1

## Capitolo I29
# derivate parziali

## Contenuti delle sezioni



---

**I290.01** Questo capitolo introduce la nozione di derivata parziale, la costruzione basilare per lo studio infinitesimale delle funzioni in più variabili reali e complesse e sviluppa alcune nozioni che da essa discendono direttamente.

Vengono esaminate le funzioni a valori reali in più variabili reali, inizialmente soprattutto le bivariate.
Il dominio $D$ di tali funzioni per molti sviluppi può essere definito con una certa elasticità.
Spesso ci si può limitare a chiedere che $D$ sia un insieme aperto secondo la topologia (e la metrica) della distanza pitagorica. Più in particolare talora basta chiedere che il dominio sia una bolla ipersferica o un multirettangolo.

Con entrambe le scelte le costruzioni introdotte e le proprietà trovate si possono estendere facilmente a funzioni per il cui dominio si chiede solo che contenga un insieme aperto, senza irrigidirsi sulla appartenenza di suoi punti di accumulazione e di suoi punti di frontiera.

per le situazioni più semplici si tende a chiedere che il dominio delle funzioni analizzate sia semplicemente connesso, ma per varie questioni di rilievo risulta necessario trattare funzioni il cui dominio è molteplicemente connesso.

**I290.02** In questo capitolo, caratterizzato dalla presentazione di numerose formule articolate, ci serviremo di varie notazioni e di vari termini specifici, soprattutto abbreviazioni, che crediamo opportuno riassumere.

Con il termine regioni designamo sottoinsiemi degli spazi ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\times 3}$ e $\mathbb{R}^{\times d}$ con $d = 2, 3, 4, ...$ connessi e dotati di punti interni.

Useremo le espressioni sincopate **funzioni-RRtR** per le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ , **funzioni-RRRtR** per le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ e **funzioni-RdtR** per le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ .

Con $d$ denoteremo un intero maggiore o uguale a 2 e useremo l'abbreviazione **funzioni-RdtR** per le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ .

In questo capitolo inoltre conveniamo che i domini delle funzioni sopra citate siano regioni; per molte di queste funzioni si potrebbe adottare una scelta non molto differente chiedendo che i loro domini siano regioni aperte.

Nei discorsi riguardanti le funzioni multivariate parleremo di punti dei loro domini e di punti delle (iper)superfici rappresentate dalle funzioni. Per distinguere questi due tipi di punti useremo notazioni come $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}_i$ per i punti dei domini (punti del piano $\mathsf{Oxy}$ per le funzioni come $z = f(x, y)$), mentre useremo notazioni come $P_0$, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{r}_h$ per le $d + 1$-uple che fanno parte delle (iper)superfici.

Per introdurre le nozioni di base inizieremo con le funzioni-RRtR ed estenderemo le considerazioni prima alle funzioni-RRRtR ed successivamente alle più generali funzioni-RdtR, talora limitandoci ad argomentazioni che richiamano soltanto i risultati delle funzioni dei generi più ridotti.

## I29 a. derivate parziali di funzioni bivariate

**I29a.01** Consideriamo una funzione $z = f(x, y)$ di **FunRRtR**, un sottoinsieme aperto $\mathcal{O}$ del suo dominio $D$ e un punto $P_0 = \langle x_0, y_0 \rangle \in \mathcal{O}$.
La restrizione della $f(x, y)$ relativa al valore $y_0$ della seconda variabile è la funzione-RtR $f\rceil_{*,y_0}$ il cui grafico che scriviamo $\Gamma_{x_0}$, geometricamente si ottiene in $\mathbb{R}^{\times 3}$ intersecando il grafico della $f$ con il piano verticale $y = y_0$.
Il dominio della $f\rceil_{*,y_0}$ è contenuto in $D$ ed a sua volta contiene un intervallo aperto $I$ che contiene $x_0$.
Per questa funzione è naturale porsi il problema della determinazione della derivata per $x = x_0$, ovvero il problema della determinazione della tangente alla curva $\Gamma_{x_0}$ nel punto $\langle x_0, f(x_0, y_0) \rangle$ .
Questo conduce alla ricerca del limite di un rapporto incrementale

(1) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} .$$

Se questo limite esiste, finito o infinito, viene chiamato **derivata parziale rispetto alla prima variabile** della funzione $f(x, y)$ nel punto $\langle x_0, y_0 \rangle$.
Tale elemento di $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \dot\cup \{-\infty, +\infty\}$ può essere denotato con la cosiddetta **notazione di Leibniz** che si serve del segno di derivazione parziale $\partial$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{:P_0}$, oppure con la **notazione di Cauchy** $\mathrm{D}_x f(x_0, y_0)$, o anche con la **notazione di Lagrange** $f_x(x_0, y_0)$. Il segno $\partial$ viene spesso chiamato **d storta di Jacobi**.

//input pI29a01

**I29a.02** È naturale definire per la suddetta funzione $f(x, y)$ la costruzio ottenuta dalla precedente scambiando i due argomenti della funzione stessa, ovvero attuando quella che chiamiamo **dualità-xy**, la trasformazione degli enunciati indotta dalla involuzione

$$\mathsf{Mirr}[x = y] \;:=\; \ulcorner \langle x, y \rangle \mapsto \langle y, x \rangle \urcorner \;.$$

Consideriamo dunque la restrizione della $f(x, y)$ relativa al valore $x_0$ della sua prima variabile e la funzione-RtR $f\rceil_{x_0,*}$ il cui grafico, che qui scriviamo $\Gamma_{y_0}$, si ottiene intersecando il grafico della $f$ con il piano verticale $x = x_0$.
Il dominio della $f\rceil_{x_0,*}$ è contenuto in $D$ ed a sua volta contiene un intervallo aperto $J$ che contiene $y_0$.
Il problema della determinazione della derivata di questa funzione per $y = y_0$, ovvero il problema della determinazione della tangente alla curva $\Gamma_{y_0}$ nel punto $\langle x_0, f(x_0, y_0) \rangle$, conduce alla ricerca del limite di un rapporto incrementale

(1) $$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} .$$

Se questo limite esiste, finito o infinito, viene chiamato **derivata parziale rispetto alla seconda variabile** della funzione $f(x, y)$ nel punto $\langle x_0, y_0 \rangle$. Tale elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ può essere denotato una delle tre notazioni dovute, risp., a Leibniz, a Cauchy e a Lagrange:

(2) $$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\langle x_0, y_0 \rangle} \;:=\; \mathrm{D}_y f(x_0, y_0) \;:=\; f_y(x_0, y_0) \;:=_{\text{if}\exists}\; \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} .$$

**I29a.03** Le funzioni di **FunRRtR** che nel punto $P_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ sono dotate di entrambe le derivate parziali sono dette **funzioni-RRtR derivabili** in $P_0$.

È utile considerare le funzioni di **FunRRtR** derivabili in tutti i punti di un determinato sottoinsieme $S$ di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contenuto nei loro rispettivi domini; queste funzioni le chiameremo dn funzioni-RRtR derivabili nell'insieme $S$.

In particolare è comodo e usuale fare riferimento a funzioni bivariate derivabili in determinati insiemi aperti $\boldsymbol{O}$, in particolare in bolle circolari della forma $\{\langle x, y\rangle \,⁆\, x^2 + y^2 < r^2\}$ , o in multirettangoli della forma

$$\{\langle x, y\rangle \,⁆\, x_1 < x < x_2 \wedge y_1 < y < y_2\} \ .$$

Spesso occorre distinguere le **funzioni bivariate finitamente derivabili**, cioè dotate di entrambe le derivate parziali finite, vuoi in un punto, vuoi in un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Osserviamo esplicitamente che per l'esistenza delle derivate parziali di una funzione-RRtR in un punto o in un insieme aperto non è richiesto che la funzione sia continua. Esistono funzioni discontinue in un punto interno al loro dominio nel quale sono derivabili.

Per esempio consideriamo la funzione $z = \phi(x, y)$ definita in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che per $x\,y = 0$ vale 0, mentre per $x\,y \neq 0$ assume il valore 1.
Questa $\phi(x, y)$ come insieme di terne di $\mathbb{R}^{\times 3}$ è costituita dal piano $z = 1$ al quale siano state tolte le intersezioni con i piani $x = 0$ e $y = 0$ unito agli assi $\mathsf{Ox}$ e $\mathsf{Oy}$.

Evidentemente essa in $\langle 0, 0\rangle$ è discontinua ma derivabile con $\dfrac{\partial}{\partial x}\,\phi \ = \ \dfrac{\partial}{\partial y}\,\phi \ = \ 0$ .

**I29a.04** Per il calcolo formale delle derivate parziali di funzioni ciascuna individuata da una sola espressione costruita con operazioni algebriche e funzioni trascendenti derivabili si può procedere alla derivazione rispetto a una variabile considerando l'altra come una costante.

Ad esempio per la funzione

$$f(x, y) \ = \ 3\,\mathsf{e}^{2x+y} - 5\sin(4x - y) + \ln(x^2 + y^2 + 1) + 2\pi \ .$$

per ogni $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\,f(x, y) \ = \ 6\,\mathsf{e}^{2x+y} - 20\,\cos(4x - y) + \frac{2\,x}{x^2 + y^2 + 1} \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,f(x, y) \ = \ -3\,\mathsf{e}^{2x+y} + 5\,\cos(4x - y) + \frac{2\,y}{x^2 + y^2 + 1} \ .$$

Nel caso di funzioni definite in modo più elaborato, in particolare distinguendo fra gli intervalli e i sottodomini delle variabili, può rendersi necessario valutare i corrispondenti limiti ricorrendo alle definizioni $\mathsf{a01}(2)$ e $\mathsf{a02}(2)$.

Consideriamo l'esempio della funzione $\phi(x, y)$ definita su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come segue.

per $y = 0$ si pone $\forall x \,⁚\, \phi(x, 0) \ := \ \phi_{*,0}(x, y) \ := \ x$ ;

per $y \neq 0$ si pone $\forall x \,⁚\, \phi(x, y) \ := \ := \ \phi_{*,*}(x, y) \ := \ x - 2\,y\,\arctan\,\dfrac{x}{y}$.

Per essa abbiamo:

$\forall y \in \mathbb{R}_{nz} \ ⁚ \ \phi_x(x, y) \ = \ 1 - 2\,y\,\dfrac{1}{1 + x^2/y^2}\,\dfrac{1}{y} \ = \ 1 - \dfrac{2\,y^2}{x^2 + y^2} \ = \ \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

Si osserva invece che se si cerca di determinare $\phi_x(x, y)$ per $x = 0$ e $y = 0$ considerando la derivata della $\phi(0, y)$ si ottiene $-1$, mentre se si considera la derivata della $\phi_{*,0}(x, y)$ si ottiene $+1$.

**I29a.05** Le derivazioni di una funzione $f(x,y) \in$ **FunRRtR** rispetto alla $x$ e rispetto alla $y$ producono le funzioni $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, anch'esse appartenenti ad **FunRRtR**; anche per ciascuna di queste si pone il problema di cercare le due derivate parziali.

Si introducono quindi 4 costruzioni che producono 4 numeri reali o 4 funzioni-RRtR che vengono dette **derivate parziali del secondo ordine** della $f(x,y)$.
Queste costruzioni vengono definite sia puntualmente, cioè in singoli punti interni $\langle x_0, y_0\rangle$ del dominio $D := \mathsf{dom}(f)$, che localmente (o globalmente) o in regioni (in particolare aperte) contenuti in $D$. Anche per queste costruzioni si possono usare sia le notazioni di Leibniz, sia quelle di Cauchy, sia quelle di Lagrange.

Definiamo quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;:=\; \mathrm{D}_x{}^2 f(x,y) \;:=\; f_{x,x}(x,y) \;:=_{\text{if}\exists}\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \;,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \;:=\; \mathrm{D}_x\big(\mathrm{D}_y f(x,y)\big) \;:=\; f_{x,y}(y,x) \;:=_{\text{if}\exists}\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \;,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \;:=\; \mathrm{D}_y\Big(\mathrm{D}_x f(x,y)\Big) \;:=\; f_{y,x}(x,y) \;:=_{\text{if}\exists}\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;:=\; \mathrm{D}_y{}^2 f(x,y) \;:=\; f_{y,y}(x,y) \;:=_{\text{if}\exists}\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \;.$$

**I29a.06** Le derivate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ sono chiamate **derivate miste della funzione-RRtR** $f(x,y)$.
Una funzione di **FunRRtR** per la quale esistono le quattro derivate parziali in un punto o in una regione contenuta nel suo dominio si dice **funzione due volte derivabile**, risp., puntualmente o localmente.

Osserviamo esplicitamente che per garantire l'esistenza delle derivate parziali prime può essere necessario restringere il dominio di definizione $D$. Una ulteriore restrizione può rendersi necessaria per garantire l'esistenza delle derivate seconde.

Anche per le costruzioni di alcune derivate parziali può rendersi necessario ridurre le pretese e considerare costruzioni meno impegnative concernenti le derivate parziali rispetto ad una variabile a sinistra e a destra.

**I29a.07** Si constata facilmente per molte funzioni di **FunRRtR** individuate da espressioni piuttosto semplici che le due derivate seconde miste coincidono. In effetti vale il criterio che segue, dovuto ad Alexis Clairaut ed Hermann Schwarz ).

**(1) Teorema** Consideriamo la funzione $f(x,y) \in$ **FunRRtR** dotata di derivate parziali seconde finite in una regione aperta $\mathcal{O}$. Se in un punto $\langle x_0, y_0\rangle \in \mathcal{O}$ le due derivate miste sono continue, allora in tale punto coincidono, cioè

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_{\langle x_0,y_0\rangle} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)_{\langle x_0,y_0\rangle} \qquad \text{ovvero} \qquad f_{xy}(x_0,y_0) \;=\; f_{yx}(x_0,y_0) \;.$$

**Dim.:** Consideriamo in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ un quadrato $S$ avente vertici opposti in $\langle x_0-\delta, y_0-\delta\rangle$ e $\langle x_0+\delta, y_0+\delta\rangle$ , con $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che $f_{x,y}(x,y)$ e $f_{y,x}(x,y)$ siano definite in tutti i suoi punti.
Consideriamo inoltre la seguente funzione ricavata dalla $f(x,y)$

$$\phi(x) \;:= f(x, y_0+k) - f(x,y_0) \qquad \text{per} \qquad -\delta \le k \le \delta \;;$$

essa è definita nell'intervallo $I := [x_0 - \delta, x + 0 + \delta]$. In $I$ essa può essere derivata ottenendo

$$\mathrm{D}_x\, \phi(x) \;=\; f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0)\ .$$

Applicando due volte il teorema degli accrescimenti finiti si ottiene

$$\begin{aligned}\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) \;&=\; h\, \phi'(x_0 + \theta_x\, h) \;=\; h\left(f_x(x_0 + \theta_x\, h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_x\, h, y_0)\right) \\ &=\; h\, k\, f_{x,y}(x_0 + \theta_x\, h, y_0 + \theta_y\, k)\ ,\end{aligned}$$

dove $\theta_x$ e $\theta_y$ sono numeri di $(0, 1)$.

Inoltre per l'ipotesi di continuità della $f_{x,y}(x.y)$ in $\langle x_0, y_0\rangle$ possiamo concludere

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) \;=\; h\, k\left(f_{x,y}(x_0, y_0) + \epsilon\right) \qquad \text{ove} \qquad \lim_{\langle x_0+h, y_0+k\rangle \to P_0} \epsilon = 0\ .$$

Le considerazioni precedenti trasformate per dualità-xy, cioè scambiando le variabili $x$ e $y$, si possono applicare alla funzione

$$\psi(y) \;:=\; f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

ottenendo

$$\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \;=\; h\, k\, [f_{y,x}(x_0, y_0) + \eta] \qquad \text{ove} \qquad \lim_{\langle x_0+h, y_0+k\rangle \to P_0} \eta = 0\ .$$

Ma per costruzione

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) \;=\; \psi(y_0 + k) - \psi(y_0)$$

e quindi

$$h\, k\, f_{x,y}(x_0 + \theta_x\, h, y_0 + \theta_y\, k) \;=\; h\, k\, [f_{y,x}(x_0, y_0) + \eta]$$

ovvero

$$f_{x,y}(x_0, y_0) - f_{y,x}(x_0, y_0) \;=\; \eta - \epsilon\ .$$

Dato che il primo membro non cambia al variare di $h$ e $k$ ed il secondo membro tende a 0 quando $\langle x_0 + h, y_0 + k\rangle \to \langle x_0, y_0\rangle$, si conclude con l'annullarsi del primo membro, cioè con l'asserto ▮

**I29a.08** Le manovre di derivazione parziale possono essere portate avanti per individuare le derivate parziali terze, quarte, fino all'ordine che può interessare, ossia illimitatamente.

Per esempio per una funzione $f(x, y)$ si possono cercare di individuare le derivate parziali

$$f_{x,y,x}(x, y) \;:=_{\text{if}\exists}\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) \qquad \text{e} \qquad f_{y,y,x,y}(x, y) \;:=_{\text{if}\exists}\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)\right)\ .$$

Le derivate parziali di ordine $m \in \mathbb{Z}$ che si possono definire, evidentemente, sono in biiezione con le stringhe di $m$ lettere sull'alfabeto $\{x, y\}$ e il loro numero è $2^m$.

In gran parte dei casi le funzioni bivariate di cui si trattano le derivate sono sufficientemente regolari da avere la continuità per le funzioni derivate parziali. Ad esse si può applicare una forma estesa del criterio di Clairaut-Schwarz che garantisce la permutabilità delle manovre di derivazione parziale rispetto alla $x$ e alla $y$.

Abbiamo per esempio

$$f_{x,y,y,x} = f_{x,x,y,y} \qquad , \qquad f_{y,x,x,x,y,x} = f_{x,x,x,x,y,y}\ .$$

Le diverse derivate parziali di ordine $m$ che si possono ottenere dalle funzioni bivariate sufficientemente regolari, chiaramente, sono in biiezione con le espressioni della forma

$$\frac{\partial^h}{\partial^h x}\left(\frac{\partial^{m-h}}{\partial^{m-h}}\right) f(x, y) \qquad \text{per } h = 0, 1, ..., m\ ;$$

esse sono quindi in numero di $m+1$.

Entrando in maggiori particolari può accadere che per passare dalle derivare di un certo ordine a quelle di un ordine superiore si debba ridurre il dominio della funzione in causa.

**I29a.09** Ricordiamo che per una funzione-RtR $\phi(x)$ continua insieme alla sua derivata prima in un intervallo comprendente $[x_0, x_0+\Delta x]$ vale il **teorema del valore medio per le funzioni-RRtR**

$$\phi(x_0+\Delta x) - \phi(x_0) \;=\; \Delta x\, \phi'(x_0+\theta\,\Delta x) \qquad \text{per} \qquad 0<\theta<1\ .$$

Stabiliamo un teorema che si può considerare l'estensione del precedente per le funzioni a due variabili che coinvolge le derivate parziali e segnaliamo la possibilità di una ulteriore estensione per funzioni di più variabili reali.

