1

Capitolo G30
geometria del piano *RcR*

Contenuti delle sezioni

42 pagine

G300.01 In questo capitolo si introducono le nozioni di base della geometria del piano cartesiano, ambiente che qui consideriamo la rappresentazione fedele del quadrato cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè dell'insieme delle coppie di numeri reali.

L'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si rivela un ambiente matematico molto più versatile di $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, in quanto consente di trattare agevolmente angoli e curve continue e quindi di svolgere facilmente la geometria analitica e di introdurre in modo costruttivo le nozioni di topologia che permettono di sviluppare, in modo relativamente semplice e sistematico, le nozioni infinitesimali che sono esposte a partire dai capitoli da I12 a I17.

Dal punto di vista algebrico il piano cartesiano è uno spazio vettoriale [G40] munito di prodotto interno [G41]. Esso costituisce l'ambiente di partenza per uno sviluppo della geometria euclidea nonché l'ambiente basilare per lo sviluppo delle nozioni della matematica del continuo e quindi un primo ambiente per aree della matematica fondamentali per gran parte delle applicazioni come `calcolo infinitesimale` (wi), `geometria differenziale` (wi), `equazioni differenziali` (wi), `sistemi dinamici` (wi) e altro.

Va detto anche che il presente capitolo si limita a esporre quelli che chiamiamo oggetti geometrici lineari (rette, segmenti, poligoni, ...) e le primissime nozioni sulle circonferenze, elementi basilari per le costruzioni geometriche più semplici ed efficaci come le classiche costruzioni che si servono di riga e compasso.

G30 a. piano delle coppie di reali

G30a.01 Ad $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ambiente che qui spesso chiameremo semplicemente piano, si possono estendere tutte le nozioni introdotte in G13 per il piano sui razionali $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ e per le quali si sono accennate le estensioni al piano sui numeri algebrici e a quello ancor più ampio costruito sui numeri costruibili $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}\times\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$. Inoltre si può estendere a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ il modello fisico-matematico del piano applicato a $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

Per i nomi di molte configurazioni relative ad $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, per distinguerle dalle omologhe definite su $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, si potrebbe usare la specificazione sincopata "-RR".
Per evitare appesantimenti, nel resto del presente capitolo e quando non risulta opportuno usarlo esplicitamente, il suffisso "-RR" viene trascurato. In particolare usiamo i termini "punti", "rette" e "vettori", come equivalenti, risp., di punti-RR, rette-RR e vettori-RR.

I due numeri reali componenti di un elemento $P=\langle a,b\rangle$ del piano cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sono chiamati le **coordinate [cartesiane] del punto**; la prima coordinata a viene detta anche **ascissa del punto** e la seconda coordinata b viene detta **ordinata del punto** P.

G30a.02 Spesso è utile considerare il piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ come ripartito nelle seguenti 9 parti:
$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, **primo quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a,b\rangle$ con entrambe le coordinate positive;
$\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+$, **secondo quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a,b\rangle$ con $a<0$ e $b>0$;
$\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_-$, **terzo quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a,b\rangle$ con $a<0$ e $b<0$;
$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-$, **quarto quadrante aperto**, insieme dei punti $\langle a,b\rangle$ con $a>0$ e $b<0$;
$\{x\in\mathbb{R}_+ :| \langle x,0\rangle\} = \mathbb{R}_+\times\{0\}$, **semiasse orizzontale positivo**;
$\{y\in\mathbb{R}_+ :| \langle 0,y\rangle\} = \{0\}\times\mathbb{R}_+$, **semiasse verticale positivo**;
$\{x\in\mathbb{R}_- :| \langle x,0\rangle\} = \mathbb{R}_-\times\{0\}$, **semiasse orizzontale negativo**;
$\{y\in\mathbb{R}_- :| \langle 0,y\rangle\} = \{0\}\times\mathbb{R}_-$, **semiasse verticale negativo**;
$\{\langle 0,0\rangle\}$, singoletto costituente la **origine del piano-RR**.

G30a.03 Talora serve riferirsi ad alcune unioni di queste parti, quali:
$\mathbb{R}_{0+}\times\mathbb{R}_{0+}$, **primo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{R}_{-0}\times\mathbb{R}_{0+}$, **secondo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{R}_{-0}\times\mathbb{R}_{-0}$, **terzo quadrante [chiuso]**;
$\mathbb{R}_{0+}\times\mathbb{R}_{-0}$, **quarto quadrante [chiuso]**;
$\{x\in\mathbb{R}_{0+} :| \langle x,0\rangle\}$, **semiasse orizzontale nonnegativo**;
$\{y\in\mathbb{R}_{0+} :| \langle 0,y\rangle\}$, **semiasse verticale nonnegativo**;
$\{x\in\mathbb{R}_{-0} :| \langle x,0\rangle\}$, **semiasse orizzontale nonpositivo**;
$\{y\in\mathbb{R}_{-0} :| \langle 0,y\rangle\}$, **semiasse verticale nonpositivo**;
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{0+}$, **semipiano superiore [chiuso]**;
$\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}$, **semipiano occidentale aperto**.

G30a.04 Possono anche costituire utili riferimenti i seguenti semipiani:
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{0+}$, **semipiano canonico superiore chiuso**;
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{-0}$, **semipiano canonico inferiore chiuso**;
$\mathbb{R}_{0+}\times\mathbb{R}$, **semipiano canonico destro chiuso**;
$\mathbb{R}_{-0}\times\mathbb{R}$, **semipiano canonico sinistro chiuso**;
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, **semipiano canonico superiore aperto**;
$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_-$, **semipiano canonico inferiore aperto**;

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, **semipiano canonico destro aperto**;
$\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$, **semipiano canonico sinistro aperto**.

//input pG30a04

G30 b. rette nel piano

G30b.01 Nel piano cartesiano si definisce **retta-RR** ogni insieme di punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ determinato da una terna di numeri $a, b, c \in \mathbb{R}$ vincolati solo dalla condizione $a^2 + b^2 > 0$, avente la forma

(1) $$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;]\!]\; a\,x + b\,y + c = 0\} \ .$$

Si osserva che la condizione $a^2 + b^2 > 0$ equivale a quella espressa dalla disuguaglianza $|a| + |b| > 0$ e a quella dell'enunciato "$a \neq 0$ e $b \neq 0$" .

