1

Capitolo I26
integrali impropri

Contenuti delle sezioni

24 pagine

I260.01 In questo capitolo si estendono i meccanismi del calcolo integrale secondo Riemann per le funzioni-RtR introducendo i cosiddetti integrali impropri o generalizzati.

Cominciamo con il ricordare che, data una funzione-RtR $f(x)$, ogni numero reale appartenente alla aderenza di $\mathsf{dom}(f)$ in un intorno del quale la funzione non è limitata viene chiamato **singolarità della funzione**.

Chiamiamo **ascissa anomala** per la $f(x)$ una estremità del suo dominio che può essere $-\infty$, oppure $+\infty$, oppure una singolarità della funzione.

Consideriamo un intervallo in $\overline{\mathbb{R}}$ $\overline{I} :=$ [a,b], una funzione $f(x)$ definita e tendenzialmente regolare in $\overline{I}$ e un'espressione della forma

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \tag{0}$$

L'espressione precedente viene chiamata **integrale improprio** per la $f(x)$ sse si verifica una delle condizioni che seguono.

(1) La $f(x)$ nel suo dominio è limitata in ogni intervallo chiuso e limitato del suo dominio, ma $a = -\infty$, oppure $b = +\infty$, oppure si hanno sia $a = -\infty$ che $b = +\infty$.

(2) a e b sono finiti e la $f(x)$ è limitata in ogni sottointervallo chiuso di (a,b), mentre risulta illimitata in un intorno destro di a e/o in un intorno sinistro di b.

(3) La funzione in [a,b] presenta una o più ascisse anomale.

(4) La funzione è definita in un intervallo $(-\infty, a)$ con a ascissa anomale o in un intervallo $(b, +\infty)$ con b ascissa anomala.

I260.02 Come vedremo, è assai utile attribuire un valore reale o un valore $\pm\infty$ a molte delle espressioni della forma (0). In particolare le attribuzioni di valori finiti a taluni integrali impropri consentono di attribuire aree finite a figure piane illimitate.

Si segnala che vari integrali impropri di funzioni-RtR consentono di individuare interessanti costanti reali.

Risulta inoltre di grande utilità attribuire un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ ad integrali impropri con funzioni integrande dipendenti da uno o più parametri reali (o complessi), espressioni che rappresentiamo con una scrittura della forma $\int_a^b dx\ f(x, \mathsf{v})$, intendendo che v rappresenti uno o più parametri reali.

Vari tipi di integrazioni improprie sulla variabile x applicati a funzioni rappresentabili con espressioni dl tipo $f(x, \mathsf{v})$ sufficientemente maneggevoli, consentono di definire nuove funzioni speciali in una o più variabili reali (e complesse) rappresentate da V estendendo significativamente le possibilità consentite agli integrali propri rappresentabili con espressioni dello stesso tipo $f(x, \mathsf{v})$.

Nel presente capitolo viene anche introdotta l'attribuzione a taluni integrali impropri di un'altra valutazione spesso utile, il cosiddetto valore principale secondo Cauchy [:g].

Sono infine esaminati i collegamenti tra integrali generalizzati e serie di numeri reali, in particolare presentando le analogie tra le questioni di convergenza che si pongono per entrambi questi tipi di costruzioni.

I26 a. motivazioni per gli integrali impropri

I26a.01 Gli integrali alla Riemann di funzioni-RtR, costruzioni che in questo capitolo chiameremo anche **integrali propri**, consentono di assegnare un'area ai trapezoidi definiti in precedenza, che qui chiameremo anche **trapezoidi propri**, cioè da figure piane limitate delimitate da segmenti finiti orizzontali e verticali e dal grafico di una funzione-RtR limitata; inoltre gli integrali propri consentono di assegnare un'area a figure piane decomponibili mediante trapezoidi propri.

Introduciamo il termine **trapezoide illimitato**, o l'equivalente **trapezoide improprio** per denotare una figura piana delimitata da porzioni di linee rette orizzontali e verticali e dal grafico di una funzione, continua a pezzi ma illimitata.

Gli integrali impropri di funzioni-RtR si possono vedere come meccanismi che estendono la portata degli integrali propri: essi infatti cercano di assegnare un'area a figure piane illimitate che possono essere trapezoidi impropri o figure decomponibili in più trapezoidi taluni dei quali impropri.

Più dettagliatamente: chiamiamo trapezoide improprio del primo genere una figura piana delimitata da una semiretta H facente parte dell'asse Ox, da un segmento verticale ν, e dal grafico (illimitato) di una funzione definita per ogni punto della semiretta H.

Chiamiamo invece trapezoide improprio del secondo genere una figura piana delimitata da una semiretta V parallela all'asse Oy, da un segmento (orizzontale) σ appartenente all'asse Ox e dal grafico (illimitato) di una funzione che ha come dominio σ e come codominio V.

Si osserva che gli integrali impropri e i relativi trapezoidi illimitati dei generi primo e secondo si scambiano in seguito allo scambio delle coordinate x e y.

Talora si dice trapezoide improprio del terzo genere una figura piana decomponibile mediante due o più figure che possono essere trapezoidi illimitati del primo e del secondo genere e trapezoidi propri.

Comprensivamente chiameremo **trapezoide generalizzato** una figura piana che può essere un trapezoide proprio o un trapezoide improprio.

I26a.02 L'estensione degli integrali propri ottenuta con gli integrali impropri vuole mantenere importanti proprietà di questi ultimi in modo da costituire un complesso di strumenti di valutazione applicabili coerentemente ad una gamma più ampia di funzioni-RtR oppure di figure piane.

Dunque questa estensione vuole essere considerata una generalizzazione: in effetti gli integrali impropri talora sono chiamati anche **integrali alla Riemann generalizzati**, termine più adeguato di quello più tradizionale di integrali impropri.

Dunque alle definizioni degli integrali impropri si chiede fondamentalmente di mantenere il più possibile le proprietà degli integrali propri che seguono.

(1) Mantenere l'additività sugli intervalli, ovvero estendere l'additività a figure decomponibili in trapezoidi propri ed impropri al fine di fornire una loro area esprimibile come somma delle aree dei trapezoidi generalizzati componenti.

(2) Poter considerare anche gli integrali impropri come operatori lineari nelle funzioni integrande.

(3) Poter ottenere gli integrali impropri come limiti di integrali propri.

(4) Mantenere l'invarianza delle aree fornite in seguito a traslazione e comportare il cambiamento di segno delle aree fornite in seguito a riflessione rispetto a rette orizzontali e verticali e per scambio delle coordinate x e y; si osserva che questa richiesta equivale alla richiesta di mantenere l'invarianza

delle aree fornite in seguito a traslazione e comportare il cambiamento di segno delle aree fornite in seguito a riflessione rispetto a rette parallele agli assi di riferimento e alle diagonali.

Va osservato che le precedenti proprietà di genere conservativo sono coerenti: in particolare dalla (1) e dalla additività del limite delle funzioni integrali definiti si può ricavare (3).

I26a.03 Si osserva che per la funzione-RtR $f(x)$ un valore dell'ascissa x_0 appartenente all'aderenza di $\mathsf{dom}(f)$ è **ascissa singolare** sse nei punti x appartenenti sia a $\mathsf{dom}(f)$ che a un intorno di x_0 la funzione non è limitata.
Esempi: la funzione $\dfrac{1}{x}$ ha come ascissa singolare $x = 0$; per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$ la funzione $\dfrac{1}{(x-a)^k}$ per ogni $k \in \mathbb{P}$ ha come ascissa singolare $x = a$; la funzione $\tan x$ ha punti singolari per tutte le ascisse appartenenti a $\left\{k \in \mathbb{Z} :| \ \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi\right\}$.

I26a.04 I trapezoidi generalizzati che hanno come punti di frontiera punti del grafico di una funzione-RtR $f(x)$ e i relativi integrali impropri della forma $\displaystyle\int_a^b dx\ \ f(x)$ conviene ripartirli in tre generi.

Si hanno trapezoidi e integrali del primo genere quando la $f(x)$ è limitata, ma $a = -\infty$, oppure $b = +\infty$.

Si definiscono trapezoidi e integrali del secondo genere quando a e b sono finiti, ma la $f(x)$ non è limitata in corrispondenza di almeno una delle estremità di $x \in$ [a,b].

Si dicono invece trapezoidi e integrali impropri del terzo genere quelli che si possono decomporre come somma di un numero finito di integrali del primo e/o del secondo genere.

Sono quindi trapezoidi e integrali del terzo genere: (1) i trapezoidi e gli integrali aventi una estemità in $\pm\infty$ e l'altra come ascissa singolare; (2) i trapezoidi e gli integrali aventi una estremità in $-\infty$ e l'altra in $+\infty$.

