) \rangle$

//input pI30b07

Questo tipo di circuito lo qualificiamo come **circuito sezionabile secondo e_x** e lo associamo alla funzione $y(x)$ caratterizzante i suoi punti.

A un tale circuito $\Gamma_{f,g}$, alla sua corrispondente collezione-mFr, all'insieme dei suoi punti interni $\text{Intrn}(\Gamma_{f,g})$ e quindi alla figura determinata dal detto $\Gamma_{f,g}$ assegnamo come area il numero reale positivo

$$\mathbf{Area}(\Gamma_{f,g}) := \int_{\Gamma_{f,g}} y(x) = \int_a^b dx \, g(x) - \int_a^b dx \, f(x) .$$

La seconda uguaglianza discende dal fatto che gli integrali sui segmenti verticali sono nulli e che l'area richiesta è la differenza tra l'area del trapezoide di $g(x)$ e quella del trapezoide di $f(x)$.

I30b.08 Estendiamo l'attribuzione di un'area a tutti i multicircuiti piani orientati, chiedendo che si possano attribuire anche alle corrispondenti collezioni-mFr e ai corrispondenti insiemi di punti interni e chiedendo che tale area sia invariante per traslazioni e rotazioni del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che cambi di segno al cambiare dell'orientazione del multicircuito e sia additiva rispetto alla unione di insiemi di punti interni di multicircuiti che siano disgiunti, ossia di multicircuiti senza punti interni in comune.

Alle aree dei multicircuiti più generali arriviamo con successivi gradualmente ampliamenti dell'insieme dei circuiti calcolabili con integrali curvilinei.

La richiesta di invarianza per rototraslazioni 'a consente di ottenere l'area di circuiti sezionabili rispetto ad $\mathbf{e}_y$ e rispetto a un qualsiasi altro vettore $\alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y$.

La richiesta di invarianza per additività consente di ottenere l'area di circuiti che presentano una frontiera con numerosi cambi di direzione in quanto essi si possono ripartire in circuiti sezionabili rispetto ad uno o più opportuni vettori piani $\alpha \mathbf{e}_x + \beta \mathbf{e}_y$.

//input pI30b08

I30b.09 *Area*(Γ) Finora abbiamo definite le aree delle figure piane orientate semplicemente connesse; passiamo ora alle aree di figure moltiplicemente connesse ossia alle aree di multicircuiti regolari ai quali assegnamo ancora la forma $\Gamma_0 \oplus \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_m$, presumendo che i vari Γ_j siano circuiti quadrabili. Più limitatamente consideriamo che tutti i Γ_j siano sezionabili verticalmente come nella figura seguente.

//input pI30b09

Aggiungendo coppie di segmenti da percorrere nei due sensi opposti (in questo caso solo verticali) si ottiene una figura equiareale associata a un unico circuito orientato il cui integrale curvilineo si può esprimere come somma algebrica di integrali aventi la forma $\int_a^b dx \, f_j(x)$ o la forma $\int_a^b dx \, g_j(x)$ nei quali le funzioni integrande delimitano i vari circuiti Γ_j per $j = 0, 1, \dots, m$

Esprimendo ciascuna frontiera con la funzione $y(x)$ si ottiene la formula concisa

$$\mathbf{Area}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (dy \, x - dx \, y) .$$

Questa introducendo la variabile $t := \frac{y}{x}$, dato che $dy \, x - dx \, y = x^2 dt$ porta alla formula

$$\mathbf{Area}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} dt \, x^2 .$$

I30b.10 Applichiamo la formula precedente nel caso semplice e fondamentale di un triangolo $T(OAB)$ orientato canonicamente con i vertici nell'origine, in $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e in $B = \langle x_B, y_B \rangle$.

//input pI30b10

L'integrale curvilineo per l'intero circuito costituente il perimetro di T si riduce all'integrale sul solo lato orientato $\overrightarrow{AB}$ in quanto sugli altri due lati la variabile di integrazione $t = y/x$ non varia, $dt = 0$.

Il lato $\overrightarrow{AB}$ viene espresso dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq t \leq 1 .$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} \text{Area}(T(OAB)) &= \int_0^1 dt \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \\ &= \int_0^1 dt \left([x_A + t(x_B - x_A)](y_B - y_A) - [y_A + t(y_B - y_A)](x_B - x_A) \right) . \\ &= \frac{1}{2} (x_A y_B - x_B y_A) \int_0^1 dt = \frac{1}{2} (x_A y_B - x_B y_A) \end{aligned}$$

Conviene segnalare che questo risultato è in accordo con quanto segue dallo studio sul determinante della trasformazione lineare rappresentata dalla applicazione al quadrato di base con vertici opposti nell'origine e in $\langle 1, 1 \rangle$ della matrice $\begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{bmatrix}$, trasformazione che produce il parallelogramma avente i vertici nell'origine, in $A = \langle x_A, y_A \rangle$, in $\langle x_A + x_B, y_A + y_B \rangle$ e in $B = \langle x_B, y_B \rangle$.

