1

Capitolo I23
andamento delle funzioni reali

Contenuti delle sezioni

17 pagine

I230.01 In questo capitolo vengono introdotte le nozioni e le tecniche che consentono di determinare le caratteristiche delle funzioni reali dotate di buone proprietà di continuità e di derivabilità e che consentono di tratteggiare e anche di precisare i loro grafici.

Si inizia definendo i punti di minimo, di massimo e di flesso precisando come possoni essere calcolati servendosi delle derivate della funzione.

Si procede poi alla classificazione degli intervalli di concavità e di convessità delle funzioni.

Successivamente si procede a definire i possibili asintoti delle funzioni e a stabilire come si possono individuare.

Le pagine finali sono dedicate al complesso delle attività che consentono di determinare l'andamento di alcune tipiche funzioni-RtR e in genere di individuare gli elementi salienti dei loro grafici.

I23 a. massimi, minimi e flessi delle funzioni-RtR

I23a.01 Consideriamo l'intervallo aperto $I = (\mathrm{a,b}\,)$, la funzione $f(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ e l'ascissa $x_0 \in I$.
Si dice che x_0 è un'**ascissa di massimo locale** per la $f(x)$ sse esiste un $\delta \in \mathbb{R}_+$ (idap) tale che

(1) $$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \setminus \{x_0\} \;\; : \;\; f(x) \leq f(x_0) \ .$$

In tal caso si dice che $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ è un **punto di massimo locale della funzione** $f(x)$.

Applicando la dualità-UD del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ risulta agevole dire che x_0 è un'**ascissa di minimo locale della funzione** $f(x)$ sse esiste un $\delta \in \mathbb{R}_+$ (idap) tale che

(2) $$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \setminus \{x_0\} \;\; : \;\; f(x) \geq f(x_0) \ .$$

In tal caso si dice che $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ è un **punto di minimo locale della funzione** $f(x)$.

I punti di massimo locale e i punti di minimo locale ccollettivamente si dicono **punti estremanti locali della funzione**.

Quando nella (1) vale la disuguaglianza forte si parla di **punto di massimo locale forte della funzione**; quando nella (2) vale la disuguaglianza forte si parla di **punto di minimo locale forte della funzione**; collettivamente questi punti-RR sono chiamati **punti estremanti forti della funzione**.

I23a.02 Dopo aver presentati i precedenti termini occorre segnalare che nella gran parte dei discorsi su questi argomenti sono adottate delle rilevanti semplificazioni che in genere si possono giustificare.

Innanzi tutto si osserva che le nozioni di ascissa di massimo // minimo // di estremante locale e quelle di punto di massimo // minimo // e di estremante locale sono strettamente collegate.
In effetti nella gran parte dei contesti la distinzione tra una tale ascissa e il corrispondente punto può essere lasciata imprecisata senza richiare ambiguità.

Va inoltre segnalato che la gran parte degli estremanti esaminati sono estremanti forti e i nonforti sono ben pochi; quindi questa distinzione si osserva solo nei pochi casi nei quali gli estremanti nonforti devono essere ben distinti dai forti.

Similmente spesso viene sottinteso anche l'aggettivo "locale", in quanto questo serve solo quando lo si deve contrapporre a "globale", aggettivo da utilizzare, ad esempio, per nozioni come massimo o minimo rifertiti a una intera funzione-RtR che presenta vari massimi e/o minimi.

In effetti in gran parte dei discorsi si incontrano i semplici termini massimo e minimo per denotare, risp., un massimo e un minimo locali e forti, lasciando al lettore, quando necessario, il compito di individuare una ascissa come x_0 e/o un punto-RR della forma $\langle x_0, f(x_0)\rangle$.
Comportamento analogo si riscontra per il termine estremante.

Segnaliamo anche che talora per le nozioni di massimo, minimo ed estremante invece degli aggettivi "locale" e "globale" si usano, risp., gli aggettivi "relativo" e "assoluto" che qui preferiamo utilizzare per altre rituazioni.

I23a.03 Prop. Supponiamo che la funzione $f(x)$ in corrispondenza all'ascissa x_0 interna a un intervallo contenuto nel suo dominio sia derivabile a sinistra e sia derivabile a destra.

(a) Se x_0 determina un punto di massimo locale, allora $f'_-(x_0) \leq 0$ e $f'_+(x_0) \geq 0$.

(b) Se invece x_0 corrisponde a un punto di minimo locale, allora $f'_-(x_0) \geq 0$ e $f'_+(x_0) \leq 0$.

(c) Se la funzione è derivabile per l'ascissa estremante x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Dim.: (a) Segue dalla a01(1) e dalle espressioni dei rapporti incrementali $\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$ e $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ per ogni $h>0$ sufficientemente piccolo.

(b) Segue da a01(2) e dalle precedenti espressioni.

(c) Segue da (a) e (b) ▮

I23a.04 Vediamo i casi di alcune funzioni semplici ma esemplari.

La funzione $y=x^2$ ha un minimo per $x=0$, in accordo con il fatto che $y'(x)=2\,x$.

Più in generale per ogni k intero positivo la funzione $y=x^{2\,k}$ ha un minimo per $x=0$, in accordo con la $y'(x)=2\,k\,x^{2k-1}$.

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ presentano ciascuna una infinità numerabile di estremanti: la prima presenta i punti di massimo $\left\langle\left(2\,k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,1\right\rangle$ e i punti di minimo $\left\langle\left(2\,k+\dfrac{3}{2}\right)\pi,-1\right\rangle$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$.

La funzione $\cos x$ ha le ascisse di massimo in $2\,k\,\pi$ e le ascisse di minimo in $(2\,k+1)\,\pi$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$; anche per essa le ordinate dei massimi valgonoo 1 e le ordinate dei minimi valgono -1.

Si osserva che tutto questo è in accordo con le relazioni $\cos x=\sin(x+\pi/2)$ e $\mathrm{D}_x\cos x=-\sin x$.

//input pI23a04

Anche le funzioni secante e cosecante presentano un'infinità numerabile di massimi e minimi locali. La secante ha i punti di minimo $\langle 2\,k\pi,1\rangle$ e i punti di massimo $\langle(2\,k+1)\pi,-1\rangle$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$. La cosecante ha i punti di minimo $\langle(2k+1)\,\pi/2,1\rangle$ e i punti di massimo $\langle(2k+3)\pi,-1\rangle$ per ogni $k\in\mathbb{Z}$.

Questo è in accordo con il fatto che la secante è la reciproca della funzione coseno e con il fatto che e la cosecante è la reciproca della funzione seno.

Si osserva che più in generale che passando da una funzione alla sua reciproca si scambiano punti di massimo con ordinata nonnulla con punti di minimo con ordinata nonnulla.