Nella precedente espressione insiemistica si dice che i simboli x e y svolgono il ruolo di **variabili nell'insieme** $\mathbb{R}$, o che sono **variabili che corrono in** $\mathbb{R}$, oppure più comunemente, che sono **variabili reali**.

Questa precisazione può esprimersi con una notazione di tipo insiemistico $x, y \in \mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$. Va notato che la precedente scrittura non pretende che $\mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$ denoti un insieme riconducibile a quelli finora introdotti; infatti non si intende affermare che ai simboli delle variabili possono essere sostituiti tutti gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}$, ma solo che i valori che possono sostituire le variabili devono far parte di $\mathbb{R}$.

In questo capitolo, invece che di retta-RR useremo per antonomasia e concisione il termine **linea retta** o anche il più semplice **retta**.

G30b.02 La retta precedente, quando si possono sottintendere i diversi ruoli delle lettere x e y ($\in \mathsf{Vrb}(\mathbb{R})$ da una parte e a, b e c dall'altra, si può denotare con

(2) $$\mathsf{Soln}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\left[\, a\,x + b\,y + c = 0 \,\right] \quad \text{o, più semplicemente, con} \quad \mathsf{Soln}(ax + by + c = 0) \ .$$

Questa scrittura può leggersi

"insieme delle soluzioni $\langle x, y\rangle$ che soddisfano la richiesta $a\,x + b\,y + c = 0$" .

Con un linguaggio più geometrico si può anche leggere

"luogo dei punti $\langle x, y\rangle$ tali che sia $a\,x + b\,y + c = 0$" .

In effetti di solito per individuare la suddetta linea si utilizza la semplice equazione; qui ci serviremo dell'enunciato $\ulcorner a\,x + b\,y + c = 0 \urcorner$.
Diremo anche che x e y sono **variabili che corrono su** $\mathbb{R}$.

Nel seguito denotiamo con $\mathsf{RtlinRR}$, o più semplicemente con Rtlin, l'insieme delle rette del piano; Segnaliamo che in alcuni testi di geometria una retta viene chiamata anche punteggiata.

Si constata facilmente che ogni retta-RR contiene propriamente una e una sola retta-QQ (e una e una sola retta-ZZ).

G30b.03 Le rette del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si possono esprimere con varie equazioni. L'equazione con la quale abbiamo introdotte le rette

(1) $$a\,x + b\,y + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 > 0 \ ,$$

si dice **equazione generale della retta**; essa ha effettivamente portata generale e può essere utile denotare l'insieme di punti che essa denota con $\mathsf{Rtlin}_g(a, b, c)$.

L'equazione precedente viene chiamata anche **equazione lineare nelle due variabili reali** x e y, in quanto l'espressione alla quale si impone di annullarsi è un polinomio di primo grado nelle variabili x e y, ovvero un polinomio lineare bivariato.

Ai simboli a, b e c che denotano numeri reali che possono scegliersi con elevata arbitrarietà si attribuisce il cosiddetto ruolo dei **parametri dell'equazione**.

Le terne concernenti questi parametri non sono associate biunivocamente alle rette: infatti la retta $\mathsf{Rtlin}_g(a,b,c)$ viene individuata anche dalla equazione $k\,a\,x+k\,b\,y+k\,c=0$ per ogni $k\in\mathbb{R}_{nz}$, ottenibile dalla precedente moltiplicando tutti i suoi addendi per k.
Servendosi della precedente notazione si ha

(2) $$\forall k\in\mathbb{R}_{nz} \;\vdots\; Rtlin_g(a,b,c) = Rtlin_g(k\,a,k\,b,kc)\ .$$

G30b.04 È utile distinguere varie classi di rette.

Le rette della forma $\mathsf{Soln}(y=y_0)$ per ogni $y_0\in\mathbb{R}$ si dicono **rette orizzontali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=0$, $b=1$ e $c=-y_0$. L'asse Ox è la retta orizzontale $\mathsf{Soln}(y=0)$.

Le rette della forma $\mathsf{Soln}(x=x_0)$ con $x_0\in\mathbb{R}$ si dicono **rette verticali**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=1$, $b=0$ e $c=-x_0$. L'asse Oy è la retta orizzontale $\mathsf{Soln}(x=0)$.

La $\mathsf{Soln}(y=x)$ si dice **bisettrice del I [e del III] quadrante**. Le rette della forma $\mathsf{Soln}(y=x+y_0)$ si dicono **rette parallele alla bisettrice del I quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=1$, $b=-1$ e $c=y_0$.
La $\mathsf{Soln}(y=-x)$ si dice **bisettrice del II [e del IV] quadrante**. Le rette della forma $\mathsf{Soln}(y=-x+y_0)$ si dicono **rette parallele alla bisettrice del II quadrante**; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=-1$, $b=-1$ e $c=y_0$.
Per i diversi $m\in\mathbb{R}$ le $\mathsf{Soln}(y=m\,x)$ sono tutte e sole le rette che passano per l'origine; esse si ottengono dalla forma generale ponendo $a=-m$, $b=1$ e $c=0$.

Tutte queste rette si tracciano facilmente sopra un foglio di carta quadrettata o millimetrata servendosi delle loro intersezioni con gli assi. Ciascuna di tali intersezioni si ottiene tenendo conto congiuntamente dell'equazione della retta e di quella di un asse. Per esempio l'intersezione della retta $\mathsf{Soln}(y=x+y_0)$ con l'asse Ox è ottenuta imponendo $y=0$ nella precedente equazione e quindi è costituita da $\langle -y_0,0\rangle$; a sua volta l'intersezione della $\mathsf{Soln}(y=x-y_0)$ con l'asse Oy si ottiene imponendo $x=0$ nella precedente e quindi è data da $\langle 0,-y_0\rangle$.

//input pG30b04

G30b.05 È immediato decidere se un punto $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ appartiene o meno ad una retta $\mathsf{Soln}(a\,x+b\,y+c=0)$: basta sostituire i valori $\overline{x}$ e $\overline{y}$ alle rispettive variabili nell'espressione $ax+by+c$ e verificare se il valore ottenuto, $a\overline{x}+b\overline{y}+c$, è uguale o diverso da zero.
Osserviamo esplicitamente che si riesce a trovare facilmente qualche punto $\langle x_0,y_0\rangle$ che appartiene alla $\mathcal{R}=\mathsf{Rtlin}_g(a,b,c)$; se $b\neq 0$, quale che sia $x_0\in\mathbb{R}$ appartiene ad $\mathcal{R}$ il punto $\left\langle x_0,-\dfrac{a}{b}x_0-\dfrac{c}{b}\right\rangle$; se $a\neq 0$, quale che sia $y_0\in\mathbb{R}$ appartiene ad $\mathcal{R}$ il punto $\left\langle \dfrac{b}{a}y_0-\dfrac{c}{a},y_0\right\rangle$.
Abbiamo quindi $a\,x_0+b\,y_0+c=0$; sottraendo questa dalla equazione generale si trova l'equazione equivalente

(1) $$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\ .$$

Questa è l'equazione di una retta passante per il punto $\langle x_0,y_0\rangle$.