I30 c. quadrature mediante integrali curvilinei

I30c.01 Consideriamo nel piano-RR una circonferenza γ di raggio $r > 0$ con centro in $\langle r, 0 \rangle$ e diametro orizzontale OB . Denotiamo con τ la retta (verticale) tangente a γ in B , con C un punto di tale tangente e consideriamo la semiretta $\sigma := \overrightarrow{AC}$ e il punto D seconda intersezione di γ con σ . Individuiamo poi il punto P della σ tale che AP sia congruente on DC .

Il luogo dei punti P al variare del punto C sulla τ si dice **cissoide** di parametro r .

//input pI30c01

Per studiare questa curva trattiamo il suo punto variabile P sia con le coordinate cartesiane che con le coordinate polari.

Per la coppia di coordinate cartesiane $\langle x, y \rangle$ abbiamo l'origine O sulla circonferenza, $Ox := \overrightarrow{AB}$ e Oy tangente a γ .

Si trovano facilmente le relazioni che seguono.

$$\angle DBC = \theta \quad , \quad |BD| = 2r \sin \theta \quad , \quad |CD| = 2r \sin \theta \tan \theta = \frac{2r \sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad .$$

Quindi la cissoide è caratterizzata dall'equazione polare

$$(1) \quad \rho = 2r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad .$$

Passando alle coordinate cartesiane abbiamo

$$(2) \quad \rho^2 \rho \cos \theta = 2r (\rho \sin \theta)^2 \quad , \quad (x^2 + y^2) x = 2r y^2$$

e quindi la caratterizzazione mediante coordinate cartesiane

$$y^2 = \frac{x^2}{2r - x}$$

e la caratterizzazione parametrica mediante il parametro $t := \frac{y}{x}$

$$(3) \quad x = 2r \frac{t^2}{1 + t^2} \quad , \quad y = 2r \frac{t^3}{1 + t^2} \quad .$$

I30c.02 Le equazioni trovate e la simmetria della costruzione costituente la sua definizione dicono che la cissoide trovata è invariante per la riflessione $[y \mapsto -y]$, cioè è simmetrica rispetto all'asse Ox e inoltre che la tangente τ è asintoto della curva per $\theta \rightarrow -\pi/2$ e per $\theta \rightarrow +\pi/2$.

Si osserva anche che alla cissoide appartengono anche i punti $\langle r, -r \rangle$ ed $\langle r, r \rangle$, punti corrispondenti a $\theta = \pm \pi/4$, ovvero a $t = \pm 1$.

Si nota che per $-\pi/4 < \theta < \pi/4$, ovvero per $-1 < t < 1$, il punto P ha ascissa inferiore al punto D ; viceversa per $|\theta| > \pi/4$ il punto P presenta ascissa superiore a quella del punto D . Accade invece che per $|\theta| = \pi/4$ i due punti coincidono.

I30c.03 Calcoliamo l'area del triangolo curvilineo T delimitato dalla curva e dal segmento verticale PP' (o P_1P_1') le cui estremità hanno ascissa uguale ad x e quindi ordinate uguali a $-t$ e $+t$.

Per questo conviene servirsi della formula $\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \int_{(\Gamma)} dt \, x^2$.

Per la nostra cissoide abbiamo

$$\mathbf{Area}(T) = \frac{1}{2} \int_{O P'} dt x^2 + \frac{1}{2} \int_{P' P} dt x^2 + \frac{1}{2} \int_{P O} dt x^2 .$$

Da qui si ricava

$$\mathbf{Area}(T) = r^2 \left[6 \arctan t - \frac{2t(3+5t^2)}{(1+t^2)^2} \right] .$$

Per $t \rightarrow +\infty$ il secondo addendo della espressione trovata tende a 0 e si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{Area}(T) = 6r^2 \frac{\pi}{2} = 3\pi r^2 ;$$

Dunque l'area della regione illimitata compresa tra curva e la retta $x = 2r$ è finita e pari al triplo dell'area della cerchio che la genera.

130c.04 Ricordiamo che il folium di Cartesio relativo al parametro $a \in \mathbb{R}_+$ è caratterizzato dalle equazioni parametriche

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad , \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3} .$$

Questa curva è simmetrica rispetto alla retta diagonale $y = x$ e presenta un cappio K con nodo doppio nell'origine, punto relativo a $t = 0$ e punto diametralmente opposto in $V := \left\langle \frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a \right\rangle$, punto relativo a $t = 1$.

Cerchiamo l'area di questo cappio. Questa area è facilmente ottenibile dall'area della regione compresa tra l'arco di folium inferiore con estremità in O e V e la sua corda costituita dal segmento OV della diagonale principale.