Non presentano invece alcun punto estremante le funzioni $\tan x$, $\cot x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, b^x e $\log_a(x)$.

La funzione $y=x^3-x$, la cui derivata $3\,x^2-1$ si annulla per $x=\pm 1$, presenta un punto di massimo locale in $\left\langle-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right\rangle$ e un minimo locale in $\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right\rangle$.

Consideriamo la funzione $f(x)\ :=\ \left\lceil\, x\in[-1,2]\ \Vdash\ x^2\,\right\rceil$.

Essa oltre a presentare un minimo (assoluto) nell'origine individuabile con l'annullamento della derivata prima, possiede un massimo locale per $x=-1$ e un massimo globale per $x=2$.

Ciascuno dei punti di massimo e di minimo che corrispondono ad ascisse che sono estremi degli intervalli che costituiscono il dominio della funzione sono chiamati, risp., **massimo di frontiera** e **minimo di frontiera**.

I23a.05 Consideriamo un punto $P_0=\langle x_0,f(x_0)\rangle$ del grafico di una funzione $f(x)$ e per ogni $\delta\in\mathbb{R}_+$ introduciamo le due porzioni del diagramma di tale funzione

$$DG(f,x_0,\delta,-)\ :=\ \{x\in\mathsf{dom}(f)\cap(x_0-\delta,x_0)\ :|\ \langle x,f(x)\rangle\}\ \text{ e}$$
$$DG(f,x_0,\delta,+)\ :=\ \{x\in\mathsf{dom}(f)\cap(x_0,x_0+\delta)\ :|\ \langle x,f(x)\rangle\}\ .$$

Un tale punto $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ si dice **punto di flesso della funzione** o punto di inflessione della funzione $f(x)$ quando:

(a) in x_0 la funzione è continua e la sua curva in $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ possiede la tangente che denotiamo con $\mathtt{t}$,

(b) esiste un $\delta \in \mathbb{R}_+$ (idap) tale che le due porzioni di diagramma $DG(f, x_0, \delta, -)$ e $DG(f, x_0, \delta, +)$ appartengono ai due diversi semipiani chiusi delimitati dalla tangente.

Osserviamo esplicitamente che un punto di flesso di una funzione è un punto del suo diagramma nel quale essa è continua e dotata di derivata prima.

Osserviamo anche che secondo la definizione ogni punto di una eventuale porzione rettilinea del diagramma della $f(x)$ è un suo punto di flesso (qualifica con scarse conseguenze).

I23a.06 Ci proponiamo ora di caratterizzare mediante formule i punti di flesso di una funzione-RtR che non appartengono ad una porzione rettilinea del suo diagramma.
A questo scopo denotiamo con $y = Y(x)$ l'equazione della retta $\mathtt{t}$.

Si ha un **flesso ascendente della funzione** in P_0 quando il diagramma della funzione s'innalza rispetto alla tangente $\mathtt{t}$ ossia è tale che

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) \leq Y(x) \qquad , \qquad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) \geq Y(x) \ .$$

Si ha un **flesso discendente della funzione** in P_0 sse il diagramma della $f(x)$ si abbassa rispetto alla tangente, ovvero:

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies f(x) \geq Y(x) \qquad , \qquad x_0 < x < x_0 + \delta \implies f(x) \leq Y(x) \ .$$

È opportuno effettuare altre distinzioni tra diversi tipi di punti di flesso $\langle x_0, f(x_0)\rangle$.

Si dicono **punti di flesso stazionari della funzione** i punti caratterizzati dalla $f'(x_0) = 0$, con il diagramma che può sia innalzarsi che abbassarsi rispetto alla tangente che ora è costituita da una retta orizzontale $y = f(x_0)$.

Tra i punti di flesso nonstazionari si distinguono quelli con il diagramma che s'innalza o si abbassa rispetto alla tangente crescente (casi nei quali $f'(x_0) > 0$), da quelli per i quali il diagramma della funzione s'innalza o si abbassa rispetto alla tangente decrescente (caratterizzati da $f'(x_0) < 0$).

I23a.07 **Teorema** Consideriamo gli intervalli $I := (a,b)$ e $\overline{I} := [a,b]$, la funzione $f(x) \in \lceil \overline{I} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ e $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) = 0$ ed esiste $f''(x_0)$; se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un'ascissa di minimo locale; se invece $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un'ascissa di massimo locale.

Dim.: Consideriamo la formula di Taylor per la funzione $f(x)$ arrestata al secondo ordine [I21g03(2), I21g04(1)].

$$f(x_0 + h) \ = \ f(x_0) + h\, f'(x_0) + \frac{h^2}{2}\, [f''(x_0) + \epsilon_2(h)] \qquad \text{con} \qquad \lim_{h\to 0} \epsilon_2(h) = 0 \ .$$

Per la funzione che soddisfa le ipotesi

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \ = \ \frac{h^2}{2}\, [f''(x_0) + \epsilon_2(h)] \ .$$

L'ipotesi $\lim_{h\to 0} \epsilon_2(h) = 0$ e la $f''(x_0) \neq 0$ implicano che per ogni $\eta \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che per $|h| < \delta$ sia $|\epsilon_2(h)| < \dfrac{1}{2}\, |f''(x_0)|$.
Di conseguenza per $|h| < \delta$ il valore della $f''(x_0) + \epsilon_2(h)$ ha lo stesso segno della $f''(x_0)$ e sia per $-\delta < h < 0$ che per $0 < h < \delta$ la differenza $f(x_0 + h) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $f''(x_0)$.

Per le definizioni degli estremanti locali questo equivale all'asserto ▮

Va sottolineato che le sole uguaglianze $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ non consentono di giungere a una conclusione; infatti si trovano funzioni che in corrispondenza di una ascissa x_0 hanno le prime due derivate nulle e presentano differenti caratteristiche per gli estremi. Ad esempio per $x_0 = 0$ la $f_1(x) = x^3$ e la $f_2(x) = -x^5$ non presentano estremi, la $f_3(x) = x^4$ presenta un minimo, mentre la $f_4(x) = -x^6$ nell'origine presenta un massimo.

I23a.08 Vediamo ora un criterio per l'esistenza di estremi locali e di flessi che si serve di informazioni anche riguardanti derivate di ordine superiore al secondo.

(1) Teorema Consideriamo $I := (a,b)$, $\overline{I} := [a,b]$, $f(x) \in \lceil \overline{I} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ e $x_0 \in I$ tale che si trovi un intero $n = 2, 3, ...$ per il quale esistano le derivate $f'(x_0), f^{(2)}(x_0), ..., f^{(n)}(x_0)$ e sia $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(a) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un'ascissa di minimo locale.