Talora è utile fare riferimento alla precedente equazione e denotare la retta con la scrittura $\mathsf{Rtlin}_{pnt,dir}(x_0, y_0; a, b)$.

G30b.06 Il precedente modo di procedere può essere genaralizzato. Si considerano insiemi ambiente riferibili a una, a due o a più coordinate che denotiamo sinteticamente con x: alcuni esempi sono $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Si individuano sottoinsiemi di tali ambienti mediante equazioni e relazioni riguardanti le loro coordinate.
Se denotiamo genericamente con $\mathcal{P}(\mathsf{x})$ una di queste relazioni, il corrispondente insieme delle soluzioni può denotarsi con $\mathbf{Soln}\big(\mathcal{P}(\mathsf{x})\big)$; la decisione se un punto specifico, le cui coordinate he denotiamo con $\bar{\mathsf{x}}$, appartenga o meno all'insieme S si riconduce a stabilire se sono soddisfatte le proprietà $\mathcal{P}\big(\bar{\mathsf{x}}\big)$.

Torniamo al fatto che le rette della forma $\mathbf{Soln}(a\,x + b\,y = 0)$ sono tutte e sole le rette passanti per l'origine.
Da un lato è evidente che l'origine appartiene a tutte queste rette. Dall'altro si ha che una tale retta deve passare per l'origine: infatti se $a = 0$ e $b \neq 0$ si ha $\mathbf{Soln}(y = 0)$ cioè l'asse Ox, se $a \neq 0$ e $b = 0$ si ha $\mathbf{Soln}(x = 0)$ cioè l'asse Oy, se $a, b \neq 0$ si ha una retta che passa per l'origine: quest'ultima si chiama retta obliqua.

L'insieme delle rette passanti per un punto P del piano si dicono costituire un **fascio di rette**, ; mentre il punto P è chiamato **sostegno del fascio di rette**. Si può quindi dire che l'equazione precedente, al variare dei parametri, caratterizza il fascio di rette avente come sostegno l'origine: questo può denotarsi con $\{a, b \in \mathbb{R} :|\ \mathbf{Soln}(a\,x + b\,y = 0)\}$.

Nella espressione $a\,x + b\,y + c = 0$ ai simboli a, b e c che denotano numeri reali che possono scegliersi arbitrariamente si attribuisce il cosiddetto ruolo dei **parametri dell'espressione**.

G30b.07 Per ogni numero reale nonnullo r, le due rette fornite dalle equazioni $ax + by + g = 0$ e $rax+rby+rc = 0$ coincidono. Infatti la seconda si ottiene dalla prima moltiplicandone tutti gli addendi per r e la seconda dalla prima "moltiplicandola" per $1/r$. Quindi i tre parametri che caratterizzano un'equazione lineare in due variabili reali non sono indipendenti, ma presentano una determinata ridondanza.

Spesso conviene utilizzare delle varianti dell'equazione generale nelle quali si incontrano parametri indipendenti e nonridondanti. Tuttavia queste varianti non sono completamente equivalenti alla generale, in quanto non riescono a individuare alcune delle soluzioni di quest'ultima.

G30b.08 Consideriamo l'equazione $a\,x + b\,y + c = 0$ con $b \neq 0$, cioè l'equazione di una retta $\mathcal{R}$ che non è una parallela all'asse Oy. Essa si riscrive nella forma equivalente

$$y = m\,x + q \ , \tag{1}$$

nella quale compaiono solo i due parametri $m := -\dfrac{a}{b}$ e $q := -\dfrac{c}{b}$.
Essa è detta **equazione canonica** della retta R, m è chiamato **coefficiente angolare della retta** e q è detto **ordinata all'origine della retta**.

Si osserva che m esprime la pendenza della $\mathcal{R}$: si ha $m > 0$ sse la retta è crescente, cioè la ordinata dei suoi punti cresce all'aumentare della corrispondente ascissa (e cresce tanto più quanto più la $\mathcal{R}$ è pendente, ossia quanto più diverge dall'asse Ox); si ha $m = 0$ sse R è parallela alla Ox; si ha $m < 0$ sse la $\mathcal{R}$ è decrescente, cioè si abbassa all'aumentare della x (e decresce tanto più quanto maggiore è la sua pendenza verso il basso).

Per la suddetta retta useremo la notazione

(2) $$\mathsf{Rtlin}_{can}(m,q) \ := \ \mathbf{Soln}(y = m\,x + q)\ .$$

G30b.09 Consideriamo la retta $\mathcal{R}$ data da un'equazione generale $a\,x + b\,y + c = 0$ nella quale tutti i tre parametri sono diversi da zero; si tratta dunque di una retta che non passa per l'origine e non è parallela ad alcuno degli assi. L'equazione si può mettere nella forma equivalente $\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} - 1 = 0$: basta assumere $p := -\dfrac{c}{a}$ e $q := -\dfrac{c}{b}$ (come per l'equazione canonica).
Essa viene chiamata **equazione segmentaria della retta**; anche in questa equazione compaiono solo due parametri.
Per la retta suddetta useremo la notazione

(1) $$\mathsf{Rtlin}_{segm}(p,q) \ := \ \mathbf{Soln}\ulcorner \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \urcorner\ .$$

Si osserva che, fissato $x = 0$, si trova $y = q$, cioè che la retta $\mathcal{R}$ interseca l'asse Ox nel punto $\langle p, 0\rangle$; dualmente-xy, posto $y = 0$ si trova $x = p$ e si constata che la retta interseca l'asse Oy nel punto $\langle 0, q\rangle$.
L'equazione segmentaria dunque è in grado di esprimere tutte le rette che presentino due diverse intersezioni con gli assi; essa invece non è in grado di rappresentare la totalità delle rette del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, il cui insieme si ripartisce nel fascio delle rette parallele all'asse delle x, nel fascio delle rette parallele all'asse delle y, nel fascio delle rette passanti per l'origine e nell'insieme delle rette fornite dall'equazione segmentaria.