Esempi di integrali impropri del primo genere :

$$\int_{-\infty}^{0} dx\ \frac{1}{1-x} \qquad , \qquad \int_0^{+\infty} dx\ \ \sin x^2 \ .$$

Esempi di integrali impropri del secondo genere :

$$\int_0^{\pi/2} dx\ \ \tan x \qquad , \qquad \int_0^3 dx\ \frac{1}{3-x} \qquad , \qquad \int_0^1 dx\ \ \ln x \ .$$

Esempi di integrali impropri del terzo genere :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\ \ \mathsf{e}^{-x^2} \qquad , \qquad \int_0^4 dx\ \frac{1}{(3-x)^2} \qquad , \qquad \int_0^6 dx\ \sqrt{x-1}\,\sqrt{5-x}\,\frac{10\,x+1}{x-2}\,\frac{\sin\,\pi\,x}{x-3}\,\frac{\ln\,x}{x-4} \ .$$

I26 b. integrali su un intervallo illimitato

I26b.01 Consideriamo un qualsiasi $a \in \mathbb{R}$ e una funzione $f(x) \in \lceil [a,+\infty) \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ integrabile in ogni intervallo $[a,c]$ per $c \in (a,+\infty)$.

Introduciamo inoltre $I_{a,+}(c) \ := \displaystyle\int_a^c dx\ f(x)$.

La funzione $f(x)$ si dice **funzione integrabile in senso improprio** sull'intervallo illimitato a destra $[a,+\infty)$ sse esiste finito $\lim_{c\to+\infty} I_{a,+}(c)$; tale limite si dice **integrale generalizzato della funzione** $f(x)$ su $[a,+\infty)$ e si scrive

(1) $$\int_a^{+\infty} dx\ f(x) \ := \lim_{c\to+\infty} \int_a^c dx\ f(x) \quad .$$

I26b.02 La definizione duale-LR riguarda gli integrali impropri su intervalli illimitati a sinistra.
Consideriamo un qualsiasi $c \in \mathbb{R}$ e una funzione $f(x) \in \lceil (-\infty,c] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ integrabile in ogni intervallo $[a,c]$ per $a \in (-\infty,c)$.

Introduciamo inoltre $I_{-,c}(a) \ := \displaystyle\int_a^c dx\ f(x)$.

La funzione $f(x)$ si dice **funzione integrabile in senso improprio** sull'intervallo $(-\infty,c]$ sse esiste finito $\lim_{a\to-\infty} I_{-,c}(a)$; tale limite si dice **integrale generalizzato della funzione** $f(x)$ su $(-\infty,c]$ e si scrive

(1) $$\int_{-\infty}^{c} dx\ f(x) \ := \lim_{a\to-\infty} \int_a^c dx\ f(x) \quad .$$

I26b.03 La finitezza degli integrali impropri in esame può essere garantita da un criterio alla Cauchy che dimostriamo per intervalli di integrazione illimitati a destra.

(1) Prop.: L'integrale improprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} dx\ f(x)$, con $f(x) \in \mathsf{Intgbl}_{[a,c]}$ per ogni $c \in (a,+\infty)$, esiste finito sse è soddisfatta la seguente condizione

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}_+ \ :\ \exists c_\epsilon \in (a,+\infty) \ ⫯\ \forall c' \in (c_\epsilon,+\infty)\ ,\ c'' \in (c',+\infty) \ :\ \left| \int_{c'}^{c''} dx\ f(x) \right| < \epsilon\ .$$

Dim.: Consideriamo la funzione

$$F(\xi) \ := \ \left\lceil\ \xi \in (a,+\infty) \mapsto \int_a^\xi dx\ f(x)\ \right\rceil \ .$$

La finitezza dell'integrale dato equivale all'esistenza e finitezza del limite $\lim_{\xi\to+\infty} F(\xi)$ e questa a sua volta equivale al soddisfacimento della condizione di Cauchy

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}_+ \ :\ \exists c \in (a,+\infty) \ ⫯\ \forall c' \in (c,+\infty)\ ,\ c'' \in (c',+\infty) :\ |F(c'') - F(c')| < \epsilon\ .$$

Dato che $F(c'') - F(c') \ = \displaystyle\int_{c'}^{c''} dx\ f(x)$, abbiamo l'equivalenza enunciata ▮

Per dualità-LR si ottiene il criterio per gli integrali impropri sopra un intevallo illimitato a sinistra.

(2) Prop.: L'integrale improprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} dx\ f(x)$, con $f(x) \in \mathsf{Intgbl}_{[c,a]}$ per ogni $c \in (-\infty,a)$, esiste finito sse è soddisfatta la seguente condizione

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R}_+ \ :\ \exists c_\epsilon \in (-\infty,a) \ ⫯\ \forall c'' \in (-\infty,c_\epsilon)\ ,\ c' \in (-\infty,c'') \ :\ \left| \int_{c'}^{c''} dx\ f(x) \right| < \epsilon ▮$$

I26b.04 L'additività sugli intervalli vale anche per gli integrali di funzioni integrabili su intervalli illimitati.

(1) Prop.: Se la funzione $f(x)$ è integrabile sull'intervallo $[a,+\infty)$, quale che sia $b \in (a,+\infty)$ si ha

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_b^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)\ .$$

Dim.: Le ipotesi garantiscono la validità di tutte le uguaglianze della catena che segue.

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \lim_{c\to-\infty} \int_a^c \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \lim_{c\to-\infty} \left[\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_b^c \mathrm{d}x\ f(x)\right]$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \lim_{c\to-\infty} \int_b^c \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_b^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ ∎$$

Per dualità-LR si ottiene anche l'enunciato che segue.

(2) Prop.: Se la funzione $f(x)$ è integrabile sull'intervallo $(-\infty,b]$, quale che sia $a \in (-\infty,b)$ si ha

$$\int_{-\infty}^b \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \int_{-\infty}^a \mathrm{d}x\ f(x) + \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \ ∎$$

A questo punto si può enunciare che l'additività sugli intervalli vale anche per gli intervalli illimitati, naturalmente a condizione che la funzione integranda sia integrabile negli intervalli coinvolti.

(3) Prop.: $\forall a \in [-\infty,+\infty)\ ,\ c \in (a,+\infty]\ ,\ b \in (a,c)\ , f(x) \in \mathsf{Intgbl}_{[a,c]}$:

$$\int_a^c \mathrm{d}x\ f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_b^c \mathrm{d}x\ f(x)\ ∎$$

I26b.05 Le proprietà precedenti si possono qualificare come "dimostrate come conservazioni di proprietà di operazioni di passaggio al limite". Con procedimenti dimostrativi analoghi al precedente si dimostrano varie altre proprietà che consentono di servirsi di integrali impropri in modi non dissimili da quelli utilizzabili per gli integrali propri.

Si dimostrano in particolare proprietà di additività sugli intervalli concernenti integrali impropri divergenti.

(1) Prop.: Se la funzione $f(x)$ è integrabile sull'intervallo $[a,+\infty)$, b è un qualsiasi reale in $(a,+\infty)$ c è un qualsiasi reale in $(b,+\infty)$ e si ha l'integrale divergente $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ +\infty$, allora

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \int_c^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = +\infty\ ∎$$

Per dualità-LR risulta assicurata anche la proprietà che corrisponde alla precedente ma riguardai intervalli $(-\infty,c]$.

Per dualità-UD si ottengono senza difficoltà anche le proprietà analoghe alle precedenti ma riguardanti integrali impropri divergenti a $-\infty$.

I26b.06 Conviene introdurre a questo punto anche gli integrali impropri sull'intera retta reale, entità che secondo le definizioni in a04 sono da considerare integrali impropri del terzo genere.

Consideriamo una funzione $f(x) \in \lceil \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ integrabile in ogni intervallo finito. Per un qualche $b \in \mathbb{R}$, per un qualsiasi $a \in (-\infty,b)$ e per un qualsiasi $c \in [b,+\infty)$ scriviamo

$$I_{-,b}(a) := \int_a^b \mathrm{d}x\; f(x) \qquad \text{e} \qquad I_{b,+}(c) := \int_b^c \mathrm{d}x\; f(x)\ .$$

La funzione $f(x)$ si dice **integrabile in senso improprio** sull'intero insieme $\mathbb{R}$, ovvero sull'intera retta reale, sse esistono finiti $\lim_{a\to-\infty} I_{-,b}(a)$ e $\lim_{c\to+\infty} I_{b,+}(c)$; la somma di tali limiti si dice **integrale generalizzato** della $f(x)$ su $[-\infty,+\infty]$ e per esso si scrive

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\; f(x) := \lim_{a\to-\infty}\int_a^b \mathrm{d}x\; f(x) + \lim_{c\to+\infty}\int_b^c \mathrm{d}x\; f(x)\ .$$

L'additività sugli intervalli degli integrali propri [b04,b05] garantisce che il numero reale espresso dal primo membro sia indipendente dalla scelta dell'ascissa b.

I26b.07 Esempi Vediamo alcuni importanti integrali impropri sull'intero $\mathbb{R}$.

Da considerazioni sulla velocità di decrescita dell'integrando si vede che la funzione $\dfrac{1}{1+x^2}$ è integrabile su ogni intervallo reale e anche sopra l'intera retta reale.