(b) Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un'acissa di massimo locale.

(c) Se n è dispari ($n = 3, 5, ...$) e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora x_0 è un'ascissa di flesso e $\langle x_0, f(x_0) \rangle$ un punto in cui la funzione è crescente (la tangente è orizzontale e la curva, al crescere della x, passa dal trovarsi al di sotto della tangente al trovarsi al di sopra di essa).

(d) Se n è dispari ($n = 3, 5, ...$) e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora x_0 è un'ascissa di flesso ed $\langle x_0, f(x_0) \rangle$ un punto in cui la funzione è decrescente (la tangente è orizzontale e la curva, al crescere della x, passa dal trovarsi sopra al trovarsi sotto la tangente).

Dim.: Ancora si ricorre alla formula di Taylor [I21g03(2), I21g04(1)) che per le attuali ipotesi assumiamo nella forma

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \;=\; \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \epsilon_n(h) \right] \qquad \text{con } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0 \;\; .$$

Ancora per h sufficientemente piccolo $f^{(n)}(x_0) + \epsilon_n(h)$ ha il segno di $f^{(n)}(x_0)$ e semplici interpretazioni geometriche delle situazioni (a)-(d) portano alle relative conclusioni ▮

I23a.09 Diamo ora alcuni criteri per la presenza di minimi e massimi per ascisse per le quali non esista la derivata seconda della funzione.

(1) Prop.: Se $f'(x_0) = 0$, esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathsf{dom}(f) \;\text{ e }\; \forall x \in I \setminus \{x_0\} \;\vdots\; f''(x) > 0 \; ,$$

allora x_0 è un'ascissa di minimo.

Dim.: Applichiamo la formula di Taylor I21g03(1) con il termine complementare nella forma di Lagrange I21g04(2) ottenendo

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \;=\; \frac{h^2}{2!} f''(x_0 + \theta\, h) \quad \text{con } \; 0 < \theta < 1 \; ;$$

quando $|h| < \delta$ si ha $\theta\, h < \delta$ e la disuguaglianza dell'ipotesi comporta l'asserto ▮

(2) Prop.: Se $f'(x_0) = 0$ ed esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathsf{dom}(f) \;\text{ e }\; \forall x \in I \setminus \{x_0\} \;\vdots\; f''(x) > 0 \; ,$$

allora x_0 è un'ascissa di massimo.

Dim.: È la duale-UD della precedente ▮

(3) Prop.: Se $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ed esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathsf{dom}(f) \quad \text{e} \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \;\; \vdots \;\; f^{(n)}(x) > 0 \ ,$$

allora x_0 è un'ascissa di minimo.

Dim.: Come per la dimostrazione di (1) applichiamo le formule I21g03(1) e I21g04(2) ottenendo

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \;=\; \frac{h^n}{n!}\, f^{(n)}(x_0 + \theta\, h) \quad \text{con} \;\; 0 < \theta < 1 \ ;$$

quando $|h| < \delta$ si ha $\theta\, h < \delta$ e la disuguaglianza dell'ipotesi comporta l'asserto ▮

(4) Prop.: Se $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ed esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$I := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \mathsf{dom}(f) \quad \text{e} \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \;\; \vdots \;\; f^{(n)}(x) < 0 \ ,$$

allora x_0 è un'ascissa di massimo.

Dim.: Duale-UD della precedente ▮

I23 b. funzioni concave, funzioni convesse, flessi

I23b.01 Un insieme S di punti del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ si dice **insieme convesso** sse per due qualsiasi punti $P,Q\in S$ accade che tutti i punti del segmento $\overline{PQ}$ appartengono ad S.

Due esempi di insiemi convessi ampiamente utilizzati sono:

i cerchi aperti, insiemi della forma $\{\langle x,y\rangle \mid (x-a)^2+(y-b)^2<r^2\}$ per qualsiasi scelta di $a,b\in\mathbb{R}$ e di $r\in\mathbb{R}_+$;

i rettangoli-hd chiusi, insiemi della forma $\{\langle x,y\rangle \mid (|x-a|\le c, |y-b|\le d\}$ per qualsiasi scelta di $a,b\in\mathbb{R}$ e di $c,d\in\mathbb{R}_+$.

Più in generale sono insiemi piani convessi tutti gli insiemi costituiti dai punti interni dei poligoni regolari e gli insiemi di punti interni a ogni ellisse (e quindi a ogni circonferenza).
Anche ampliando i suddetti insiemi con i punti delle loro frontiere si ottengono insiemi convessi.

Gli insiemi convessi precedenti sono limitati, ma interessano anche insiemi piani convessi illimitati, come segnalano i seguenti esempi.

Sono insiemi convessi tutti i semipiani; tutti i quattro quadranti; ogni insieme di punti delimitato da due rette parallelele; l'insieme dei punti delimitati da un angolo acuto, retto o ottuso.

Sono convessi l'insieme dei punti associati a una parabola e costituiti da tutti i punti di tutti i segmenti che uniscono una qualsiasi coppia di punti della parabola stessa; l'insieme dei punti associati ad una falda di iperbole e costituiti da tutti i punti di tutti i segmenti che uniscono una qulsiasi coppia di punti della falda stessa.

I23b.02 Sia tra i convessi limitati che tra i convessi illimitati si trovano insiemi aperti e insiemi chiusi. Più precisamente si osserva che aggiungendo a un insieme convesso aperto la cui frontiera non presenta porzioni rettilinee una qualsiasi parti dei suoi punti di frontiera si ottiene un altro insieme convesso, che non è né aperto, né chiuso; in particolare a un cerchio aperto si possono aggiungere punti e archi della circonferenza scelti ad arbitrio.

Nel caso di insieme convesso la cui frontiera presenta dei lati rettilinei (ad esempio l'insieme dei punti interni a un poligono convesso), si possono aggiungere punti dei lati, ma solo se costutuenti sottosegmenti, ossia evitando insiemi di punti con interruzioni.

Si osserva inoltre che trasformando un insieme convesso a traslazioni, rotazioni, riflessioni e omotetie si ottengono altri insiemi convessi.

I23b.03 Evidentemente l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso. In particolare sono convesse le figure ottenute intersecando cerchi, ellissi, parabole e fald di iperboli.

Vi sono invece unioni di insiemi convessi che non sono convesse.

(1) Prop.: L'unione di due qualsiasi cerchi C_1 e C_2 noncomparabili come insiemi di punti-RR è un insieme nonconvesso.