Lungo la corda si ha $\frac{y}{x} = t = 1$; quindi $\int_{\overrightarrow{OV}} dt x^2 = 0$.

L'area cercata quindi è data da

$$\mathbf{Area}(K) = \int_0^1 dt x^2 = 3a^2 \int_0^1 dt \frac{3t^2}{(1+t^3)^2} = 3a^2 \int_0^1 \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2 .$$

130c.05 Studiamo ora gli integrali curvilinei che forniscono aree di regioni limitate da sopra curve piane regolari individuate da espressioni nelle coordinate polari ρ e θ . Anche queste, come le coordinate cartesiane x e y conviene siano considerate funzioni di un parametro t che varia in un opportuno intervallo $[a, b]$.

Similmente a quando scriviamo $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$ per equazioni parametriche cartesiane, per equazioni parametriche polari ci serviamo di espressioni di funzioni come $\rho = \mathcal{R}(t)$ e $\theta = \Theta(t)$, in modo da distinguere le espressioni nella variabile t ($\mathcal{R}$ e Θ) dai valori che esse assumono (ρ e θ).

Dato che $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, abbiamo

$$(1) \quad dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta \quad \text{e} \quad dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta .$$

Se è invece opportuno porre in evidenza le funzioni e le espressioni che individuano le curve scriviamo

$$(2) \quad d\xi = \cos \Theta d\mathcal{R} - \mathcal{R} \sin \Theta d\Theta \quad \text{e} \quad d\eta = \sin \Theta d\mathcal{R} + \mathcal{R} \cos \Theta d\Theta .$$

Si può anche considerare che le espressioni come la (1) siano semplificazioni formali delle espressioni della forma (2) nelle quali si confondono i valori delle coordinate dalle espressioni che consentono il calcolo.

Dalle relazioni precedenti si ottiene

$$(3) \quad x dx - y dy = \rho^2 d\theta \quad \text{ovvero} \quad \xi d\xi - \eta d\eta = \mathcal{R}^2 d\Theta .$$

Quindi per l'area della regione delimitata dal circuito Γ abbiamo l'espressione

$$(4) \quad \text{Area}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{(\Gamma)} d\theta \mathcal{R}^2 .$$

I30c.06 Si richieda l'area di un cosiddetto **settore polare piano**, triangolo curvilineo T avente come vertici A , B e C , come lati AB ed AC due segmenti rettilinei e il lato BC esprimibile come arco di curva fornito da una coordinata radiale.

L'invarianza dell'area per traslazione ci consente di assumere, per semolificare, che il vertice A sia l'origine O ; assumiamo inoltre che i vertici siano forniti, risp., dalle coordinate polari $\langle \rho_B, \theta_B \rangle$ e $\langle \rho_C, \theta_C \rangle$ e che la curva $B \frown C$ sia espressa dall'equazione $\rho = \mathcal{R}(\theta)$ per $\theta \in [\theta_B, \theta_C]$.

//input pI30c06

Abbiamo

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \int_{OB} d\theta \mathcal{R}(\theta) + \frac{1}{2} \int_{B \frown C} d\theta \mathcal{R}(\theta) + \frac{1}{2} \int_{CO} d\theta \mathcal{R}(\theta) .$$

Ma il primo e il terzo addendo sono integrali su regioni di area nulla (per essi $d\theta = 0$) e quindi

$$(1) \quad \text{Area} = \frac{1}{2} \int_{\theta_b}^{\theta_c} d\theta \mathcal{R}(\theta) .$$

In particolare l'area di una regione delimitata da una curva chiusa $\bar{\Gamma}$ che contiene l'origine e si può esprimere con un'equazione polare $\rho = \mathcal{R}(\theta)$ per $\theta \in [0, 2\pi]$ abbiamo

$$(2) \quad \text{Area}(\bar{\Gamma}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \mathcal{R}(\theta) .$$

Si osserva che se abbiamo una curva esprimibile da un'equazione in coordinate polari $\rho = \mathcal{R}(\theta)$ per θ che corre in un intervallo più ampio di $\langle 0, 2\pi \rangle$ l'integrale della forma precedente fornisce l'area di una figura con porzioni calcolate più volte, tante quante volte il raggio vettore che va dal polo alla curva le ha toccate.

Si osserva anche che la espressione (1) si può ottenere come limite delle somme di triangolini delimitati da due lati di lunghezza $\bar{\rho}$ e $\bar{\rho} + d\rho$ e da un arco di lunghezza $\rho d\theta$ e quindi avente area data, a meno di infinitesimi superiori a $d\theta$, da $\frac{1}{2} \mathcal{R} \mathcal{R} d\theta$.