Più in generale consideriamo due reali positivi a e b e sviluppiamo il seguente integrale improprio di prima specie.

$$\int_0^M \frac{\mathrm{d}x}{a^2+b^2\,x^2} = \left[\frac{1}{a\,b}\arctan\frac{b\,x}{a}\right]_0^M = \frac{1}{a\,b}\arctan\frac{b\,M}{a}\ ;$$

quindi, dato che $\lim_{M\to+\infty}\arctan\dfrac{b\,M}{a} = \dfrac{\pi}{2}$ e dato che la funzione integranda è pari si ottiene

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\frac{1}{a^2+b^2\,x^2} = \frac{\pi}{a\,b}\ .$$

Anche la funzione e^{-x^2} è integrabile su ogni intervallo reale e per il corrispondente integrale improprio si trova

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\; \mathsf{e}^{-x^2} = \sqrt{\pi}\ .$$

Ricordiamo che per ogni $a,b\in\mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^M \mathrm{d}x\; \mathsf{e}^{-ax}\cos bx &= \left[\mathsf{e}^{-a\,x}\,\frac{-a\cos b\,x + b\sin b\,x}{a^2+b^2}\right]_0^M \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\mathsf{e}^{-M\,a}\,(-a\cos b\,x + b\sin M\,b) + a\right]\end{aligned}\ .$$

Quando $a>0$, essendo $(-a\cos b\,x + b\sin M\,b)$ indipendente da M, si ottiene

$$\lim_{M\to+\infty}\left[\mathsf{e}^{-M\,a}\,(-a\cos b\,x + b\sin M\,b)\right] = 0$$

e di conseguenza

(3) $$\forall a\in\mathbb{R}_+ \;:\; \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\;\; \mathsf{e}^{-a\,x}\cos b\,x = \frac{a}{a^2+b^2}\ .$$

Similmente dalla formula

$$\begin{aligned}\int_0^M \mathrm{d}x\; \mathsf{e}^{-ax}\sin b\,x &= \left[\mathsf{e}^{-a\,x}\,\frac{-a\sin b\,x - b\cos b\,x}{a^2+b^2}\right]_0^M \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\mathsf{e}^{-M\,a}(-a\cos b\,x + b\sin M\,b) + b\right]\end{aligned}\ ,$$

si ricava

$$(4) \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+ \ \vdots \ \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \ \ \mathsf{e}^{-a\,x} \sin b\,x \ = \ \frac{b}{a^2+b^2} \ .$$

I26b.08 Possiamo dire qualcosa anche per gli integrali impropri del primo genere divergenti; per questo ci serviamo ancora delle notazioni all'inizio di b05.
Introduciamo inoltre i seguenti integrali impropri:

$$\mathcal{I}_{ib} \ := \int_{-\infty}^{b} \mathrm{d}x \ f(x) \quad , \quad \mathcal{I}_{bi} \ := \int_{b}^{+\infty} \mathrm{d}x \ f(x) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_{ii} \ := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \ f(x) \ .$$

(1) Prop.: Se $\mathcal{I}_{ib} = +\infty$ e $\mathcal{I}_{bi} \leq +\infty$ oppure se $\mathcal{I}_{ib} \leq +\infty$ e $\mathcal{I}_{bi} = +\infty$, allora $\mathcal{I}_{ii}$ diverge a $+\infty$ ▮

Vale inoltre la proprietà ottenuta dalla precedente per dualità-UD.

(2) Prop.: Se $\mathcal{I}_{ib} = -\infty$ e $\mathcal{I}_{bi} \geq -\infty$ oppure $\mathcal{I}_{ib} \geq -\infty$ e $\mathcal{I}_{bi} = -\infty$, allora $\mathcal{I}_{ii}$ diverge a $-\infty$ ▮

Se invece accade che $\mathcal{I}_{ib} = -\infty$ e $\mathcal{I}_{bi} = +\infty$ oppure che $\mathcal{I}_{ib} = +\infty$ e $\mathcal{I}_{bi} = -\infty$, oppure che almeno uno tra $\mathcal{I}_{ib}$ ed $\mathcal{I}_{bi}$ è indeterminato, allora l'integrale sull'intero $\mathbb{R}$ non fornisce alcun elemento di $\overline{\mathbb{R}}$, ossia è indeterminato.

Occorre tuttavia segnalare che è possibile cercare di ottenere valutazioni quantitative anche per queste situazioni; questo viene discusso in :g .

I26b.09 **Esempi** Si dimostra anche che gli operatori che applicati a funzioni-RtR integrabili forniscono i loro integrali su intervalli finiti o illimitati godono della proprietà della linearità, ovvero sono dei funzionali lineari. In formula:

$$\forall a \in [-\infty, +\infty) \ , \ c \in (a, +\infty] \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ , \ f(x), g(x) \in \mathsf{Intgbl}_{a,c} \ \vdots$$
$$\int_a^c \mathrm{d}x \ \left(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\right) \ = \ \alpha \int_a^c \mathrm{d}x \ f(x) + \beta \int_a^c \mathrm{d}x \ g(x)) \ .$$

I26b.10 **(1) Esempio** Consideriamo la funzione $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, $d \in (1, +\infty)$ e l'integrale

$$\mathcal{I}_{f_\alpha}(d) \ := \int_1^d \mathrm{d}x \ x^{-\alpha} \ = \ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right] \ = \ \frac{1}{1-\alpha}\left(d^{1-\alpha}-1\right) \quad \text{sse} \quad \alpha \neq 1$$
$$= \ \ln d \qquad \text{sse} \quad \alpha = 1 \ .$$

Si constata che $\displaystyle\lim_{d \to +\infty} \mathcal{I}_{f_\alpha(d)} \ = \ \frac{1}{\alpha-1}$ sse $\alpha > 1$ $\quad = +\infty$ sse $\alpha \leq 1$.
Quindi la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $[1, +\infty)$ sse $\alpha > 1$ e si ha

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \ x^{-\alpha} \ = \ \frac{1}{\alpha-1} \ ;$$

viceversa la $x^{-\alpha}$ non è integrabile sse $\alpha \leq 1$.

(2) Esempio Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ si ha $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x \ \mathsf{e}^{-x} \ = \ \left[-\mathsf{e}^{-x}\right]_a^b \ = \ \mathsf{e}^{-a} - \mathsf{e}^{-b}$; quindi passando al limite per $b \to +\infty$ si ottiene

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \ \mathsf{e}^{-x} \ = \ \mathsf{e}^{-a} \ .$$

(3) Esempio Cerchiamo l'integrale sull'intero $\mathbb{R}$ della funzione $\dfrac{1}{1+x^2}$.

$\int_a^c \mathrm{d}x\ \frac{1}{1+x^2} = [\arctan x]_a^b$ e passando al limite per $a \to -\infty$ e $c \to +\infty$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \frac{1}{1+x^2} \ = \ -\lim_{a\to-\infty} \arctan a + \lim_{c\to+\infty} \arctan c \ = \ -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \ = \ \pi\ .$$

I26 c. integrali di funzioni con un punto singolare

I26c.01 Consideriamo un intervallo aperto-chiuso (a,b] e una funzione-RtR del genere $\lceil$ (a,b] $\longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che sia integrabile sull'intervallo $[a+\delta, b]$ per ogni $\delta \in (0, b-a]$; equivalentemente si chiede che per ogni $\delta \in (0, b-a]$ esista finito $\mathcal{I}(\delta) \ := \int_{a+\delta}^{b} \mathrm{d}x \ f(x)$.

Se esiste finito $\lim_{\delta \to 0+} \mathcal{I}(\delta)$ la funzione $f(x)$ si dice **integrabile in senso improprio** su [a,b], il suddetto limite si dice **integrale improprio** della $f(x)$ su [a,b] e la sua definizione si scrive

(1) $$\int_a^b \mathrm{d}x \ f(x) \ := \lim_{\delta \to 0+} \int_{a+\delta}^{b} \mathrm{d}x \ f(x) \quad .$$

Questa situazione si caratterizza anche dicendo che $\int_a^b \mathrm{d}x \ f(x)$ è un **integrale improprio convergente**.

Se invece $\lim_{\delta \to 0+} I(\delta) \ = \ \pm\infty$ si dice che si ha a che fare con un **integrale improprio divergente**; per caratterizzare queste situazioni si scrive $\int_a^b \mathrm{d}x \ f(x) \ = \ \pm\infty$.

Se infine il limite in esame non esiste, si dice che l'integrale $\int_a^b \mathrm{d}x \ f(x)$ è indeterminato.

Anche per ciascuna di queste costruzioni si usa anche il termine integrale generalizzato come equivalente di "integrale improprio".

I26c.02 **Esempio** Consideriamo la funzione $f(x) := x^{-\alpha}$ per $\alpha \in [0,1]$ e il suo integrale su $(0,1]$,

$$I(\delta) \ := \int_\delta^1 \mathrm{d}x \ x^{-\alpha} \ = \ \frac{1-\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ \text{ sse } \ \alpha \neq 1 \qquad -\ln\delta \ \text{ sse } \ \alpha = 1 \ .$$

Quindi se $0 \le \alpha < 1$ la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $[0,a]$ e si ha

(1) $$\int_0^1 \mathrm{d}x \ x^{-\alpha} \ = \ \frac{1}{1-\alpha} \quad \text{ sse } \quad \alpha < 1 \ ;$$

mentre per $\alpha = 1$ il corrisponente integrale diverge a $+\infty$.