Dim.: Consideriamo il caso dei due cerchi chiusi e una qualsiasi delle due tangenti comuni alle due circonferenze. Il segmento tra i due punti di tangenza ha tutti i punti interni estranei ad entrambe le circonferenze.
Consideriamo il caso dei due cerchi aperti e uno dei due segmenti di tangenza a entrambe le circonferenze prima preso in esame. Questo segmento fa parte di un triangolo curvilineo insieme agli archi sulle due circonferenze che hanno una estremità in una estermità del segmento e l'altra in comune.

Ciascuno dei segmenti aventi le due estremità nei due cerchi e sufficientemente vicini ai due suddetti archi ha punti interni estranei a entrambi i cerchi ▮

Abbiamo visto insiemi convessi limitati, come le ellissi e i poligoni regolari, e insiemi convessi illimitati, come i semipiani.
Ogni intersezione di un certo numero di semipiani, quando non si riduce all'insieme vuoto costituisce un insieme convesso; questi insiemi convessi possono essere illimitati (come gli angoli di ampiezza inferiore a 180°, che risulta lecito chiamare angoli convessi) o limitati e nel secondo caso determinano tutti e soli i poligoni convessi; tra questi i poligoni regolari costiuiscono casi particolari.

I23b.04 Consideriamo un intervallo reale I, limitato o illimitato, e una funzione reale $f(x)$ avente il dominio $\mathsf{dom}(f) \supseteq I$.
Si dice **insieme-RR maggiorante della funzione** $f(x)$ ridotta ad I l'insieme di punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathsf{Mjrnt}(f, I) \;:=\; \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;⁋\; x \in I \;,\; y \geq f(x)\} \;;$$

La nozione duale-UD è quella di **insieme minorante-RR della funzione** f ridotta ad I definito come l'insieme di punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\mathsf{Mnrnt}(f, I) \;:=\; \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;⁋\; x \in I \;,\; y \leq f(x)\} \;.$$

Evidentemente questi insiemi sono illimitati

Tra questi insiemi se ne individuano facilmente alcuni convessi: per ogni intervallo reale il maggiorante di $y = x^2$, il minorante di $y = -x^{2\,k}$ per ogni $k \in \mathbb{P}$, il maggiorante di $y = \mathsf{e}^x$ e il minorante di $y = \ln x$ sono insiemi convessi.
Sono invece nonconvessi per ogni intervallo reale il minorante di $y = 2^{2\,k}$ per ogni $k \in \mathbb{P}$ e il maggiorante di $y = \ln x$.
Per le funzioni $y = \sin\, x$ e $y = \cos\, x$ si trovano intervalli ai quali corrispondono insiemi maggioranti e minoranti sia convessi che nonconvessi. Per chiarire la questione possiamo limitarci ai maggioranti di $y = \sin\, x$: tutti gli intervalli reali che hanno al loro interno una ascissa di massimo portano a insiemi maggioranti nonconvessi, mentre tutti gli intervalli che non contengono ascisse di massimo portano a insiemi maggioranti convessi.

//input pI23b04

I23b.05 La funzione-RtR $f(x)$ nell'intervallo reale I sottoinsieme del suo dominio si dice **funzione che rivolge la concavità verso l'alto** sse $\mathsf{Mjrnt}(f, I)$ è un insieme convesso; dualmente-UD la funzione $f(x)$ in I si dice **funzione che rivolge la concavità verso il basso** sse $\mathsf{Mnrnt}(f, I)$ è un insieme convesso.

Per ogni intervallo reale I e per ogni funzione-RtR $f(x)$ con $\mathsf{dom}(f) \subseteq I$ introduciamo la notazione

$$\mathsf{arc}(f, I) \;:=\; \big\{x \in I \;:|\; \big\langle x, f(x)\big\rangle\big\}$$

per denotare l'arco ottenuto dal diagramma della funzione $f(x)$ ridotto ai valori dell'ascissa appartenenti all'intervallo I.

Le precedenti nozioni duali-UD di concavità verso l'alto e verso il basso in un intervallo si possono attribuire all'arco $\mathsf{arc}(F, I)$.

In seguito useremo anche i due termini duali-UD **funzione concava-U** come equivalente a funzione che rivolge la concavità verso l'alto e **funzione concava-D** come sinonimo di funzione che rivolge la concavità verso il basso.

Denotiamo con $\mathsf{FunConcU}_I$ l'insieme delle funzioni definite nell'intervallo I che rivolgono la concavità verso l'alto; denotiamo invece con $\mathsf{FunConcD}_I$ l'insieme delle funzioni definite nell'intervallo I che rivolgono la concavità verso il basso.

Anche gli insiemi $\mathsf{FunConcU}_I$ e $\mathsf{FunConcD}_I$ costituiscono un duetto per la dualità-UD.

Spesso sono usati anche i termini semplificati di funzione convessa per ogni funzione di $\mathsf{FunConcU}_I$ e dfunzione concava per ogni funzione appartenente a $\mathsf{FunConcD}_I$.

I23b.06 Le sole funzioni che rivolgono la concavità sia verso l'alto che verso il basso in un intervallo I sono le funzioni lineari in I. Questo fatto si può formalizzare con l'espressione

$$(1)\qquad \mathsf{FunConcU}_I \cap \mathsf{FunConcD}_I = \{a_0, a_1 \in \mathbb{R} :| \lceil x \in I \,\nmid\, a_0 + a_1\, x \rceil \} \ .$$

Rivolgono la concavità verso l'alto le funzioni $|x|$, b^x per ogni $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ e le funzioni $a\,x^2 + b\,x + c$ relative ad $a > 0$.
Rivolgono la concavità verso il basso le funzioni $\log_b x$ per ogni $b > 1$, le funzioni $\log_b |x|$ per ogni $b \in (0,1)$ e le funzioni $a\,x^2 + b\,x + c$ per $a < 0$.

Evidentemente cambiando di segno a una funzione di $\mathsf{FunConcU}$ si ottiene una funzione di $\mathsf{FunConcD}$ e viceversa (ancora si ha dualità-UD).
A questo proposito si osserva che l'insieme delle funzioni-RtR che rivolgono la concavità sia verso il basso che verso l'alto, cioè l'insieme delle funzioni lineari, è invariante rispetto al cambiamento di segno.

Si constata inoltre che ogni combinazione lineare con coefficienti positivi di funzioni di $\mathsf{FunConcU}_I$ appartiene a $\mathsf{FunConcU}_I$; ad esempio la funzione $\sinh(x) := \dfrac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{2}$ è concava verso l'alto come lo sono le funzioni $y = \mathsf{e}^x$ ed e^{-x}.

Per dualità-UD ogni combinazione lineare con coefficienti positivi di funzioni di $\mathsf{FunConcD}_I$ appartiene a $\mathsf{FunConcD}_I$.
In particolare tutti i polinomi con potenze pari della x e coefficienti positivi appartengono a $\mathsf{FunConcU}_{\mathbb{R}}$.