//input pG30b09

Segnaliamo esplicitamente anche le relazioni $p = \dfrac{q}{m}$ e $m = \dfrac{q}{p}$.

G30b.10 Consideriamo i due punti diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$ e il duetto da loro costituito $D := \{A, B\}$.
È visivamente intuitivo che per questi due punti passi una e una sola retta, ma è opportuno esaminare la relativa casistica per giungere a controllarla attraverso equazioni maneggevoli.

Se $x_A = x_B$ entrambi i punti (diversi) appartengono alla retta verticale $x = x_A$ e a nessun'altra.
In caso contrario cerchiamo rette nella forma canonica $y = m\,x + q$.

Devono valere le equazioni $y_A = m\,x_A + q$ e $y_B = m\,x_B + q$; sottraendo la prima dalla seconda si ricava $y_B - y_A = m(x_B - x_A)$ e questa, per la supposta collocazione nonverticale dei punti, si può risolvere per ottenere univocamente $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Dalla prima equazione si ricava poi univocamente $q = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x_A = \dfrac{y_A\,x_B - x_A\,y_B}{x_B - x_A}$.
L'equazione cercata si può porre sotto una delle due forme

(1) $$y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x_A \qquad \text{ovvero} \qquad y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot (x - x_A)\ .$$

Altre forme equivalenti sono

(2) $$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \qquad \text{e} \qquad \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

e naturalmente quelle in cui si scambiano i ruoli i punti A e B e/o le coordinate x e y.

Può essere utile anche una forma più simmetrica rispetti allo scambio $\lceil x[y \longleftrightarrow \rceil]$ come la

(3) $$(y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = (x - x_A) \cdot (y_B - y_A) \ .$$

Si osserva che questa equazione rende conto anche dei casi $x_A = x_B$ e $y_A = y_B$ che implicano, risp., $x = x_A$ e $y = y_A$.
In effetti questa equazione è immediatamente riducibile alla forma

(4) $$(y_B - y_A) \cdot x - (x_B - x_A) \cdot y + [y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A)] = 0 \ ,$$

cioè alla equazione generale relativa ad

$$a = y_B - y_A \quad , \quad b = (x_B - x_A) \ \text{ e } \ c = y_A \cdot (x_B - x_A) - x_A \cdot (y_B - y_A) \ .$$

G30b.11 Per la retta passante per i punti del duetto $\{A, B\}$ useremo la notazione

(1) $$\mathsf{Rtlin}_{PP}(A, B) \ := \ \Big\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \ ST \ \ (y - y_A) \cdot (x_B - x_A) \ = \ (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\Big\} \ .$$

Questo insieme, se si sottintende $x, y \in \mathbf{Vrb}(\mathbb{R})$, si denota anche con le scritture seguenti

(2) $$\overline{AB} \ := \ \mathbf{Soln}\Big((y - y_A) \cdot (x_B - x_A) \ = \ (x - x_A) \cdot (y_B - y_A)\Big) \ .$$

G30b.12 Le rette, attraverso le loro porzioni finite delimitate da due punti, sono i modelli matematici delle traiettorie fisiche percorse da fasci luminosi molto collimati per i quali si possono trascurare effetti di `interferenza (wi)` e `diffrazione (wi)`, cioè fasci ai quali si possa applicare l'`ottica geometrica (wi)` e non sia necessario ricorrere a una teoria ondulatoria della propagazione luminosa.

Secondariamente le rette sono i modelli degli "spigoli diritti"" di svariati oggetti rigidi: il carattere "rettilineo" di questi spigoli si riconduce al fatto empirico che essi vengono riconosciuti come tali con procedimenti che si basano sulla vista o su qualche strumento ottico.

G30b.13 I collegamenti tra le diverse modalità di caratterizzare rette del piano cartesiano sono esprimibili con le seguenti relazioni di sintesi.

(1) $$\mathsf{Rtlin}_{sgm}(p, q) \ = \ \mathsf{Rtlin}_{can}\left(-\frac{q}{p}, q\right) \ ;$$

(2) $$\mathsf{Rtlin}_{PP}\left(\langle x_A, y_A\rangle, \langle x_B, y_B\rangle\right) \ = \ \mathsf{Rtlin}_{can}\left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}, ...\right) \ .$$

G30 c. segmenti, semirette, orientazioni

G30c.01 La funzione $\lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle x,0\rangle \rceil$ si dice **proiettore sull'asse** Ox e si denota con $\boldsymbol{Prj}_x$.
La funzione $\lceil \langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle 0,y\rangle \rceil$ si dice, dualmente-xy, **proiettore sull'asse** Oy e si denota con $\boldsymbol{Prj}_y$.
Il punto $\langle x,0\rangle$ si dice **proiezione su** Ox **del punto** P; il punto $\langle 0,y\rangle$ si dice **proiezione su** Oy **del punto** P.

I due proiettori "cartesiani" introdotti si possono considerare funzioni del genere $\lceil \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ (che non ha senso affermare essere non invertibili), oppure endofunzioni entro $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ non invertibili.

Queste endofunzioni sono idempotenti: in effetti $\boldsymbol{Prj}_x$ ha come codominio Ox e questo è anche l'insieme dei punti fissi di $\boldsymbol{Prj}_x$.
Dualmente-xy Oy è il codominio e l'insieme dei punti fissi di $\boldsymbol{Prj}_y$.

G30c.02 Consideriamo due punti diversi $A = \langle x_A, y_A\rangle$ e $B = \langle x_B, y_B\rangle$, la retta, unica, che li contiene $\mathcal{R} := \overline{AB}$ e il generico punto $P = \langle x,y\rangle \in \overline{AB}$.
Il proiettore $\boldsymbol{Prj}_x$ ristretto alla $\mathcal{R}$, cioè $\boldsymbol{Prj}_x|_{\mathcal{R}}$, è una biiezione del genere $\lceil \mathcal{R} \longleftrightarrow \mathsf{Ox} \rceil$ sse la $\mathcal{R}$ non è verticale, cioè sse $x_A \neq x_B$.
Dualmente-xy $\boldsymbol{Prj}_y|_{\mathcal{R}} \in \lceil \mathcal{R} \longleftrightarrow \mathsf{Oy} \rceil$ sse la $\mathcal{R}$ non è orizzontale, cioè sse $y_A \neq y_B$.
Per le proiezioni dei punti A e B usiamo le notazioni locali $A_x := \langle x_A, 0\rangle$, $A_y := \langle 0, y_A\rangle$, $B_x := \langle x_B, 0\rangle$ e $B_y := \langle 0, y_B\rangle$. Supponiamo che $\overline{AB}$ non sia verticale e più particolarmente che sia $x_A < x_B$.