Sia $f(x,y)$ una funzione-RRtR definita e derivabile in un cerchio $\mathsf{C}$ di centro $P_0 = \langle x_0, y_0\rangle$ e sia $\langle x_0 + h, y_0+k\rangle$ un qualsiasi altro punto di $\mathsf{C}$.
Intendiamo collegare alle derivate parziali della $f$ la differenza

$$\Delta f \;=\; f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0)\ .$$

Facendo riferimento al cammino in $\mathsf{C}$ $\big\langle P_0 + h\,\mathbf{e}_x + k\,\mathbf{e}_y\ ,\ P_0 + k\,\mathbf{e}_y\ ,\ P_0\big\rangle$ visto come costituito da due segmenti orientati $\big\langle f(x_0,y_0), f(x_0,y_0+k)\rangle$ e $\langle f(x_0,y_0+k), f(x_0+h,y_0+k)\big\rangle$ otteniamo

$$\Delta f \;=\; \Big(f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0+k)\Big) + \Big(f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)\Big)\ .$$

Per ciascuna delle due differenze da sommare applichiamo il teorema del valore medio per funzioni univariate ottenute come restrizioni della $f(x,y)$, ottenendo

(1) $$\Delta f \;=\; h\,f_x(x_0+\theta_x\,h, y_0+k) + k\,f_y(x_0, y_0+\theta_y\,k) \qquad \text{per } 0<\theta_x,\theta_y<1 \quad .$$

Questa formula stabilisce il collegamento cercato.

La formula del valore medio per $\Delta f$ duale-xy della precedente si ottiene cambiando il cammino da $P_0 + h\,\mathbf{e}_x + k\,\mathbf{e}_y$ a $P_0$ nel seguente $\big\langle P_0 + h\,\mathbf{e}_x + k\,\mathbf{e}_y\ ,\ P_0 + h\,\mathbf{e}_x\ ,\ P_0\big\rangle$, ottenendo

(2) $$\Delta f \;=\; k\,f_y(x_0+\ h, y_0+\theta_2\,k) + h\,f_x(x_0+\theta_1\,h, y_0) \qquad \text{per } 0<\theta_1,\theta_2<1 \quad .$$

## I29 b. derivate parziali di funzioni multivariate dei vari ordini

**I29b.01** La definizione delle derivate parziali si può estendere alle funzioni di tre e più variabili reali mediante richieste assai simili a quelle usate per le funzioni bivariate.

Nella prima parte della sezione presentiamo le derivate parziali delle funzioni di tre variabili reali. Ad esse si possono dare le forme equivalenti del tipo $f(x,y,z)$ o del tipo $\mathrm{m}f(x_1,x_2,x_3)$.; Qui ci limitiamo alla forma $f(x,y,z)$, la più leggibile per le applicazioni fisico-matematiche, la seconda forma avendo il vantaggio dell'adeguarsi alla notazione che si impone per le derivate parziali delle funzioni di $d$ variabili con $d$ intero positivo imprecisato; queste ultime saranno trattate nella seconda parte della sezione.

**I29b.02** Consideriamo una funzione $w = f(x,y,z)$ di **FunRRRtR**, una sottoregione aperta $\mathcal{O}$ del suo dominio $D$ e un punto $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle \in \mathcal{O}$.

Di una tale funzione è utile considerare tre riduzioni costituenti funzioni-RRtR che cominciamo con l'associare al punto $\overline{P}$:

$$f\big|_{*,\overline{y},\overline{z}}(x) \quad , \quad f\big|_{\overline{x},*,\overline{z}}(y) \quad , \quad f\big|_{\overline{x},\overline{y},*}(z) \ . \tag{1}$$

Il dominio di ciascuna di queste funzioni è contenuto in $D$ e contiene un intervallo aperto che contiene, risp., $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$.

Ha pienamente senso porsi il problema della derivabilità di ciascuna di queste funzioni, risp., per $x = \overline{x}$, per $y = \overline{y}$, per $z = \overline{z}$.
Se la derivata rispetto a $x$ esiste fornisce quella che viene chiamata derivata parziale della $f(x,y,z)$ rispetto alla variabile $x$. Similmente sono definite le derivate parziali rispetto alla variabile $y$ e rispetto alla variabile $z$.

Più esplicitamente si definiscono le tre derivate parziali della funzione trivariata $f(x,y,z)$ nel punto $\overline{P} = \langle\overline{x},\overline{y},\overline{z}\rangle$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\langle\overline{x},\overline{y},\overline{z}\rangle} := \mathrm{D}_x f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) := f_x(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) :=_{\text{if}\exists} \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\overline{x}+\Delta x,\overline{y},\overline{z}) - f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{\Delta x} \ . \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{\langle\overline{x},\overline{y},\overline{z}\rangle} := \mathrm{D}_y f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) := f_y(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) :=_{\text{if}\exists} \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(\overline{x},\overline{y}+\Delta y,\overline{z}) - f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{\Delta y} \ . \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\langle\overline{x},\overline{y},\overline{z}\rangle} := \mathrm{D}_z f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) := f_z(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) :=_{\text{if}\exists} \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}+\Delta z) - f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{\Delta z} \ . \tag{4}$$

**I29b.03** Anche le derivate parziali delle funzioni trivariate si possono considerare funzioni di punti variabili in $\mathbb{R}^{\times 3}$ e quindi entità candidate al calcolo delle rispettive tre derivate parziali.

Si giunge in tal modo a definire le derivate parziali del secondo ordine delle funzioni $f(x,y,z)$; distinguendo le variabili in gioco, otteniamo un quadro come il seguente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \ .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \ .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \ .$$

**I29b.04** Abbiamo presentate $3 \times 3 = 9$ definizioni di derivate parziali del secondo ordine.
Per molte funzioni si ha la coincidenza delle derivate parziali miste ottenibili cambiando l'ordine delle derivazioni parziali.
Infatti si ha la seguente estensione per **FunRRRtR** della proprietà dovuta a Alexis Clairaut e Hermann Schwarz.

**(1) Teorema** Consideriamo la funzione $f(x, y, z) \in$ **FunRRRtR** dotata di derivate parziali seconde finite in un insieme aperto $\mathcal{O}$. Se in un punto $\langle x_0, y_0, y_0 \rangle \in \mathcal{O}$ le tre derivate miste sono continue, allora in tale punto si hanno le uguaglianze

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} \ .$$

**Dim.**: La dimostrazione si ottiene da quella del caso **FunRRtR**$_2$ considerando le tre riduzioni della $f(x, y, z)$ alle funzioni univariate, cioè ad $f\big|_{*,*,\overline{z}}$ , ad $f\big|_{*,\overline{y},*}$ e ad $f\big|_{\overline{x},*,*}$ .
Per esempio riducendo la $f(x, y, z)$ alla funzione bivariata $\phi(x, y) := f\big|_{*,*,\overline{z}}$, dalla uguaglianza delle derivate miste di quest'ultima si ricava l'uguaglianza delle derivate parziali della funzione trivariata $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ ▮
Quindi per una funzione due volte derivabile parzialmente con derivate finite il quadro in b03 costituisce una matrice simmetrica e il numero delle derivate parziali seconde differenti si riduce a 6.

**I29b.05** Anche per le funzioni trivariate le manovre di derivazione parziale possono essere portate avanti per individuare le derivate parziali terze, quarte, fino all'ordine che può interessare.

Per esempio per una funzione $f(x, y, z)$ si possono cercare derivate parziali quarte come

$$f_{x,y,x,z}(x, y, z) \ :=_{\text{if}\exists} \ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right) \quad \text{e} \quad f_{z,z,x,y}(x, y) \ :=_{\text{if}\exists} \ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)\right) \ .$$

Le derivate parziali di ordine $m \in \mathbb{Z}$ che si possono definire per una funzione $f(x, y, z)$ sufficientemente regolare, evidentemente, sono in biiezione con le stringhe di lunghezza $m$ sull'alfabeto $\{x, y, z\}$, stringhe il cui numero è $3^m$.

**I29b.06** In gran parte dei casi le funzioni trivariate di cui si trattano le derivate parziali sono sufficientemente regolari da avere la continuità per le funzioni derivate parziali stesse: a esse si può applicare una forma estesa del criterio di Clairaut-Schwarz che garantisce la permutabilità delle manovre di derivazione parziale rispetto a due diverse variabili.
Abbiamo per esempio

$$f_{x,y,x,z} = f_{x,x,y,z} \quad , \quad f_{y,x,z,x,y,x,z} = f_{x,x,x,y,y,z,z} \ .$$

Le $m^3$ formalmente diverse derivate parziali di ordine $m$ che si possono ottenere da una funzione trivariata, chiaramente, sono in biiezione con le espressioni della forma

$$\frac{\partial^h}{\partial^h x}\left(\frac{\partial^k}{\partial^k y}\left(\frac{\partial^{m-h-k}}{\partial^{m-h-k} z}\right)\right) f(x, y, z) \qquad \text{per } h = 0, 1, 2, ..., m \ , \quad k = 0, 1, 2, ..., m - h \ .$$

Queste a loro volta sono in biiezione con i cammini sui nodi del sottoinsieme $\{0, 1, ..., m\}^{\times 3}$ che vanno da $\langle 0, 0, 0\rangle$ a $\langle h, k, m - h - k\rangle$ composto solo da segmenti di lunghezza 1 orientati come Ox (segmenti-WE rappresentanti le derivate rispetto ad $x$), come Oy (segmenti-SN che rappresentano le derivate rispetto ad $y$) o come Oz (segmenti verso l'alto associato alle derivate rispetto a $z$).

Il numero di questi cammini è uguale al numero delle permutazioni con ripetizioni [B13f18] di $m$ oggetti che consistono in repliche di tre oggetti mutuamente distinguibili, le repliche di ogni oggetto essendo indistinguibili e le permutazioni contenenti, risp., $h$, $k$ e $m-h-k$ repliche dei tre oggetti.
Il loro numero è quindi

$$\frac{m!}{h!\,k!\,(m-h-k)!} = \frac{(h+k)!}{h!k!}\,\frac{m^{m-h-k}}{(m-h-k)!}\ .$$

**I29b.07** Anche per ogni funzione trivariata dotata di derivate parziali continue valgono formule di valor medio che esprimono la differenza tra la funzione in due punti opportunamente vicini mediante le derivate parziali in punti vicini ai due suddetti.

Consideriamo una funzione $f(x,y,z)$ definita in una sfera $S$ di centro $\overline{P} := \langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\rangle$ e raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$ ed ivi dotata di derivate parziali finite e continue; consideriamo poi un punto $\overline{P}' := \overline{P} + h\,\mathsf{e}_x + k\,\mathsf{e}_y + j\,\mathsf{e}_z$ contenuto in $S$, cioè tale che $h^2+k^2+j^2 \leq \rho^2$.

Cerchiamo formule che esprimano mediante derivate parziali della $f$ ed i reali $h$, $k$ e $j$ la differenza

$$\Delta f \ := \ f(\overline{x}+h, \overline{y}+k, \overline{z}+j) - f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\ .$$

Una di queste formule si ottiene, similmente a quanto fatto in a09, considerando uno dei cammini in $\mathbb{R}^{\times 3}$ da $\overline{P}'$ a $\overline{P}$ costituito da 3 segmenti paralleli ai tre assi di riferimento Ox, Oy e Oz.
In particolare si ha il cammino

$$\Big\langle \overline{x}+h, \overline{y}+k, \overline{z}+j\rangle\ ,\ \langle \overline{x}, \overline{y}+k, \overline{z}+j\rangle\ ,\ \langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}+j\rangle\ ,\ \langle \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\rangle\Big\rangle\ .$$

Questo cammino si associa alla permutazione $\langle x,y,z\rangle$ delle variabili e si può significativamente individuare con la notazione $C_{xyz}$; gli altri cammini che si possono prendere in considerazione si associano alle restanti 5 permutazioni delle 3 variabili.

In relazione al cammino scelto si scompone la differenza $\Delta f$ nelle tre differenze riguardanti i suoi tre segmenti. Nel caso di $C_{xyz}$ si ha la decomposizione

$$\Delta f = [f(\overline{x}+h,\overline{y}+k,\overline{z}+j)-f(\overline{x},\overline{y}+k,\overline{z}+j)]+[f(\overline{x},\overline{y}+k,\overline{z}+j)-f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}+j)]+[f(\overline{x},\overline{y},\overline{z}+j)-f(\overline{x},\overline{y},\overline{z})]\ .$$

A ciascuno dei tre addendi si può applicare il teorema del valore medio ottenendo:

$$\Delta f \ = \ h\,f_x(\overline{x}+\theta_x\,h,\overline{y}+k,\overline{z}+j)+k\,f_y(\overline{x},\overline{y}+\theta_y\,k,\overline{z}+j)+j\,f_z(\overline{x},\overline{y},\overline{z}+\theta_z\,j) \quad \text{per} \quad 0<\theta_x,\theta_y,\theta_z<1\ .$$

Altre 5 formule si possono ottenere facendo riferimento agli altri 5 cammini da $\overline{P}'$ a $\overline{P}$ sopra segnalati.

**I29b.08** Affrontiamo ora le derivate parziali delle funzioni multivariate in generale.

Consideriamo dunque l'intero $d \in \{2,3,...\}$, una funzione $z = f(x_1,x_2,...,x_d)$ di **FunRdtR**, una sottoregione aperta $\mathcal{O}$ del suo dominio $D$ e un punto $\overline{P} = \big\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d\big\rangle \in \mathcal{O}$.

La variazione della $f$ relativa alla variazione del suo argomento $\langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d\rangle$ espressa dalla $d$-upla $\langle h_1, h_2, ..., h_d\rangle$ è data da un certo insieme di espressioni ciascuna delle quali è caratterizzata da una permutazione di $\{1,2,...,d\}$ da interpretare come indici delle $d$ variabili $x_1$, $x_2$, ...,$x_d$.

Alla prima permutazione secondo l'ordine lessicografico degli indici delle variabili $\langle 1,2,...,d\rangle$ è associata la variazione

(1)
$$\begin{aligned}
&f(\overline{x}_1+h_1, \overline{x}_2+h_2, \cdots, \overline{x}_d+h_d) \ - \ f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d) \ = \\
&\qquad h_1\,f_{x_1}(\overline{x}_1+\theta_1\,h_1, \overline{x}_2+h_2, \cdots, \overline{x}_d+h_d) + h_2\,f_{x_2}(\overline{x}_1, \overline{x}_2+\theta_2\,h_2, \cdots, \overline{x}_d+h_d) + \cdots\cdots \qquad . \\
&\qquad h_d\,f_{x_d}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d+\theta_d\,h_d) \qquad \text{dove} \quad \forall i=1,2,...,d \ \vdots \ \ 0<\theta_i<1
\end{aligned}$$

Della funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ è utile considerare le seguenti $d$ riduzioni della collezione **FunRtR** associate al punto $\overline{P}$:

(1) $$f\big|_{*,\overline{x}_2,...,\overline{x}_d}(x_1) \quad , \quad f\big|_{\overline{x}_1,*,...,\overline{x}_d}(x_2) \quad , \quad f\big|_{\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,*}(x_d) \ .$$

Il dominio di ciascuna di queste funzioni è contenuto in $D$ e contiene un intervallo aperto che contiene, risp., $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, ... e $\overline{x_d}$.
Ha quindi senso porsi il problema della derivabilità di ciascuna di queste funzioni, risp., per $x_1 = \overline{x_1}$, per$x_2 = \overline{x_2}$, ... , per $x_d = \overline{x_d}$.

Se la $i$-esima di queste derivate esiste fornisce quella che viene chiamata derivata parziale della $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ rispetto alla variabile $x_i$.

Si definiscono dunque le $d$ derivate parziali della funzione $d$-variata $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ relative al punto $\overline{P} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d \rangle$

(2) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\overline{P}} := \boldsymbol{D}_{x_1} f(\overline{P}) := f_{x_1}(\overline{P}) :=_{\text{if}\exists} \lim_{\Delta\overline{x_1}\to 0} \frac{f(\overline{x_1}+\Delta x_1, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d}) - f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d})}{\Delta x_1} \ .$$

(3) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_d}\right)_{\overline{P}} := \boldsymbol{D}_{x_2} f(\overline{P}) := f_{x_2}(\overline{P}) :=_{\text{if}\exists} \lim_{\Delta\overline{x_2}\to 0} \frac{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}+\Delta x_2, ..., \overline{x_d}) - f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d})}{\Delta x_2} \ .$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(4) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_d}\right)_{\overline{P}} := \boldsymbol{D}_{x_d} f(\overline{P}) := f_{x_d}(\overline{P}) :=_{\text{if}\exists} \lim_{\Delta\overline{x_d}\to 0} \frac{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d}+\Delta x_d) - f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d})}{\Delta x_d} \ .$$

**I29b.09** Anche le derivate parziali delle funzioni multivariate si possono considerare funzioni di punti variabili in $\mathbb{R}^{\times d}$ e quindi entità candidate al calcolo delle $d$ derivate parziali di ciascuna derivata prima.

Si giunge in tal modo a definire le derivate parziali del secondo ordine delle funzioni $f(x, y, z)$; distinguendo le variabili in gioco, otteniamo un quadro come il seguente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) , \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) , \cdots , \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_d} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) .$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2{}^2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) , \cdots , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_d} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) .$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_d} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) , \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_d} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) , \cdots , \frac{\partial^2 f}{\partial x_d{}^2} :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial x_d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_d}\right) .$$

**I29b.10** Abbiamo presentate $d \times d = d^2$ definizioni di derivate parziali del secondo ordine.
Per molte funzioni si ha la coincidenza delle derivate parziali miste ottenibili cambiando l'ordine delle derivazioni parziali.
Infatti si ha la seguente estensione per **FunRdtR** della proprietà di Clairaut-Schwartz.

**(1) Teorema** Consideriamo la funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d) \in$ **FunRdtR** dotata di derivate parziali seconde finite in un insieme aperto $\mathcal{O}$. Se in un punto $\langle x_{10}, x_{20}, ..., x_{d0} \rangle \in \mathcal{O}$ le $(d-1)^2$ derivate miste sono continue, allora in tale punto si hanno le uguaglianze

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3\,\partial x_1} \quad , \quad ...\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_{d-1}\,\partial x_d} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_d\,\partial x_{d-1}} \ .$$

**Dim.**: La dimostrazione si ottiene da quelle dei casi **FunRRtR** e **FunRRRtR** considerando le $d$ riduzioni della $f((x_1, x_2, ..., x_d)$ a $(d-1)^2$ funzioni bivariate, cioè ad $f\big|_{*,*,\overline{x}_3,*,...,\overline{x}_d}$ , ad $f\big|_{*,\overline{x}_2,*,...,\overline{x}_d}$ , ad $f\big|_{\overline{x}_1,*,*,...,\overline{x}_d}$ ... e ad $f\big|_{\overline{x}1,\overline{x}_2,\overline{x}_3,...,*,*}$ .
Per esempio riducendo la $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ alla funzione bivariata $\phi(x_2, x_3) := f\big|_{\overline{x}_1,ast,*,\overline{x}_4,\overline{x}_5}$, dalla uguaglianza delle derivate miste di quest'ultima si ricava l'uguaglianza delle derivate parziali della funzione bivariata $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ▮
Quindi per una funzione due volte derivabile parzialmente con derivate finite il quadro in b09 costituisce una matrice simmetrica e il numero delle derivate parziali seconde differenti è $\frac{(d-1)d}{2}$.

**I29b.11** Anche per le funzioni $d$-variate le manovre di derivazione parziale possono essere portate avanti per individuare le derivate parziali terze, quarte, fino all'ordine che può interessare.

Per esempio per una funzione $f(x, y, z, w)$ si possono cercare derivate parziali quarte come

$$f_{x,y,w,z}(x, y, z, w) :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)\right) \quad \text{e}$$

$$f_{z,w,x,y}(x, y, z, w) :=_{\text{if}\exists} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\right) .$$

Le derivate parziali di ordine $m \in \mathbb{Z}$ che si possono definire per una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ regolare quanto serve, evidentemente, sono in biiezione con le stringhe di lunghezza $m$ sull'alfabeto $\{x_1, x_2, ..., x_d\}$ e il loro numero è $d^m$.