I26c.03 La definizione di integrale improprio si trasforma facilmente per dualità-LR in costruzione per funzioni del genere $\lceil$ [a,b) $\longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che siano integrabili sull'intervallo $[a, b-\delta]$ per ogni $\delta \in (0, b-a]$.

Se esiste finito $\lim_{\delta \to 0+} I(\delta)$ la funzione $f(x)$ si dice **integrabile in senso improprio** su [a,b] e il suddetto limite si dice **integrale improprio** della $f(x)$ su [a,b] e si scrive

(1) $$\int_a^b \mathrm{d}x \ f(x) \ := \lim_{\delta \to 0+} \int_a^{b-\delta} \mathrm{d}x \ f(x) \quad .$$

Se invece il suddetto limite conduce a $\pm\infty$ si parla di integrale divergente e se il limite non esiste si parla di integrale indeterminato.

I26c.04 **Esempio** Esaminiamo la possibilità di valutare

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \qquad \text{per } \alpha \text{ variabile in } [1, +\infty),$$

dopo aver visto che per $0 < \alpha < 1$ si hanno integrali propri.

Se $\alpha = 1$ l'integrale diverge:

$$\lim_{\delta\to 0+}\int_a^{b-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{b-x} \;=\; \lim_{\delta\to 0+}\left[-\ln(b-x)\right]_a^{b-\delta} \;=\; \lim_{\delta\to 0+}(-\ln\delta) \;=\; +\infty\ .$$

Per $\alpha>1$ si ha

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \;=\; \lim_{\delta\to 0}\left[\frac{-(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^{b-\delta} \;=\; \frac{1}{1-\alpha}\left[-\delta^{1-\alpha}+(b-a)^{1-\alpha}\right]\ .$$

Di conseguenza, se consideriamo anche i casi $\alpha\le 0$, relativi a integrali propri,

$$(1)\qquad \int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^\alpha} \;=\; \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\delta\to 0+}\left[-\delta^{1-\alpha}+(b-a)^{1-\alpha}\right] \;=\; \begin{cases} +\infty & \text{se }\ \alpha\ge 1\\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se }\ 0<\alpha<1\end{cases}\ .$$

Conclusioni analoghe si ottengono per dualità-LR sopra l'integrale $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^\alpha}$: esso converge per $\alpha<1$ e diverge per $\alpha\ge 1$.

I26c.05 La finitezza degli integrali impropri di secondo genere può essere garantita da un criterio alla Cauchy che dimostriamo per intervalli di integrazione aperti-chiusi.

(1) Prop.: L'integrale improprio $\displaystyle\int_a^c \mathrm{d}x\ f(x)$, con $f(x)\in\mathsf{Intgbl}_{[a+\delta,c]}$ per ogni $\delta\in(0,c-a)$, esiste finito sse è soddisfatta la seguente condizione

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+\ :\ \exists b_\epsilon\in(a,c)\ ¶\ \forall b''\in(a,b_\epsilon)\ ,\ b'\in(a,b'')\ :\ \left|\int_{b'}^{b''}\mathrm{d}x\ f(x)\right|<\epsilon\ .$$

Dim.: Consideriamo la funzione

$$F(x)\ :=\ \left\lceil\, x\in(a,c)\ \mapsto\ \int_x^c \mathrm{d}x\ f(x)\,\right\rceil\ .$$

La finitezza dell'integrale dato equivale all'esistenza e finitezza del limite $\displaystyle\lim_{x\to a+}F(x)$ e questa a sua volta equivale al soddisfacimento della condizione di Cauchy

$$\forall\epsilon\in\mathbb{R}_+\ :\ \exists b_\epsilon\in(a,c)\ ¶\ \forall b''\in(a,b_\epsilon)\ ,\ b'\in(a,b'')\ :\ |F(b'')-F(b')|<\epsilon\ .$$

Dato che $\displaystyle F(b'')-F(b') \;=\; \int_{b'}^{b''}\mathrm{d}x\ f(x)$, abbiamo l'equivalenza enunciata ▮

Per dualità-LR si ottiene il criterio per gli integrali impropri sopra un intervallo chiuso-aperto.

I26c.06 Consideriamo l'integrale improprio di secondo genere $\displaystyle\int_1^3\mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{x(3-x)}}$ e mostriamo che la sua valutazione si può trasformare nella valutazione di un integrale improprio del primo genere e di un integrale proprio.

Introdotto $\displaystyle\mathcal{I}(\epsilon)\ :=\ \int_1^{3-\epsilon}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(3-x)}}$ per $0<\epsilon<2$ e posto $y:=\dfrac{1}{3-x}$, si ottiene

$$\mathcal{I}(\epsilon)\ =\ \int_1^{1/\epsilon}\mathrm{d}y\ \frac{1}{y\sqrt{3\,y-1}}$$

e questo, dato che $\epsilon\to 0+\ \iff\ \dfrac{1}{\epsilon}\to+\infty$, è un integrale improprio del primo genere.

Se poniamo $v:=\sqrt{3-x}$, l'integrale in esame diventa $\displaystyle\int_{\sqrt{\epsilon}}^1\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v^2+2}}$ e questo è un integrale proprio.

I26c.07 Chiariamo ulteriormente il collegamento tra integrali impropri del primo e del secondo genere. Denotiamo localmente con **H** l'insieme degli integrali impropri convergenti della forma

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ f(x) \quad \text{con } f(x) \text{ funzione positiva decrescente ed } f(0)=1\ .$$

Inoltre denotiamo localmente con $\mathbf{V}$ l'insieme degli integrali impropri convergenti della forma

$$\int_0^{1} \mathrm{d}x\ \ g(x) \quad \text{dove } g(x) \text{ denota una funzione positiva decrescente con } g(1)=0\ .$$

Evidentemente la riflessione dei grafici delle funzioni-RtR rispetto alla diagonale $y=x$, ossia rispetto a $\mathsf{Mirr}_{[y=x]}$, ovvero lo scambio delle ascisse con le ordinate, costituisce una biiezione tra $\mathbf{H}$ e $\mathbf{V}$; è anche evidente che sul dominio $\mathbf{H}\cup\mathbf{V}$ questa trasformazione è una involuzione.

Inoltre per ogni $f(x)\in\mathbf{H}$ hanno la stessa valutazione gli integrali impropri posti n corrispondenza:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ f(x)\ \ =\ \ \int_0^{1} \mathrm{d}x\ \ \left(\mathsf{Mirr}_{[y=x]}\, f(x)\right)\ .$$

Per esempio all'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ (x+1)^{-\beta}\ \in\ \mathbf{H}$ convergente per $\beta>1$ viene trasformato in $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{d}y\ \ (y)^{-\beta}\in\mathbf{H}$, anch'esso convergente per $\beta>1$.

I26c.08 Dalla biiezione precedente segue che ogni integrale di $\mathbf{H}$ si può esprimere mediante un integrale di $\mathbf{V}$ e viceversa.

Più in generale ogni integrale improprio del primo genere con integrando positivo si può ricondurre a un integrale di $\mathbf{V}$: infatti l'integrale dato attraverso traslazioni e dilatazioni si può ricondurre a un integrale di $\mathbf{H}$ e questo a uno di $\mathbf{V}$.

Mediante la dualità-UD si ottiene la possibilità di ricondurre ad un integrale di $\mathbf{V}$ anche un integrale improprio del primo genere con integrando negativo.

Inoltre mediante la dualità-xy si hanno le possibilità di ricondurre molti integrali del secondo genere a integrali del primo e viceversa.

Va anche osservato che vi sono integrali impropri del primo genere che applicando lo scambio della variabile x con la y non sono trasformabili in integrali del secondo genere: sono quelli che presentano una infinità di cambiamenti di segno al crescere illimitato dell'ascissa. Esempi sono

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ \frac{\sin\, x}{x^2} \qquad , \qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ \frac{\sin\, x^2}{x^2}\ .$$

Per trattare questi integrali, come vedremo in :h, servono metodi che si collegano alla valutazione della convergenza delle serie.

Occorre inoltre segnalare che un integrale improprio del primo o del secondo genere solo in casi specifici e solo se convergente si può trasformare in un integrale proprio.

Va segnalata anche la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca integrali divergenti del primo e del secondo genere.

I26c.09 La definizione di integrale improprio può estendersi anche a funzioni aventi dominio della forma $[a,b]\setminus\{x_0\}$ con $x_0\in(a,b)$ le quali siano integrabili in tutti i domini aventi la forma $[a,x_0-\delta_1]\,\dot\cup\,[x_0+\delta_2,b]$, cioè domini tali che esistono finiti $\displaystyle\int_a^{x_0-\delta_1} \mathrm{d}x\ \ f(x)$ e $\displaystyle\int_{x_0+\delta_2}^{b} \mathrm{d}x\ \ f(x)$.