//input pG30c02

G30c.03 I due punti A_x e B_x ripartiscono l'asse Ox in 5 parti:
- l'intervallo illimitato a sinistra $(-\infty, x_A)$;
- il singoletto $\{x_A\}$;
- l'intervallo aperto (x_A, x_B) ;
- il singoletto $\{x_B\}$;
- l'intervallo illimitato a destra $(x_B, +\infty)$.

Una pentapartizione corrispondente viene determinata sulla $\overline{AB}$ dalla biiezione $\boldsymbol{Prj}_x^{-1}$. Le 5 parti che corrispondono alle suddette successive parti dell'asse Ox sono:
- $(\boldsymbol{Prj}_x^{-1})(-\infty, x_A)$, chiamata **semiretta aperta con estremità** A;
- singoletto $\{A\}$;
- $(\boldsymbol{Prj}_x^{-1})(x_A, x_B)$, parte chiamata **segmento aperto** e denotata con $\overline{AB}$;
- singoletto $\{B\}$;
- $(\boldsymbol{Prj}_x^{-1})(x_B,)$, parte chiamata semiretta aperta con estremità B.

Nel caso in cui $\overline{AB}$ non è orizzontale si può sostenere l'rgomentazione duale-xy servendosi del proiettore $\boldsymbol{Prj}_y$.

Nel caso in cui la $\overline{AB}$ non è né verticale né orizzontale, le ripartizioni determinate da $\boldsymbol{Prj}_x$ e $\boldsymbol{Prj}_y$ coincidono, in quanto $\boldsymbol{Prj}_x^{-1} \circ \boldsymbol{Prj}_y$ pone in corrispondenza biunivoca Ox ed Oy.
In effetti, ricordando l'equazione canonica della $\overline{AB}$ [b11] si trova

$$(1) \qquad \boldsymbol{Prj}_x^{-1} \circ \boldsymbol{Prj}_y = \left\lceil x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x + y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\cdot x_A \right\rceil .$$

G30c.04 Supponiamo ancora che sia $x_A \neq x_B$ e consideriamo la funzione

$$(1) \qquad \sigma := \left\lceil\, t \in \mathbb{R} \;\;\mapsto\;\; x_A + (x_B - x_A) \cdot t \,\right\rceil \;.$$

Questa è una trasformazione di $\mathbb{R}$ in se stesso invertibile, cioè una permutazione dell'insieme dei numeri reali, tale che $\sigma(0) = x_A$ ed $\sigma(1) = x_B$.

Si può interpretare la t come la grandezza tempo e la funzione $\sigma(t)$ come la posizione di un corpo puntiforme che si muove sull'asse Ox di moto uniforme, cioè a velocità costante; questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto $A_x = \langle x_A, 0\rangle$ e all'istante $t = 1$ nel punto $B_x = \langle x_B, 0\rangle$.

Chiaramente se $x_A < x_B$ il corpo puntiforme si muove sulla Ox da sinistra a destra: al procedere del tempo aumenta la ascissa del corpo. Se invece $x_A > x_B$ il corpo si muove sulla Ox da destra verso sinistra.

Questo modello cinematico si può applicare anche alla retta $\overline{AB}$ interpretando la funzione $\sigma(t)$ come l'andamento nel tempo della proiezione su Ox di un corpo puntiforme che si muove di moto uniforme sulla retta stessa. Questo corpo all'istante $t = 0$ si trova nel punto A e nell'istante $t = 1$ nel punto B; per la sua ordinata, ovvero per la sua proiezione sulla Oy, dall'espressione della $\sigma(t)$ e dall'espressione della ordinata del punto P mediante la sua ascissa si ricava

$$(2) \qquad y \;=\; \tau(t) \;:=\; y_A + \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A) \;=\; y_A + (y_B - y_A) \cdot t \;.$$

G30c.05 Le due funzioni $\sigma(t)$ e $\tau(t)$ forniscono una descrizione cinematica della retta $\overline{AB}$ che spesso rende più intuitive le considerazioni geometriche che la riguardano in relazione agli assi di riferimento del piano reale.
Il corpo puntiforme potrebbe descriversi come la punta molto fine di una penna che traccia la retta su un foglio di carta esteso quanto può servire il quale fa da modello fisico dell'ambiente $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Prescindendo dalla interpretazione della t come variabile temporale, le due espressioni che riscriviamo

$$(1) \qquad \begin{cases} x \;=\; x_A + (x_B - x_A) \cdot t \\ y \;=\; y_A + (y_B - y_A) \cdot t \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in \mathbb{R} \;.$$

possono comunque essere considerate scritture che consentono di individuare i punti della retta passante per A e per B servendosi di una variabile $t \in \mathbf{Vrb}(\mathbb{R})$.
Queste sono dette **espressioni parametriche cartesiane** o **parametrizzazione cartesiana** della curva $\overline{AB}$.

La retta caratterizzata dal precedente sistema (1) sarà denotato con

$$(2) \qquad \mathsf{Rtlin}_{par}\left(A, \overrightarrow{B - A}\right) \;.$$

Questa retta può anche essere individuata come sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mediante l'espressione

$$(3) \qquad \overline{AB} \;=\; \left\{ t \in \mathbb{R} :|\; \langle x_A + (x_B - x_A) \cdot t \;,\; y_A + (y_B - y_A) \cdot t \rangle \right\} \;.$$

Sono opportune alcune osservazioni.
Si nota che con parametrizzazioni cartesiane si possono esprimere anche rette orizzontali e verticali.
La coppia delle equazioni risulta simmetrica rispetto allo scambio $[x \longleftrightarrow y]$, in accordo con la sostanziale equivalenza dei ruoli delle due coordinate nello studio delle rette di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Si osserva inoltre che la descrizione cinematica, ovvero la descrizione della retta come di una linea ottenuta con un tracciamento materiale, porta ad attribuirle una orientazione, ovvero ad assegnare un ordinamento totale ai suoi punti derivante dall'ordinamento dell'insieme $\mathbb{R}$ nel quale "corre" il

parametro t. Questo corrisponde ad attribuire un ordine tra i punti A e B, cioè a considerare che A "venga prima" di B.