**I29b.12** In gran parte dei casi le funzioni multivariate di cui si trattano le derivate parziali sono sufficientemente regolari da avere la continuità per le funzioni derivate parziali stesse: a esse si può applicare una forma estesa del criterio di Clairaut-Schwarz che garantisce la permutabilità delle manovre di derivazione parziale rispetto a due diverse variabili.

Abbiamo per esempio

$$f_{x,y,x,z} = f_{x,x,y,z} \qquad , \qquad f_{y,x,z,x,y,x,z} = f_{x,x,x,y,y,z,z} .$$

Le diverse derivate parziali di ordine $m$ che si possono ottenere dalle funzioni$d$-variate, chiaramente, sono in biiezione con le espressioni della forma

$$(1) \qquad \frac{\partial^{h_1}}{\partial^{h_1} x_1}\left(\frac{\partial^{h_2}}{\partial^{h_2} x_2}\left(\cdots \frac{\partial^{h_d}}{\partial^{h_d} x_d}\right)\right) f(x_1, x_2, ..., x_d) \qquad \text{per } h_1 + h_2 + \cdots + h_d = m .$$

Queste a loro volta sono in biiezione con i camm ini sui nodi di $\{0, 1, ..., m\}^{\times d}$ (che conviene visualizzare come sottoinsieme di $\mathbb{N}^{\times d}$) costituiti solo da segmenti crescenti di lunghezza 1, cammini che iniziano in $\langle 0, 0, ..., 0\rangle$ e terminano in un punto $\langle h_1, h_2, ..., h_d\rangle$ con $\sum_0^d h_i = m$. Infatti in uno di questi cammini si individuano $d$ tratti in ciascuno dei quali sono rappresentate le derivate rispetto a ciascuna delle $x_i$.
I cammini e le forme delle derivate sono quindi [B13f17] in numero di

$$(2) \qquad \frac{m}{h_1!h_2!\cdots h_d!} .$$

**I29b.13** Anche per ogni funzione multivariata dotata di derivate parziali continue valgono formule di valor medio che esprimono la differenza tra la funzione in due punti opportunamente vicini mediante le derivate parziali in punti vicini ai due suddetti.

Consideriamo una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ definita in una bolla ipersferica $S$ che ha raggio $\rho \in \mathbb{R}_+$ e centro $\overline{P} := \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d \rangle$ e che entro $S$ è dotata di derivate parziali finite e continue; consideriamo anche un punto $\overline{P}' := \overline{P} + h\,\mathbf{e}_x + k\,\mathbf{e}_y + j\,\mathbf{e}_z$ contenuto in $S$, cioè tale che $\sum_{i=1}^{d} {h_i}^2 \le \rho^2$.

Cerchiamo formule che esprimano mediante derivate parziali della $f$ e variazioni $h_1$, $h_2$,...,$h_d$ la variazione della funzione

$$\Delta f \ := \ f(\overline{x}_1 + h_1, \overline{x}_2 + h_2, ..., \overline{x}_d + h_d) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d) \ .$$

Una di queste formule si ottiene, similmente a quanto fatto in a09, considerando un cammino in $\mathbb{R}^{\times d}$ da $\overline{P}'$ a $\overline{P}$ costituito da $m$ passi, ciascuno dei quali parallelo a un asse di riferimento $\mathsf{O}\mathsf{x}_i$, di lunghezza 1 e allontanantesi dall'origine.

In particolare si ha il cammino, il primo secondo l'ordine lessicografico, che tocca i punti

$$\big\langle \overline{x_1} + h_1, \overline{x_2} + h_2, ..., \overline{x_d} + h_d \big\rangle \ , \ \big\langle \overline{x_1} + h_1 - 1, \overline{x_2} + h_2, ..., \overline{x_d} + h_d \big\rangle \ , \ \big\langle \overline{x_1} + h_1 - 1, \overline{x_2} + h_2, ..., \overline{x_d} + h_d \big\rangle \ ,$$
$$\big\langle \overline{x_1} + h_1 - 2, \overline{x_2} + h_2, ..., \overline{x_d} + h_d \big\rangle \ , \ ... \ , \ \big\langle \overline{x_1}, \overline{x_2} + h_2 - 1, ..., \overline{x_d} + h_d \big\rangle \ , \ ...\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d} + 1 \big\rangle \ ,$$
$$\big\langle \overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_d} \big\rangle .$$

Questo cammino si associa alla permutazione con ripertizione prima secondo l'ordine lessicografico rappresentata dalla stringa formata da repliche delle $d$ variabili

$$\psi \ = \ {x_1}^{h_1} {x_2}^{h_2} \cdots {x_d}^{hd}$$

e si può significativamente individuare con la notazione $\Gamma_\psi$ .

Gli altri cammini che si possono prendere in considerazione si associano alle restanti permutazioni con ripetizioni delle variabili.

In relazione al cammino scelto si scompone la differenza $\Delta f$ nelle $m$ differenze riguardanti i suoi $m$ passi.

A ciascuno dei $m$ addendi si può applicare il teorema del valore medio ottenendo espressioni della forma

$$\Delta f \ = \ \sum_{j=1}^{m} h_{\psi_j} \, f_x(..., x_{\psi_j} + \theta_{\psi_j} \, h_{\psi_j}, ...) \ ,$$

nelle quali sussistono disuguaglianze della forma $0 < \theta_{\psi_j} < 1$ .

**I29b.14** Nelle ipotesi di continuità di tutte le derivate parziali che si devono prendere in considerazione, le derivate parziali di ordine $m$ di una funzione di $d$ variabili reali che possono essere diverse è uguale al numero delle soluzioni intere nonnegative dell'equazione $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = m$.
Queste soluzioni sono in biiezione con i cammini definiti in precedenza $\Gamma_\psi$ e sono in biiezione con le permutazioni con ripetizione della forma b12](3).

## I29 c. differenziali delle funzioni multivariate

**I29c.01** Introduciamo ora le definizioni e le notazioni concernenti i differenziali delle funzioni-RdtR, riallacciandoci a quanto presentato in I24.
Trattiamo prima le funzioni bivariate e successivamente le multivariate avvalendoci dei precedenti risultati.

**I29c.02** Sia $f(x,y) \in \mathsf{FunRRtR}_2$ una funzione definita in un cerchio $\mathsf{C}$ aperto di centro $P_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ e raggio $\rho$ e ivi derivabile con derivate parziali finite in $P_0$.

Siano $\Delta x$ e $\Delta y$ due reali tali che $|\Delta x| + |\Delta y| > 0$ e scriviamo

$$\mathbf{h} := \langle \Delta x, \Delta y \rangle \quad \text{e} \quad P_{\mathbf{h}} := \langle x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y \rangle \in C \ .$$

Si dice **differenziale totale della funzione-RRtR** $f$ in $P_0$ e relativo al punto variato $P_{\mathbf{h}}$ la quantità reale

$$(1) \qquad \mathrm{d}f \ := \ f_x(x_0, y_0)\, \Delta x + f_y(x_0, y_0)\, \Delta y \ .$$

Nel caso sia $f(x,y) = x$ si ha $\mathrm{d}x = \Delta x$ e nel caso sia $f(x,y) = y$ si ha $\mathrm{d}y = \Delta y$; queste relazioni consentono di riscrivere la (1) nella forma

$$(2) \qquad \mathrm{d}f \ = \ f_x(x_0, y_0)\, \mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\, \mathrm{d}y \ .$$

Questa relazione può essere interpretata geometricamente come l'equazione nelle variabili $x_0 + \mathrm{d}x$ e $y_0 + \mathrm{d}y$ di un piano in $\mathbb{R}^{\times 3}$, più precisamente del piano che passa per $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0) \rangle$ e contiene le tangenti alle curve ottenute intersecando, risp., con i piani $x = x_0$ e $y = y_0$ la superficie espressa dalla $z = f(x,y)$.
Questa superficie la denotiamo con $\Sigma_{f(x,y)}$ e il suddetto piano lo denotiamo con $\Pi_{f,x_0,y_0} = \Pi_{f,P_0}$.
Spesso, quando non si incontrano ambiguità, l'aggettivo totale viene lasciato cadere e si parla semplicemente di "differenziale di funzione-RRtR" .

**I29c.03** È naturale chiedersi in che relazione sono i punti della $\Sigma_f$ e i punti di $\Pi_{f,P_0}$ e a questo scopo definiamo l'espressione incrementale

$$(1) \qquad \Delta f \ := \ f(x_0 + \mathrm{d}x\,, y_0 + \mathrm{d}y\,) - f(x_0, y_0) \ ;$$

che fornisce la differenza di quota tra $\Sigma_f$ e $\Pi_{f,P_0}$ che chiameremo accrescimento della $f$.

Ci chiediamo come si comporta la differenza $\Delta f - \mathrm{d}f$ in funzione del vettore esprimente la variazione dell'argomento $P_0$ $\mathrm{d}\mathbf{h} := \mathbf{e}_x\, \mathrm{d}x + \mathbf{e}_y\, \mathrm{d}y$ ovvero di $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$.

L'ipotesi di prossimità di $P_{\mathbf{h}}$ a $P_0$ induce a considerare intuitivamente i due differenziali delle variabili come "piccoli", ossia a giudicare "piccolo" il modulo $\mathrm{d}h := |\mathrm{d}\mathbf{h}\,| = \sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2 + |\mathrm{d}y\,|^2}$ .
Questo equivale a considerare $\Delta f - \mathrm{d}f$ in intorni piccoli di $P_0$.
Nei termini più adeguati per l'analisi infinitesimale, interessa chiarire il comportamento di $\Delta f - \mathrm{d}f$ per $|\mathrm{d}x\,| + |\mathrm{d}y\,| \to 0$, ovvero per $\mathrm{d}h \to \mathbf{0}_2$ .

Nel seguito useremo anche la notazione $\rho := \mathrm{d} := \sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2 + |\mathrm{d}y\,|^2}$, in quanto tale quantità variabile ricopre sia il ruolo di modulo del differenziale vettoriale, sia di quantità utilizzata come riferimento per definire infinitesimi di ordine superiore al primo.

Ricordiamo che valgono le disuguaglianze

$$(2) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_+ \ \vdots \ \ a^2 + b^2 \le (a+b)^2 \le 2(a^2 + b^2) \ :$$

la prima segue dello sviluppo del quadrato della somma $(a+b)$, mentre la seconda è conseguenza della $2\,a\,b \leq a^2+b^2$, cioè della $(a-b)^2 \geq 0$.
Quando i due parametri $a$ e $b$ sono i moduli dei differenziali $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ la (2) implica

(2) $$\sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2+|\mathrm{d}y\,|^2} \;\leq\; |\mathrm{d}x\,|+|\mathrm{d}y\,| \;\leq\; 2\sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2+|\mathrm{d}y\,|^2}\ .$$

Questa dice che passare al limite per $|\mathrm{d}x\,|+|\mathrm{d}y\,| \to 0$ ha le stesse conseguenze del passare al limite per $\sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2+|\mathrm{d}y\,|^2} \to 0$; in altri termini, al tendere a 0 simultaneo di $|\mathrm{d}x\,|$ e $|\mathrm{d}y\,|$ le espressioni $|\mathrm{d}x\,|+|\mathrm{d}y\,|$ e $\sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2+|\mathrm{d}y\,|^2}$ forniscono infinitesimi dello stesso ordine.

**I29c.04** Esaminiamo dunque il comportamento del rapporto

$$\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} = \frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\sqrt{|\mathrm{d}x\,|^2+|\mathrm{d}y\,|^2}} \qquad \text{per} \quad \mathrm{d}h \to 0\ .$$

**(1) Teorema** Se la funzione $f(x,y)$ possiede in $\langle x_0,y_0\rangle$ le derivate parziali continue, allora l'accrescimento $\Delta f$ può essere dato da un'espressione della forma

$$\Delta f = \mathrm{d}f\,+\epsilon_x\,\mathrm{d}x\,+\epsilon_y\,\mathrm{d}y \qquad \text{con} \quad \lim_{\rho\to 0}\epsilon_x = 0\ ,\ \lim_{\rho\to 0}\epsilon_y = 0\ .$$

Per l'appartenenza al cerchio $\mathsf{C}$ dei punti $P_0$ e $P_{\mathsf{dh}}$ si può applicare il teorema della media all'accrescimento ottenendo

$$\Delta f \;=\; f_x(x_0+\theta_x\,\mathrm{d}x\,,y_0+\mathrm{d}y\,)+f_y(x_0,y_0+\theta_y\,\mathrm{d}y\,)\ ,$$

con le derivate parziali da valutare in punti di $\mathsf{C}$.
In conseguenza della continuità delle derivate in $P_0$ abbiamo

$$f_x(x_0+\theta_x\,\mathrm{d}x\,,y_0+\mathrm{d}y\,) = f_x(x_0,y_0)+\epsilon_x\ ,\ f_y(x_0,y_0+\theta_y\,\mathrm{d}y\,) = f_y(x_0,y_0)+\epsilon_y \ \text{ con } \lim_{\rho\to 0}\epsilon_x = \lim_{\rho\to 0}\epsilon_y = 0\ .$$

Dunque si può affermare

(2) $$\Delta f = \mathrm{d}f\,+\epsilon_x\,\mathrm{d}x\,+\epsilon_y\,\mathrm{d}y \qquad \text{con} \quad \lim_{\rho\to 0}\epsilon_x = \lim_{\rho\to 0}\epsilon_y = 0\ .$$

Osserviamo esplicitamente che $\epsilon_x\,\mathrm{d}x\,+\epsilon_y\,\mathrm{d}y$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\rho = \mathrm{d}h$: infatti

$$\left|\frac{\epsilon_x\,\mathrm{d}x\,+\epsilon_y\,\mathrm{d}y}{\rho}\right| \;=\; \left|\epsilon_x\,\frac{\mathrm{d}x}{\rho}+\epsilon_y\,\frac{\mathrm{d}y}{\rho}\right| \;\leq\; |\epsilon_x|+|\epsilon_y|$$

e quindi

(3) $$\lim_{\rho\to 0}\frac{\epsilon_x\,\mathrm{d}x\,+\epsilon_y\,\mathrm{d}y}{\rho} \;=\; 0\ .$$

**I29c.05** Diamo un esempio di funzione bivariata che in un punto interno del suo dominio è dotata di derivate parziali che non sono ivi continue, funzione per la quale il limite di $\dfrac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\mathrm{d}h}$ non esiste.
Si tratta della funzione definita come

$$\overline{f}(x,y) \;:=\; \begin{cases} x-2\,y\,\arctan\frac{x}{y} & \text{sse} \quad y\neq 0 \\ 0 & \text{sse} \quad y=0 \end{cases}$$

Questa funzione in $\langle 0,0\rangle$ possiede entrambe le derivate parziali: $\overline{f}_x(0,0)=1$ e $\overline{f}_y(0,0)=0$.
Di conseguenza $\mathrm{d}\overline{f} = \mathrm{d}x$ , mentre $\Delta\overline{f} = \overline{f}(\mathrm{d}x\,,\mathrm{d}y\,) = \mathrm{d}x\,-2\,\mathrm{d}y\,\arctan\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ e quindi

$$\frac{\Delta\overline{f}-\mathrm{d}\overline{f}}{\mathrm{d}h} \;=\; -2\,\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}x^{\,2}+\mathrm{d}y^{\,2}}}\,\arctan\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\ ,$$

funzione che non possiede limite per $\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \to 0$ .

**I29c.06** Estendiamo le considerazioni sul differenziale totale alle generiche funzioni multivariate.

Sia $d \in \{2, 3, ...\}$ e sia $f(x_1, x_2, ..., x_d) \in$ **FunRdtR** una funzione definita in una bolla $\mathsf{B}$ aperta di centro $\overline{P} = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_d \rangle$ e raggio $r$; chiediamo anche che la $f$ in $\overline{P}$ sia derivabile con derivate parziali finite.

Siano inoltre $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, ..., $\Delta x_d$ numeri reali non tutti nulli (cioè tali che $\sum_{i=1}^{d} |\Delta x_i| > 0$), introduciamo il vettore $\mathrm{d}\mathbf{h} := \langle \Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_d \rangle$ e il punto variato $\overline{P}_{\mathrm{d}\mathbf{h}} := \langle \overline{x}_1 + \Delta x_1, ..., \overline{x}_d + \Delta x_d \rangle \in \mathsf{B}$.

Si dice **differenziale totale** della $f$ in $\overline{P}$ e relativo al punto variato $\overline{P}_{\mathrm{d}\mathbf{h}}$ la quantità reale

(1) $$\mathrm{d}f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\overline{P}} \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\overline{P}} \Delta x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_d}\right)_{\overline{P}} \Delta x_d \ .$$

Come per le funzioni bivariate la precedente uguaglianza si può riscrivere nella forma

(2) $$\mathrm{d}f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{\overline{P}} \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{\overline{P}} \mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_d}\right)_{\overline{P}} \mathrm{d}x_d \ .$$

Anche nel caso generale serve esaminare la differenza tra il differenziale totale relativo al punto di riferimento $\overline{P}$ e al punto variato $\overline{P}_{\mathrm{d}\mathbf{h}}$ e la variazione della stessa $f$ relativa a questi due punti definita come

(3) $$\Delta f := f(\overline{x}_1 + \mathrm{d}x_1, \overline{x}_2 + \mathrm{d}x_2, \cdots, \overline{x}_d + \mathrm{d}x_d) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d) \ .$$

Anche per questo differenziale, come in c02, spesso si omette l'aggettivo "totale".

**I29c.07** Ancora il confronto può fare riferimento a due quantità funzioni di $\overline{P}$ e $\overline{P}'$ da considerare al limite per le variazioni $\mathrm{d}x_i$ tendenti simultaneamente a 0. Per quest servono

(1) $$\mathrm{d}h := \rho := \sqrt{\mathrm{d}x_1^{\,2} + \mathrm{d}x_2^{\,2} + \cdots + \mathrm{d}x_d^{\,2}} \qquad \text{e} \qquad \rho_1 := |\mathrm{d}x_1| + |\mathrm{d}x_2| + \cdots + |\mathrm{d}x_d| \ .$$

Anche queste due quantità sono infinitesimi dello stesso ordine quando si passa al limite per tutti i $|\mathrm{d}x_i|$ tendenti simultaneamente a 0. Infatti valgono le disuguaglianze

(2) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}x_i^{\,2}} \ \le \ \sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i| \ \le \ \sqrt{d} \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}x_i^{\,2}} \ .$$

Queste disuguaglianze discendono dalla seguente uguaglianza proveniente dal calcolo matriciale

**(3) Prop.: identità di Lagrange** Date due $d$-uple di reali nonnegativi $\mathbf{a} = \langle a_1, ..., a_d \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle b_1, ..., b_d \rangle$, vale la relazione

$$\left(a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \cdots + a_d^{\,2}\right) \left(b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + \cdots + b_d^{\,2}\right) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_d b_d)^2 =$$
$$\sum_{\langle r,s \rangle \in \mathbf{C}} (a_r b_s - a_s b_r)^2 \ ,$$

dove $\mathbf{C}$ denota l'insieme delle combinazioni di lunghezza 2 dei $d$ interi 1, 2, ..., $d$.

**I29c.08** Con argomenti simili a quelli usati in c04 si può dimostrare quanto segue.

**(1) Teorema** Se la funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ ha tutte le derivate parziali continue in $\overline{P}$, allora

$$\Delta f := f(\overline{x}_1 + \mathrm{d}x_1, \overline{x}_2 + \mathrm{d}x_2, \cdots, \overline{x}_d + \mathrm{d}x_d) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_d) = \mathrm{d}f + \epsilon \ ,$$

dove $\epsilon$ tende a zero per $\mathrm{d}h := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}x_i^{\,2}}$ tendente a zero.