Le combinazioni lineari con coefficienti negativi fanno invece passare da $\mathsf{FunConcU}_I$ a $\mathsf{FunConcD}_I$ e viceversa.

I23b.07 Le nozioni di concavità introdotte sono proprietà del livello locale. Ad esse si possono accostare proprietà del livello puntuale e proprietà del livello globale.

Una funzione $y = f(x)$ si dice che rivolge la concavità verso l'alto // il basso in corrispondenza di un'ascissa x_0, ossia in un punto $\langle x_0, f(x_0)\rangle$, sse esiste un intervallo I contenente x_0 e contenuto in $\mathsf{dom}(f)$ nel quale la funzione rivolge la concavità verso l'alto // il basso.
Per il livello globale si dice che una funzione rivolge la concavità verso l'alto // il basso (*tout court*), sse in ogni punto interno a un intervallo appartenente al suo dominio rivolge la concavità verso l'alto // il basso.

Fatta questa distinzione, va tuttavia segnalato che per la gran parte delle funzioni reali continue di largo uso sono derivabili con derivata continua in quasi tutti i punti nei quali sono continue e spesso è poco rilevante la distinzione tra le proprietà di concavità puntuale e e di concavità locale.

Quando si stabilisce se e dove una data funzione volge la concavità verso l'alto o verso il basso interessa individuare intervalli del suo dominio il più possibile estesi: infatti queste proprietà si mantengono banalmente passando da una funzione considerata in un dato intervallo alla stessa funzione considerata in un intervallo più ridotto del precedente.

I23b.08 **(1) Prop.**: Consideriamo un intervallo aperto I e una funzione $f \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ due volte derivabile nell'intervallo I. Se per ogni $x \in I$ si ha $f''(x) \geq 0$, allora la funzione sull'intervallo I presenta la concavità rivolta verso l'alto.

Dim.: L'ipotesi implica che in I $f'(x)$ è funzione nondecrescente. Si tratta allora di dimostrare per due arbitrari $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ che per ogni $x \in (x_1, x_2)$ il punto $\langle x, f(x) \rangle$ del diagramma si trova al di sotto del segmento congiungente i punti $P_1 = \langle x_1, f(x_1) \rangle$ e $P_2 = \langle x_2, f(x_2) \rangle$.
Procediamo per assurdo considerando un $\overline{x} \in (x_1, x_2)$ tale che $\overline{P} := \langle \overline{x}, f(\overline{x}) \rangle$ si trovi al di sopra della corda P_1P_2. Questo equivale alla seguente catena di disuguaglianze riguardanti i coefficienti angolari delle tre rette che passano, risp., per P_1 e $\overline{P}$, per P_1 e P_2 e per $\overline{P}$ e P_2:

$$\frac{f(\overline{x}) - f(x_1)}{\overline{x} - x_1} > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_2) - f(\overline{x})}{x_2 - \overline{x}} .$$

Per il teorema del valor medio [I21b01 esistono $x' \in (x_1, \overline{x})$ e $x'' \in (\overline{x}, x_2)$ tali che

$$f'(x') = \frac{f(\overline{x}) - f(x_1)}{\overline{x} - x_1} \quad \text{e} \quad f(x'') = \frac{f(x_2) - f(\overline{x})}{x_2 - \overline{x}} .$$

Di conseguenza $f'(x') > f'(x'')$ e questa disuguaglianza è in contrasto con il carattere nondecrescente della $f'(x)$ ∎

(2) Prop.: Consideriamo l'intervallo aperto I e una funzione $f \in \lceil \overline{I} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ due volte derivabile in I. Se per $x \in I$ si ha $f''(x) \leq 0$, allora la funzione in x ha la concavità rivolta verso il basso.

Dim.: Dalla precedente per dualità-UD ∎

I23b.09 Come conseguenza delle proposizioni precedenti si definisce un procedimento per l'esame dei punti nei quali si annulla la derivata seconda.

(1) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $\overline{I} = [x_0 - \delta, x_0 + \eta]$ dotata di derivata seconda in $I = (x_0 - \delta, x_0 + \eta)$ tale che $f''(x_0) = 0$. Valgono le implicazioni che seguono.

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \;:\; f''(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \eta) \;:\; f''(x) > 0 \implies$ la funzione in x_0 è concava-U;

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \;:\; f''(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \eta) \;:\; f''(x) < 0 \implies$ la funzione in x_0 è concava-D;

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \;:\; f''(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \eta) \;:\; f''(x) < 0 \implies$ la funzione in x_0 ha flesso discendente, che passa al di sotto della tangente ;

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \;:\; f''(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \eta) \;:\; f''(x) < 0 \implies$ la funzione in x_0 ha flesso ascndente, che passa al di sopra della tangente .

Dim.: Per ciascuna delle 4 implicazioni enunciate discende dalla semplice interpretazione geometrica della corrispondente coppia di disuguaglianze ipotizzate ∎

Si osserva che i punti di flesso come quelli individuati dalle condizioni precedenti sono punti di passaggio sul diagramma della funzione da un arco concavo-U ad arco concavo-D o viceversa.

I23b.10 Per decidere su flessi e concavità di alcune funzioni-RtR si rende necessario fare ricorso a derivate di ordine 3 o più.

(1) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno dell'ascissa x_0 per la quale esista la derivata terza e sia $f''(x_0) = 0$.

Se $f^{(3)}(x_0) > 0$, allora x_0 è ascissa di flesso ascendente;

Se $f^{(3)}(x_0) < 0$, allora x_0 è ascissa di flesso discendente.

Dim.: Si ricorre alla formula di Taylor troncata al terzo ordine con il resto nella forma di Peano [I21g03(2), I21g03(1)],

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\, f'(x_0) \ = \ \frac{(x - x_0)^3}{3!} \ \left[f^{(3)}(x_0) + \epsilon_3(x) \right]$$

e da essa si ricava che in tutti i punti di intorni opportuni di x_0 il segno del secondo membro è costantemente quello di $\ (x - x_0)^3\, f^{(3)}(x_0)$ ∎

Nei casi nei quali $f^{(3)}(x_0) = 0$ si richiedono ulteriori conoscenze sulla $f(x)$. Un criterio di portata più generale, ma come i precedenti non esauriente, può coinvolgere altre derivate.

(2) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno dell'ascissa x_0 per la quale esista la derivata n-esima per un dato intero $n \geq 3$ e valgano le relazioni $f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Se n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora in x_0 la funzione è concava-U;
se n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora in x_0 la funzione è concava-D;
se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora in x_0 la funzione ha un flesso ascendente;
se n è dispari e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora in x_0 la funzione ha un flesso discendente.