G30c.06 Abbiamo visto che una coppia di punti diversi $\langle A, B\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ individua una retta e una sua biiezione con l'insieme ordinato $\mathbb{R}$ rispecchiata da un sistema di espressioni parametriche cartesiane.

Una diversa coppia di punti appartenenti alla stessa retta $\langle C, D\rangle$ mediante il proprio sistema di espressioni parametriche cartesiane individua la stessa retta, ma una diversa biiezione con $\mathbb{R}$.
Le due coppie $\langle A, B\rangle$ e $\langle C, D\rangle$ si dicono compatibili sse $(x_B - x_A)\cdot(x_D - x_C) \geq 0$ e $(y_B - y_A)\cdot(y_D - y_C) \geq 0$, incompatibili nel caso opposto.
La compatibilità corrisponde al fatto che percorrendo la retta in modo da incontrare prima A e poi B si incontra C prima di D, viceversa nel caso di incompatibilità.
Si osserva che la compatibilità tra coppie di punti diversi su una retta è una equivalenza e che ogni coppia $\langle A, B\rangle$ è incompatibile con la sua riflessa $\langle B, A\rangle$.

Vi sono quindi due classi di coppie di punti diversi di una retta. Queste due classi sono dette **sensi di percorrenza della retta** e questi due sensi si dicono **sensi di percorrenza mutuamente opposti**.

Possiamo ora definire come **retta orientata** associata alla coppia $\langle A, B\rangle$ di punti diversi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la retta $\overline{AB}$ munita del senso di percorrenza secondo il quale il punto A si incontra prima di B.
Questa retta orientata si denota con $\overrightarrow{AB}$, mentre La retta orientata $\overrightarrow{BA}$ si dice **retta orientata opposta** della $\overrightarrow{AB}$.

G30c.07 Come a una retta sono associate due rette orientate opposte, così a ogni segmento aperto di una retta sono associati due segmenti orientati.
A questo proposito conviene individuare come segmento aperto associato al duetto $\{A, B\}$ con l'espressione parametrica ottenuta riducendo l'espressione presentata in c05(3)

$$\Big\{t \in (0,1) \ :| \ \langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t \ , \ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\rangle \ \Big\} \ . \tag{1}$$

Similmente si definisce **segmento chiuso** associato ad $\{A, B\}$ il sottoinsieme della retta che amplia il precedente

$$\overline{AB} \ = \ Big\{t \in [0,1] :| \ \big\langle x_A + (x_B - x_A)\cdot t \ , \ y_A + (y_B - y_A)\cdot t\big\rangle \Big\} \ . \tag{2}$$

I punti A e B si dicono **estremità dei segmenti**; spesso sono anche chiamati "estremi dei segmenti".

Si dice **segmento orientato aperto** associato alla coppia $\langle A, B\rangle$ il segmento associato a questa coppia munito del senso di percorrenza da A a B.
Similmente si definisce il **segmento orientato chiuso** associato alla $\langle A, B\rangle$: questa entità si denota con $\overrightarrow{AB}$.

Si osserva che i segmenti aperti e chiusi definiti da un duetto di punti si corrispondono biunivocamente. Similmente i segmenti orientati aperti e chiusi definiti da [da una coppia di punti si corrispondono biunivocamente.

Osserviamo che si possono considerare anche i segmenti orientati chiusi della forma $\overrightarrow{AA}$, i cui corrispondenti aperti si riducono all'insieme $\emptyset$, quale che sia A.

G30c.08 Il punto A si dice **estremità iniziale** (o "estremo iniziale") del segmento orientato aperto e del corrispondente chiuso; il punto B si dice **estremità finale** (o "estremo finale") del segmento orientato aperto e del corrispondente chiuso.

In gran parte delle considerazioni geometriche non si distingue tra le versioni aperte e le chiuse di queste entità. In seguito ci riferiremo preferibilmente ai segmenti chiusi e ai segmenti orientati chiusi che chiameremo semplicemente segmenti e segmenti orientati.
Alla coppia $\langle A, B\rangle$ si possono associare anche il **segmento orientato aperto-chiuso** contenente B ma non A e il **segmento orientato chiuso-aperto** contenente A ma non B.

In genere tuttavia la distinzione tra le quattro varianti di un segmento orientato non ha grande interesse: in molte considerazioni geometriche le quattro varianti dei segmenti orientati delimitati, nell'ordine, da A e da B sono sostanzialmente equivalenti. Spesso quindi invece di ricorrere ai segmenti orientati si potrebbe fare riferimento all'insieme di questi quattro insiemi geometrici lineari che potrebbe essere trattato come una classe di equivalenza.

G30c.09 Tra due segmenti (chiusi) $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ del piano si possono definire varie relazioni.
Essi si dicono **segmenti disgiunti** sse non hanno punti in comune. Si dicono **segmenti intersecati** in caso contrario.

Due segmenti intersecati più in particolare si dicono:
- **segmenti adiacenti-ee** sse hanno in comune uno e un solo punto che è estremità per entrambi;
- **segmenti adiacenti-ii** sse hanno in comune un solo punto diverso da A, B, C e D;
- **segmenti adiacenti-ei** sse hanno in comune un solo punto che può essere A o B;
- **segmenti adiacenti-ie** sse hanno in comune un solo punto che può essere C o D;
- **segmenti sovrapposti** sse hanno in comune almeno due punti diversi, e quindi tutti i punti del segmento che ha tali punti come estremi.

//input pG30c09

G30c.10 Due segmenti si dicono **segmenti collineari** sse sono sottoinsiemi della stessa retta.
Due segmenti sovrapposti sono collineari.

Se due segmenti sono collineari, possono essere:
- disgiunti (nessun punto in comune);
- adiacenti-ee (un solo punto in comune);
- sovrapposti (due e quindi infiniti punti in comume).

Se due segmenti sono sovrapposti possono essere:
- coincidenti;
- dotati di intersezione contenuta propriamente in entrambi (e in tal caso non sono confrontabili rispetto all'inclusione);
- l'uno sottoinsieme proprio dell'altro.

Se $\overline{AB} \subset \overline{CD}$ si distingue il caso in cui non hanno estremità comuni dai casi nei quali hanno una sola estremità comune, casi nei quali aut sono adiacenti-ei, aut sono adiacenti-ie.