Inoltre si può generalizzare senza difficoltà il teorema in c04.

**I29c.09** È naturale chiarire la relazione che sussiste tra i valori della $f$ e i valori della sua linearizzazione $L$. Per questo va esaminata l'espressione

(1) $$\Delta f \;:=\; f(\overline{x}_1 + \mathrm{d}x_1, ..., \overline{x}_d + \mathrm{d}x_d) - f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_d) \ ,$$

che chiameremo accrescimento della $f$ relativo al passaggio da $\overline{P}$ a $\overline{P}_{\mathrm{d}\mathbf{h}}$, e occorre chiedersi come si comporta la differenza $\Delta f - \mathrm{d}f$ in funzione del variare di $\mathrm{d}\mathbf{h}$, ovvero in funzione delle variabili $\overline{x}_i + \mathrm{d}x_i$ per $i = 1, 2, ..., d$.

L'ipotesi di prossimità di $\overline{P}_{\mathrm{d}\mathbf{h}}$ a $\overline{P}$ induce a considerare intuitivamente i due differenziali delle variabili come "piccoli". Questo equivale a considerare $\Delta f - \mathrm{d}f$ in intorni piccoli di $\overline{P}$.

In termini più idonei per l'analisi infinitesimale, interessa chiarire il comportamento di $\Delta f - \mathrm{d}f$ per $\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i| \to 0$, ossia per $\mathrm{d}h \to 0$.

Ricordando che valgono le disuguaglianze c07(2) abbiamo che passare al limite per $\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i| \to 0$ ha le stesse conseguenze del passare al limite per $\sqrt{\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i|^2} \to 0$; in altri termini, al tendere a 0 simultaneo di $|\mathrm{d}x_1|$, ... e $|\mathrm{d}x_d|$ sono infinitesimi dello stesso ordine $\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i|$ e $\sqrt{\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i|^2}$ .

Per il seguito è comodo introdurre il parametro estensivo $\rho := \sqrt{\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i|^2}$ .

**I29c.10** Esaminiamo dunque il comportamento del rapporto

$$\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\mathrm{d}h} \;=\; \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\sqrt{\sum_{i=1}^{d} |\mathrm{d}x_i|^2}} \qquad \text{per} \quad \rho \to 0 \ .$$

**(1) Teorema** Se la funzione $f(x, y)$ possiede in $\langle x_0, y_0 \rangle$ le derivate parziali continue, allora l'accrescimento $\Delta f$ può essere dato da un'espressione della forma

$$\Delta f \;=\; \mathrm{d}f + \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i \,\mathrm{d}x_i + \epsilon_y \,\mathrm{d}y \qquad \text{con} \quad \lim_{\rho \to 0} \epsilon_i = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, ..., d \ .$$

Per l'appartenenza alla bolla B dei punti $P_0$ e $P_{\mathbf{h}}$ si può applicare il teorema della media all'accrescimento ottenendo

$$\Delta f \;=\; f_x(x_0 + \theta_x \,\mathrm{d}x \,, y_0 + \mathrm{d}y\,) + f_y(x_0, y_0 + \theta_y \,\mathrm{d}y\,) \ ,$$

con le derivate parziali da valutare in punti di B.

In conseguenza della continuità delle derivate in $P_0$ abbiamo

$$f_x(x_0 + \theta_x \,\mathrm{d}x \,, y_0 + \mathrm{d}y\,) = f_x(x_0, y_0) + \epsilon_x \ , \ f_y(x_0, y_0 + \theta_y \,\mathrm{d}y\,) = f_y(x_0, y_0) + \epsilon_y \ \text{ con } \lim_{\rho \to 0} \epsilon_x = \lim_{\rho \to 0} \epsilon_y = 0 \ .$$

Dunque si può affermare

$$\Delta f = \mathrm{d}f \ + \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i \, \mathrm{d}x_{\ i} \quad \text{con} \quad \lim_{\rho \to 0} \epsilon_i = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, ..., d \ .$$

Osserviamo esplicitamente che $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i \, \mathrm{d}x_{\ i}$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\rho$: infatti

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^{d} \epsilon_i \, \mathrm{d}x_{\ i}}{\rho} \right| \ = \ \left| \sum_{i=1}^{d} \epsilon_i \, \frac{\mathrm{d}x_{\ i}}{\rho} \right| \leq \sum_{i=1}^{d} |\epsilon_i|$$

e quindi

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\epsilon_i \, \mathrm{d}x_{\ i}}{\rho} \ = \ 0 \ .$$

## I29 d. derivata e differenziale di funzione-RRtR composta

**I29d.01** Consideriamo una funzione-RRtR che denotiamo con $z = \zeta(x, y)$ definita in un insieme aperto $\mathcal{O}$ e ivi derivabile insieme alle sue derivate parziali prime.

Consideriamo anche una curva $\Gamma$ contenuta in $\mathcal{O}$ definita dalle due equazioni parametriche $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$ per la quale chiediamo che $\xi(t)$ e $\eta(t)$ siano definite per $t$ variabile in un intervallo reale $I$, e ivi siano finite, continue e derivabili.

Consideriamo inoltre la funzione-RRtR composta $z = \boldsymbol{Z}(t) = \zeta\Big(\xi(t), \eta(t)\Big)$ .

Abbiamo trovato che anche $\boldsymbol{Z}(t)$ è continua nell'intervallo $I$. Dimostriamo ora quanto segue.

**(1) Prop.**: La funzione $\boldsymbol{Z}(t)$ è derivabile rispetto a $t$ per ogni $t \in I$ e si ha la seguente **formula di derivazione delle funzioni bivariate composte**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Z}(t) \;=\; \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} \;.$$

**Dim.**: Siano $\overline{t}$ e $\overline{t} + h$ due elementi di $I$ e introduciamo

$$\overline{x} := \xi(\overline{t}) \quad , \quad \overline{y} := \overline{\eta}(\overline{t}) \quad , \quad \Delta\xi \;:=\; \xi(\overline{t} + h) - \xi(\overline{t}) \quad , \quad \Delta\eta \;:=\; \eta(\overline{t} + h) - \eta(\overline{t}) \;.$$

Per $h \to 0$, tendono a 0 anche il corrispondente incremento della $\xi(t)$ $\Delta\xi$ e il corrispondente incremento della $\eta(t)$ $\Delta\eta$.

Introduciamo anche la variazione della funzione $\boldsymbol{Z}$ corrispondente all'incremento dalla $t$ da $\overline{t}$ a $\overline{t} + h$:

$$(2) \quad \Delta\boldsymbol{Z} \;:=\; \boldsymbol{Z}(\overline{t} + h) - \boldsymbol{Z}(\overline{t}) = \zeta\big(\xi(\overline{t} + h), \eta(\overline{t} + h)\big) - \zeta\big(\xi(\overline{t}), \eta(\overline{t})\big) = \boldsymbol{Z}(\overline{x} + \Delta\xi, \overline{y} + \Delta\eta) - \boldsymbol{Z}(\overline{x}, \overline{y}) \;.$$

A questo punto ricorriamo al teorema della media ottenendo

$$(3) \qquad \Delta\boldsymbol{Z} \;=\; \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\Big(\overline{x} + \theta_x\,\Delta\xi, \overline{y} + \Delta\eta\Big)\frac{\Delta\xi}{h} + \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}\Big(\overline{x}, \overline{y} + \theta_y\,\Delta\eta\Big)\frac{\Delta\eta}{h} \quad \text{con} \quad 0 < \theta_x, \theta_y < 1 \;.$$

Grazie alla continuità delle derivate parziali $\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}$ nel punto $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$, abbiamo

$$\lim_{h\to 0}\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}\Big(\overline{x} + \theta_x\,\Delta\xi, \overline{y} + \Delta\eta\Big) \;=\; \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y}) \quad , \quad \lim_{h\to 0}\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y} + \theta_y\Delta\eta) \;=\; \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y}) \;.$$

Di conseguenza

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta\xi}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\xi(\overline{t} + h) - \xi(\overline{t})}{h} \;=\; \xi'(\overline{t}) \qquad , \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\Delta\eta}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\eta(\overline{t} + h) - \eta(\overline{t})}{h} = \eta'(\overline{t}) \;.$$

Da questo segue che il secondo membro della (3) ammette limite per $h \to 0$, ovvero che esiste il limite per $h \to 0$ di $\dfrac{\Delta\boldsymbol{Z}}{h}$, cioè che esiste $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}t}$ e per questa quantità

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial \zeta}{\partial x}(\overline{x}, \overline{y})\; x'(t) \;+\; \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\; y'(t) \;,$$

ossia la formula enunciata ▮

**I29d.02** Alla formula precedente può convenire dare la seguente forma più compatta che riguarda le funzioni $z = z(x, y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ e la funzione composita $z = z(x(t), y(t))$:

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Z}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;.$$

Le argomentazioni precedenti si possono adattare senza difficoltà per le curve in tre dimensioni e per le funzioni-RRRtR cui diamo la forma $\mathcal{R}(x,y,z)$ con $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$ e per le quali si ottengono le seguenti formule

(2) $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\;x'(\overline{t}) + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\;y'(\overline{t}) + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})\;z'(\overline{t})\;,$$

(3) $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\mathcal{R}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\;.$$

**I29d.03** Dei risultati precedenti si possono ottenere senza difficoltà le generalizzazioni a funzioni di $d$ variabili reali per un generico $d = 2, 3, 4, ....$ Qui ci limitiamo alla versione con notazioni semplificate.

**(1) Prop.**: Consideriamo una $d$-upla di variabili reali $\mathsf{r} = \langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle$ e la funzione-RdtR funzione di $d$ variabili reali $\boldsymbol{R}(x_1, x_2, ..., x_d) = \boldsymbol{R}(\mathsf{r})$ il cui dominio denotiamo con $\mathcal{D}$ la quale sia continua con le sue derivate parziali in un insieme aperto $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{D}$.
Le variabili $x_1$,$x_2$,...,$x_d$ siano funzioni-RtR finite, continue e derivabili in una variabile $t$ in un insieme aperto $I$ tale che sia $\mathsf{r}(I) := \langle x_1(I), x_2(I), ..., x_d(I)\rangle \subseteq \mathcal{O}$ .
Consideriamo inoltre un particolare $\overline{t} \in I$ e poniamo $\forall i \in \{1, 2, ..., d\}$ : $\overline{x_i} := x_i(\overline{t})$ e $\overline{\mathsf{r}} := \mathsf{r}(\overline{t})$ .
Con tali condizioni e notazioni si ha

(1) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \;=\; \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_i}(\overline{\mathsf{r}})\;\frac{\partial\, x_i}{\partial\, x}(\overline{t})\;.$$

Diamo anche la versione della formula nelle notazioni semplificate mediante differenziali:

(2) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_1}\,\frac{\mathrm{d}x_{\,1}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_2}\,\frac{\mathrm{d}x_{\,2}}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_d}\,\frac{\mathrm{d}x_{\,d}}{\mathrm{d}t} \;=\; \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial x_i}\,\frac{\mathrm{d}x_{\,i}}{\mathrm{d}t}\;.$$

**I29d.04** Per esempio per le funzioni

$$z(x,y) \;=\; x^y \quad;\quad x(t) \;=\; \sin(t) \quad;\quad y(t) \;=\; t^3\;;$$

si trova

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial z}{\partial x}\,\dot{x}(t) \;+\; \frac{\partial z}{\partial y}\,\dot{y}(t) \;=\; y\,x^{y-1}\,\cos\,t \;+\; x^y\,\ln x\,3\,t^2\;.$$

Qui si sono usate le notazioni per le derivate rispetto al tempo spesso preferite in fisica matematica

$$\dot{x} \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,x(t) \qquad \text{e} \qquad \dot{y} \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,y(t)\;.$$

**I29d.05** Si ottiene senza difficoltà una ulteriore generalizzazione riguardante una funzione della forma $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ dove le $x_i$ sono a loro volta funzioni tendenzialmente regolari di un certo numero positivo $m$ di variabili reali $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m$ da considerare indipendenti.

**(1) Teorema** Consideriamo le funzioni

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& \overline{x}_1(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m) \\ x_2 &=& \overline{x}_2(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m) \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ x_d &=& \overline{x}_d(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m) \end{array}\;,$$

nelle quali $\vec{\xi} := \langle\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m\rangle$ sia variabile in un insieme aperto $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}^{\times m}$ .

Chiediamo inoltre che la $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ sia definita e continua insieme alle sue derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, ... , $\dfrac{\partial f}{\partial x_d}$, in un insieme aperto $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{\times d}$ contenuto in $\vec{\xi}(\mathcal{I})$.
In queste condizioni esiste il differenziale della $f$ rispetto alle variabili $\xi_1$, ..., $\xi_m$ dato dall'espressione

(2) $$\mathrm{d}f \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_{\,1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_{\,2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\,\mathrm{d}x_{\,m} \;=\; \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_{\,j} \;.$$

**Dim.**: Le ipotesi garantiscono che sia

(3) $$\mathrm{d}f \;=\; \frac{\partial f}{\partial \xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\,\mathrm{d}\xi_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial \xi_m}\,\mathrm{d}\xi_m \;=\; \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\,\mathrm{d}\xi_j \;.$$

Il teorema della derivazione delle funzioni composte permette di scrivere

(4) $$\forall i = 1, 2, ..., m \;:\; \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \;=\; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} \;.$$

Quindi la (2), invertendo le sommazioni, comporta

(5) $$\mathrm{d}f \;=\; \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_i \;=\; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_i\right) \;.$$

Basta ora ricordare che $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}\,\mathrm{d}\xi_i$ per ottenere l'espressione da dimostrare (2) ▮

## I29 e. funzioni omogenee e teorema di Euler

**I29e.01** Diciamo **funzione-RdtR preomogenea** una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ avente come dominio l'intero $\mathbb{R}^{\times d}$, con l'eventuale eccezione dei punti di una collezione finita di iperpiani contenenti l'origine $\mathbf{0}_d$, la quale $f$ sia derivabile in ogni punto interno del suo dominio.

Una funzione-RdtR preomogenea $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ si dice **funzione omogenea positiva** rispetto alle sue $d$ variabili sse

(1) $\forall\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle \in \mathsf{dom}(f)\ ,\ \forall\lambda \in \mathbb{R}_+\ \ \vdots\ \ \exists p \in \mathbb{R}\ \rrbracket\ f(\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, ..., \lambda\, x_d)\ =\ \lambda^p\, f(x_1, x_2, ..., x_d)\ .$

Il numero naturale $p$ si dice **grado di omogeneità** della funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$.

**I29e.02** Esempi di funzioni omogenee positive sono

$f_1(x, y)\ =\ \sin\dfrac{2\,x}{x + \pi\,y}$ : funzione omogenea di grado 0.

$f_2(x, y, z)\ =\ \sqrt{x^2 + 3y^2 + 2xy + 3yz + z^2}$ : funzione omogenea di grado 1.

$f_3(x, y, z, w)\ =\ a\,x^2 + 4\,y\,z\,\mathsf{e}^{\frac{x}{w}} + w^2\cosh\dfrac{x}{y}$ : funzione omogenea di grado 2.

$f_4(x_1, x_2, ..., x_d)\ =\ \displaystyle\sum_{i=1}^{d} {x_i}^h\, {x_{d-i}}^k$ : funzione omogenea di grado $h + k$ per $h, k \in \mathbb{Q}_+$.

Si osserva che una funzione omogenea do grado $p$ al cui dominio appartiene l'origine $\mathbf{0}_d$, per qualunque $\lambda \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$f(0, 0, ..., 0) = \lambda^p\, f(0, 0, ..., 0)\ .$$

Se $p \neq 0$ dalla precedente si deduce che

$$f(0, 0, ..., 0) = 0\ .$$

**I29e.03** Per le funzioni omogenee di un certo numero $d$ di variabili si trovano espressioni che si servono di $d - 1$ variabili che ne chiariscono le possibili strutture e possono essere utili per varie esigenze.

Se nella $\mathsf{e01}(1)$ si assume $\lambda = \dfrac{1}{|x_1|}$ si ottiene $f\left(\pm 1, \dfrac{x_2}{|x_1|}, ..., \dfrac{x_d}{|x_1|}\right) = \dfrac{1}{|x_1|^p}\, f(x_1, x_2, ..., x_d)$ ovvero

$$f(x_1, x_2, ..., x_d)\ =\ |x_1|^p\, f\left(\pm 1, \frac{x_2}{|x_1|}, ..., \frac{x_d}{|x_1|}\right)\ .$$

Viceversa è evidente che per qualsiasi numero reale $p$, ogni funzione della forma

$$|x_1|^p\, F\left(\frac{x_2}{|x_1|}, ..., \frac{x_d}{|x_1|}\right)\ ,$$

con $F$ arbitraria funzione di $d - 1$ variabili reali è una funzione omogenea positiva di grado $p$.

Evidentemente le proprietà precedenti valgono anche quando si sostituisca la variabile $x_1$ con una qualsiasi delle $d - 1$ rimanenti.

**I29e.04** **(1) Prop.**: Se $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ è funzione omogenea positiva di grado $p$, razionale maggiore di 1 dotata di tutte le sue derivate parziali, ciascuna di queste $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ è omogenea positiva di grado $p - 1$.

**Dim.**: Derivando rispetto a ciascuna delle variabili $x_i$ l'uguaglianza $\mathsf{e01}(1)$ si ottiene

$$\forall i = 1, 2, ..., d\ \ \vdots\ \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, ..., \lambda\, x_d)\ \frac{\mathrm{d}(\lambda\, x_i)}{\mathrm{d}x_i}\ =\ \lambda^p\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_d)\, ;$$

Quindi, dato che $\forall i = 1,2,...,d \;\vdots\; \dfrac{d(\lambda x_i)}{\mathrm{d}x_{\,i}} = \lambda$ , si ottiene l'uguaglianza che esprime l'enunciato

$$(2) \qquad \forall i = 1,2,...,d \;\vdots\; \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda\, x_1, \lambda\, x_2, ..., \lambda\, x_d) \;=\; \lambda^{p-1}\, \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_d) \;\blacksquare$$

**I29e.05** **(1) Teorema (identità di Eulero per le funzioni omogenee)** Se $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ è una funzione omogenea di grado $p$ e se le sue derivate parziali $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ , per $i = 1,2,...,d$ esistono continue, allora

$$(2) \qquad x_1\, \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\, \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_d\, \frac{\partial f}{\partial x_d} \;=\; p\, f\ .$$

**Dim.**: Introdotte le variabili

$$u_1 := \lambda\, x_1\ ,\quad u_2 := \lambda\, x_2\ ,\ \ .\ .\ .\ ,\quad u_d := \lambda\, x_d\ ,$$

la e01(1) si riscrive

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \exists p \in \mathbb{R} \;\P\; f(u_1, u_2, ..., u_d) \;=\; \lambda^p\, f(x_1, x_2, ..., x_d)\ .$$

Da questa, tenuto conto che $\forall i = 1,2,...,d \;\vdots\; \dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\lambda} = x_i$ , si ottiene

$$x_1\, \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\, \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_d\, \frac{\partial f}{\partial x_d} \;=\; p\, f\ .$$

Quindi, rilette le definizioni precedenti, si ottiene l'identità enunciata ▮

Diamo due esempi.
Per la $f(x,y) = x^2 + y^2$ si ha $p = 2$ e quindi $2x \cdot x + 2y \cdot y \;=\; 2(x^2 + y^2)$.
Per la $f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, di grado $p = 1/2$, la (2) comporta $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, x + \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\, y \;=\; \dfrac{1}{2}\, \big(\sqrt{x} + \sqrt{y}\big)$ .