I30c.07 Si consideri il triangolo polare T delimitato dalla dn cardioide data dall'equazione $\rho = \mathcal{R}(\theta) = 2a(1 + \cos \theta)$. Dato che

$$\mathcal{R}^2 = 4a^2(1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) = 4a^2 \left(1 + 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) = 4a^2 \left(\frac{3}{2} + 2\cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) ,$$

abbiamo

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \mathcal{R}^2 = 2a^2 3\pi + 4a^2 \left[\sin \theta \right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{2} \left[\sin 2\theta \right]_{-\pi}^{+\pi} = 6\pi a^2 .$$

I30c.08 Ricordiamo che la lemniscata di Bernoulli, è il luogo dei punti $P = \langle x, y \rangle$ tali che il prodotto $PF \times PF_1$ delle sue distanze dd due punti F e F_1 chiamati fuochi è uguale a c^2 . Per semplicità consideriamo la lemniscata i cui fuochi sono $F := \langle c, 0 \rangle$ e $F_1 := \langle -c, 0 \rangle$.

//input pI30c08

Si tratta di una curva limitata simmetrica rispetto ad Ox e ad Oy che è costituita da due cappi e si chiede l'area delimitata da ciascuno uno di questi cappi che denotiamo con K .

La figura rende evidenti i seguenti sviluppi.

$$\mathcal{R}^2 = PF^2 = \rho^2 + c^2 - 2c\rho \cos \theta \quad , \quad PF_1^2 = \rho^2 + c^2 + 2c\rho \cos \theta$$

Abbiamo quindi l'equazione

$$\mathcal{R}^2 = 2c^2 \cos 2\theta$$

Osserviamo anche che in coordinate cartesiane questa equazione equivale alla

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2) \quad .$$

Osserviamo che i punti di un cappio si ottengono facendo variare θ da $-\pi/4$ a $\pi/4$ ottenendo quindi

$$(2) \quad \text{Area}(K) = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \mathcal{R}^2 = c^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \cos 2\theta = c^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = c^2$$

In termini geometrico-discorsivi: l'area di un cappio delle lemniscata di Bernoulli vale quanto il quadrato costruito sul suo semiasse focale.

I30c.09 Vogliamo ora trattare tre spirali, curve che si esprimono convenientemente mediante le coordinate polari con espressioni della forma $\rho = R(\theta)$ con R funzione crescente.

La **spirale di Archimede** è individuata dalla semplice equazione $\rho = a\theta$; Quindi l'area della figura F compresa tra la curva e il raggio vettore di anomalia θ è data da

$$(1) \quad \text{Area}(F) = \frac{1}{2} \int_0^\theta dF \theta a^2 \theta^2 = a^2 \frac{\theta^3}{6} = \frac{1}{6} \rho^2 \theta \quad .$$

Si osserva che questa area vale un terzo dell'area del settore circolare di raggio ρ e con anomalia tra 0 e θ .

L'area della prima spira si ottiene ponendo $\theta = 2\pi$ e quindi è $\frac{4}{3} \pi^3 a^2$.

I30c.10 Ricordiamo che la **spirale iperbolica** è caratterizzata dall'equazione $\rho = \frac{a}{\theta}$, che presenta un punto asintotico nell'origine relativo a $\theta \rightarrow 0$ e che per $\theta \rightarrow +\infty$ tende asintoticamente all'asse Ox .

Dunque l'area con segno del settore F compreso tra i raggi vettori aventi come prima estremità l'origine e come seconde estremità il punto $\langle \rho_j, \theta_j \rangle$ per $j = 1, 2$ è data da

$$\text{Area}(F) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{a^2}{2} \left[-\frac{1}{\theta} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2} \right) \quad .$$

Osserviamo che si chiede solo $0 < \theta_1, \theta_2$ e che non è necessaria la condizione $\theta_1 < \theta_2$.

Per $\theta_2 \rightarrow +\infty$ quest'area tende a $\frac{a^2}{2\theta_1}$: si tratta dell'area coperta dal raggio vettore quando la sua anomalia cresce da un valore $\theta_1 > 0$ a $+\infty$ percorrendo un numero infinito di spire che avvolgono l'origine.

I30c.11 La **spirale logaritmica** è la curva parametrizzata dal reale $k \in \mathbb{R}_+$ e retta dell'equazione $\rho = e^{k\theta}$.

//input pI30c11

Si osserva che per $\theta \rightarrow -\infty$ il raggio vettore individua un punto che percorre la successione infinita di spire che avvolgono sempre più strettamente l'origine del piano.

Una situazione come questa si caratterizza dicendo che si è in presenza di un **punto asintotico della curva**.

L'area con segno della figura F compresa tra i raggi vettori aventi come prima estremità l'origine e come seconda estremità il punto $\langle \rho_j, \theta_j \rangle$ per $j = 2, 1$ è fornita da

$$\mathbf{Area}(F) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta e^{2k\theta} = \frac{1}{4k} (e^{2k\theta_2} - e^{2k\theta_1}) = \frac{1}{4k} (\rho_2^2 - \rho_1^2) .$$

Ne consegue che per $\theta_1 \rightarrow -\infty$ l'area tende ad $\frac{1}{4k} \rho_2^2$.