Se esistono finiti i limiti di questi integrali per $\delta_1\to 0$ e per $\delta_2\to 0$, si assume che la somma dei due limiti sia dichiarata **integrale improprio** della funzione $f(x)$ su $[a,b]$, in accordo con il fatto che la quantità

$$(1) \qquad \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \ := \ \lim_{\delta_1\to 0+} \int_a^{x_0-\delta_1} \mathrm{d}x\ f(x) \ + \ \lim_{\delta_2\to 0+} \int_{x_0+\delta_2}^b \mathrm{d}x\ f(x)$$

è utilizzabile per calcoli affidabili.
Conviene sottolineare che i due limiti richiest vanno calcolati indipendentemente.

I26c.10 Esempio Si voglia valutare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

La funzione integranda è illimitata solo per $x = 0$; quindi si devono valutare

$$I_1(\delta_1) \ := \ \int_{-1}^{-\delta_1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ [\arcsin x]_{-1}^{\delta_1} \ = \ -\arcsin(\delta_1) + \arcsin(-1) \qquad \text{e}$$

$$I_2(\delta_2) \ := \ \int_{\delta_2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ [\arcsin x]_{\delta_2}^{1} \ = \ \arcsin(1) - \arcsin(\delta_2)\ .$$

Si ottiene quindi $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ -\lim_{\delta_1\to 0} \arcsin(\delta_1) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \lim_{\delta_2\to 0} \arcsin(\delta_2) = \pi$.

I26c.11 Consideriamo una funzione $f(x)$ definita nell'intervallo chiuso $[a,b\,]$ ad eccezione di un solo punto $x_0 \in (a,b\,)$ in ogni intorno del quale essa non è limitata, ma che risulta integrabile in senso improprio nello stesso in $[a,b\,]$. Per tale $f(x)$ si riscontra la additività sugli intervalli, cioè

$$(1) \qquad \forall d \in (a,b\,) \ \vdots \ \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \int_a^d \mathrm{d}x\ f(x) + \int_d^b \mathrm{d}x\ f(x)\ .$$

Questa identità è valida più in generale per una $f(x)$ definita in un $[a,b\,]$ a eccezione di un numero finito di suoi punti interni $x_1, ..., x_n \in (a,b\,)$, ma che in un intorno di ciascuna di tali ascisse che esclude tutte le rimanenti risulta integrabile in senso improprio.

In effetti si assume la additività sui domini degli integrali e di conseguenza si può decomporre $[a,b\,]$ in $n+1$ sottointervalli che contengono al loro interno un solo x_i, considerare le identità (1) per questi $n+1$ sottointervalli e applicare a essi la additività sugli intervalli di integrazione.

Va inoltre osservato che l'identità (1) vale per ogni scelta dei reali a, b e c, non solo per $a < c < b$; la sua validità è condizionata solo dall'esistenza degli integrali (propri o impropri) coinvolti.

I26c.12 L'identità c11(1) costituisce un ampliamento agli integrali impropri su intervalli limitati di funzioni non necessariamente limitate della proprietà di additività degli integrali per intervalli di integrazione introdotta in I25c17.

Agli integrali impropri suddetti possono essere estese anche altre proprietà degli integrali propri.
Ampliando quanto trovato in I25c12(2) ed I25c13(2), si trova che l'integrazione impropria, quando applicabile, costituisce un funzionale lineare.
Similmente si estendono le proprietà presentate in I25c20 e il teorema della media di I25c21 .

I26 d. integrali su intervalli illimitati e/o con punti singolari

I26d.01 Abbiamo definiti **integrali impropri del terzo genere** [a04] gli integrali di funzioni che presentano almeno un punto singolare e almeno uno degli estremi uguale a $-\infty$ o a $+\infty$.

Per attribuire un significato numerico a una di queste costruzioni che qui denotiamo con $\mathcal{I}$ la si esprime come somma di integrali impropri del primo o del secondo genere e si cerca di stabilire se ciascuno di questi addendi sia convergente.

Se tutti gli addendi sono convergenti si dice che $\mathcal{I}$ è convergente e gli si attribuisce come valore la somma dei valori degli integrali parziali.

Se uno o più addendi divergono a $+\infty$ e gli eventuali rimanenti sono convergenti si dice che $\mathcal{I}$ diverge a $+\infty$.

Per dualità-UD se uno o più addendi divergono a $-\infty$ e gli eventuali rimanenti sono convergenti si dice che $\mathcal{I}$ diverge a $-\infty$.

I casi rimanenti li ripartiamo in due raggruppamenti.

I casi di un primo tipo presentano almeno un addendo divergente a $-\infty$ e almeno un addendo divergente a $+\infty$.
I casi di un secondo tipo sono caratterizzati da almeno un addendo indefinito.

In tutti questi casi si dice che $\mathcal{I}$ è indefinito e non è lecito procedere senza ulteriori esami ad utilizzare un suo valore per argomentazioni finalizzate ad individuare un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$.

Conviene tuttavia anticipare che nei casi del primo tipo si apre la possibilità di attribuire all'integrale improprio un valore principale secondo Cauchy come viene discusso in :e.

I26d.02 Come esempio di integrale improprio del terzo genere esaminiamo $\mathcal{I} := \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x}$.
Per attribuirgli un significato lo si decompone come

$$(1)\qquad \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\ \ x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x} \ = \ \int_0^{1} \mathrm{d}x\ \ x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x} \ + \ \int_1^{+\infty} \mathrm{d}t\ \ x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x}$$

e si procede a passare in rassegna i diversi possibili valori del parametro α.
A questo scopo conviene denotare i due addendi del secondo membro, risp., con $\mathcal{I}_{01}$ e con $\mathcal{I}_{1i}$.

Se $\alpha \geq 1$, $\mathcal{I}_{01}$ esprime un integrale proprio che risulta convergente.

Se $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{I}_{01}$ esprime un integrale improprio del secondo genere con singolarità in $x = 0$; dato che $\lim_{x\to 0+} x^{1-\alpha}\,x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x} \ = \ 1$, si ha un integrale convergente. Quindi $\mathcal{I}_{01}$ converge per $\alpha > 0$.
Per $\alpha > 0$, $\mathcal{I}_{1i}$ esprime un integrale improprio del primo genere.
Dato che, per la regola di de l'Hopital, $\lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x} = 0$, $\mathcal{I}_{1i}$ converge.
Dunque per $\alpha > 0$ $\mathcal{I}$ converge.

Se $\alpha \leq 0$, $\mathcal{I}_{01}$ diverge in quanto $\lim_{x\to+\infty} x \cdot x^{\alpha-1}\,\mathsf{e}^{-x} = 0$.

Dunque per $\alpha \leq 0$, dato che $\mathcal{I}_{01}$ diverge a $+\infty$ ed $\mathcal{I}_{1i}$ converge, si conclude che $\mathcal{I}$ diverge a $+\infty$.

I26 e. criteri di convergenza per integrali impropri

I26e.01 Come per lo studio della convergenza delle serie, sono assai utili alcuni criteri in grado di garantire la convergenza di interi specifici raggruppamenti di integrali impropri.
Iniziamo con alcuni criteri di confronto per gli integrali impropri del primo genere.

(1) Prop.: Consideriamo un numero reale b, l'intervallo illimitato $I := [b,+\infty)$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che sono integrabili su $[b,c]$ per ogni $c \in (b,+\infty)$; inoltre chiediamo che esista $M \in (b,+\infty)$ tale che $\forall x \in (M,+\infty) \,\vdots\, 0 \le f(x) \le g(x)$, ovvero chiediamo che sia $f(x)$ definitivamente minorante della $g(x)$ per $x \to +\infty$.

(1a) Se $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, g(x)$ è convergente, lo è anche $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, f(x)$.

(1b) Se $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, f(x)$ è divergente, lo è anche $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, g(x)$.

Dim.: (1a) La convergenza di $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, g(x)$ equivale al fatto che l'insieme degli integrali propri $\displaystyle\left\{c \in (a,+\infty) \,\vdots\, \int_b^c \mathrm{d}x \;\, g(x)\right\}$ è limitato. Questo implica che è limitato anche l'insieme $\displaystyle\left\{c \in (a,+\infty) \,\vdots\, \int_b^c \mathrm{d}x \;\, f(x)\right\}$ e questo equivale alla convergenza di $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, g(x)$ ▮

Dim.: (1b) Si potrebbe condurre a somiglianza della precedente dimostrazione. Più rapidamente si procede per assurdo tenendo conto di (1a): se fosse convergente $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, g(x)$, per (1a) sarebbe convergente anche $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \;\, f(x)$ ▮

I26e.02 I criteri precedenti si adattano facilmente in virtù della dualità-LR a coppie di funzioni definite in un intervallo illimitato a sinistra, cioè avente la forma $(-\infty, b]$.

Inoltre, grazie alla dualità-UD, i vari criteri precedenti si adattano a coppie di funzioni con valori definitivamente negativi.

I26e.03 Presentiamo ora criteri di confronto concernenti integrali impropri del secondo genere.

(1) Prop.: Consideriamo un intervallo reale aperto-chiuso $I :=$ (a,b] con b finito o uguale a $+\infty$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che sono integrabili su $[a', b]$ per ogni $a' \in$ (a,b); chiediamo inoltre che esista $\overline{x} \in$ (a,b) tale che $\forall x \in (a, \overline{x}) \,\vdots\, 0 \le f(x) \le g(x)$. Allora se $g(x)$ è integrabile su [a,b], anche $f(x)$ lo è ▮

Il criterio precedente si adatta facilmente allo scenario duale-LR del precedente.

