1

Capitolo G58
trigonometria razionale

Contenuti delle sezioni

5 pagine

G580.01 Questo capitolo è dedicato alle nozioni basilari della trigonometria razionale.
Questo approccio alla trigonometria è dovuto principalmente a Norman Wildberger ed è ampiamente esposto nel suo libro del 2005 *Divine Proportions*.
Esso si contrappone a quella che qui chiameremo trigonometria tradizionale primariamente in quanto sposta i calcoli verso l'uso di formule non basate sulle funzioni trascendenti elementari (seno, coseno, tangente, ...) ma su grandezze e funzioni che consentono di effettuare molti calcoli utilizzando solo espressioni razionali.

All'inizio vengono introdotte le due grandezze che consentono di razionalizzare una ampia gamma di formule della trigonometria e vengono presentate le principali di queste formule segnalando i molti problemi della trigonometria che esse permettono di risolvere.

Successivamente viene trattata la cosiddetta cromogeometria piana.

Nell'ultima parte viene introdotta la trigonometria sferica razionale e vengono presentate alcune delle sue molte formule.

G58 a. quadranza e spread

G58a.01 Inizieremo le considerazioni sulla trigonometria razionale collocandoci in uno spazio euclideo sui reali che possiamo denotare con $\mathbb{R}^{\times d}$, con d intero maggiore o uguale a 2.

Va tuttavia rilevato che molte formule e molti procedimenti della trigonometria razionali sono validi anche per i ben più semplici spazi $\mathbb{Q}^{\times d}$ e in particolare molte nozioni bidimensionali si possono introdurre e dimostrare per il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, ambiente la cui definizione è sensibilmente meno impegnativa di quella degli ambienti sopra accennati.
Inoltre una parte dei procedimenti prospettati, anche se piuttosto ridotta, è valida anche nell'ambiente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, decisamente molto economico.

G58a.02 Ricordiamo la definizione di **quadranza tra due punti** di uno spazio finitodimensionale sui reali come il quadrato della corrispondente distanza euclidea.
Definiremo inoltre **spread tra due vettori** o discrepanza tra due vettori come il quadrato del seno dell'angolo che essi formano.
Per estensione possiamo anche attribuire uno spread a due rette, a due semirette e a un angolo.
Queste due misure sono invarianti per traslazioni, rotazioni e riflessioni e queste proprietà fanno sì che esse, insieme ad altre loro derivate costituiscano strumenti di buona portata.

G58a.03 La quadranza costituisce una misura di quanto sono separati due punti.
Iniziamo da due punti del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $P_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ e $P_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$, dal corrispondente vettore $\overrightarrow{P_1\, P_2}$ e dalla distanza euclidea tra P_1 e P_2 che scriviamo $|P_1\, P_2| := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.
Definiamo invece **quadranza tra due punti** P_1 e P_2 la grandezza fornita dall'espressione razionale

$$\mathcal{Q}(P_1, P_2) \;:=\; (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |P_1\, P_2|^2 \;.$$

Sottolineiamo la maggiore semplicità della quadranza, sia per la sua espressione esclusivamente algebrica, sia per la conseguente maggiore facilità del suo calcolo.
Visivamente la distanza è data dalla lunghezza del segmento $\overline{P_1\, P_2}$, mentre la quadranza è rappresentata dall'area di un quadrato che ha per lato il suddetto segmento.

//input pG58a02

G58a.04 Lo spread, termine che si potrebbe tradurre in separazione direzionale, costituisce la misura di quanto sono differenti due direzioni che possono riguardare due rette, due vettori o un angolo individuato sul piano.

Denotiamo due rette con $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$ e denotiamo con V_1 il punto nelle quali si intersecano. Per maggiore concretezza tracciamo una circonferenza con centro in V_1 Γ; se le rette fossero orientate si potrebbero considerare il punto W_1 in cui procedendo da V_1 la semiretta con vertice in V_1 e parte di $\mathcal{R}_1$ interseca Γ e ll corrispondente punto W_2 per la semiretta parte di $\mathcal{R}_2$.

Una ragionevole misura della separazione delle direzioni dei due raggi potrebbe essere la distanza tra W_1 e W_2. Se l'angolo tra i due raggi tende a 0 lo stesso accade a $\text{dist}(W_1, W_2$, mentre se l'angolo tende a 90° $\text{dist}(W_1, W_2$ tende a $\sqrt{2}\, r$, con r raggio della Γ.