130c.12 Consideriamo una regione piana regolare orientata coperta da un segmento di lunghezza e posizione variabili rette dal parametro t con $t \in [t_A, t_D]$ il quale si muove in modo tendenzialmente regolare, cioè con le coordinate delle estremità variabili esprimibili con le funzioni-RtRR $P_1(t)$ e $P_2(t)$ che hanno andamento monotono e assumono per $t = t_A$ la posizione AB e per $t = t_D$ la posizione DC . Il circuito orientato positivamente Γ che delimita questa regione è costituito dal vettore applicato $\overrightarrow{AB}$, dall'arco descritto da $P_2(t) := \langle \xi_2(t), \eta_2(t) \rangle$ per t che varia da t_A a t_D , dal vettore applicato $\overrightarrow{CD}$ e dall'arco descritto da $P_1(t) := \langle \xi_1(t), \eta_1(t) \rangle$ per t che varia da t_D a t_A .

L'area delimitata da Γ è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{Area}(\Gamma) &= I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} && \text{dove} \\ (1) \quad I_{AB} &:= \mathbf{Area}(\Delta(OAB)) = y_B x_A - y_A x_B \quad , \quad I_{BC} := \oint_{t_A}^{t_D} dt \left(\xi_2 \frac{d\eta_2}{dt} - \eta_2 \frac{d\xi_2}{dt} \right) \quad , \\ I_{CD} &:= \mathbf{Area}(\Delta(OC D)) = y_D x_C - y_C x_D \quad , \quad I_{DA} := \frac{1}{2} \int_{t_D}^{t_A} dt \left(\xi_1 \frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1 \frac{d\xi_1}{dt} \right) \end{aligned}$$

Si osserva che

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_D} dt \left(\xi_2 \frac{d\eta_1}{dt} + \eta_1 \frac{d\xi_2}{dt} - \xi_1 \frac{d\eta_2}{dt} - \eta_2 \frac{d\xi_1}{dt} \right) &= \int_{t_A}^{t_D} d(\xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2) = \quad . \\ x_D y_C - x_C y_D - x_A y_B + y_A x_B &= -I_{AB} - I_{CD} \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathbf{Area}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_D} dt \left(\xi_1 \frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1 \frac{d\xi_1}{dt} - \xi_2 \frac{d\eta_1}{dt} - \eta_1 \frac{d\xi_2}{dt} + \xi_1 \frac{d\eta_2}{dt} + \eta_2 \frac{d\xi_1}{dt} \right) .$$

ossia abbiamo la cosiddetta **formula di quadratura di regione piana tracciata da segmento**.

$$(2) \quad \mathbf{Area}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_D} dt \left[(\xi_1 - \xi_2) \frac{d(\eta_1 + \eta_2)}{dt} - (\eta_1 - \eta_2) \frac{d(\xi_1 + \xi_2)}{dt} \right] .$$

Facendo riferimento alle funzioni-RtRR $P_1(t)$ e a $P_2(t)$, la formula precedente si può scrivere utilizzando l'operatore prodotto vettoriale

$$(3) \quad \mathbf{Area}(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_D} dt \left| (P_2 - P_1) \wedge \left(\frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} \right) \right| .$$

I30 d. volumi di solidi di rotazione

I30d.01

$$\mathbf{Vol} = \pi \int_a^b dz r^2(z) .$$

I30d.02

$$\mathbf{Vol} = \pi \left(\int_a^b dz r_2^2(z) + \int_b^a dz r_1^2(z) \right) = \pi \int_{\Gamma} r^2(z) .$$

I30d.03 Si consideri la cicloide nel piano Oxz data dalle equazioni parametriche

$$z = R(t - \sin t) \quad \text{e} \quad r = R(-\cos t) \quad \text{per } t \in [0, 2\pi] .$$

Si chiede il volume del solido generato dal trapezoide delimitato da un arco della cicloide $OA(t)$ per un dato $t \in [0, 2\pi]$.