(2) Prop.: Consideriamo un intervallo reale chiuso-aperto $I := [a,b)$ con a finito o uguale a $-\infty$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che sono integrabili su $[a, b']$ per ogni $b' \in$ (a,b); inoltre chiediamo che esista $\overline{x} \in$ (a,b) tale che $\forall x \in (\overline{x}, b) \,\vdots\, 0 \le f(x) \le g(x)$.
Con tali ipotesi se $g(x)$ è integrabile su [a,b], anche $f(x)$ lo è ▮

I26e.04 Grazie alla dualità-UD, i due criteri precedenti si adattano a coppie di funzioni definite in un intervallo e con valori che avvicinndosi al punto singolare del loro dominio sono definitivamente negativi.

(1) Prop.: Consideriamo un intervallo reale aperto-chiuso $I := (a,b\,]$ con b finito o uguale a $+\infty$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che sono integrabili su $[a', b]$ per ogni $a' \in (a,b\,)$; inoltre esista $\overline{x} \in (a,b\,)$ tale che $\forall x \in (a, \overline{x}) \,\vdots\, 0 \geq f(x) \geq g(x)$.
Allora se $g(x)$ è integrabile su $[a,b\,]$, anche $f(x)$ lo è ▮

(2) Prop.: Consideriamo un intervallo reale chiuso-aperto $I := [a, b)$ con a finito o uguale a $-\infty$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che sono integrabili su $[a, b']$ per ogni $b' \in (a,b\,)$; inoltre supponiamo che esista $\overline{x} \in (a,b\,)$ tale che $\forall x \in (\overline{x}, b) \,\vdots\, 0 \geq f(x) \geq g(x)$.
Allora se $g(x)$ è integrabile su $[a,b\,]$, anche $f(x)$ lo è ▮

I26e.05 I criteri precedenti si applicano utilmente al confronto di funzioni delle quali interessa la integrabilità con le funzioni convergenti o divergenti viste in precedenza al fine di formulare criteri più specifici.

(1) Prop.: Per un dato b reale consideriamo una funzione (nonnegativa) $f(x) \in \lceil [b, +\infty) \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ la quale per ogni $d \in (b, +\infty)$ sia integrabile in $[b, d]$.
Se $f(x)$ per $x \to +\infty$ è infinitesima di ordine superiore rispetto alla $\dfrac{1}{x^\alpha}$, cioè se $f(x) \in \mathbf{o}_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ per qualche numero reale $\alpha > 1$, allora esiste (finito) $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$.

Se per $x \to +\infty$ la funzione $f(x)$ è infinitesima di ordine inferiore rispetto alla $\dfrac{1}{x^\alpha}$ per qualche numero reale $\alpha \leq 1$, oppure se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ed è diverso da 0, allora $\displaystyle\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$ non converge, cioè non esiste finito.

Dim.: Segue applicando il criterio del confronto ai risultati precedenti ▮

Il criterio si adatta in modo diretto, grazie alla dualità-LR, a funzioni definite in un intervallo illimitato a sinistra.

(2) Prop.: Per un dato b reale consideriamo una funzione $f(x) \in \lceil (-\infty, a] \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ la quale per ogni $c \in (-\infty, a)$ sia integrabile in $[c, a]$.
Se $f(x)$ per $x \to -\infty$ è infinitesima di ordine superiore rispetto alla $\dfrac{1}{|x|^\alpha}$, cioè se $f(x) \in \mathbf{o}_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$ per qualche numero reale $\alpha > 1$, allora esiste (finito) $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}x\ f(x)$.

Se per $x \to -\infty$ la $f(x)$ è infinitesima di ordine inferiore rispetto alla $\dfrac{1}{|x|^\alpha}$ per qualche numero reale $\alpha \leq 1$, oppure se esiste diverso da 0 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$, allora $\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$ non converge, cioè non fornisce un valore reale (finito) ▮

I26e.06 **Prop.** Dati due reali a e b con $a < b$, consideriamo una funzione $f(x) \in \{(a,b\,] \longmapsto \mathbb{R}_{0+}\}$ la quale per ogni $a' \in (a,b\,)$ sia integrabile in $[a', b]$.
Se per $x \to a+$ la $f(x)$ è infinita di ordine non superiore rispetto alla $\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ per qualche $\alpha < 1$, cioè se $f(x) \in \mathbf{O}_{x\to a+}\left(\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}\right)$ per qualche $\alpha < 1$, allora esiste (finito) $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$.

Se per $x \to a+$ la $f(x)$ è infinita di ordine superiore rispetto alla $\dfrac{1}{(x-a)^\alpha}$ per qualche $\alpha \geq 1$, allora $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$ non converge, cioè non fornisce un numero realr (finito).

Dim.: Segue applicando il criterio del confronto ai risultati precedenti ▮

Il criterio si adatta in modo diretto, grazie alla dualità-LR, a funzioni definite in un intervallo della forma [a,b).

I26e.07 **(1) Esempio** $\forall\alpha \in \mathbb{R}_{0+}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \; x^\alpha \, \mathrm{e}^{-x}$ è convergente: infatti per ogni $\beta \in \mathbb{R}_+$ vale la relazione $x^\alpha \, \mathrm{e}^{-x} \in \mathbf{o}_{x\to+\infty}\left(x^{-\beta}\right)$ ▮

(2) Esempio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ è convergente, in quanto $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2}$ ▮

(3) Esempio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{d}x \; \left(\sin\frac{1}{x}\right)^2$ è convergente in quanto $\displaystyle\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2 \sim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^2$ ▮

(4) Esempio $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$ non converge, poiché

$$\int_{\mathrm{e}}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_{\mathrm{e}}^{b} = \ln(\ln b) \;\text{ e }\; \lim_{b\to+\infty} \ln(\ln b) = +\infty \;▮$$

(5) Esempio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$ converge, in quanto la funzione integranda, positiva, per $x \to \pi/2$ si comporta come $\displaystyle\left(\frac{1}{\pi/2 - x}\right)^{1/2}$ ▮

(6) Esempio $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sqrt{x}} - 1}$ converge, in quanto la funzione integranda, positiva, per $x \to 0+$ si comporta come $\displaystyle\frac{1}{x^{1/2}}$ ▮

(7) Esempio $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{d}x \; \exp\left(-\frac{1}{x-1}\right)$ non converge, perché per $x \to 1-$ l'integrando positivo tende a $+\infty$ più rapidamente di $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^\alpha}$ per qualsiasi esponente positivo α ▮.

(8) Esempio $\displaystyle\int_0^{1} \mathrm{d}x \; \frac{x-1}{\ln(1-x)}$ non converge, in quanto l'integrando positivo, che per $x \to 1-$ tende a 0, per $x \to 0+$ tende a $+infty$ come $\displaystyle\frac{1}{x}$ ▮

I26e.08 **(1) Prop.**: Consideriamo un qualsiasi $b \in \mathbb{R}$ e la funzione $f(x) \in \lceil [b, +\infty) \longmapsto \mathbb{R} \rceil$. Se $|f(x)|$ è integrabile su $[b, +\infty)$, allora lo è anche la funzione $f(x)$ e vale la disuguaglianza

$$\left|\int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \; f(x)\right| \leq \int_b^{+\infty} \mathrm{d}x \; |f(x)| \;▮$$

Questo criterio si adatta in modo diretto, grazie alla dualità-LR, a funzioni definite in un intervallo illimitato a sinistra.

(2) Prop.: Consideriamo un qualsiasi $a \in \mathbb{R}$ e la funzione $f(x) \in \lceil [-\infty, a) \longmapsto \mathbb{R} \rceil$. Se $|f(x)|$ è integrabile su $[-\infty, a)$, allora lo è anche la funzione $f(x)$ e vale la disuguaglianza

$$\left|\int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}x \; f(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}x \; |f(x)| \;▮$$

(3) Prop.: Consideriamo due reali a e b con $a < b$ e una funzione $f(x) \in \lceil$ (a,b] $\longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$. Se la $|f(x)|$ è integrabile in [a,b], allora anche $f(x)$ è integrabile in [a,b] ▮

Il criterio si adatta in modo diretto, grazie alla dualità-LR, a funzioni definite in un intervallo illimitato a sinistra.

(4) Prop.: Consideriamo due reali a e b con $a < b$ e una funzione $f(x) \in \lceil (a,b] \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$. Se la $|f(x)|$ è integrabile in $[a,b]$, allora anche $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ ∎

I26e.09 Come per le serie, tra gli integrali impropri convergenti si distinguono quelli che sono assolutamente convergenti, cioè caratterizzati da una funzione integranda $f(x)$ tale che sia convergente anche l'integrale omologo della $|f(x)|$.

Contrariamente a quanto accade per l'integrale di Riemann, la convergenza di un integrale improprio di una funzione $f(x)$ non implica la sua convergenza assoluta, cioè la convergenza dell'integrale improprio della corrispondente $|f(x)|$.

Un esempio di integrale convergente e non assolutamente convergente è $I := \int_{\pi/2}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{x}$.