//input pG30c10

G30c.11 Per due segmenti orientati (chiusi) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si possono riscontrare o meno tutte le relazioni che si possono riscontrare tra i due segmenti che arricchiscono, risp., $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.
Inoltre se essi sono adiacenti-ee può accadere che:
- aut $\overrightarrow{AB}$ è consecutivo di $\overrightarrow{CD}$ sse $A = D$,

- aut $\overrightarrow{CD}$ è consecutivo di $\overrightarrow{AB}$ sse $B = C$,
- aut sono divergenti sse $A = C$,
- aut sono convergenti sse $B = D$.

In tutte queste situazioni si distinguono i casi in cui i segmenti orientati sono collineari da quelli nei quali non lo sono.
Se sono collineari (disgiunti o sovrapposti) possono essere:
- aut concordi sse le rette orientate individuate dai due segmenti coincidono,
- aut discordi sse tali rette sono l'una l'opposta dell'altra.

G30c.12 Un punto P appartenente a una retta la tripartisce in due **semirette aperte** e nel singoletto $\{A\}$; A si considera estremità di entrambe le semirette aperte.
Si dice **semiretta chiusa** l'unione di una semiretta e della sua estremità.

Per certe argomentazioni risulta conveniente considerare una semiretta come un segmento con una estremità posta a una distanza infinita dall'altra; in altre cicostanze conviene descriverla come un segmento avente un estremo che si allontana quanto si vuole dall'altro.
È abbastanza naturale attribuire a una semiretta l'orientazione indotta dalla sua estremità al finito considerata sua estremità iniziale, oppure l'orientazione indotta da una coppia formata dalla sua estremità e da qualunque altro suo punto.

Una semiretta si può dunque individuare con un punto che costituisce la sua estremità (al finito) e con un secondo punto che le appartiene.
La semiretta avente come estremo $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e della quale fa parte come altro punto $B = \langle x_B, y_B \rangle$ si può denotare con $\overrightarrow{AB}^{\,\nearrow}$, notazione che costituisce una variante di quella concernente il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$.
Questa semiretta si può individuare con l'espressione insiemistica dedotta da quella della retta $\overline{\ AB\ }$ trovata in c07(1)

$$\overrightarrow{AB}^{\,\nearrow} \;=\; \Big\{ t \in \mathbb{R}_{0+} \;:|\; \big\langle x_A + (x_B - x_A) \cdot t \;,\; y_A + (y_B - y_A) \cdot t \big\rangle \Big\} \;.$$

G30c.13 Si dice **insieme piano convesso di** RcR un suo sottoinsieme $\boldsymbol{K}$ tale che presi due suoi punti qualsiasi, tutti i punti del segmento che ha tali punti come estremità appartengono all'insieme stesso.
Risulta formalmente conveniente considerare che sia convesso anche l'insieme vuoto.

In termini di geometria analitica, un insieme $\boldsymbol{K} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si dice convesso sse

(1) $\quad \forall P = \langle x_P, y_P \rangle \;,\; Q = \langle x_Q, y_Q \rangle \in \boldsymbol{K} \;,\; t \in (0,1) \;\vdots\; \langle x_P + t(x_Q - x_P) \;,\; y_P + t(y_Q - y_p) \rangle \in \boldsymbol{K}$.

Gli insiemi piani convessi più semplici sono quelli costituiti da un unico punto e quelli appartenenti a una retta: questi sono gli intervalli di tale retta, limitati o illimitati, aperti, chiusi o semiaperti.

Anche tra gli insiemi piani convessi contenenti punti interni ne esistono di limitati, come i rettangoli a lati paralleli agli assi, e di illimitati, come i semipiani.
Va notato che un insieme piano convesso con punti interni può contenere tutti o in parte i suoi punti di frontiera.
Consideriamo un semipiano convesso $\boldsymbol{S}$ e i punti della sua retta di frontiera F: evidentemente
- aut l'intera F appartiene ad $\boldsymbol{S}$,
- aut l'intera F non appartiene ad $\boldsymbol{S}$,
- aut appartengono ad $\boldsymbol{S}$ tutti i punti di una semiretta di F (compresa o esclusa la sua estremità),

- aut appartengono ad $\boldsymbol{S}$ i punti di un suo solo segmento (questo potendo essere vuoi chiuso, vuoi aperto, vuoi chiuso a una sola estremità).

Un lato di un poligono convesso P aut gli appartiene per intero, aut non gli appartiene per intero, aut presenta un solo segmento appartenente a P (questo potendo essere vuoi chiuso, vuoi aperto, vuoi semiaperto).

G30c.14 Dalla definizione si deduce facilmente che l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme convesso.
In particolare l'intersezione di due semipiani è un insieme convesso.
Si osserva che per l'intersezione di due semipiani possono darsi tre situazioni alternative. Chiamiamo $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$ le rette che delimitano i semipiani e che supponiamo diverse. Se le rette sono parallele aut un semipiano è contenuto nell'altro e coincide con la loro intersezione, aut i due semipiani non hanno punti in comune e l'intersezione è vuota, aut non sono confrontabili e la loro intersezione è costituita da una fascia illimitata delimitata dalle due rette.

Se le due rette frontiera non sono parallele si ottiene un insieme delimitato da un punto e da due semirette che hanno tale punto come estremità, cioè si ottiene un insieme angolare.

Intersecando tre semipiani si ottiene aut un triangolo (limitato), aut un insieme illimitato avente una frontiera costituita da un segmento e due semirette.

Anche intersecando più di tre semipiani aut si ottiene un insieme convesso limitato che viene chiamato poligono convesso, aut un insieme illimitato la cui frontiera è costituita da due semirette e da una sequenza di segmenti che un ulteriore segmento trasforma nel perimetro di un poligono convesso.

//input pG30c14

Le intersezioni di un numero finito di poligoni sono oggetto della `programmazione lineare` `(wi)`.

G30c.15 Si dimostra facilmente che sottoponendo un insieme convesso a una traslazione, a una dilatazione, a una riflessione o a una rotazione si ottiene un secondo insieme convesso.

G30 d. vettori, traslazioni e vettori applicati

G30d.01 Ampliando quanto si è presentato per il piano combinatorio [B20] e per il piano sui razionali [B31], introduciamo per gli elementi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ un linguaggio vettoriale e operazioni vettoriali che facilitano la possibilità di sviluppare procedimenti di calcolo per il piano reale basati su espressioni algebriche.