Tuttavia qui ci limitiamo a occuparci della separazione delle direzioni di due rette, oggetti geometrici più elementari da definire e per certi versi più fondamentali delle rette orientate, in quanto esse sono sufficienti per affrontare molti problemi e sono di utilizzo più semplice.
Le rette orientate e gli angoli orientati sono più utili delle rette in alcune costruzioni che riguardano il calcolo infinitesimale ossia per costruzioni formali più elaborate delle costruzioni della geometria elementare.

Osserviamo che lo spread di due rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ è dato da

$$\mathsf{sprd}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \ := \ \frac{\mathcal{Q}(B,C)}{\mathcal{Q}(A,B)} = \frac{Q}{R} \ .$$

Si osserva che evidentemente si possono introdurre e calcolare quadranza e spread anche operando con i semplici numeri razionali.

G58a.05 Vediamo in qual modo si può esprimere lo spread tra due rette mediante i parametri delle equazioni generali che le caratterizzano.
Consideriamo dunque le rette R_1 data dall'equazione $a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$ ed R_2 individuata dall'equazione $a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$.
Osserviamo che i tre parametri a_i, b_i e c_i dell'equazione di una retta sono individuati a meno di un fattore comune.
Ricordiamo la caratterizzazione del parallelismo di queste due rette:

$$\mathsf{R}_1 /\!\!/ \mathsf{R}_2 \iff a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0$$

e la caratterizzazione della loro ortogonalità

$$\mathsf{R}_1 \perp \mathsf{R}_2 \iff a_1\,b_2 + a_2\,b_1 = 0 \ .$$

Dato che lo spread tra le due rette è invariante per traslazione, possiamo supporre che esse si intersechino nell'origine del piano cartesiano e soddisfino le equazioni

$$a_1\,x + b_1\,y = 0 \qquad \text{e} \qquad a_2\,x + b_2\,y = 0 \ .$$

Scegliamo un punto appartenente ad $\mathcal{R}_1 \setminus \{O\}$ e denotiamolo con $B = \langle -b_1, a_1\rangle$. Il generico punto di R_2 si può scrivere $C = \langle -\lambda\,b_2\,,\,\lambda\,a_2\rangle$.
Denotata l'origine con la lettera $A := \langle 0, 0\rangle$, abbiamo il triangolo ΔABC le cui quadranze sono

$$\mathcal{Q}(A,B) = {b_1}^2 + {a_1}^2 \quad , \quad \mathcal{Q}(A,C) = \lambda^2\,({b_2}^2 + {a_2}^2) \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}(B,C) = (b_1 - \lambda\,b_1)^2 + (\lambda\,a_2 - a_1)^2 \ .$$

Per il teorema di Pitagora il triangolo $\Delta(ABC)$ ha angolo retto in C sse

$$\mathcal{Q}(A,C) + \mathcal{Q}(B,C) = \mathcal{Q}(A,B) \ ,$$

ossia sse vale l'equazione

$$\lambda^2\,\left({b_2}^2 + {a_2}^2 + (b_1 - \lambda\,B)2\right)^2 + (\lambda\,a_2 - a_1)^2 \ = \ {b_1}^2 + {a_1}^2 \ ,$$

ovvero sse

$$2\,\lambda\,[a_1\,a_2 + b_1\,b_2 - \lambda\,({a_2}^2 + {b_2}^2)] = 0 \qquad \text{ossia} \qquad \lambda = 0 \quad \text{oppure} \quad \lambda = \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \ .$$

Ora si ha $\lambda = 0$ sse le due rette sono ortogonali oppure sse

$$\lambda \ = \ \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \ .$$

Il primo caso va trascurato in quanto non si può avere un angolo retto in C.

Esaminiamo quindi il caso restante per il quale abbiamo

$$\mathcal{Q}(B,C) \;=\; (b_1 - \lambda\, b_1)^2 + (\lambda\, a_2 - a_1)^2 \;=\; \frac{(a_1\, b_2 - a_2\, b_1)^2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}\ .$$

In conclusione

$$\mathsf{sprd}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \;=\; \frac{\mathcal{Q}(B,C)}{\mathcal{Q}(A,B)} \;=\; \frac{(a_1\, b_1 - a_2\, b_1)^2}{({a_1}^2 + {b_1}^2)\,({a_2}^2 + {b_2}^2)}\ .$$

Dunque per lo spread delle due rette abbiamo una espressione razionale, mentre se avessimo definito lo spread non mediante quadranze ma mediante distanze avremmo ottenuta un'espressione contenente operazioni impegnative come le estrazioni di radici quadrate.