**I29e.06** Vale anche la proposizione inversa.

**(1) Prop.**: Consideriamo un reale positivo $p$ e una funzione-RdtR preomogenea $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ avente come dominio l'intero $\mathbb{R}^{\times d}$, e ivi continua insieme alle sue derivate parziali prime.
Se la $f$ verifica in ogni punto interno del suo dominio l'equazione d05(2), allora essa è omogenea positiva di grado $p$.

**Dim.**: Introduciamo la funzione

$$\forall t \in (0, +\infty) \;\vdots\; F(t) \;:=\; \frac{f(t\, x_1, t\, x_2, ..., t\, x_d))}{t^p} \;=:\; \frac{f(u_1, u_2, ..., u_d)}{t^p}\ .$$

Derivando i due membri rispetto a $t$ si ottiene

$$\begin{aligned} F'(t) \;&=\; \frac{1}{t^p}\Big(f_{u_1}(u_1, ..., u_d)\, x_1 + \cdots + f_{u_d}(u_1, ..., u_d)\, x_d\Big) - \frac{p}{t^{m+1}} f(u_1, ..., u_d) \\ &=\; \frac{1}{t^{m+1}}\Big(f_{u_1}(u_1, ..., u_d)\ \ u_1 + \cdots + f_{u_d}(u_1, ..., u_d)\, u_d - p\, f(u_1, ..., u_d)\Big) \end{aligned}\ .$$

Per ipotesi il secondo membro della precedente equazione vale 0 e quindi $F(t) = c$ con $c$ costante rispetto a $t$, ovvero

$$c \;=\; \frac{f(t\, x_1, t\, x_2, ..., t\, x_d)}{t^p}\ .$$

Per $t = 1$ si ha $c \;=\; \dfrac{f(t\, x_1, t\, x_2, ..., t\, x_d)}{t^p}$ e quindi

$$f(t\, x_1, t\, x_2, ..., t\, x_d) \;=\; t^p\, f(t_1, t_2, ..., t_d)\blacksquare$$

**I29e.07** Consideriamo una funzione-RdtR $f(x_1, ..., x_d)$ omogenea con grado di omogeneità $p$ intero (serve per restare nell'insieme delle funzioni-RdtR). Essa si dice **funzione omogenea di grado** $p$ sse vale

$$\forall t \in \mathbb{R} \ \vdots \ \ f(t\,x_1, ..., t\,x_d) \ = \ t^p\, f(x_1, ..., x_d) \ .$$

Si osserva che la funzione $\lceil x \in \mathbb{R} \ \mapsto \ |x| \ \rceil$ è positivamente omogenea di grado 1, mentre non è omogenea.

La più generale funzione omogenea do grado $p$ è riconducibile alla forma $\phi\left(\dfrac{x_2}{x_1}, ..., \dfrac{x_d}{x_1}\right)$, ove $\phi$ rappresenta una qualsiasi funzione in $d-1$ argomenti reali a valori reali.

Riprendendo le dimostrazioni precedenti si trova la caratterizzazione che segue.

**(1) Prop.**: Una funzione $f(x_1, .., x_d)$ preomogenea di grado $p$ è una funzione omogenea di grado $p$ sse in ogni punto del suo dominio possiede le $d$ derivate parziali prime continue ed esiste finito il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\,x_1, ..., t\,x_d)}{t^p} \ \blacksquare$$

## I29 f. derivata in una direzione e piano tangente

**I29f.01** Consideriamo una funzione-RRRtR $f(P) = f(x, y, z)$ definita in una regione $D$ e ci poniamo il problema delle sue variazioni quando il punto $P = \langle x, y, z\rangle$ varia rimanendo su una retta-RRR orientata e all'interno di $D$.

Per questo dobbiamo predisporre altri strumenti formali.

Per individuare una retta orientata ci serviamo di un punto interno a $D$ $P_0 = \big\langle x_0, y_0, z_0\big\rangle$ e di un vettore di $\mathbb{R}^{\times 3}$ $\mathbf{n}$ avente lunghezza 1 che esprimiamo attraverso le sue componenti cartesiane e i suoi coseni direttori $n_x = \cos \widehat{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}})$, $n_y = \cos \widehat{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}})$ e $n_x = \cos \widehat{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}})$.

Introduciamo poi il punto variabile

$$P(t) \ := \ P_0 + t\,\mathbf{n} \ = \big\langle x(t), y(t), z(t)\big\rangle \ = \big\langle x_0 + t\,n_x \ , \ y_0 + t\,n_y t \ , \ z_0 + t\,n_z\big\rangle;$$

questa funzione esprime un punto che varia linearmente nel parametro $t$ (che al solito può essere utile pensare come parametro tempo) sulla retta orientata passante per $P_0$ e con la stessa orientazione del vettore $\mathbf{n}$.

Ricordato che l'espressione $P - P_0 = \overrightarrow{P_0\,P}$ individua il vettore applicato avente come estremità, risp., $P_0$ e $P(t)$, definiamo come suo reciproco

$$\frac{1}{P(t) - P_0} \ = \ \frac{1}{\overrightarrow{P_0\,P}} \ := \ \mathbf{e}_x\,\frac{1}{x(t) - x_0} + \mathbf{e}_y\,\frac{1}{y(t) - y_0} + \mathbf{e}_z\,\frac{1}{z(t) - z_0} \ .$$

Passare al limite per $P \to P_0$ equivale a passare al limite per $t \to 0$ ovvero a far tendere a 0 $x - x_0$, $y - y_0$ e $z - z_0$ con valori che mantengono fisso $\mathbf{n}$.

**I29f.02** Per gli sviluppi successivi risulta conveniente adattare il linguaggio delle derivate e dei differenziali di funzioni-RRRtR a entità vettoriali.

Il vettore $t\,\mathbf{n}$ serve per controllare le variazioni delle funzioni-RRRtR relative a variazioni delle variabili spaziali come $P(t)$ su rette la cui orientazione è data da un versore che continuiamo a denotare con $\mathbf{n}$.

Spostamenti infinitesimali nella direzione di $\mathbf{n}$ sono esprimibili mediante espressioni come $n_x\,\mathrm{d}x$, $n_y\,\mathrm{d}y$ e $n_z\,\mathrm{d}z$ e per questi serve introdurre la notazione sintetica

(1) $$\mathrm{d}\mathbf{n} \ := \big\langle n_x\,\mathrm{d}x\,, n_y\,\mathrm{d}y\,, n_z\,\mathrm{d}z\,\big\rangle \ = \ \mathbf{e}_x\,n_x\,\mathrm{d}x \ + \mathbf{e}_y\,n_y\,\mathrm{d}y \ + \mathbf{e}_z\,n_z\,\mathrm{d}z \ .$$

Inoltre per disporre di uno strumento per esprimere le derivate si definisce il reciproco del differenziale in una direzione

(2) $$\frac{1}{\mathrm{d}\mathbf{n}} \ := \ \left\langle \frac{1}{n_x\,\mathrm{d}x}, \frac{1}{n_y\,\mathrm{d}y}, \frac{1}{n_z\,\mathrm{d}z} \right\rangle \ = \ \mathbf{e}_x\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\,\frac{\partial}{\partial z} \ .$$

L'ultima espressione trovata la si incontra spesso, e viene chiamata preferibilmente **operatore gradiente** e viene identificata con le scritture

(3) $$\operatorname{grad} f \ := \ \nabla f \ := \ \mathbf{e}_x\,\frac{\partial}{\partial x}\,f + \mathbf{e}_y\,\frac{\partial}{\partial y}\,f + \mathbf{e}_z\,\frac{\partial}{\partial z}\,f \ .$$

**I29f.03** Procediamo ora a definire il cosiddetto **limite direzionale della funzione-RRRtR** $f$

$$\lim_{P(t) \to P_0} \frac{f\Big(P(t)\Big) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0\,P(t)}|} \ = \ \lim_{t \to 0} \frac{f(P(t)) - f(P_0)}{t}$$

Questo richiede di valutare il rapporto incrementale della $f(P(t))$ relativo alla variazione della variabile da $t_0$ a $t$ corrispondente allo spostamento $\overrightarrow{P_0\,P(t)}$

$$\frac{f(P)-f(P_0)}{t} \;=\; \frac{f(x_0+t\,n_x, y_0+t\,n_y, z_0+t\,n_z)}{t} - \frac{f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

Per garantire questa costruzione serve l'ipotesi che la $f(P) = f(x,y,z)$ nei punti interni del suo dominio sia continua insieme alle sue derivate parziali del primo grado. La possibilità di conoscere queste derivata induce a determinare la derivata della funzione composta della $t$

$$F(t) \;:=\; f\Big(x_0+t\,n_x\,,\,y_0+t\,n_y\,,\,z_0+t\,n_z\Big)\;,$$

per la quale d02(2) porta al seguente enunciato.

$$F'(t) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}(x_0+t\,n_x)}{\mathrm{d}t} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}(y_0+t\,n_y)}{\mathrm{d}t} \;+\; \frac{\partial f}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}(z_0+t\,n_z)}{\mathrm{d}t}\;.$$

**(1) Prop.**: In conseguenza della precedente ipotesi di regolarità della $f$ il limite richiesto esiste ed è ottenibile con la seguente espressione

(1) $$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0\,P}|} \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} n_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} n_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} n_z \;\blacksquare$$

**I29f.04** Le considerazioni precedenti si possono facilmente ridurre al caso bidimensionale delle funzioni-RRtR.

(1) $$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0\,P}|} \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} n_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} n_y \;\blacksquare$$

Con le stesse argomentazioni si ottiene la generalizzazione alle funzioni definite in domini $d$-dimensionali.

(2) $$\lim_{P\to P_0}\frac{f(P)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0\,P}|} \;=\; \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{P_0} n_i \;\blacksquare$$

A queste uguaglianze si può dare forma più sintetica servendosi di un operatore di derivazione vettoriale che si può chiamare **gradiente generalizzato**.

**I29f.05** Consideriamo una superficie in $\mathbb{R}^{\times 3}$ tendenzialmente regolare che identifichiamo con $\Sigma$.
Più precisamente supponiamo che sia individuata da una funzione-RRtR $z = f(x,y)$ il cui dominio denotiamo con $\mathsf{D}$.

Sia poi $\mathsf{O}$ un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathsf{D}$ nel quale la $f$ è continua insieme alle sue derivate parziali prime; inoltre sia $\langle x_0,y_0\rangle$ un punto di $\mathsf{O}$ che scriviamo $z_0 := f(x_0,y_0)$ e sia $P_0 := \langle x_0,y_0,z_0\rangle$ il corrispondente punto appartenente a $\Sigma$.
Consideriamo anche una curva $\Gamma$ appartenente a $\Sigma$ passante per $P_0$ individuata dalle equazioni parametriche

$$x = x(t)\;,\;\; y = y(t)\;,\;\; z = z(t)\;,$$

funzioni che supponiamo continue e derivabili per $t \in I$, intervallo contenuto in $\mathsf{O}$.

Ci serviremo anche della notazione vettoriale per il punto variabile sulla curva $\Gamma$ scrivendo

$$\mathsf{r}(t) \;:=\; \big\langle x(t), y(t), z(t)\big\rangle\;.$$

Sia inoltre $t_0 \in I$ il valore del parametro al quale corrisponde il punto sul quale focalizziamo l'attenzione:

$$P_0 \;=\; \mathsf{r}(t_0) \;=\; \big\langle x_0,y_0,z_0\big\rangle \;=\; \big\langle x(t_0), y(t_0), f(x(t_0),y(t_0))\big\rangle\;.$$

**I29f.06** Facciamo anche l'ipotesi che i differenziali delle funzioni componenti $\mathbf{r}(t)$ non siano tutti nulli in $P_0$, cioè

$$t = t_0 \implies |\mathrm{d}x\,| + |\mathrm{d}y\,| + |\mathrm{d}z\,| > 0$$

e cerchiamo una espressione per i punti della retta **t** tangente in $P_0$ alla curva $\Gamma$, punti che denotiamo con $Q = \langle X, Y, Z\rangle$.

Per la **t** si trovano le relazioni

$$(1) \qquad \frac{X - x_0}{\mathrm{d}x} = \frac{Y - y_0}{\mathrm{d}y} = \frac{Z - z_0}{\mathrm{d}z} \ .$$

La formula per la differenziazione delle funzioni composte applicata alla funzione $f$ esprimente la superficie $\Sigma$ afferma

$$(2) \qquad \mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mathrm{d}y \ .$$

Qui per i differenziali delle funzioni di $t$ che esprimono parametricamente i punti della $\Gamma$ valutati in $P_0$ abbiamo

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right)_{t_0} \quad \text{e} \quad \mathrm{d}y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)\right)_{t_0} \ .$$

Dato che (2) dice che i tre differenziali sono proporzionali, risp., alle tre differenze $X - x_0$, $Y - y_0$ e $Z - z_0$, possono essere rimpiazzati da quest rispettive differenze nella (2) conducendo alla

$$(3) \qquad Z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} (X - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} (Y - y_0) \ .$$

L'equazione trovata per la curva $\Gamma$ è una equazione lineare nelle variabili $X$, $Y$ e $Z$ e individua un piano che dipende dal punto $P_0$ e dalle derivate parziali dipendenti dalla superficie, ma non dalla curva piuttosto regolare presa in esame.

Questo dice che tutte le rette tangenti in $P_0$ alla superficie appartengono ad uno stesso piano; questo viene detto **piano tangente alla superficie** nel punto $P_0$ e la (3) l'equazione che la caratterizza.

Il punto $P_0$ si dice **punto di contatto della superficie** con il suo piano tangente.

**I29f.07** Un elemento importante associato al punto di contatto $P_0$ della superficie $\Sigma$ con il suo piano tangente è la retta passante per tale punto e ortogonale alla $\Sigma$, oggetto chiamato **retta normale alla superficie** nel punto $P_0$. Tale retta la denotiamo con $\mathsf{N}_\Sigma(P_0)$ o in breve, co $\mathsf{N}$.

In geometria si trova che, assegnando alla superficie l'orientazione che fa in modo che la $\mathsf{N}$ forma con l'asse $\mathsf{Oz}$ un angolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, i coseni direttori della normale sono:

$$(1) \quad \cos\widehat{N\,\mathsf{Ox}} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{S} \ , \ \cos\widehat{N\,\mathsf{Oy}} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{S} \ , \ \cos\widehat{N\,\mathsf{Oz}} = \frac{1}{S} \quad \text{con} \quad S := \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \ .$$

In queste formule si intende che la radice fornisca il suo valore aritmetico (positivo). Le equazioni della retta sono quindi

$$(2) \qquad Z - z_0 = \frac{X - x_0}{-\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y - y_0}{-\frac{\partial f}{\partial y}} \ .$$

**I29f.08** Consideriamo il caso in cui la $\Sigma$ è una superficie di rotazione avente come asse di rotazione l'asse di riferimento $\mathsf{Oz}$. In questo caso la funzione-RRtR che fornisce la superficie dipende solo dalla distanza del punto generico dall'asse $\mathsf{Oz}$, cioè ha la forma

$$f(x,y) = f(\rho) \quad \text{con} \quad \rho := \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

In questo caso

$$\frac{\partial f}{\partial x} \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\,\frac{x}{\rho} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\,\frac{y}{\rho}\;.$$

Si ottiene quindi che la proiezione sul piano $\mathsf{Oxy}$ della retta normale soddisfa l'equazione

$$\frac{X-x}{-\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\,\dfrac{x}{\rho}} \;=\; \frac{Y-y}{-\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\,\dfrac{y}{\rho}} \qquad \text{ossia} \qquad \frac{X}{x} \;=\; \frac{Y}{y}\;.$$

Questo dice che tutte le proiezioni sono rette passanti per l'origine.
Di conseguenza si ha che tutte le normali a ciascuna delle superfici di rotazione sono complanari con l'asse di rotazione.

Si trova anche che

$$S \;=\; \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \;=\; \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right)^2 \left(\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2}\right)+1}$$

e quindi $=$

$$\cos\widehat{N\,\mathsf{Oz}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho}\right)^2+1}}\;.$$

espressione che dice che le normali a una superficie di rotazione nei punti di un suo parallelo (curva sezione con un piano ortogonale all'asse di rotazione) formano un cono di rotazione che condivide l'asse di rotazione della $\Sigma$.

**I29f.09** Affrontiamo il problema di individuare quali superici hanno tutti i piani tangenti che passano per un punto fisso. Questo punto, per semplicità delle notazioni, possiamo scegliere sia l'origine $\mathbf{0}_3$, grazie al fatto che ogni altro punto $Q$ può essere trasformato nell'origine applicando la traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{-P}$.

Consideriamo ancora la superficie individuata dalla funzione $f(x,y)$, chiamiamo il suo punto generico $P=\langle x,y,z\rangle$ e caratterizziamo l'origine con le coordinate $X=Y=Z=0$.

Con tali notazioni l'equazione f06(3) per il piano tangente diventa

$$f(x,y) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,x+\frac{\partial f}{\partial y}\,y\;.$$

Per il teorema di Eulero questa $f(x,y)$ è una funzione omogenea di grado 1 e quindi [e07] le si può dare la forma $x\,\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ con $\phi$ funzione-RdtR arbitraria.

Si osserva che l'equazione $z \;=\; x\,\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ è soddisfatta da tutte e sole le superfici coniche con vertice nell'origine.

Si può quindi concludere che le superfici coniche sono tutte e sole le superfici con tutti i piani tangenti passanti per un unico punto.

**I29f.10** Consideriamo ancora la superficie $\Gamma$ fornita dalla funzione $f(x,y)$, il suo punto generico $P_0=\big\langle x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big\rangle$ e un altro punto $\overline{P}$ della $\Gamma$ da pensare molto prossimo a $P_0$ e quindi per il quale si possa usare la notazione differenziale $\overline{P}=\big\langle x_0+\mathrm{d}x\;,\;y_0+\mathrm{d}y\;,\;f(x_0+\mathrm{d}x\,,y_0+\mathrm{d}y\,)\big\rangle$ .

//input pI29f10

Per la variazione del valore della $f$ passando da $P_0$ a $\overline{P}$ scriviamo

$$\Delta f \ := \ f(x_0 + \mathrm{d}x\,, y_0 + \mathrm{d}y\,) - f(x_0, y_0)\ .$$

Introduciamo anche i punti $\mathbf{v}_0 := \langle x_0, y_0 \rangle$ e $\overline{\mathbf{v}} := \langle x_0 + \mathrm{d}x\,, y_0 + \mathrm{d}y\,\rangle$, nonché la notazione per l'altitudine $\overline{z} := f(x_0 + \mathrm{d}x\,, y_0 + \mathrm{d}y\,) = f(\overline{\mathbf{v}})$ , in modo che sia $\overline{P} = \langle x_0 + \mathrm{d}x\,, y_0 + \mathrm{d}y\,, \overline{z} \rangle$ .

Consideriamo anche il piano $\Pi$ tangente alla $\Gamma$ in $P_0$ retto dall'equazione f05(3) e quindi tale che sia

$$\overline{z} \ = \ z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \ = \ z_0 + \mathrm{d}f\ .$$

Le altitudini dei due punti $P_0$ e $\overline{P}$ corrispondenti, risp., ai punti di $\mathsf{Oxy}$ $\mathbf{v}_0$ $\overline{\mathbf{v}}$ appartenente a $\Sigma$ e a $\Pi$ sono, risp., $z_0 + \Delta f$ e $z_0 + \mathrm{d}f$ . Dunque sostituire all'incremento della $f$ relativo allo spostamento sul piano $\mathsf{Oxy}$ da $\mathbf{v}_0$ a $\overline{\mathbf{v}}$ l'incremento $\Delta f$ con il differenziale $\mathrm{d}f$ equivale a sostituire il punto $\overline{P}$ sulla superficie $\Sigma$ con il punto $\langle x_0 + \mathrm{d}x\ ,\ y_0 + \mathrm{d}y\ ,\ \overline{z} \rangle$ appartenente al piano tangente $\Pi$.