Per la convergenza di I si osserva che per ogni $M \in (\pi/2, +\infty)$

$$\int_{\pi/2}^{M} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{x} = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{\pi/2}^{M} - \int_{\pi/2}^{M} \mathrm{d}x \, \frac{(-\cos x)}{(-x^2)} = -\frac{\cos M}{M} - \int_{\pi/2}^{M} \mathrm{d}x \, \frac{\cos x}{x^2} .$$

Passando al limite per $M \to +\infty$ si ha un ultimo integrale convergente perché $\frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ e quindi si può scrivere

$$\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{x} = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{d}x \, \frac{\sin x}{x} - \int_{\pi/2}^{+\infty} \mathrm{d}x \, \frac{\cos x}{x^2} .$$

Per provare la non convergenza assoluta si osserva che, per ogni $n \in \mathbb{P}$

$$\int_{0}^{n\pi} \mathrm{d}x \, \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1\pi}^{k\pi} \mathrm{d}x \, \frac{|\sin x|}{x} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{d}x \, |\sin x| = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, per la divergenza della serie armonica si conclude

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{0}^{n\pi} \mathrm{d}x \, \frac{|\sin x|}{x} = +\infty . \tag{1}$$

I26 f. formule generali per integrali impropri

I26f.01 Sono note formule di portata generale trovate per gli integrali propri che possono essere estese agli integrali di funzioni con ascisse anomale ma imponendo opportune condizioni e restrizioni al procedimento di valutazione degli integarli stessi.

In questa sezione esaminiamo la formula fondamentale che attribuisce valori definiti a integrali indefiniti e conseguenti regole per effettuare integrazione per scomposizione, integrazione per parti e integrazione per sostituzione.

I26f.02 **(1) Prop.**: Consideriamo $a \in \mathbb{R}$ e una funzione-RtR $f(x)$ continua per ogni $x \in [a, +\infty)$.
Se esiste una funzione $F(x)$ continua che per ogni $x \in [a, +\infty)$ abbia come derivata $F'(x) = f(x)$ e se esiste finito $F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x)$, vale la formula

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \;\; f(x) \;\; = \;\; F(-\infty) - F(a) \; .$$

Dim.: Si ottiene come limite per $c \to +\infty$ della formula fondamentale su intervalli finiti [c05](1)

$$\int_a^c \mathrm{d}x \;\; f(x) = F(c) - F(a) \;\blacksquare$$

La proposizione ottenibile come duale-LR della precedente riguarda intervalli illimitati a sinistra.

(2) Prop.: Consideriamo $a \in \mathbb{R}$ e una funzione-RtR $f(x)$ continua per ogni $x \in (-\infty, a]$.
Se esiste una funzione $F(x)$ continua che per ogni $x \in (-\infty, a]$ abbia come derivata $F'(x) = f(x)$ e se esiste finito $F(-\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x)$, vale la formula

$$\int_{-\infty}^a \mathrm{d}x \;\; f(x) \;\; = \;\; F(a) - F(-\infty)) \;\blacksquare$$

I26f.03 **Prop.** Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue insieme alle loro derivate per ogni $x \geq a$.
Se per due delle tre quantità $\int_a^{+\infty} f \, \mathrm{d}g$, $[f\,g]_a^{+\infty}$ e $\int_a^{+\infty} g \, \mathrm{d}f$ è dimostrata la finitezza, allora la terza è determinata e finita e vale la formula per l'integrazioone per parti

$$\int_a^{+\infty} f \, \mathrm{d}g \;\; = \;\; [f\,g]_a^{+\infty} \; + \; \int_a^{+\infty} g \, \mathrm{d}f \;\; .$$

Dim.: Si ottiene come limite per $c \to +\infty$ della formula per l'integrazione per parti su intervalli finiti $[a, c]$ $\int_a^c \mathrm{d}x \;\; f(x) = F(c) - F(a) \;\blacksquare$

Ancora grazie alla dualità-LR si ottiene l'enunciato corrispondente per intervalli illimitati a sinistra.

I26f.04 **Prop.** Consideriamo $a \in \mathbb{R}$, la funzione-RtR $f(x)$ continua in ogni intervallo $[a, c]$ per $c \in (a, +\infty)$ e l'integrale $\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \;\; f(x)$.
Sia nota l'effettuazione del cambiamento di variabile $x = x(t)$, ove, al variare di x tra a e $+\infty$ la t varia tra due valori reali $u \in [-\infty, +\infty)$ e $v \in (u, +\infty]$, essendo per ogni t $x(t) \geq 0$ e $x'(t) = D_t[x(t)]$ limitata, continua, nonnulla, eccettuati al più un numero finito di valori della t per i quali $x'(t)$ può annullarsi o presentare discontinuità.

Se esiste finito $\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$, allora esiste finito anche $\int_u^v \mathrm{d}t\ x'(t)\, f[x(t)]$ e vale l'uguaglianza

$$\int_a^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)\ =\ \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ f[x(t)]\, x'(t)\ \ .$$

Dim.: Anche questa uguaglianza si ottiene come limite di una riguardante un intervallo finito ▮

Ancora grazie alla dualità-LR si ottiene l'enunciato corrispondente per intervalli illimitati a sinistra.

Altre formule prevedibili si ottengono per dualità-UD.

I26f.05 **(1) Prop.**: Consideriamo $a \in \mathbb{R}$, $c \in (a, +\infty)$ e una funzione-RtR $f(x)$ continua per ogni $x \in [a, c)$.
Se si trova una funzione-RtR $F(x)$ che per ogni $x \in [a, c)$ è continua e derivabile con $F'(x) = f(x)$, allora vale la formula

$$\int_a^c \mathrm{d}x\ f(x)\ =\ F(c) - F(a)\ .$$

Dim.: Si ottiene come limite per $\epsilon \to 0+$ della formula fondamentale su intervalli privi di singolarità nella forma $\int_a^{c-\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x) = F(c-\epsilon) - F(a)$ ▮

Una proposizione analoga si ottiene per intervalli illimitati a sinistra in forza della dualità-LR.

(2) Prop.: Consideriamo $a \in \mathbb{R}$, $c \in (-\infty, a)$ e una funzione-RtR $f(x)$ continua per ogni $x \in [c, a)$.
Se si trova una funzione $F(x)$ che per ogni $x \in [c, a)$ è continua e derivabile con $F'(x) = f(x)$, allora vale la formula

$$\int_c^a \mathrm{d}x\ f(x)\ =\ F(a) - F(c)\ .$$

I due precedenti enunciati possono essere estesi senza difficoltà a integrali di funzioni con un qualsiasi insieme finito di ascisse singolari.

I26f.06 Proposizioni analoghe si ottengono per le regole di integrazione per parti e di integrazione per sostituzione per integrali che presentano singolarità.

I26 g. integrali dotati di valore principale secondo Cauchy

I26g.01 Consideriamo una funzione reale $f(x)$ definita in un intervallo privato di un punto interno che scriviamo $[a,b\,] \setminus \{x_0\} = [a, x_0) \dot\cup (x_0, b]$ tale che sia $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$ oppure, dualmente-UD tale che sia $\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) = \mp\infty$.

Supponiamo inoltre che divergono sia l'integrale $\int_a^{x_0} \mathrm{d}x \;\, f(x)$ che $\int_{x_0}^b \mathrm{d}x \;\, f(x)$ e quindi non sia lecito attribuire un valore secondo Riemann a una espressione integrale della forma $\int_a^b \mathrm{d}x \;\, f(x)$.

La più semplice di queste situazioni si ha con la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e un qualsiasi intervallo $[a,b\,]$ con $a < 0 < b$.

Per taluni problemi, in particolare nello studio delle funzioni analitiche e in loro applicazioni alla fisica quantistica, può essere utile attribuire un valore numerico al suddetto integrale.

Una giustificazione intuitiva di tale estensione del meccanismo dell'integrazione può vedersi nel modo seguente. Il tentativo di attribuzione di valore all'integrale in esame vuole tenere conto di due effetti contrapposti rappresentati, risp., dall'integrale sull'intervallo a sinistra dell'ascissa di non regolarità x_0, $[a, x_0)$, e dall'integrale sull'intervallo a destra $(x_0, b]$.
Questi effetti non sono quantificabili separatamente, ma si può pensare che per talune applicazioni riguardino azioni di elisione reciproca in modo che sia interessante cercare di valutare la preponderanza dell'uno degli effetti sull'altro o la loro neutralizzazione reciproca.
Una risposta a questa esigenza viene dalla introduzione della nozione che segue.

I26g.02 Si dice **valore principale secondo Cauchy** della espressione integrale

(1) $$\int_a^b \mathrm{d}x \;\, f(x)$$

il valore del seguente limite, ammesso che esista finito

(2) $$\mathcal{CPV} \int_a^b \mathrm{d}x \;\, f(x) \;:=\; \lim_{\delta \to 0+} \left[\int_a^{x_0-\delta} \mathrm{d}x \;\, f(x) + \int_{x_0+\delta}^b \mathrm{d}x \;\, f(x) \right] \quad .$$

Se il limite a secondo membro non esiste o non è finito si dice che all'espressione (1) non è attribuibile un valore principale di Cauchy, o equivalentemente che il valore principale di Cauchy è indefinito.