Dim.: Si ricorre alla formula di Taylor troncata all'ordine n con il resto nella forma di Peano [I21g03(2) e I21g03(1)),

$$f(x) - f(x_0) - (x - x_0) f'(x_0) \ = \ \frac{(x - x_0)^n}{n!} \ \left[f^{(n)}(x_0) + \epsilon_n(x) \right]$$

per constatare che in intorni opportuni di x_0 il segno del secondo membro si mantiene costantemente uguale a quello di $\ (x - x_0)^n\, f^{(n)}(x_0)$ ∎

I23 c. asintoti di una funzione-RtR

I23c.01 Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intervallo illimitato a destra $(d, +\infty)$. Si dice che la retta nonverticale e non orizzontale espressa dalla $Y(x) = m\,x + q$ con $m \neq 0$ è **asintoto obliquo per** $x \to +\infty$ o **asintoto obliquo a destra** del diagramma della $f(x)$ sse la differenza $Y(x) - f(x)$ tende a 0 per $x \to +\infty$.

Per dualità-LR si considera funzione $f(x)$ definita in un intervallo illimitato a sinistra $(-\infty, c)$; si dice che la retta nonverticale e non orizzontale $Y(x) = m\,x + q$ con $m \neq 0$ è **asintoto obliquo per** $x \to -\infty$ o **asintoto obliquo a sinistra** del diagramma della $f(x)$ sse la differenza $Y(x) - f(x)$ tende a 0 per $x \to -\infty$.

Spesso i termini precedenti si semplificano perdendo l'aggettivo "obliquo".

Si osserva che un asintoto $Y(x) = m\,x + q$ della $f(x)$ risulta

$$\text{asintoto crescente a destra sse } m > 0 \quad , \quad \text{decrescente a destra sse } m < 0 \quad ,$$
$$\text{crescente a sinistra sse } m > 0 \quad , \quad \text{decrescente a sinistra sse } m > 0 \quad .$$

I23c.02 Si dice **asintoto orizzontale a destra** della funzione $f(x)$ definita in un intervallo illimitato a destra una retta della forma $Y = q$ tale che $\lim_{x\to+\infty} |f(x) - q| \;=\; 0$.

Per dualità-LR si dice **asintoto orizzontale a destra** della funzione $f(x)$ definita in un intervallo illimitato a sinistra una retta della forma $Y = q$ tale che $\lim_{x\to-\infty} |f(x) - q| \;=\; 0$.

Evidentemente per ogni diagramma di funzione-RtR si può avere al più un asintoto (obliquo o orizzontale) a destra e al più un asintoto (obliquo o orizzontale) a sinistra.

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a,b) con a reale finito; si dice che la retta $x = a$ è **asintoto verticale** della funzione per $x \to a+$ del relativo diagramma sse

$$\lim_{x\to a+} f(x) \;=\; +\infty \;\text{ oppure }\; \lim_{x\to a+} f(x) \;=\; -\infty \;.$$

Dualmente-LR consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intervallo (a,b) con b reale finito; si dice che la retta $x = b$ è **asintoto verticale** per $x \to b-$ del relativo diagramma sse

$$\lim_{x\to b-} f(x) \;=\; +\infty \;\text{ oppure }\; \lim_{x\to a+} f(x) \;=\; -\infty \;.$$

Gli asintoti sono stati attribuiti inizialmente ai diagrammi delle funzioni-RtR, ma non vi sono ragioni per non attribuirli direttamente alle funzioni stesse.

I23c.03 Vediamo alcuni esempi.

La retta $Y(x) = \pi + 5$ è asintoto orizzontale a destra della funzione $f_1(x) := \arctan(2\,x) + 5$ per $x \to +\infty$.

La retta $Y(x) = -2\pi - 7$ è asintoto orizzontale della funzione $f_2(x) := \arctan(4x) - 7$ per $x \to -\infty$.

La retta $x = 0$ è asintoto verticale della funzione $f_3(x) := \dfrac{1}{x}$ per $x \to 0+$ e per $x \to 0-$.

Per k intero positivo qualsiasi e per ogni q reale la retta $x = q$ è asintoto verticale della funzione $f_4(x) = \dfrac{1}{(x-q)^k}$ per $x \to q+$ e per $x \to q-$.

Consideriamo la funzione $f_5(x) := 2x + \arctan x$; $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f_5(x)}{x} \;=\; \lim_{x\to+\infty} \left[2 + \dfrac{\arctan x}{x}\right] \;=\; 2$ e $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2\,x] \;=\; \lim_{x\to+\infty} \arctan x \;=\; \dfrac{\pi}{2}$; quindi $f_5(x)$ ammette come asintoto per $x \to +\infty$ la retta $Y(x) = 2\,x + \dfrac{\pi}{2}$.

Similmente si trova che la $f_5(x)$ ammette come asintoto per $x \to -\infty$ la retta $Y(x) = 2\,x - \frac{\pi}{2}$.

Consideriamo la funzione $f_6(x) := \sqrt[3]{x^3 - x}$, definita per ogni x reale.

Per essa si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} = 1$.

Considerato che $f_6(x) - x = x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}} - x = x\left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/3} - 1\right] = -\frac{1}{x}\,\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{1/3}-1}{\frac{-1}{x^2}}$, passando al limite per $x \to +\infty$, ossia per $-\frac{1}{x^2} \to 0$, si ottiene $\lim_{x\to+\infty}[f_6(x) - x] = 0$; questo implica che $f_6(x)$ per $x \to +\infty$ ammette come asintoto la retta $Y(x) = x$.

I23c.04 Presentiamo due caratterizzazioni degli asintoti obliqui spesso utili.

(1) Teorema Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $(d, +\infty)$ ha come asintoto per $x \to +\infty$ la retta $Y = mx + q$ sse

(i) esiste finito $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, che denotiamo con m, e

(ii) esiste finito $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - m\,x]$, che denotiamo con q.

Dim.: "$\Longrightarrow$" Da $\lim_{x\to+\infty} Y(x) - f(x) = 0$ segue $\lim_{x\to+\infty} m + \frac{q - f(x)}{x} = 0$, cioè (i).

Da questa segue subito (ii).

"$\Longleftarrow$" Se vale (i) si può considerare $f(x) - m\,x$ e si osserva che $\lim_{x\to+\infty} f(x) - m\,x$ esiste finito (e lo denotiamo con q) sse $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - m\,x - q] = 0$, cioè sse la $Y(x) = m\,x + q$ è asintoto per la $f(x)$ ▮

(2) Teorema Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $(-\infty, c)$ ha come asintoto per $x \to -\infty$ la retta $Y(x) = m\,x + q$ sse

(i) esiste finito $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, che denotiamo con m, e

(ii) esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f(x) - m\,x$, che denotiamo con q.