Questa sostituzione è in completa sintonia con la sostituzione dell'incremento di una funzione-RtR con il suo differenziale; in questa situazione più semplice in luogo della superficie si aveva una curva piana e in luogo del piano tangente una retta tangente.

Nella sostituzione in $\mathbb{R}^{\times 3}$ si trascurano infinitesimi di ordine superiore rispetto all'infinitesimo di riferimento $|\mathrm{d}\mathbf{v}| = \sqrt{\mathrm{d}x^{\,2} + \mathrm{d}y^{\,2}}$ ; questo modo di procedere anche in più dimensioni può essere considerato come abbreviazione delle argomentazioni.

## I29 g. differenziali totali di funzioni multivariate

**I29g.01** Consideriamo una funzione-RdtR $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ che in ogni insieme aperto e connesso **O** contenuto nel suo dominio **D** è continua e derivabile insieme a tutte le sue derivate parziali dei gradi che si dovranno prendere in considerazione.

Riprendiamo la espressione del suo differenziale totale

$$(1) \qquad \mathrm{d}f \;=\; \frac{\partial f}{\partial\, x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial\, x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial\, x_d}\,\mathrm{d}x_d \;.$$

Questa, come tante altre espressioni differenziali, vengono usate per semplificare argomentazioni nelle quali alcuni differenziali sono da considerare infinitesimi di riferimento per tutti i rimanenti.
In effetti in alcune fasi argomentative (ad esempio in varie pagine che seguono) si trattano grandezze infinitesime da considerare di ordine superiore rispetto a quelle introdotte in precedenza (in queste pagine l'espressione (1)) le quali devono essere considerate grandezze fisse, costanti.

Introduciamo dunque i differenziali degli ordini successivi al primo della funzione multivariata $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ definendoli sulla falsariga delle definizioni delle derivate successive.

Si definisce differenziale totale del secondo ordine della $f$ e si denota con $\mathrm{d}^2 f$, il differenziale del precedente $\mathrm{d}f$ :

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}^2 f \;:=\; & \mathrm{d}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial\, x_i}\,\mathrm{d}x_i \;=\; \sum_{i=1}^{d} \mathrm{d}\left(\frac{\partial f}{\partial\, x_i}\,\mathrm{d}x_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{d}\left(\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial\, x_i}\right)\mathrm{d}x_i \\ =\; & \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\right) \;=\; \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j \end{aligned} \;.$$

Alla espressione trovata la regolarità della $f$ consente di applicare la proprietà di commutazione delle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i} \;,$$

ottenendo

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}^2 f \;:=\; & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}\,\mathrm{d}{x_1}^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}\,\mathrm{d}{x_2}^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial {x_d}^2}\,\mathrm{d}{x_n}^2 \\ & + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_3}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_3 + \cdots + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\,\partial x_n}\,\mathrm{d}x_{d-1}\,\mathrm{d}x_d \end{aligned} \;.$$

**I29g.02** Le espressioni **g01**(1-2) costituiscono elementi particolari di un insieme di costrutti formali che chiameremo **espressioni differenziali omogenee**, in breve **espressioni-dh**.

Con $\mathsf{v} = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ denotiamo un insieme di simboli che hanno il compito di rappresentare variabili che in alcuni passaggi coprono ruoli di funzioni.

Consideriamo poi le scritture $\mathrm{d}v_i$ e $\partial v_j$ per $i, j = 1, 2, ..., m$ cui diamo il compito di rappresentare differenziali delle variabili e delle funzioni.

Definiamo composizioni razionali su **v** le espressioni ottenute componendo le scritture suddette con le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione per uno scalare, prodotto di composizione e divisione.

Definiamo poi espressioni-dh su **v** le composizioni razionali su **v** che nei confronti dei prodotti e della divisione sono funzioni omogenee.

Si constata che g01(1) è una espressione-dh di grado 1, mentre g01(2) è una espressione-dh di grado 2.

In una espressione-dh possono comparire prodotti e potenze delle scritture $\mathrm{d}v_i$, prodotti di scritture $\partial v_i$ e potenze di composizione della forma $\partial^h v_j$ con $h = 2, 3, ....$

Per $k = 2, 3, ...$ definiamo come potenza-dh $k$-esima di una espressione-dh $\mathcal{E}$ e denotiamo con $\mathcal{E}^{<k>}$, l'espressione-dh ottenibile con una sequenza di tre trasformazioni:

- trasformazione di ogni scrittura $\partial^h v_j$ nella $\partial {v_j}^h$;
- calcolo della potenza $k$-esima dell'espressione considerandola costituita da composizioni razionali;
- trasformazione di ogni scrittura $\partial {v_j}^h$ nella $\partial^h v_j$.

**I29g.03** Il differenziale totale del secondo ordine dd una funzione $f$ $\mathrm{d}^2 f$ si può individuare utilmente con

(1) $$(\mathrm{d}f)^{<2>} \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_d\right)^{<2>} .$$

La tendenza alla generalizzazione porta per ogni $m = 2, 3, 4, ...$ a definire **differenziale totale di ordine** $m$ della funzione-RdtR $f$, e a denotare con $\mathrm{d}^m f$, il differenziale totale del differenziale totale di ordine $m-1$ della $f$: $\mathrm{d}^m f := \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^{m-1}\right)) f$ .

Procedendo per induzione si ottiene facilmente che

(2) $$\forall m = 2, 3, ... \;:\; (\mathrm{d}f)^{<m>} \;=\; \mathrm{d}^m f \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_d\right)^{<m>} .$$

Applicando la formula del polinomio per il differenziale totale di ordine $m$ grazie alla commutazione delle derivazioni parziali si giunge alla espressione più esplicita

(3) $$\mathrm{d}^m f \;=\; \sum_{m=m_1+\cdots+m_r} \frac{m!}{m_1! m_2! \cdots m_r!}\, \frac{\partial^m}{\partial {x_1}^{m_1}\,\partial {x_2}^{m_2}\,\cdot\,\partial {x_r}^{m_r}}\, \mathrm{d}{x_1}^{m_1}\,\mathrm{d}{x_2}^{m_2}\,\cdots\,\mathrm{d}{x_r}^{m_r} \;;$$

qui la sommatoria si intende estesa all'insieme delle soluzioni intere nonnegative $\langle m_1, m_2, ..., m_r\rangle$ dell'equazione $m_1 + m_2 + \cdots + m_d = m$ .

Per esempio si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^3 f(x,y,z) \;=\; & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\,\mathrm{d}x^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\,\mathrm{d}y^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\,\mathrm{d}z^3 \\ & + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}z + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\,\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}x + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}\,\mathrm{d}y^2\,\mathrm{d}z \\ & + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}\,\mathrm{d}z^2\,\mathrm{d}x + 3\,\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}\,\mathrm{d}z^2\,\mathrm{d}y + 6\,\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \end{aligned} .$$

**I29g.04** Consideriamo una situazione più elaborata delle precedenti che vede una funzione-RdtR $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ negli argomenti $x_i$ a loro volta funzioni di una $e$-upla $\vec{\xi} = \langle \xi_1, ..., \xi_e\rangle$ di variabili da considerare indipendenti

(1) $$\forall i = 1, ..., d \;:\; x_i = x_i(\xi_1, ..., \xi_e) .$$

Ancora possiamo esprimere il differenziale totale della $f$ come

(2) $$\mathrm{d}f \;=\; \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_d ,$$

ma nella quale i differenziali delle $x_i$ devono essere espressi dalle corrispondenti formule

$$(3) \qquad \mathrm{d}x_i \;=\; \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2}\,\mathrm{d}\xi_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_e}\,\mathrm{d}\xi_e \quad \text{per} \quad i = 1, 2, ..., d \;.$$

Per esprimere il differenziale secondo ai contributi forniti dalla g03(1) si devono aggiungere i contributi dei differenziali di secondo grado delle funzioni $x_i$ ottenendo

$$(4) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}^2 f \;=\; & \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_d \right)^{<2>} \\ & + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}^2 x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}^2 x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_d}\,\mathrm{d}^2 x_d \end{aligned} \;.$$

Dobbiamo quindi affermare che per i differenziali del secondo grado, e a maggior ragione per i differenziali dei gradi superiori, non vale la proprietà di invarianza del differenziale totale.

**I29g.05** Si consideri per esempio la funzione $z = f(x, y)$ e per essa adottiamo le notazioni adottate da Monge:

$$(1) \qquad \begin{aligned} & \boldsymbol{p} := \frac{\partial f}{\partial x} \;,\; \boldsymbol{q} := \frac{\partial f}{\partial y} \;,\; \boldsymbol{r} := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;,\; \boldsymbol{s} := \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \;,\; \boldsymbol{t} := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ & \boldsymbol{n} := \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \;,\; \boldsymbol{m} := \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} \;,\; \boldsymbol{w} := \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} \;,\; \boldsymbol{v} := \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \end{aligned} \;.$$

Se $x$ e $y$ sono da considerare variabili indipendenti si hanno le espressioni

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}f \;&=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \;=\; \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}^2 f \;&=\; \mathrm{d}f^{<2>} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2 \;=\; \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\boldsymbol{s}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y + \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}y^2 \\ \mathrm{d}^3 f \;&=\; \mathrm{d}f^{<3>} \;=\; \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}x^3 + 3\,\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 3\,\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y^2 + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}y^3 \end{aligned} \;.$$

Se invece $x$ e $y$ sono considerate funzioni dipendenti si hanno espressioni più elaborate:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}f \;&=\; \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}^2 f \;&=\; \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}x^2 + 2\,\boldsymbol{s}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y + \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}y^2 + \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}^2 x + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}^2 y \\ \mathrm{d}^3 f \;&=\; \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}x^3 + 3\,\boldsymbol{m}\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 3\,\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y^2 + \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}y^3 \\ & \quad + 3\,\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}^2 y + 3\,\boldsymbol{s}(\mathrm{d}^2 x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\;\mathrm{d}^2 y) + 3\,\boldsymbol{t}\,\mathrm{d}y\;\mathrm{d}^2 y + \boldsymbol{p}\,\mathrm{d}^3 x + \boldsymbol{q}\,\mathrm{d}^3 y \end{aligned} \;.$$

## I29 h. formule di Taylor e MacLaurin per funzioni multivariate

**I29h.01** Consideriamo una funzione-RdtR $f(P) = f(x_1, x_2, ..., x_d)$ definita in una regione $\mathbf{O}$ nella quale sia finita e continua insieme alle sue derivate parziali dei vari ordini che si dovranno prendere in considerazione.
Sia $P_0 = \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_d\rangle$ un punto interno a $\mathbf{O}$ e $\overline{P} = \langle a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_s + h_s\rangle$ un punto interno a una ipersfera $\mathbf{B}$ di centro $P_0$ tutta contenuta in $\mathbf{O}$.

Ci proponiamo, ampliando le analisi relative alle funzioni-RtR, di esaminare i valori della differenza

$$f(\overline{P}) - f(P) \; = \; f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_d + h_d) - f(a_1, a_2, ..., a_d)$$

al variare di $\overline{P}$ nella $\mathbf{B}$. In tale prospettiva è significativo chiamare $P$ “punto di rifermento” e $\overline{P}$ “punto variato” e risulta intuitivo pensare

$$\mathbf{h} \; := \; \langle h_1, h_2, ..., h_d\rangle \; = \; \overrightarrow{P_0\,\overline{P}}$$

tendente a $\mathbf{0}_d$, ossia pensare $|\mathbf{h}| = \left|\overrightarrow{P_0\,\overline{P}}\right|$ tendente a 0.

Tenendo fisso $\mathbf{h}$, consideriamo la retta orientata come $\mathbf{h}$ e passante per $P_0$ e il punto $P(t) = P_0 + \mathbf{h}\,t$ variabile linearmente con il parametro $t$. Può aiutare la comprensione l’immaginare che $t$ rappresenti il tempo e il chiamare $P(t)$ “punto mobile”.

Prendiamo in considerazione anche la $d$-upla funzione lineare di $t$

$$\mathbf{u}(t) \; := \; \langle u_1, u_2, ..., u_d\rangle(t) \; := \; \langle a_1 + h_1\,t, a_2 + h_2\,t, ..., a_d + h_d\,t\rangle$$

e la funzione composta

$$F(t) \; := \; f(\mathbf{u}(t)) \; = \; f(u_1, u_2, ..., u_d) \; = \; f(a_1 + h_1\,t, a_2 + h_2\,t, ..., a_d + h_d\,t) \; .$$

Si constata che per $t \in [-1, 1]$ il punto $P(t)$ si trova all’interno della ipersfera $\mathbf{B}$ e che si ha

$$F(0) \; = \; f(a_1, a_2, ..., a_d) \quad \text{ e } \quad F(1) \; = \; f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_s + h_d) \; .$$

**I29h.02** Le ipotesi di finitezza e continuità delle funzioni in gioco rendono lecito applicare alla $F(t)$ la formula di Taylor arrestata al termine di ordine $m$; scegliendo il termine complementare nella forma di Lagrange abbiamo

$$(1) \qquad F(1) \; = \; F(0) + \frac{1}{1!}\,F'(0) + \frac{1}{2!}\,F^{(2)}(0) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}\,F^{(m-1)}(0) + \frac{1}{m!}\,F^{(m)}(\theta_m) \; ,$$

ove $0 < \theta_m < 1$.

Facciamo intervenire i differenziali delle funzioni $u_i$ relativi al differenziale del parametro $\mathrm{d}t$; per i differenziali del primo ordine valgono le $\mathrm{d}u_i \; = \; h_i\,\mathrm{d}t$ , mentre quelli degli ordini superiori sono tutti nulli. Si hanno quindi per ogni $k = 2, 3, 4, ...$ le espressioni

$$(2) \qquad \mathrm{d}^k\,F(t) \; = \; \left(\frac{\partial f}{\partial\,u_1}\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial\,u_2}\,h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial\,u_d}\,h_d\right)^{<k>}_{\mathbf{a}+\mathbf{h}\,t} \; ,$$

dove il deponente $\mathbf{a} + \mathbf{h}\,t$ richiede che tutte le derivate che si ottengono dallo sviluppo della potenza $< k >$ devono essere calcolate nel punto $\mathbf{a} + \mathbf{h}\,t = \langle a_1 + h_1\,t, a_2 + h_2\,t, ..., a_d + h_d\,t\rangle$ .

Per rendere più compatte le formule che seguono utilizziamo per il differenziale totale della $f$ l'operatore vettoriale lineare gradiente e il prodotto scalare per $\mathbb{R}^{\times d}$ nella forma "$* \cdot *$" :

$$(3) \qquad \mathrm{d}f \;=\; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial u_j}\, h_j \;=\; \mathrm{grad}\, f \cdot \mathrm{d}\mathbf{h} \qquad \text{ove} \quad \mathrm{grad}\, F \;:=\; \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial u_j} \;.$$

Per le derivate che compaiono nello sviluppo di Taylor (1) possiamo scrivere

$$(4) \qquad F^{(k)}(t) \;=\; \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^{\,k}} F(t) \;=\; \left( \frac{\partial f}{\partial u_1}\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\, h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_d}\, h_d \right)^{<k>}_{\mathbf{a}+\mathbf{h}\,t} \;.$$

Utilizzando questa espressione per $t = 0$ e per $t = \theta_m$ otteniamo

$$(5) \qquad \begin{aligned} f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_s + h_d) \;&=\; f(a_1, a_2, ..., a_d) + \frac{1}{1!}\; (\mathrm{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{h})_{\mathbf{a}} \\ &+ \frac{1}{2!}\; \big( (\mathrm{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{h})^{<2>} \big)_{\mathbf{a}} + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}\; \big( (\mathrm{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{h})^{<m-1>} \big)_{\mathbf{a}} + R_m \;. \\ &\text{con} \quad R_m \;:=\; \frac{1}{m!}\; \big( (\mathrm{grad} f \cdot \mathrm{d}\mathbf{h})^{<m>} \big)_{\mathbf{a}+\theta_m\,\mathbf{h}} \end{aligned}$$

Questa espressione viene detta **sviluppo di Taylor per la funzione-RdtR** $f$ arrestato al termine di ordine $m$ con il termine complementare nella forma di Lagrange.

**I29h.03** Se nella espressione precedente si pone $\mathbf{A} = \langle 0, 0, ..., 0 \rangle$ e si cambiano le $h_i$ nelle $x_i$ per $i = 1, 2, ..., d$ si ottiene la **formula di MacLaurin per la funzione-RdtR** $f(x_1, x_2, ..., x_d) \;=\; f(\mathbf{x})$

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_d) \;&=\; f(0, 0, ..., 0) + \frac{1}{2} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_d \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)_{\!,}(\mathbf{0}) \\ &+ \frac{1}{2} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_d \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)^{<2>}_{\!,}(\mathbf{0}) + \cdots \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_d \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)^{<m-1>}_{\!,}(\mathbf{0}) + R_m \\ \text{con} \quad R_m \;&=\; \frac{1}{m!} \left( x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_d \frac{\partial f}{\partial x_d} \right)^{<m>}_{\!,}(\theta_m\, \mathbf{x}) \end{aligned} \;.$$

**I29h.04** Diamo anche l'espressione particolare per la funzione-RRtR $z = f(x, y)$

$$\begin{aligned} f(x, y) \;&=\; f(0, 0) + \frac{1}{1!} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{\!,}(\langle 0, 0 \rangle) + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{\!,}(\langle 0, 0 \rangle) \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{<m-1>}_{\!,}(\langle 0, 0 \rangle) \quad + \quad R_m \\ \text{con} \quad R_m \;&=\; \frac{1}{m!} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{<m>}_{\!,}(\langle \theta_x, \theta_y \rangle) \end{aligned}$$

Se poniamo $c := f(0, 0)$, utilizziamo le notazioni di Monge per le derivate parziali ed arrestiamo lo sviluppo di MacLaurin al termine del primo ordine otteniamo

$$z \;=\; c + \boldsymbol{p}\, x + \boldsymbol{q}\, y \;.$$

Questo corrisponde a sostituire la superficie espressa dalla $f(x, y)$ con il piano tangente in $\big\langle 0, 0, f(0, 0) \big\rangle$.

Se invece si arresta lo sviluppo ai termini del secondo ordine si ottiene

$$z \;=\; c + \boldsymbol{p}\, x + \boldsymbol{q}\, y + \boldsymbol{r}\, x^2 + 2\, \boldsymbol{s}\, x\, y + \boldsymbol{t}\, y^2 \;,$$

operazione che corrisponde a sostituire la superficie con il paraboloide tangente alla superficie in $\langle 0, 0, f(0,0)\rangle$.