G58 b. leggi della trigonometria razionale

G58b.01 Presentiamo queste leggi facendo riferimento a un triangolo a priori generico che denotiamo con triangolo $\mathsf{T} := \triangle\big(V_1\,V_2\,V_3\big)$. Terremo conto delle quadranze associate

$$Q_1 \;:=\; \mathcal{Q}(V_2, V_3) \quad,\quad Q_2 \;:=\; \mathcal{Q}(V_3, V_1) \quad \text{e} \quad Q_3 \;:=\; \mathcal{Q}(V_1, V_2)$$

e degli spreads corrispondenti

$$s_1 \;:=\; \mathsf{sprd}(\overline{-V_1V_2-}, \overline{-V_1V_3-}) \quad,\quad s_2 \;:=\; \mathsf{sprd}(\overline{-V_2V_1-}, \overline{-V_2V_3-}) \quad,\quad s_3 \;:=\; \mathsf{sprd}(\overline{-V_3V_1-}, \overline{-V_3V_2-}) \;.$$

Si definiscono inoltre i tre **cross associati ai vertici del triangolo** e ai relativi angoli

$$c_1 \;:=\; 1 - s_1 \qquad,\qquad c_2 \;:=\; 1 - s_2 \qquad,\qquad c_3 \;:=\; 1 - s_3 \;.$$

G58b.02 **Teorema** (**formula delle tre quadranze**) I tre vertici di T sono collineari sse

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 \;=\; 2\,\left({Q_1}^2 + {Q_2}^2 + {Q_3}^2\right) \;,\; \text{and cycl.} \;\;.$$

G58b.03 **Teorema** (**teorema di Pitagora**)
Le rette $\overline{-V_1V_3}$ e $\overline{-V_2V_3}$ sono perpendicolari sse

$$Q_1 + Q_2 \;=\; Q_3 \;.$$

G58b.04 **Teorema** (**legge degli spreads**) Per ogni triangolo $\triangle\big(V_1, V_2, V_3\big)$ si ha la doppia proporzionalità

$$\frac{s_1}{Q_1} \;=\; \frac{s_2}{Q_2} \;=\; \frac{s_3}{Q_3} \;.$$

G58b.05 **Teorema legge del cross**)

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 \;=\; 4\,Q_1\,Q_2\,c_3 \;.$$

Evidentemente alla precedente uguaglianza vanno aggiunte le uguaglianze ottenibili per permutazioni circolari dei vertici:

$$(Q_2 + Q_3 - Q_1)^2 \;=\; 4\,Q_2\,Q_3\,c_1 \qquad,\qquad (Q_3 + Q_1 - Q_2)^2 \;=\; 4\,Q_3\,Q_1\,c_2 \;.$$

G58b.06 **Teorema** (**formula dei tre spreads**)

$$(s_1 + s_2 + s_3)^2 \;=\; 2\,({s_1}^2 + {s_2}^2 + {s_3}^2) + 4\,s_1\,s_2\,s_3 \;.$$

G58b.07 Segnaliamo che sono disponibili varie altre formule equivalenti alle precedenti e molte loro generalizzazioni riguardanti sequenze di 4 e più vertici. In particolare le formule concernenti quattro vertici e quattro quadranze sono utili per lo studio dei quadrangoli.
In particolare si definisce la **quadrea**.

G58b.08 Rivestono notevole interesse anche i polinomi di spread. Se le rette $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ ed $\mathcal{R}_3$ sono tali che vale l'uguaglianza $\mathsf{sprd}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) \;=\; \mathsf{sprd}(\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ e si definisce $r \;:=\; \mathsf{sprd}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$, allora aut $r = 0$, caso in cui $\mathcal{R}_1 /\!\!/ \mathcal{R})$, aut $r \;=\; 4\,s\,(1-s)$.
Si definisce allora la funzione polinomiale $S_2(s) \;:=\; 4\,s\,(1-s)$.
Questa funzione viene utilizzata in particolare nella teoria del caos con il nome di "mappa logistica".