I30d.04 Consideriamo solidi di rotazione generati da settori espressi mediante coordinate polari.

$$\begin{aligned} \mathbf{Vol} &= \pi \int_{\overrightarrow{OB}} dt r^2 + \pi \int_{B \cap A} dt r^2 + \pi \int_{\overrightarrow{AO}} dt r^2 . \\ \mathbf{Vol} &= \frac{2}{3} \pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \rho^3 \sin \theta . \end{aligned}$$

I30d.05 Si chiede il volume $\mathbf{Vol}$ della figura tridimensionale generata dalla regione piana delimitato dalla **cardioide** caratterizzata dall'equazione $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ mediante una rotazione di 2π intorno al suo asse.

$$\mathbf{Vol} = 16 \frac{4}{3} \pi a^2 .$$

I30d.06 Si richiede il volume $\mathbf{Vol}$ della figura 3D generata da un cappio della **lemniscata** mediante una rotazione intorno al suo asse trasverso. Dato che l'equazione della lemniscata avente la distanza tra i fuochi uguale a $c\sqrt{2}$ è

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\theta = c^2 (2 \cos^2 \theta - 1) ,$$

il volume richiesto è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{Vol} &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} d\theta c^3 (2 \cos^2 \theta - 1)^{3/2} \sin \theta = \int_0^{\pi/4} du \sqrt{2} \cos \theta , \quad du = \sqrt{2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \pi c^3 \int_1^{\sqrt{2}} du (u^2 - 1)^{3/2} . \end{aligned}$$

L'integrale in du si ottiene con due integrazioni per parti:

$$\begin{aligned} \int du (u^2 - 1)^{3/2} &= \int du u^3 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} = \frac{u^4}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{4} \int du u \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \\ &= \frac{u^4}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{8} u^2 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{1/2} + \frac{3}{8} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ &= \frac{u^4}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{8} u^2 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{1/2} + \frac{3}{8} \ln \left| u + \sqrt{u^2 - 1} \right| + \mathbf{c} \end{aligned}$$

Questa formula consente di rispondere alla richiesta.

I30d.07 Consideriamo la **spirale logaritmica** data dall'equazione $\rho = e^{k\theta}$ e il suo arco che ha per estremità i punti di anomalia 0 e $\bar{\theta}$ per un particolare $\bar{\theta} \in (0, \pi)$.

Si chiede il volume **Vol** della figura 3D generata dal settore delimitato dal suddetto arco e dai corrispondenti raggi vettori, settore fatto ruotare di 2π intorno all'asse polare orizzontale.

Le considerazioni precedenti portano a

$$\begin{aligned} \mathbf{Vol} &= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\bar{\theta}} d\theta e^{3k\theta} \sin \theta = \frac{2}{3} \pi \left[\frac{e^{2k\theta} (3k \sin \theta - \cos \theta)}{9k^2 + 1} \right]_0^{\bar{\theta}} \\ &= \frac{2}{3} \pi \frac{e^{2k\bar{\theta}} (3k \sin \bar{\theta} - \cos \bar{\theta}) + 1}{9k^2 + 1} \end{aligned}$$

130 e. integrali definiti dipendenti da un parametro

130e.01 Consideriamo gli intervalli reali $X := [x_1, x_2]$ e $Y := [y_1, y_2]$ il rettangolo piano $R := X \times Y = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ e la funzione $f(x, y)$ del genere $[R \mapsto \mathbb{R}]$ continua.

Per ogni valore $y \in Y = [y_1, y_2]$ esiste l'integrale $J(y) := \int_{x_1}^{x_2} dx f(x, y)$. Questa costruzione evidentemente definisce una funzione del genere $[Y \mapsto \mathbb{R}]$.

Per dualità-xy per ogni valore $x \in X = [x_1, x_2]$ esiste l'integrale $I(x) := \int_{y_1}^{y_2} dy f(x, y)$ e anche questa costruzione definisce una funzione; essa appartiene al genere $[X \mapsto \mathbb{R}]$.

Una di queste funzioni si dice **integrale dipendente da un parametro reale**.

La continuità della funzione $f(x, y)$ implica la continuità degli integrali dipendenti da un parametro.

(1) Prop.: Le funzioni $J(y)$ e $I(x)$ sono continue.

Dim.: ■

130e.02 Prop. Se la funzione $f(x, y)$, oltre che continua, è derivabile rispetto al parametro y e se anche la funzione $\frac{df}{dy}$ è continua in R , allora $\frac{df}{dx}$ è integrabile e $I(y)$ è derivabile rispetto alla y e vale la cosiddetta **regola di Leibniz per la derivazione sotto il segno di integrale**

$$\frac{d}{dy} \int_{x_1}^{x_2} dx f(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{df}{dy}(x, y).$$

Dim.: Consideriamo il generico $y \in Y$ e il valore variato $y + \Delta y$; chiaramente

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Per il teorema degli accrescimenti finiti

$$\begin{aligned} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{df}{dy}(x, y + \theta \Delta y) \quad \text{con } 0 < \theta < 1 \quad \text{e quindi} \\ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{df}{dy}(x, y) + \eta \quad \text{con } \eta := \frac{df}{dy}(x, y + \theta \Delta y) - \frac{df}{dy}(x, y) \quad \text{e} \\ \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{df}{dy}(x, y) &= \int_{x_1}^{x_2} dx \eta. \end{aligned}$$

La supposta continuità di $\frac{df}{dy}(x, y)$ in R implica che, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) esiste $\delta \in \mathbb{R}$ tale che per