**I29h.05** Nella espressione h02(5) sostituiamo $h_i$ con $\mathrm{d}x_i$ per $i = 1, 2, ..., d$ e serviamoci dell'incremento

$$\Delta f \;:=\; f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_d + h_d) - f(a_1, a_2, ..., a_d)$$

ottenendo

$$\Delta f \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}f}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{(m-1)!}\right)_{\mathbf{a}} + R_m$$
$$\text{con}\quad R_m \;=\; \frac{1}{m\,!}\,\mathrm{d}^m f(\mathbf{a}+\theta\,\mathbf{h}) \;=\; \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial\,x_i}\,\mathrm{d}x_i\right)^{<m>}{}_{\mathsf{l}}(\mathbf{a}+\theta\,\mathbf{h}) .$$

Sopra il termine complementare $R_m$ possiamo dire che in ogni ipersfera $\mathbf{B}$ con centro $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_d\rangle$ nella quale le derivate parziali della $f$ di ordine $m$ si mantengono limitate, più precisamente si mantengono inferiori in modulo a un $K \in \mathbb{R}_+$, quando si considerano i $\mathrm{d}x_i$ infinitesimi del primo ordine, il detto $R_m$ in ogni punto $\langle x_1 + \mathrm{d}x_1, x_2 + \mathrm{d}x_2, ..., x_d + \mathrm{d}x_d\rangle$ di $\mathbf{B}$ risultano infinitesimi di ordine $m$ rispetto a

$$\sqrt{\mathrm{d}{x_1}^2 + \mathrm{d}{x_2}^2 + \cdots + \mathrm{d}{x_d}^2} \quad\text{oppure}\quad |\mathrm{d}x_1| + |\mathrm{d}x_2| + \cdots + |\mathrm{d}x_d|\ ;$$

infatti h02(5) comporta

$$|R_m| \;<\; \frac{K}{m!}\Big(|\mathrm{d}x_1| + |\mathrm{d}x_2| + \cdots + |\mathrm{d}x_d|\Big)^m .$$

**I29h.06** Consideriamo ancora una funzione-RdtR $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ definita in una regione $D$ nella quale è dotata di derivate continue di tutti gli ordini, $P_0 = \mathbf{a} = \langle a_1, a_2, .., ., a_d\rangle$ un punto interno a $D$, $\mathbf{B}$ una ipersfera aperta contenuta in $D$ e un punto $P_1 = \mathbf{a} + \mathbf{h} = \langle a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_d + h_d\rangle$ interno alla $\mathbf{B}$.

Ricordiamo anche l'espressione h02(5) che riscriviamo

(1)
$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \;= f(\mathbf{a}) + \sum_{r=1}^{m-1}\frac{1}{r!}\,\Big((\mathrm{grad} f\cdot\mathbf{h})^{<r>}\Big)_{\mathsf{l}}\,\mathbf{a} + R_m$$
$$\text{con}\quad R_m \;=\; \frac{1}{m!}\,\Big((\mathrm{grad} f\cdot\mathbf{h})^{<m>}\Big)_{\mathsf{l}}\,\mathbf{a} + \theta_m\,\mathbf{h} \quad\text{e}\quad 0 < \theta_m < 1 .$$

assumiamo l'ipotesi che il termine complementare $R_m$ tenda a 0 per $m \to +\infty$, cioè che sia la

(2)
$$\lim_{m\to+\infty} R_m \;=\; \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m!}\,\Big(\mathrm{grad} f\cdot\mathbf{h})^{<m>}{}_{\mathsf{l}}\,\mathbf{a} + \theta_m\,\mathbf{h}\Big) \;=\; 0$$

In tal caso si ha la convergenza al valore $f(\mathbf{a})$ dell **sviluppo in serie di Taylor della funzione multivariata** $f$

(3)
$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \;=\; f(\mathbf{a}) + \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r!}\,\Big((\mathrm{grad} f\cdot\mathbf{h})^{<r>}\Big)_{\mathsf{l}}\,\mathbf{a}\ .$$

Abbiamo quindi

**(4) Teorema** La serie a secondo membro della (1) converge al valore $f(\mathbf{a}+\mathbf{h})$ sse il termine complementare $R_m$ di tende a 0 per $m \to +\infty$ cioè sse vale la (2).

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \;=\; f(\mathbf{a}) + \sum_{r=1}^{+\infty}\frac{1}{r!}\,\Big((\mathrm{grad} f\cdot\mathbf{h})^{<r>}\Big)_{\mathsf{l}}\,\mathbf{a}\ .$$

**I29h.07** La relazione h06(3), trasformando $\mathbf{h} = \langle h_1, h_2, ..., h_d\rangle$ in $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle$ e imponendo $\mathbf{a} = \mathbf{0}_d = \langle 0, 0, ..., 0\rangle$ , diventa

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, ..., x_d) \;=\; f(0, 0, ..., 0) + \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r!}\left((\mathrm{grad} f \cdot \mathbf{h})^{<r>}\right)_{|}\mathbf{0}_d \;.$$

Questa relazione costituisce lo **sviluppo in serie di MacLaurin della funzione multivariata** $f$.

Gli sviluppi di Taylor h06(3) e di MacLaurin (1) sono notevoli esempi di serie di potenze di più variabili che costituiscono naturali estensioni delle serie di potenze di una variabile considerate in precedenza [I21g].

Vedremo che tutti questi sviluppi si possono estendere a serie di potenze di una o più variabili complesse e che per queste costruzioni si possono estendere utilmente le nozioni di raggio e di cerchio di covergenza.

**I29h.08** Enunciamo la seguente proprietà dello sviluppo di MacLaurin.

**Prop.** 1 Per una funzione $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ e per gli oggetti collegati introdotti in h06 la serie h07, se per una $d$-upla di reali positivi $\langle x_{10}, x_{20}, ..., x_{d0}\rangle$ esiste un reale $k$ tale che sia

$$\forall r = 1, 2, 3, ... \;:\; \left|\frac{\partial^r f}{\partial^{i_1} x_1\, \partial^{i_2} x_2 \,\cdots\, \partial^{i_d} x_d}\, {x_{10}}^{i_1}\, {x_{20}}^{i_2} \,\cdots\, {x_{d0}}^{i_d}\right| \quad \text{con} \quad i_1 + i_2 + \cdots + i_d \;=\; r \;\;,$$

allora per ogni altra $d$-upla di reali $\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle$ per la quale $|x_1| < x_{10}$, $|x_2| < x_{20}$, ..., $|x_d| < x_{d0}$ , lo sviluppo h07(1) è convergente .

## I29 i. estremi delle funzioni multivariate

**I29i.01** Consideriamo ancora una funzione-RdtR $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ definita in una regione $D$ nel quale sia dotata di derivate continue di tutti gli ordini che si devono utilizzare e un punto $P_0 = \mathsf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_d \rangle$ interno al dominio $D$.

Ricordiamo che per ogni $P \in \mathbb{R}^{\times d}$ e $\rho \in \mathbb{R}_+$ con $\mathsf{ball}(P, \rho)$ denotiamo la bolla ipersferica aperta di centro $P$ e raggio $\rho$.

Si dice che in $P_0$ si trova un **estremo della funzione-RdtR** $f$ sse la differenza

$$\Delta f \ := \ f(\mathsf{a}+\mathsf{h}) - f(\mathsf{a}) \ = \ f(a_1+h_1, a_2+h_2, ..., a_d+h_d) - f(a_1, a_2, ..., a_d)$$

per ogni $\mathsf{h}$ con $|\mathsf{h}| < \delta$ con il reale $\delta$ scelto opportunamente mantiene lo stesso segno o si annulla. In tale situazione si dice che $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0) \rangle$ è un **punto estremante della funzione-RdtR** $f$

Più particolarmente se in $\mathsf{ball}(P_0, \delta)$ la differenza $\Delta f$ è nonnegativa si dice che in $P_0$ si trova ha un **minimo relativo della funzione-RdtR** $f$ e che $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0) \rangle$ è un punto di minimo della $f$, mentre se in $\mathsf{ball}(P_0, \delta)$ la differenza $\Delta f$ è nonpositiva si dice che in $P_0$ si trova un **massimo relativo della funzione-RdtR** $f$ e che $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0) \rangle$ è un punto di massimo della $f$.

Segnaliamo che gli estremi delle funzioni multivariate sono anche detti **estremi liberi delle funzioni-RdtR**. Questo si rende opportuno nei contesti nei quali si studiano riduzioni delle funzioni $f$ dovute a restrizioni o condizionamenti dei loro domini, ossia dovute a vincoli imposti alle superfici che le funzioni rappresentano. Per questi scenari si parla di **estremi vincolati delle funzioni-RdtR**.

**I29i.02** Presentamo un criterio necessario per l'esistenza di un estremo $P_0 = \mathsf{a}$ di una funzione-RdtR $f(\mathsf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_d)$, cioè una proprietà che deve essere verificata da ogni estremo di una funzione multivariata.

Per ogni $j = 1, 2, ..., d$ denotiamo con $f_{[\overline{j}]}(x_j)$ la funzione-RtR restrizione della $f(\mathsf{x})$ ottenuta lasciando variare come consentito la $x_j$ e tenendo fissi i valori delle rimanenti $n-1$ variabili $x_i$ per $i \neq j$.

Evidentemente se la $f(\mathsf{x})$ ha un estremo per $\mathsf{x} = \mathsf{a}$ ciascuna delle $f_{[\overline{j}]}(x_j)$ ha un estremo per $x_j = a_j$. Una chiara enunciazione di questo fatto è l'annullamento delle derivate prime, cioè l'enunciato

$$forall j \in \{1, 2, ..., d\} \ \vdots \ D_{x_j} f_{[\overline{j}]}(x_j) = 0 \ .$$

Quindi in ogni punto estremo $\mathsf{a}$ della $f(\mathsf{x})$ devono essere nulle tutte le sue derivate parziali del primo ordine:

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}{}_{,\mathsf{a}} \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_2}{}_{,\mathsf{a}} \ = \ \cdots \ = \ \frac{\partial f}{\partial x_d}{}_{,\mathsf{a}} \ = \ 0 \ .$$

Conviene segnalare esplicitamente che questa condizione necessaria non è sufficiente a garantire la effettiva presenza di un estremo.

Un controesempio è dato dalla funzione $z(x,y) \ := \ (y - x^2)(y - 2\,x^2)$ che per $\langle x, y \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ si annulla con le sue derivate parziali, ma in ogni intorno dell'origine assume valori positivi, nulli e negativi: infatti $z(x, x^2) = z(x, 2\,x^2) = 0$ , $z(x, 3\,x^2) = 2\,x^4 > 0$ e $z(x, 1.5x^2) = -0.25\,x^2 < 0$ .

**I29i.03** Ci proponiamo ora di approfondire l'esame degli estremi di una funzione-RRtR $z = f(x,y)$ avente come dominio una regione $D$ nei punti interni della quale è finita e continua insieme alle sue derivate parziali del terzo ordine (almeno).

Sia $P_0 = \mathsf{v}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ un punto interno di $D$ nel quale si annullano le sue derivate parziali e sia $r \in \mathbb{R}_+$ tale il cerchio $B = \boldsymbol{Circl}(\mathsf{v}_0, r)$ sia completamente contenuto in $D$; sia inoltre $\mathsf{h} = \langle h, k \rangle$ tale che $\mathsf{v} + \mathsf{h}$ appartenga a $B$.

Per lo sviluppo di Taylor arrestato alle derivate terze per $\mathsf{v}_0 + \mathsf{h}$ abbiamo

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \;&=\; f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} h\, k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2\right)_{\restriction \mathsf{v}_0} \\ &+ \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{<3>}_{\restriction (\mathsf{x}_0 + \theta_3\, \mathsf{h})} \end{aligned} .$$

In questo sviluppo supponiamo che le tre derivate del secondo ordine non siano tutte nulle. Poniamo

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\boldsymbol{r}_0 := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{\restriction \mathsf{v}_0} ,\ \boldsymbol{s}_0 := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_{\restriction \mathsf{v}_0} ,\ \boldsymbol{t}_0 := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\restriction \mathsf{v}_0} ,\ \rho := \sqrt{h^2 + k^2} > 0 , \\ &\alpha := \arctan \frac{x}{y} \quad \lfloor h = \rho \cos\alpha ,\ k = \rho \sin\alpha \rfloor \quad \tau := \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k\right)^{<3>}_{\restriction (\mathsf{x}_0 + \theta_3\, \mathsf{h})} \end{aligned} ,$$

in modo da avere

$$(3)\qquad f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \;=\; \frac{\rho^2}{2}\left[\boldsymbol{r}_0 \cos^2\alpha + 2\, \boldsymbol{s}_0 \sin\alpha \cos\alpha + \boldsymbol{t}_0 \sin^2\alpha\right] + \frac{1}{2}\rho^3 \tau .$$

In queste condizioni $\tau$ si mantiene limitato in valore assoluto in tutto $B$, in quanto le derivate terze della $f$ sono limitate in $B$ e $|\sin\alpha|, |\cos\alpha| < 1$; si può quindi scrivere $|\tau| < M$ per qualche $M \in \mathbb{R}_+$.

**I29i.04** Il comportamento della differenza $\Delta f \;:=\; f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ dipende essenzialmente dal trinomio

$$(1)\qquad \mathsf{T} \;:=\; \boldsymbol{r}_0 \cos^2\alpha + 2\, \boldsymbol{s}_0 \sin\alpha \cos\alpha + \boldsymbol{t}_0 \sin^2\alpha$$

e per esaminarlo si devono distinguere le tre situazioni derivanti da segno del costrutto chiamato **discriminante**, definito dall'espressione $\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{t}_0 - {\boldsymbol{s}_0}^2$ .

Questa espressione, in vista di una sua generalizzazione, conviene ricondurla al determinante di una matrice che si può associare a ogni funzione-RRtR. Definiamo quindi la **matrice hessiana della funzione-RRtR** $f(x, y)$

$$(2)\qquad \mathsf{He\ss}_f(x, y) \;:=\; \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{bmatrix} \;=:\; \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix}$$

e definiamo il corrispondente determinante

$$(3)\qquad \boldsymbol{He}\text{ß}_f(x, y) \;:=\; \det(\mathsf{He\ss}_f(x, y)) \;=\; \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} & \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{s} & \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \;=\; \boldsymbol{s}\, \boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}^2 .$$

Osserviamo esplicitamente che $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(x_0, y_0)$, $\boldsymbol{s}_0 = \boldsymbol{s}(x_0, y_0)$ e $\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{t}(x_0, y_0)$ e che di conseguenza $\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{t}_0 - {\boldsymbol{s}_0}^2 \;=\; \boldsymbol{He}\text{ß}_f(x_0, y_0)$.

**I29i.05** Consideriamo il cosiddetto "caso ellittico", situazione nella quale $\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{t}_0 - {\boldsymbol{s}_0}^2 > 0$ .
In tal caso $\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{t}_0 > 0$, i due fattori sono entrambi positivi o negativi e possiamo scrivere

$$(1)\qquad \mathsf{T} \;=\; \frac{1}{\boldsymbol{r}_0}\left[{\boldsymbol{r}_0}^2 \cos^2\alpha + +2\, \boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{s}_0 \cos\alpha \sin\alpha + {\boldsymbol{t}_0}^2 \sin^2\alpha\right] .$$

Aggiungendo e sottraendo ${\boldsymbol{s}_0}^2 \sin^2\alpha$ si ottiene

$$(2)\qquad \mathsf{T} \;=\; \frac{1}{\boldsymbol{r}_0}\left[(\boldsymbol{r}_0 \cos\alpha + \boldsymbol{s}_0 \sin\alpha)^2 + +(\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{t}_0 - {\boldsymbol{s}_0}^2) \sin^2\alpha\right] .$$

L'espressione tra parentesi quadrate per ogni $\langle x,y\rangle$ ha valore positivo: potrebbe annullarsi solo per $\sin\alpha=0$ e quindi per $\cos\alpha=\pm1$ e $\boldsymbol{r}_0=0$, caso escluso all'inizio dell'esame del caso ellittico.

Dunque $|\mathsf{T}|$, funzione positiva e continua di $\alpha$, per qualche $\alpha\in[0,2\pi]$ presenta un minimo positivo che denotiamo con $\mu$.

È lecito scegliere $\rho$ tale che si abbia $\rho\,|\tau|<\rho\,M<\mu$, ovvero scegliere $\rho<\dfrac{\mu}{M}$.
Con tale scelta nell'espressione

$$(3)\qquad T' \;:=\; \boldsymbol{r}_0\,\cos^2\alpha+2\,\boldsymbol{s}_0\,\sin\alpha\,\cos\alpha+\boldsymbol{t}_0\,\sin^2\alpha+\rho\,\tau\ ;$$

per ogni $\alpha$ il valore assoluto dei primi tre addendi è maggiore del quarto, ossia

$$|\boldsymbol{r}_0\,\cos^2\alpha+2\,\boldsymbol{s}_0\,\sin\alpha\,\cos\alpha+\boldsymbol{t}_0\,\sin^2\alpha|\;\geq\;\mu\;>\;\rho\,M\;>\;\rho\,\tau\ .$$

Questo implica che $T'$ per ogni $\alpha$ ha lo stesso segno di $\mathsf{T}$, cioè ha lo stesso segno di $\boldsymbol{r}_0$.

Dunque per tutti i punti $\langle x_0+h,y_0+k\rangle$ interni al cerchio di centro in $\langle x_0,y_0\rangle$ e raggio $\rho$ minore di $\dfrac{\mu}{M}$ la differenza in esame

$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\;=\;\frac{1}{2}\,\rho^2\,T'$$

ha lo stesso segno di $\boldsymbol{r}_0$ (e di $\boldsymbol{t}_0$) e si può concludere.

**(4) Prop.:** Se nel punto $\mathsf{v}_0=\langle x_0,y_0\rangle$ si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{|\mathsf{v}_0}\;=\;0\ ,\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|\mathsf{v}_0}>0\qquad\text{e}\qquad\boldsymbol{r}_1\,\boldsymbol{t}_0>0\ :$$

quando $\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{t}_0>0$ la funzione $f(x,y)$ presenta un minimo locale;
quando $\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{t}_0<0$ la funzione $f(x,y)$ presenta un massimo locale ▮

**I29i.06** Veniamo alla situazione nella quale $\boldsymbol{r}_0\,\boldsymbol{t}_0-{\boldsymbol{s}_0}^2<0$ per la quale si parla di "caso iperbolico".

Se $\boldsymbol{s}_0-\boldsymbol{t}_0=0$ deve essere $\boldsymbol{s}_0\neq0$ e in tal caso $T'=2\,\boldsymbol{s}_0\,\sin\alpha\,\cos\alpha$ al variare di $\alpha$ assume valori di entrambi i segni. In tal caso, fissato $\alpha$, scegliamo $\rho$ tale che sia $\rho\,M<|2\,\boldsymbol{s}_0\,\sin\alpha\,\cos\alpha|$, scelta che implica che $T'\;=\;2\,\boldsymbol{s}_0\,\sin\alpha\,\cos\alpha+\rho\,\tau$ cambi di segno quando si passa da un angolo $\alpha$ al suo opposto. Quindi la differenza $\Delta f\;=\;\dfrac{1}{2}\,\rho^2\,T'$ in ogni intorno di $\langle x_0,y_0\rangle$ assume valori dei due diversi segni e questo punto-RR non può riguardare un estremante per la $f$.

Consideriamo poi il caso in cui almeno una delle quantità $\boldsymbol{r}_0$ e $\boldsymbol{t}_0$ sia diversa da 0; per esempio assumiamo $\boldsymbol{r}_0\neq0$.

Il trinomio $\mathsf{T}$ assume valori sia positivi che negativi: ad esempio per $\alpha=0$ o $\alpha=\pi$, in conseguenza della i05(2) $T'=\boldsymbol{r}_0$ e se si sceglie l'angolo $\alpha=\overline{\alpha}=\operatorname{arccot}-\dfrac{\boldsymbol{s}_0}{\boldsymbol{r}_0}$, che comporta $\boldsymbol{r}_0\,\cos\overline{\alpha}+\boldsymbol{s}_0\,\sin\overline{\alpha}=0$, si ottiene

$$\mathsf{T}\;=\;\frac{1}{\boldsymbol{r}_0}\,\left[(\boldsymbol{r}_0\,\boldsymbol{t}_0-{\boldsymbol{s}_0}^2)\sin^2\overline{\alpha}\right]\ ,$$

che, essendo $\boldsymbol{r}_0\,\boldsymbol{t}_0-{\boldsymbol{s}_0}^2<0$, assicura che $\mathsf{T}$ e $\boldsymbol{r}_0$ hanno segno opposto.