Dim.: La dimostrazione è la duale-LR della precedente ▮

I23c.05 Per le funzioni derivabili, cioè per la gran parte delle funzioni che vengono effettivamente utilizzate, sussiste un duetto duale-LD di condizioni sufficiente all'esistenza di asintoti, di frequente utilità.

(1) Teorema Consideriamo la funzione $f(x)$ definita e derivabile in un intervallo $(d, +\infty)$.

Se sono verificate le due condizioni

(i) esiste finito $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ che denotiamo con m,

(ii) esiste finito $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx]$ che denotiamo con q,

allora la retta $Y(x) = m\,x + q$ è asintoto per $x \to +\infty$ della $f(x)$.

Dim.: Le due condizioni implicano le condizioni (i) e (ii) dei due teoremi precedenti e consentono di applicare le deduzioni delle implicazioni "$\Longleftarrow$" ▮

(2) Teorema Consideriamo la funzione $f(x)$ definita e derivabile in un intervallo $(-\infty, c)$.

Se sono verificate le due condizioni

(i) esiste finito $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$, che denotiamo con m,

(ii) esiste finito $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - m\,x]$, che denotiamo con q,

allora la retta $Y(x) = m\,x + q$ è asintoto per $x \to -\infty$ della $f(x)$ ▮

Diamo un controesempio riguardante una funzione dotata di derivata della quale non esistono i limite all'infinito ma che possiede asintoto. La funzione $f(x) = x + \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ evidentemente ammette come asintoto orizzontale la $Y(x) = x$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$; la sua derivata $f'(x) = 1 + 2\cos(x^2) - \dfrac{\sin(x^2)}{x^2}$ non ammette, invece, limite né per $x \to +\infty$, né per $x \to -\infty$ a causa delle oscillazioni del termine $2\cos(x^2)$.

I23c.06 Le caratterizzazioni degli asintoti delle funzioni reali possono essere espresse mediante i simboli di collezioni di funzioni-RtR $\mathbf{o}$, $\mathbf{O}$, $\sim$ e $\asymp$ introdotti in I12h.

Per quanto riguarda la relazione di equivalenza asintotica conviene osservare esplicitamente che l'affermazione

$$Y(x) = m\,x + q \text{ è asintoto per } x \to \pm\infty \text{ della funzione } f(x)$$

equivale alla relazione $f(x) \sim_{x\to\pm\infty} [m\,x + q]$.

Anche per le caratterizzazioni degli asintoti, cioè anche nella ricerca di possibili asintoti di una funzione $f(x)$ può essere utile ricondursi a funzioni poco differenti da quella in esame. Servono a questo proposito i due duetti duali-LR di criteri che seguono.

(1) Prop.: Si abbiano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, la seconda esprimibile come $g(x) = f(x) + \eta(x)$ con $\lim_{x\to+\infty} \eta(x) = 0$. Se $g(x)$ possiede come asintoto per $x \to +\infty$ la retta $Y(x) = m\,x + q$, la $f(x)$ possiede lo stesso asintoto ▮

(2) Prop.: Si abbiano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, la seconda esprimibile come $g(x) = f(x) + \eta(x)$ con $\lim_{x\to-\infty} \eta(x) = 0$. Se $g(x)$ possiede come asintoto per $x \to -\infty$ la retta $Y(x) = m\,x + q$, la $f(x)$ possiede lo stesso asintoto ▮

(3) Prop.: Si abbiano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, la seconda esprimibile come $g(x) = f(x) \cdot u(x)$ con $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 1$. Se $g(x)$ possiede come asintoto per $x \to +\infty$ la retta $Y(x) = m\,x + q$, la $f(x)$ possiede lo stesso asintoto ▮

(4) Prop.: Si abbiano due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, la seconda esprimibile come $g(x) = f(x) \cdot u(x)$ con $\lim_{x\to-\infty} u(x) = 1$. Se $g(x)$ possiede come asintoto per $x \to -\infty$ la retta $Y(x) = m\,x + q$, la $f(x)$ possiede lo stesso asintoto ▮

I23c.07 Prop. Consideriamo n intero positivo, a_n reale positivo e la funzione $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$ con $P(x) := a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_0$.

La $f(x)$ ammette come asintoto per $x \to +\infty$ la retta $Y(x) = {a_n}^{1/n} \left(x + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right)$.

Dim.: Dato che $f(x) = \sqrt[n]{{a_n}^{1/n}\,x \left(1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n\,x} + \cdots + \dfrac{a_0}{a_n\,x^n}\right)^{1/n}}$, si ha $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = {a_n}^{1/n}$.

Si tratta quindi di esaminare $f(x) - {a_n}^{1/n}\,x = {a_n}^{1/n}\,x \left[(1 + \eta(x))^{1/n} - 1\right]$, ove, quale che sia il segno di a_{n-1},

$$\eta(x) := \frac{a_{n-1}}{a_n\,x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n\,x^n} \to 0 \quad \text{per} \quad x \to +\infty \ .$$

Dato che $\lim_{\eta\to 0} \dfrac{1+\eta)^{1/n} - 1}{\eta} = \dfrac{1}{n}$, si ha $(1 + \eta(x)\,)^{1/n} - 1 \ \sim_{x\to+\infty} \ \dfrac{\eta(x)}{n}$ e di conseguenza

$$f(x) - {a_n}^{1/n}\,x \ \sim_{x\to+\infty} \ {a_n}^{1/n}\,x\,\frac{\eta(x)}{n} \ \sim_{x\to+\infty} \ {a_n}^{1/n}\,x\,\frac{1}{n}\left[\frac{a_{n-1}}{a_n\,x} + \cdots\right] \ \sim_{x\to+\infty} \ {a_n}^{1/n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n\,x}$$

e questo implica l'asserto ▮

Alla situazione precedente si possono ricondurre, per dualità-UD, gli asintoti di funzioni della forma $f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$, quando n è dispari e $Q(x) = b_n\, x^n + \cdots$ con $b_n < 0$.

Un caso particolare è fornito dal ramo nel primo quadrante dell'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ che viene fornito dalla espressione $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^1 - a^2}$. Questa si riconduce alla precedente con $n = 2$, $a_n = \dfrac{b^2}{a^2}$ e $a_{n-1} = 0$. In effetti il suddetto ramo ha come asintoto la retta $Y(x) = \dfrac{b}{a}x$.

I23c.08 Vediamo quali possono essere gli asintoti delle funzioni razionali.