$|\Delta y| < \delta$ sia $|\eta| < \frac{\epsilon}{x_2 - x_1}$. Quindi per $|\Delta y| < \delta$ si ha

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{df}{dy}(x, y) - \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} dx \eta \right| < \frac{\epsilon}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1) = \epsilon.$$

Abbiamo quindi che $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y}$ esiste e vale $\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{df}{dy}(x, y)$, cioè vale l'enunciato ■

130e.03 Prop. Vale la formula di derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dy} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dx f(x, y) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dx \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \beta'(y) f(\beta(y), y) - \alpha'(y) f(\alpha(y), y).$$

Dim.: ■

I30 f. lavoro di una forza espresso da un integrale curvilineo

I30f.01 In un data regione del piano-RR si abbia una forza espressa da un vettore tridimensionale costante $\vec{F}$ il cui modulo scriviamo $F := |\vec{F}|$ e si abbia un segmento rettilineo $\overrightarrow{AB}$ appartenente ad $\mathbb{R}^3$ a cui lunghezza denotiamo con s . Denotiamo con θ l'angolo formato dai vettori $\vec{F}$ e $\overrightarrow{AB}$ che vogliamo .

Definiamo **lavoro eseguito dalla forza** $\vec{F}$ applicata ad un punto P che si sposta del segmento $\overrightarrow{AB}$ lo scalare

$$(1) \quad F s \cos \theta = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} .$$

Consideriamo una situazione più generale che vede una forza dipendere dal punto di applicazione, cioè determinata da una funzione $\vec{F}(P)$, la quale sia applicata al punto P che si sposta sopra una curva Γ tra le sue estremità che denotiamo ancora, risp., con A e con B .

Alla curva Γ chiediamo che sia regolare a tratti e che sia espressa da equazioni parametriche della forma

$$x = \xi(t) , \quad y = \eta(t) , \quad z = \zeta(t) \quad \text{per} \quad t \in [a, b] .$$

Scriviamo poi $P(t) := \langle \xi(t), \eta(t), \zeta(t) \rangle$ ed $\eta(P(t)) := \angle(\vec{F}(P), \tan_{\Gamma}(P))$; osserviamo anche che $P(a) = A$ e $P(b) = B$.

La curva Γ è rettificabile.

Per il lavoro abbiamo

$$\mathcal{L} = \int_{(\Gamma)} ds F(P) \cos \theta(P) .$$

I30f.02 Consideriamo le tre componenti cartesiane di $\vec{F}$, F_x , F_y ed F_z .

$$(1) \quad \mathcal{L} = \int_{(\Gamma)} ds \left(F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \right) = \int_{(\Gamma)} ds (F_x dx + F_y dy + F_z dz) .$$

Abbiamo inoltre l'equivalente espressione vettoriale

$$(2) \quad \mathcal{L} = \int_{(\Gamma)} \vec{F} \cdot dP \quad \text{per} \quad dP := \langle dx, dy, dz \rangle .$$

Le formule precedenti esprimono il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}(P)$ che dipende solo dal punto in cui viene applicata quando tale punto percorre un dato arco di curva.

I30f.03 Consideriamo un campo di forze $\vec{F}(P) = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$ definito per tutti i punti di una regione tridimensionale connessa R , cioè in una $R \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che per ogni duetto $\{A, B\}$ di suoi punti interni si possa passare dall'uno all'altro percorrendo una poligonale di suoi punti interni.

Il campo si dice **campo di forze conservativo** sse esiste una funzione scalare $\mathcal{U}(x, y, z)$ tale che si abbia

$$(1) \quad \forall P = \langle x, y, z \rangle \in \text{Intrn}(R) : \quad F_x = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{U} , \quad F_y = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{U} , \quad F_z = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{U} .$$

Questa funzione si chiama **energia potenziale del campo di forze**.

Ricordiamo [I29f01] che si dice **gradiente di una funzione** scalare Φ del punto di una certa regione tridimensionale la funzione-RRRtR definita in ciascuno dei punti interni della regione

$$\text{grad } \Phi := \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \Phi + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \Phi + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \Phi .$$

Il gradiente è un operatore differenziale lineare, cioè applicato a una combinazione lineare di funzioni opportune fornisce la stessa combinazione lineare dei gradienti delle due funzioni.

Servendosi dell'operatore gradiente la (1) si può riscrivere

$$\forall P = \langle x, y, z \rangle \in \text{Intrn}(\mathbb{R}) \quad : \quad \vec{F} = \text{grad } \mathcal{U} .$$

I30f.04

$$\int_{A \rightarrow B} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) = \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) .$$

I30f.05 Ci proponiamo di individuare una condizione necessaria per la quale il valore di un integrale curvilineo sia indipendente dal cammino di integrazione.