Dunque se assumiamo un $\rho$ che soddisfa entrambe le disuguaglianze

$$\rho\,M<|\boldsymbol{r}_0|\qquad\text{e}\qquad\rho\,M<\left|\frac{(\boldsymbol{r}_0\,\boldsymbol{t}_0-{\boldsymbol{s}_0}^2)\sin^2\overline{\alpha}}{\boldsymbol{r}_0}\right|$$

la differenza $\Delta f\;=\;f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ in ogni intorno di $\langle x_0,y_0\rangle$ assume entrambi i segni.

In conclusione se nel punto-RR $\mathsf{v}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ , allora

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{|\mathsf{v}_0} = 0 \ , \ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|\mathsf{v}_0} < 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{r}_1\, \boldsymbol{t}_0 < 0 \ ,$$

allora questo $\mathsf{v}$ non è un estremante della funzione $f(x, y)$.

**I29i.07** Esaminiamo per ultimo il caso nel quale $\boldsymbol{r}_0\, \boldsymbol{t}_0 - {\boldsymbol{s}_0}^2 = 0$, situazione per la quale si parla di "caso parabolico".

Supposto $\boldsymbol{r}_0 \neq 0$ (del tutto simile il caso $\boldsymbol{t}_0 \neq 0$) abbiamo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \ = \ \frac{\rho^2}{2\, \boldsymbol{r}_0} (\boldsymbol{r}_0 \cos\alpha + \boldsymbol{s}_0 \sin\alpha)^2 + \frac{1}{2} \tau \ .$$

Si osserva che in tal caso

$$|\mathsf{T}| \ = \ \left| \frac{1}{\boldsymbol{r}_0} (\boldsymbol{r}_0 \cos\alpha + \boldsymbol{s}_0 \sin\alpha)^2 \right|$$

e non si può riprendere l'argomentazione del caso iperbolico che si basava su un minimo di $|\mathsf{T}|$ positivo e può accadere che l'espressione $(\boldsymbol{r}_0 \cos\alpha + \boldsymbol{s}_0 \sin\alpha)^2 + \rho\, \tau$ presenti sempre lo stesso segno oppure cambi di segno. Questo caso parabolico quindi viene detto anche "caso ambiguo".'

Per decidere se in un punto $\mathsf{v}_0$ la $f(\mathsf{v})$ ha un estremante o meno vanno prese in considerazione anche le derivate terze e in alcuni casi le derivate degli ordini superiori.

In varie circostanze risulta utile esaminare l'intersezione della superficie rappresentata dalla $f$ con il suo piano orizzontale tangente in $\langle x_0, y_0, f(x_0, y+0) \rangle$. Se si trovasse questo solo punto di contatto si avrebbe un estremo, mentre se si trovasse una linea do contatto si avrebbe un estremo in senso lato.

**I29i.08** Le considerazioni dei paragrafi precedenti si possono estendere alla generica funzione-RdtR $f(x_1, x_2, ..., x_d)$ definita in una regione $D$ nella quale sia dotata di derivate continue di tutti gli ordini che si devono utilizzare e un punto $P_0 = \mathsf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_d \rangle$ interno al dominio $D$.

Condizione necessaria per avere un **estremo della funzione-RdtR** $f$ in $P_0$ è l'annullamento di tutte le sue derivate parziali del primo ordine in questo punto.

Per accertarsi di questo fatto occorre prendere in considerazione un punto variato rispetto a $P_0$ al quale diamo la forma $\mathsf{a} + \mathsf{h}$ con lo spostamento $\mathsf{h} = \langle h_1, h_2, ..., h_d \rangle$ (ipap) per poi esaminare la differenza

$$\Delta f \ := \ f(\mathsf{a} + \mathsf{h}) - f(\mathsf{a}) \ = \ f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_d + h_d) - f(a_1, a_2, ..., a_d)$$

Per questo, supposto che le derivate seconde non siano tutte nulle, si ricorre allo sviluppo di Taylor della $f$ interrotto alle derivate terze ottenendo

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_d + h_d) - f(a_1, a_2, ..., a_d) \ = \ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} k_i\, k_j + \frac{1}{3} \rho^3 \tau \ ,$$

dove $\rho := \sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2 + \cdots + {h_d}^2}$ , $\forall i = 1, 2, ..., d \ : \ k_i := h_i\, \rho$ e $\tau$ è una quantità che dipende dalle derivate della $f$ di ordine superiore al secondo e in tutto $D$ si mantiene inferiore a un reale $M$.

Procedendo nell'analisi si incontra una forma quadratica che può rivelarsi forma definita, forma indefinita oppure forma semidefinita.

Nel primo caso in $P_0$ si ha un estremo, nel secondo questo non si può verificare e nel terzo caso si ha una situazione ambigua che richiede ulteriori esami.

## I29 j. problemi risolvibili trovando massimi e minimi

**I29j.01** Presentiamo alcuni problemi che si possono risolvere con manovre ben definite che si basano sulla ricerca dei minimi o dei massimi di opportune funzioni.

Siano date due rette sghembe $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ attraverso le rispettive equazioni parametriche

$$(1)\qquad \boldsymbol{A}:\ \begin{cases} x = x_0 + a_x\, t \\ y = y_0 + a_y\, t \\ z = z_0 + a_z\, t \end{cases} \qquad \boldsymbol{B}:\ \begin{cases} \xi = \xi_0 + b_\xi\, u \\ \eta = \eta_0 + b_\eta\, u \\ \zeta = \zeta_0 + a_\zeta\, u \end{cases} .$$

Ricordiamo che $\mathsf{a} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle$ è il versore che munisce di una orientazione la retta $\boldsymbol{A}$ e le sue componenti sono i coseni direttori di tale retta, mentre $\mathsf{b} = \langle b_\xi, b_\eta, b_\zeta \rangle$ è il versore che munisce di una orientazione la retta $\boldsymbol{B}$ e le sue componenti sono i coseni della stessa $\boldsymbol{B}$; inoltre $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ rappresenta un punto arbitrario della $\boldsymbol{A}$ e $\langle \xi_0, \eta_0, \zeta_0 \rangle$ rappresenta un punto qualsiasi della $\boldsymbol{B}$.

Se con $d(t,u)$ denotiamo la distanza tra $P(t) \in \boldsymbol{A}$ e $Q(u) \in \boldsymbol{B}$ abbiamo

$$L(t,u) \ :=\ d^2 \ =\ (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 \qquad \text{ove} \ ,$$

$$x - \xi = a_x\, t - b_\xi\, u + (x_0 - \xi_0)\ ,\ y - \eta = a_y\, t - b_\eta\, u + (y_0 - \eta_0)\ ,\ z - \zeta = a_z\, t - b_\zeta\, u + (z_0 - \zeta_0)\ .$$

Si tratta di trovare il minimo della funzione-RRtR $L(t,u)$; consideriamo quindi le sue derivate parziali

$$(2)\quad \frac{\partial L}{\partial t} \ =\ 2\left[(x-\xi)a_x + (y-\eta)a_y + (z-\zeta)a_z\right] \ ,\quad \frac{\partial L}{\partial u} \ =\ -2\left[(x-\xi)b_\xi + (y-\eta)b_\eta + (z-\zeta)b_\zeta\right] \ .$$

Deve dunque essere soddisfatta la coppia di equazioni

$$(3)\qquad \begin{cases} (x-\xi)a_x + (y-\eta)a_y + (z-\zeta)a_z \ =\ 0 \\ (x-\xi)b_\xi + (y-\eta)b_\eta + (z-\zeta)b_\zeta \ =\ 0 \end{cases}$$

Si osserva che, essendo $x-\xi$, $y-\eta$ e $z-\zeta$ proporzionali, risp., ai coseni direttori del segmento orientato $\overrightarrow{QP}$, le due precedenti equazioni significativamente esprimono il fatto che il vettore applicato $\overrightarrow{QP}$ deve essere ortogonale a entrambe le rette $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$.

**I29j.02** Dalle definizioni seguono le uguaglianze

$$|\mathsf{a}|^2 \ =\ {a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2 = 1 \quad , \quad |\mathsf{b}|^2 \ =\ {b_\xi}^2 + {b_\eta}^2 + {b_\zeta}^2 = 1\ .$$

Introduciamo l'angolo tra le due rette in esame $\theta \ :=\ \widehat{\mathsf{a}\,\mathsf{b}}$ e per esso chiediamo sia $0 < \theta < \pi$; quindi in particolare che sia $\sin\theta \neq 0$, cioè che $ABi$ e $\boldsymbol{B}$ non siano parallele.

Le j01(3) equivalgono alle

$$(1)\qquad \begin{cases} (x_0-\xi_0)a_x + (y_0-\eta_0)a_y + (z_0-\zeta_0)a_z + t - u\,\cos\theta \ =\ 0 \\ (x_0-\xi_0)b_\xi + (y_0-\eta_0)b_\eta + (z_0-\zeta_0)b_\zeta + t\,\cos\theta - u \ =\ 0 \end{cases}$$

Questo è un sistema si equazioni lineari nelle incognite $t$ e $u$ avente come determinante

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & -\cos\theta \\ \cos\theta & -1 \end{vmatrix} \ =\ -1 + \cos^2\theta \ =\ -\sin^2\theta\ ;$$

quindi esso è in grado di portare a una sola coppia $\langle \overline{t}, \overline{u} \rangle$ che lo soddisfa.

Dalle (2) si ricavano le

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t^2} \ =\ 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial u} \ =\ -\cos\theta \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \ =\ 2$$

e quindi

$$(3) \qquad \boldsymbol{He}ß(\overline{t},\overline{u}) \;=\; \frac{\partial^2 L}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial t\,\partial u}\right]^2 \;=\; 4(1-\cos^2\theta) \;=\; 4\,\sin^2\theta > 0 \;.$$

Quindi la soluzione $\langle\overline{t},\overline{u}\rangle$ riguarda un minimo per la $L(t,u)$. Dalla definizione della $L$ evidentemente si tratta di un minimo assoluto.

**I29j.03** Per trovare l'espressione della distanza $d$ denotiamo con $\mathsf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ la terna dei coseni direttori del segmento $\overline{PQ}$ la cui orientazione fissiamo in modo che sia destrorsa la terna di versori $\langle\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}\rangle$.

Con questa scelta si hanno

$$(1) \qquad c_1 \;=\; \frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad,\quad c_2 \;=\; \frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \quad,\quad c_3 \;=\; \frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad .$$

Per i valori che corrispondono al minimo di $L = d^2$ si ha

$$\xi - x \;=\; d\,c_1 \quad,\quad \eta - y \;=\; d\,c_2 \quad,\quad z - \zeta \;=\; d\,c_3 \;.$$

Moltiplicando le tre differenze, risp., per $c_1$, $c_2$ e $c_3$ e sommando si ottiene

$$(\xi - x)c_1 + (\eta - y)c_2 + (\zeta - z)c_3 \;=\; d\,\left({c_1}^2 + {c_2}^2 + {c_3}^2\right) \;=\; d \quad .$$

Moltiplicando per $\sin\theta$ si giunge a

$$(2) \qquad d\,\sin\theta \;=\; (\xi - x)\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + +(\zeta - z)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \;.$$

Tenendo conto della j01(2) a questa si può dare la forma

$$(3) \qquad d\,\sin\theta \;=\; \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} \xi_0 - x_0 & \eta_0 - y_0 & \zeta_0 - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \;.$$

Si osserva che questa espressione fornisce una $d$ positiva in quanto la terna $\langle\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c}\rangle$ è stata scelta destrorsa, mentre se la terna fosse sinistrorsa darebbe una $d$ negativa.

**I29j.04** Affrontiamo il seguente problema di scomposizione di un numero reale positivo.

Dati un $r \in \mathbb{R}_+$, un intero $n = 3,4,...$, e una $n$-upla di reali positivi $\langle e_1, e_2, ..., e_n\rangle$, si chiede di individuare una scomposizione di $r$ in $n$ addendi, alla quale diamo la forma $r \;=\; x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; precisamente si chiede che la scomposizione renda massimo il prodotto degli $n$ addendi ciascuno elevato al corrispondenti $e_i$, cioè renda massima la funzione $n$-variata

$$(1) \qquad P \;=:\; {x_1}^{e_1}\,{x_2}^{e_2}\,\cdots\,{x_n}^{e_n} \;.$$

Eliminando $x_n$ si tratta di massimizzare la funzione in $n-1$ variabili

$$P\,(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \;=\; {x_1}^{e_1}\,{x_2}^{e_2}\,\cdots\,(r - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^{e_n} \;.$$

soggetta ai vincoli

$$\forall i = 1,2,...,n-1 \;\colon\; 0 < x_i < r \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} < r \;.$$

Risulta equivalente e più agevole massimizzare

$$(2) \qquad \ln P \;=\; e_1\,\ln x_1 + e_2\,\ln x_2 + \cdots + e_{n-1}\,\ln x_{n-1} + e_n\,\ln(r - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}) \;.$$

Quindi i punti estremanti di $P$ corrispondono alle $n-1$-uple $\langle x_1, x_2, ..., x_{n-1}\rangle$ che soddisfano il sistema di uguaglianze

$$\frac{e_1}{x_1} \;=\; \frac{e_2}{x_2} \;=\; \cdots \;=\; \frac{e_{n-1}}{x_{n-1}} \;=\; \frac{e_n}{r - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1}} \;. \tag{3}$$

Questo a sua volta equivale alle richieste

$$\forall i = 1, 2, ..., n \;:\; \frac{e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n}{r} \;=\; x_i. \tag{4}$$

Posto $E \;:=\; e_1 + e_2 + \cdots + e_{n-1} + e_n$ , abbiamo che $\forall i = 1, 2, ..., n \;\colon\; x_i \;=\; \dfrac{r}{E}$ e quindi il punto, unico, in cui la funzione $P(x_1, ..., x_n)$ presenta un estremo è

$$\left\langle \frac{r\,e_1}{E}, \frac{r\,e_2}{E}, ..., \frac{r\,e_{n-1}}{E}, \frac{r\,e_n}{E}, \left(\frac{r}{E}\right)^E \, {e_1}^{e_1}\, {e_2}^{e_2}\, {e_{n-1}}^{e_{n-1}}\, {e_n}^{e_n} \right\rangle \;. \tag{5}$$

Questo estremo deve essere un massimo, in quanto la $P$ assume valori nonnegativi in tutto il suo dominio $n$-dimensionale $\mathbb{R}_{0+}^{\times n}$ e si annulla nei punti della sua frontiera caratterizzata dall'annullarsi di almeno una delle variabili $x_i$.
Queste sue proprietà implicano che esiste un punto interno al suo dominio in cui la $P$ presenta un massimo e, come abbiamo visto, questo è unico.

In termini più discorsivi possiamo dire che il massimo della $P$ corrisponde alla scomposizione di $r$ nella quale gli addendi (basi) sono proporzionali ai rispettivi esponenti.

## I29 k. metodo dei minimi quadrati

**I29k.01** Nella gestione dei dati sperimentali, dati soggetti a errori di misurazione , si presenta spesso il problema di valutare quantità incognite $x_1$, $x_2$, ..., $x_d$ che soddisfano a equazioni lineari i cui coefficienti sono determinate da osservazioni dirette.
Si suppone che $d$ di queste equazioni bastino a determinare le incognite.

Per limitare l'incidenza degli errori che sono ritenuti casuali, cioè dovuti a cause imprecisate che si ha ragione di pensare che nelle diverse osservazioni si compensino, si ricorre a numerose osservazioni.

In tal modo si è condotti a sistemi di equazioni della forma

$$(1) \qquad U_i \;=\; a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{im}\,x_m - k_i = 0 \qquad \text{per} \quad i = 1,2,...,m\ ,$$

con il numero delle equazioni $m$ maggiore del numero $d$ delle incognite.

Per questo sistema, impossibile da risolvere esattamente se non in sporadiche situazioni, si pone il problema di determinare valori delle $d$ incognite che possano essere considerati i più probabili.

Ciascuna delle equazioni, diciamo la $i$-esima, corrisponde a una serie di osservazioni per la quale si valuta un errore dato da

$$(2) \qquad \epsilon_i \;=\; a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{im}\,x_m - k_i\ .$$

Un complesso di considerazioni probabilistiche che risalgono a Gauss inducono a scegliere le incognite che rendono minima la somma dei quadrati degli errori $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} {\epsilon_j}^2$ .

Si tratta quindi di trovare la $d$-upla delle variabili $\mathbf{x} \;=\langle x_1, x_2, ..., x_d\rangle$ che renda minimo il valore dalla funzione-RdtR

$$(3) \qquad f(x_1, x_2, ..., x_d) \;:=\; \sum_{j=1}^{m}(a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{im}\,x_m - k_i)^2\ .$$

La $d$-upla incognita deve soddisfare le equazioni che esprimono l'annullamento delle derivate parziali della $f$, cioè delle

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial\, x_r} \;=\; 2\sum_{j=1}^{m}(a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{im}\,x_m - k_i)\,a_{jr} \;=\; 0 \quad \text{per} \quad r = 1,2,...,d\ .$$

Questo sistema lineare, se il suo determinante risulta diverso da 0 (cosa assai probabile data la origine sperimentale dei coefficienti) determina univocamente le $d$ incognite $x_1$, $x_2$, ..., $x_1$.

**I29k.02** Si consideri un esempio riguardante tre incognte $x$, $y$ e $z$ e le $m(> 3$ equazioni

$$a_i\,x + b_i\,y + c_i\,z - k_i \;=\; 0 \qquad \text{per} \;\; 1 = 1,2,3,..,m\ .$$

A questo punto conviene introdurre notazioni vettoriali per le $m$-uple in gioco $\mathbf{a} :=\langle a_1, a_2, ..., a_m\rangle$, $\mathbf{b} :=\langle b_1, b_2, ..., b_m\rangle$, $\mathbf{c} :=\langle c_1, c_2, ..., c_m\rangle$ e $\mathbf{k} :=\langle k_1, k_2, ..., k_m\rangle$. Infatti esse permettono di trattare espressioni relativamente concise come le seguenti:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \;=\; \sum_{j=1}^{m}{a_j}^2 \quad , \quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \;=\; \sum_{j=1}^{m}a_j\,b_j \quad \text{e} \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \;=\sum_{j=1}^{m}{b_j}^2\ .$$

Con queste le equazioni k01(4) diventano

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\,x + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,y + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,y &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\,x + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\,y + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\,y &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\,x + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\,y + \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}\,y &= \mathbf{c}\cdot\mathbf{k} \end{cases} ,$$

equazioni che, escluse particolari situazioni, permettono di individuare univocamente $x$, $y$ e $z$.

**I29k.03** Consideriamo il caso particolare $d = 1$, cioè il problema di determinare $x$ a partire dalle equazioni $x = k_i$ per $i = 1, 2, ..., m$.

Si tratta di rendere minima la somma

$$(x - k_1)^2 + (x - k_2)^2 + \cdots + (x - k_m)^2 \ .$$

Questo porta alla equazione $x - k_1 + x - k_2 + ... + x - k_m \ = \ 0$ e quindi alla

$$x \ = \ \frac{k_1 + k_2 + \cdots + k_m}{m} \ ,$$

cioè alla indicazione della media aritmetica dei valori misurati come costruzione del valore più probabile per la grandezza da determinare attraverso osservazioni.

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php