(1) Prop.: Consideriamo una funzione razionale della forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0}{b_d\, x^d + b_{d-1}\, x^{d-1} + \cdots + b_1\, x + b_0} \quad \text{con} \quad n, d \in \mathbb{N} \text{ e } a_n, b_d \neq 0\ .$$

(a) La $R(x)$ presenta un asintoto obliquo a sinistra e uno a destra sse $n = d + 1$; in tal caso questi asintoti hanno la forma

$$Y(x) = \frac{a_n}{b_d}\, x + \frac{a_{n-1} - a_n\, b_{d-2}}{b_{d-1}}\ .$$

(b) La $R(x)$ presenta un asintoto orizzontale a sinistra e a destra diverso dall'asse Ox sse $n = d$; in tal caso l'asintoto è dato da $Y(x) = \dfrac{a_n}{b_d}$.

(c) La $R(x)$ presenta come asintoto orizzontale l'asse Ox sse $n < d$.

Dim.: (a) segue facilmente dalle definizioni; (b) e (c) si ottengono anche più rapidamente ▮

Gli eventuali asintoti verticali di una funzione razionale si ottengono dalla espressione nella quale compaiono esplicitamente gli zeri reali di numeratore e denominatore. Eliminando i fattori della forma $(x - r)$ che possono essere presenti sia nel numeratore che nel denominatore si ottiene una espressione della forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{b_d(x - r_1)^{p_1} \cdots (x - r_h)^{p_h}\, S(x)}\ ,$$

dove $S(x)$ è dato dal prodotto di polinomi quadratici senza radici reali. In tal caso gli asintoti verticali sono costituiti dalle rette aventi equazioni $x = r_1$, ..., $x = r_h$. Dalla parità di ciascun esponente p_i e dai valori $P(x_i)/b_d$ si possono dedurre facilmente le caratteristiche delle tendenze agli asintoti verticali.

I23 d. studi dell'andamento di alcune funzioni

I23d.01 Consideriamo la funzione $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$.

Il suo dominio è l'intero $\mathbb{R}$, il suo codominio $\mathbb{R}_+$ e si tratta di una funzione pari.

Il fatto che il denominatore $1+x^2$ cresca a $+\infty$ quando $|x| \to \pm\infty$ implica che si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0+$, che la funzione è crescente in $(-\infty, 0)$, è decrescente in $(0, +\infty)$ e presenta un unico massimo globale in $\langle 0, 1\rangle$. Essa non presenta alcun altro asintoto.

Per determinare il verso della concavità e i flessi occorre calcolare la sue derivate prima e seconda:

$$f'(x) \;=\; -\frac{2\,x}{(1+x^2)^2} \qquad , \qquad f''(x) \;=\; \frac{2(3\,x^2-1)}{(1+x^2)^3} \;=\; 6\,\frac{\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{(1+x^2)^3}\ .$$

Le constatazioni $f'(x) < 0 \iff x < 0$, $f'(x) = 0 \iff x = 0$ e $f'(x) > 0 \iff x > 0$ confermano le affermazioni precedenti sul crescere e decrescere del diagramma.
Si osserva inoltre, ancora in accordo con il carattere pari della funzione, che

$$\begin{array}{llll}
\text{per } x < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } \dfrac{1}{\sqrt{3}} < x & f''(x) > 0 & \text{quindi} & \text{funzione concava-U} \\
\text{per } x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} & f''(x) = 0 & \text{quindi} & \text{punti di flesso, con } f(x) = \dfrac{3}{4} \\
\text{per } -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}} & f''(x) < 0 & \text{quindi} & \text{funzione concava-D}
\end{array}$$

Per concludere determiniamo le tangenti nei punti di flesso.
Nel punto $\left\langle \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right\rangle$ la pendenza è data da $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ e quindi la tangente è caratterizzata dall'equazione

$$y - \frac{3}{4} \;=\; -\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{cioè} \qquad y \;=\; -\frac{3\sqrt{3}}{8}\,x + \frac{3}{8}\ .$$

La tangente in $\left\langle -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right\rangle$ si ottiene applicando semplicemente la trasformazione di parità

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{8}\,x + \frac{3}{8}\ .$$

I23d.02 Studiamo la funzione $f(x) \;:=\; \sqrt[3]{|x|}$.

Ancora si tratta di funzione definita per ogni x reale e pari; il suo studio si riduce quasi esclusivamente all'esame dell'andamento del duetto di funzioni duali-LR $f_-(x) := \sqrt[3]{-x}$ per $x \le 0$ ed $f_+(x) := \sqrt[3]{x}$ per $0 \le x$.

La seconda di queste funzioni funzione si annulla per $x = 0$, mentre per $0 < x$ è sempre crescente e più precisamente cresce illimitatamente, cioè si ha $\lim_{x\to+\infty} f_+(x) = +\infty$.

Di conseguenza la $f(x)$ decresce da $+\infty$ a 0 per $-\infty < x < 0$, presenta un minimo assoluto nel punto $\langle 0, 0\rangle$ e cresce da 0 a $+\infty$ per $0 < x < +\infty$.

L'espressione che si trova per le derivate prime unilaterali, ${f_\mp}'(x) = \mp\dfrac{1}{3\,x^{2/3}}$, conferma per la $f(x)$ l'andamento decrescente per $x \le 0$, implica che $\lim_{x\to 0-} f'(x) = -\infty$, che $\lim_{x\to 0+} f'(x) = +\infty$ e conferma l'andamento crescente per $0 < x$.
Nell'origine si ha quindi una cuspide con una sola tangente verticale, la $x = 0$, ossia l'asse Oy.

Per il verso della concavità e gli eventuali flessi servono le derivate seconde:

$$f_-{}''(x) \;=\; -\frac{2}{(-x)^{5/3}} < 0 \quad \text{per} \quad x < 0 \qquad , \qquad f_+{}''(x) \;=\; -\frac{2}{x^{5/3}} < 0 \quad \text{per} \quad 0 < x \;;$$

quindi la funzione rivolge la concavità verso il basso per ogni $x \neq 0$.

Per l'ascissa $x = 0$ invece la funzione rivolge la concavità verso l'alto, in conseguenza della definizione in b02; si tratta di un punto isolato che gode di questa proprietà.

I23d.03 **(1) Eserc.** Studiare l'andamento della funzione $-\dfrac{c\,x}{(x^2+c^2)^{3/2}}$ per $c \in \mathbb{R}_+$.

(2) Eserc. Studiare l'andamento della funzione $\dfrac{1}{x} + x + \mathsf{e}^{-x}$

(3) Eserc. Studiare l'andamento della funzione $\dfrac{x^2}{x^2+1}$

(4) Eserc. Studiare l'andamento della funzione $\dfrac{1}{1+\mathsf{e}^{-x}}$

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`