Per esempio per la funzione che fornisce l'iperbole equilatera $\dfrac{1}{x}$, supposto che sia $a \in \mathbb{R}_-$ e $b \in \mathbb{R}_+$, si ha

(3) $$\mathcal{CPV} \left(\int_a^b \mathrm{d}x \;\, \frac{1}{x} \right) \;=\; \begin{cases} \int_{-a}^b \frac{\mathrm{d}x}{x} & \text{sse } |a| \le b \\ \int_a^{-b} \frac{\mathrm{d}x}{x} & \text{sse } b \le |a| \end{cases} \quad .$$

In particolare $\mathcal{CPV} \int_{-b}^b \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = 0$, uguaglianza che nella precedente interpretazione intuitiva esprime il completo equilibrio tra i due effetti contrapposti degli intervalli $[-b, 0]$ e $(0, b]$.

Un integrale su un intervallo simmetrico con ascissa media 0 che è dotato di valore principale di Cauchy diverso da 0 è il seguente

$$\mathcal{CPV} \int_{-b}^b \mathrm{d}x \; \left[\frac{2}{x} + \frac{3}{\sqrt{|x|}} \right] \;=\; 2 \cdot \mathcal{CPV} \int_{-b}^b \frac{\mathrm{d}x}{x} + 3 \int_{-b}^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} \;=\; 0 + 6 \; \left[2\sqrt{x} \right]_0^b \;=\; 12 \sqrt{b} \; .$$

I26g.03 Il valore principale secondo Cauchy può costituire una valutazione utile anche per altri tre tipi di integrali su intervalli illimitati di funzioni che ai due estremi dell'intervallo di integrazione risultano oppostamente divergenti.

Consideriamo una funzione-RtR $f(x)$ integrabile in ogni intervallo limitato ma per la quale si hanno i seguenti integrali divergenti: $\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\ f(x) = \pm\infty$ e $\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = \mp\infty$.

Si definisce **valore principale secondo Cauchy** della espressione $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$ il valore del seguente limite, ammesso che esista finito,

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ := \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} \mathrm{d}x\ f(x) \ .$$

Questa valutazione si propone di annullare due effetti contrapposti che si manifestano, risp., per valori della x tendenti a $-\infty$ e tendenti a $+\infty$.

Per esempio si ha $\mathcal{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \dfrac{2\,x}{x^2+1} = 0$, affermazione ottenibile senza ricorrere a calcoli dettagliati come conseguenza del fatto che la funzione integranda è una funzione dispari sull'intero $\mathbb{R}$.

I26g.04 Consideriamo poi una funzione $f(x) \in \lceil (a, +\infty) \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ integrabile in ogni intervallo $[a+\delta, b)$ ma per la quale si hanno integrali divergenti delle seguenti forme: $\int_{a}^{b} \mathrm{d}x\ f(x) = \pm\infty$ e $\int_{c}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = \mp\infty$ relativi ad ascisse $b, c \in (a, +\infty)$.

Si definisce **valore principale secondo Cauchy** della espressione $\int_{a}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$ il valore del seguente limite, ammesso che esista finito,

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{CPV} \int_{a}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ := \lim_{\delta \to 0+} \int_{a-\delta}^{a+\frac{1}{\delta}} \mathrm{d}x\ f(x) \ .$$

Questa valutazione si propone di annullare due effetti contrapposti che si manifestano, risp., per valori della x tendenti ad a da destra e per x tendente a $+\infty$.

I26g.05 Consideriamo infine una funzione $f(x) \in \lceil (-\infty, b) \dot\cup (b, +\infty) \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ integrabile in ogni intervallo finito che escluda l'ascissa b e per la quale si hanno integrali divergenti delle seguenti forme:

$$\int_{-\infty}^{a} \mathrm{d}x\ f(x) = \pm\infty \ \ , \ \int_{a}^{b-\delta} \mathrm{d}x\ f(x) = \mp\infty \ \ , \ \int_{b+\delta}^{c} \mathrm{d}x\ f(x) = \pm\infty \ \ , \ \int_{c}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) = \mp\infty.$$

dove per a e c si chiede solo che soddisfino la relazione $a < b < c$.

//input pI26g05

Si definisce **valore principale secondo Cauchy** della espressione $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x)$ il valore della seguente somma di limiti, ammesso che ciascuno dei limiti addendi esista finito,

$$\text{(3)} \qquad \mathcal{CPV} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ f(x) \ := \lim_{\delta \to 0+} \left[\int_{b-\frac{1}{\delta}}^{b-\delta} \mathrm{d}x\ f(x) + \int_{b+\delta}^{b+\frac{1}{\delta}} \mathrm{d}x\ f(x) \right] \ .$$

Questa valutazione tende ad annullare quattro effetti effetti contrapposti che si manifestano, risp., per valori della x tendenti a $-\infty$, a b da sinistra, a b da destra e a $+\infty$.

I26 h. serie e integrali impropri sui reali nonnegativi

I26h.01 Le serie di termini reali e gli integrali impropri sull'intervallo $[0,+\infty)$ (o su qualche intervallo riconducibile al precedente) sono costruzioni formali che presentano stretti collegamenti che rendono possibile trasformare facilmente vari risultati riguardanti una costruzione in risultati riguardanti l'altra.

Le serie di termini reali si possono considerare come integrali impropri di funzioni a scala relative alla decomposizione numerabile di $\mathbb{R}_{0+}$ costituita dagli intervalli con estremità date dagli interi naturali successivi.

Consideriamo la serie $\mathsf{S} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \;=\; \langle \mathsf{a},\mathsf{s}\rangle$ e in particolare la relativa successione delle somme ridotte $\mathsf{s} \;=\; \big\langle n \in \mathbb{N} :| \; s_n \big\rangle$. Consideriamo la funzione a scala a dominio illimitato associata alla s definita da

$$f(x) \;:=\; \mathsf{funstep}(\mathsf{S}) \;:=\; \dot\cup_{n=0}^{+\infty} \left\lceil\, [n,n+1) \mapsto a_n \,\right\rceil \; .$$

Evidentemente per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\; s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \int_0^{n+1} dx \;\, f(x)$ e la funzione $\mathsf{funstep}$ si può considerare una biiezione tra serie di addendi reali e funzioni a scala relative all'insieme di intervalli $\{n \in \mathbb{N} :| \; [n,n+1)\}$.

Se l'integrale improprio di secondo genere $\int_0^{+\infty} dx \;\, \mathsf{funstep}(\mathsf{S})$ esiste finito, allora la serie S è convergente e per la sua somma si ha

(1) $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \;=\; \int_0^{+\infty} dx \;\, f(x) \; .$$

Viceversa se la serie S converge, per ogni $M \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$\int_0^{M} dx \;\, f(x) \;=\; \int_0^{\lfloor M \rfloor} dx \;\, f(x) + (M - \lfloor M \rfloor) \cdot a_{\lfloor M \rfloor} \;=\; \sum_{i=0}^{\lfloor M \rfloor} a_i + \mathrm{mant}(M) \cdot a_{\lfloor M \rfloor} \; ;$$

di conseguenza se la serie converge l'integrale improprio esiste e vale la (1).

I26h.02 Il collegamento tra serie e integrali su $[0,+\infty)$ può servire sia per decidere sopra la convergenza o meno di una serie a partire da criteri di confronto che coinvolgono integrali, sia viceversa per decidere sopra la convergenza o meno di un integrale utilizzando criteri di confronto che coinvolgono serie.

(1) Prop.: Consideriamo una serie di termini reali $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Se si trova una funzione $f(x) \in \left\lceil \mathbb{R}_{0+} \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \right\rceil$, integrabile su $[0,+\infty)$ e tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\forall x \in [n,n+1) \,:\, |a_n| \leq f(x)$, allora la serie è assolutamente convergente.

Dim.: Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $b_n := \int_n^{n+1} dx \;\, f(x)$; per l'ipotesi della integrabilità della $f(x)$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge e la sua somma è uguale a $\int_0^{+\infty} dx \;\, f(x)$.

La seconda ipotesi $|a_n| < b_n$ implica che sia $\forall n \in \mathbb{N} \,:\, |a_n| = \int_n^{n+1} dx \;\, |a_n| \leq b_n$; di conseguenza per il criterio del confronto la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente ▮

I26h.03 Vediamo un'altra dimostrazione della convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ per $\alpha > 1$.

Questa serie può essere confrontata con l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$: se per ogni $x \in [n, n+1)$ vale la disuguaglianza $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ e quindi per ogni $N \in \mathbb{N}$ si ottiene

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_1^{N+1} \mathrm{d}x \ \frac{1}{x^\alpha} \ .$$

Passando al limite per $N \to +\infty$ si ha che la serie è maggiorata da un integrale convergente e quindi converge essa stessa ▮

I26h.04 Si osserva che anche lo studio di integrali sull'intervallo $[0, +\infty)$ di funzioni periodiche o di integrali riconducibili a queste si può avvalere di collegamenti con serie numeriche.
Una situazione di questo genere si è incontrata in b07.