L'integrando deve essere un differenziale esatto.

I30f.06 Le considerazioni e gli enunciati precedenti possono essere generalizzati senza difficoltà alle d dimensioni con d intero positivo qualsiasi, ossia possono essere generalizzati a funzioni definite in regioni di spazi $\mathbb{R}^{\times d}$.

I30 g. differenziali esatti

I30g.01 Consideriamo una regione connessa R di $\mathbb{R}^{\times 3}$ e tre funzioni $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$ e $Z(x, y, z)$ continue insieme alle loro derivate parziali prime in ogni punto interno di R .

Se $X dx + Y dy + Z dz$ è un differenziale esatto esiste una funzione $\mathcal{U}(x, y, z)$ avente R come dominio e tale che si abbia

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} = Z$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Essendo continue le derivate parziali $\frac{\partial X}{\partial y}$ e $\frac{\partial Y}{\partial x}$, il criterio di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione implica $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$. Similmente si ottengono altre due uguaglianze concernenti le altre derivate parziali; complessivamente dunque

$$(1) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

Se denotiamo con **Exctdiff** l'insieme dei differenziali esatti, abbiamo

$$(2) \text{ Prop.: } X dx + Y dy + Z dz \in \text{Exctdiff} \implies \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}.$$

I30g.02 L'implicazione precedente in generale non si può invertire.

Consideriamo un semplice controesempio: come regione R assumiamo l'intero $\mathbb{R}^{\times 3}$ privato della retta (verticale) che soddisfa le equazioni $x = 0$ e $y = 0$, nonché le funzioni

$$X = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Z = 0,$$

funzioni non definite nei punti della retta esclusa dal dominio.

Si verifica senza difficoltà che esse soddisfano le uguaglianze g01(1).

Tuttavia se si assegna il ruolo di Γ alla circonferenza di raggio 1 nel piano Oxy , cioè si considera la curva

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0 \quad \text{per } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

si ottiene

$$\int_{(\Gamma)} (X dx + Y dy + Z dz) = \int_0^{2\pi} -\sin t d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \cos t d(\sin t) = 2\pi.$$

Osserviamo che il controesempio esaminato può essere inquadrato in considerazioni sopra differenziali esatti nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; l'integrale calcolato riguarda un circuito che racchiude l'origine del piano Oxy , punto nel quale le funzioni X e Y non sono definite.

I30g.03 Accade che le uguaglianze g01(1) sono in grado di garantire l'esattezza del corrispondente differenziale $X dx + Y dy + Z dz$ quando valgono in una regione con caratteristiche diverse da quella trattata in g02.

Ricordiamo che un insieme S connesso appartenente a uno spazio topologico si dice **insieme semplicemente connesso** sse dati due suoi punti A e B tutti i cammini da A a B costituiti da punti appartenenti ad S si possono trasformare gli uni negli altri mediante modifiche continue.

Non sono semplicemente connessi gli insiemi che “presentano dei buchi”, come la regione piana compresa tra due circonferenze concentriche aventi raggi diversi, come una sfera dotata di manici, come un anello toroidale e come lo spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ privato di una retta come visto in g02 .

Sono invece semplicemente connessi i sottoinsiemi convessi di uno spazio metrico, o più in generale i sottoinsiemi di uno spazio metrico convessi rispetto a un loro punto (cioè tali che ogni loro altro punto è collegabile al punto privilegiato attraverso un segmento rettilineo costituito da punti interni).

Gli insiemi semplicemente connessi del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono le regioni ottenibili da un cerchio per deformazione continua, mentre gli insiemi semplicemente connessi dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono le regioni ottenibili da una sfera per deformazione continua.

I30g.04 Teorema

$$\mathcal{U}(P) = \int_{P_0 \frown P} (X dx + Y dy + Z dz) + \mathcal{C}$$

I30g.05 Il teorema precedente si estende senza difficoltà ai differenziali esatti di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ per d intero positivo qualsiasi.

Si devono prendere in esame funzioni della forma $X_j(x_1, x_2, \dots, x_d)$ per $j = 1, 2, \dots, d$ e differenziali della forma $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_d dx_d$.

Tra le derivate delle funzioni X_j si hanno le $\frac{d(d-1)}{2}$ uguaglianze

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_k} = \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \quad \text{per} \quad k = 2, 3, \dots, d \quad \text{e} \quad h = 1, \dots, k-1 .$$

Si ottiene allora la formula

$$\mathcal{U}(P) = \mathcal{U}(P_0) + \int_{P_0 \frown P} (X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_d dx_d) .$$

I30g.06 Si hanno formule particolarmente semplici per la funzione potenziale quando la regione ha forma tale che si trovi un suo punto P_0 dal quale ogni altro punto si possa raggiungere con segmenti rettilinei nei quali cambia una sola coordinata.

L'esposizione in <https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/> e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php