I punti di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sono in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati aventi come estremo iniziale l'origine; questi due tipi di entità si rivelano logicamente equivalenti e ogni punto $P = \langle r, s\rangle$ può essere identificato con il segmento $\overrightarrow{OP}$, questo si può chiamare **vettore** e può essere visualizzato con una freccia che inizia nell'origine $\langle 0, 0\rangle$ e termina in P.

I vettori di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ o di altri spazi vettoriali spesso vengono identificati con lettere in neretto: qui useremo preferibilmente scritture come v, $\mathsf{w}_{(1)}$, u_k ed E. In particolare l'origine $\langle 0, 0\rangle$ si può chiamare vettore nullo e si può denotare con $\overrightarrow{OO}$, con $\mathbf{0}_2$ o più concisamente con $\mathbf{0}$.
Talora avendo da trattare spazi diversi useremo due fonti leggermente diverse e accanto alle scritture precedenti utilizzeremo scritture come v, $\boldsymbol{w}_{(1)}$, $\boldsymbol{B}_k$ ed $\boldsymbol{E}$.

G30d.02 Consideriamo i vettori $\mathsf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ e $\mathsf{w} = \langle w_1, w_2\rangle$ e i numeri reali a, b e c .
Si dice **somma dei vettori** il vettore $\mathsf{v} +^{ce} \mathsf{w} := \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2\rangle$.
Si dice **differenza dei vettori** il vettore $\mathsf{v} -^{ce} \mathsf{w} := \langle v_1 - w_1, v_2 + w_2\rangle$.
Si dice **moltiplicazione di un vettore per uno scalare reale** $c \cdot^{ce} \mathsf{v} := \langle c\cdot v_1, c\cdot v_2\rangle$.

Il vettore $-^{ce}\mathsf{v} := \mathbf{0} -^{ce} \mathsf{v} = \langle -v_x, -v_y\rangle = -1 \cdot^{ce} \mathsf{v}$ si dice **vettore opposto** di v; il passaggio al vettore opposto $\lceil \mathsf{v} \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto -\mathsf{v} \rceil$ si può considerare un'operazione unaria sui vettori, oppure una trasformazione biunivoca e involutoria su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e si può chiamare anche **simmetria centrale con centro nell'origine**.

Ricordiamo che con notazioni della forma ω^{ce}, dove ω denota un qualsiasi operatore binario o unario, abbiam denotato la cosiddetta **estensione cartesiana dell'operatore** suddetto, cioè la sua applicazione componente per componente a operandi costituiti da sequenze di entità più semplici.
Ricordiamo anche che il segno $-^{ce}$, come accade al segno $-$ in vari contesti, viene usato sia per denotare un operatore unario (di passaggio all'opposto), sia per denotare un operatore binario.

In genere però a queste notazioni può essere applicata la **semplificazione consentita dal contesto** che trascura gli esponenti ^{ce} e porta a espressioni quali $\mathsf{v} + \mathsf{w}$, $\mathsf{v}_1 - \mathsf{v}_2$, $c \cdot \overrightarrow{OP}$ e $-\boldsymbol{H}$.

G30d.03 Due vettori v e w si dicono **vettori-RR proporzionali** sse si trova un $c \in \mathbb{R}_{nz}$ tale che $\mathsf{v} = c \cdot \mathsf{w}$.
Evidentemente la proporzionalità è una relazione di equivalenza. Si osserva poi che $\mathbf{0}$ costituisce da solo una classe di tale equivalenza, mentre ogni altra classi di questa equivalenza è costituita dai vettori che come punti appartengono a una stessa retta per l'origine privata dello stesso punto $\langle 0, 0\rangle$.
Ricordiamo inoltre che un tale insieme viene chiamato anche **raggio nel piano-RR**.

G30d.04 Se v denota un qualsiasi vettore-RR, si dice **traslazione del piano reale** di spostamento v la endofunzione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ della forma

$$\lceil P \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto P + \mathsf{v} \rceil \ .$$

Si dimostra facilmente che questa applicazione è del genere $\lceil \mathbb{R}\times\mathbb{R} \triangleleft\!\!-\!\!\triangleright \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rceil$, cioè è una permutazione del piano reale. Essa si denota con $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}$ e il trasformato del punto P si può denotare con $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}(P)$ o con $P ;\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}$.

Per la composizione delle traslazioni, come per ogni prodotto di Peirce di trasformazioni, scriviamo

$$\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}} \circ_{rl} \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}} \;=\; \left\lceil P \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\|\!\!\!\!\rightarrow\; (P \,\lrcorner\, \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}) \,\lrcorner\, \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}} \right\rceil \;=\; \left\lceil P \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\|\!\!\!\!\rightarrow\; \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}}(\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}(P)) \right\rceil \;.$$

Si dimostrano facilmente i seguenti fatti.

(1) $\quad (\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}})^{-1} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{-\mathsf{v}}$.

(2) $\quad \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}} \circ_{rl} \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}+\mathsf{w}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}} \circ_{rl} \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}} \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}} \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{w}}$.

(3) $\quad \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{0}} \;=\; \boldsymbol{Id}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$.

Queste uguaglianze dicono che le traslazioni di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ costituiscono un gruppo abeliano di trasformazioni; esso è detto **gruppo delle traslazioni del piano reale**.
Questo gruppo è isomorfo al gruppo dei vettori di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ munito dell'operazione di somma.

G30d.05 Ogni coppia di punti-RR viene anche chiamata **vettore applicato**, termine sostituibile con la abbreviazione **vettore.a**.
I vettori applicati sono evidentemente in corrispondenza biunivoca con i segmenti orientati (chiusi o aperti o semiaperti) e con l'insieme delle quaterne di numeri reali, cioè con elementi di $\mathbb{R}^{\times 4}$.
A rigore i segmenti orientati sono insiemi di punti lineari (cioè insiemi individuati da equazioni lineari nelle variabili) e muniti di un senso di percorrenza, mentre i vettori applicati sono definiti come entità cui possono essere applicate determinate operazioni.
Va segnalato anche la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca i segmenti orientati con i rettangoli-hc (cioè con i rettangoli con i lati paralleli agli assi) e con il perimetro orientato.

//input pG30d05

In effetti tra segmenti orientati chiusi, vettori applicati (ovvero quaterne di reali) e rettangoli con perimetro orientato si possono formalizzare precisi criptomorfismi, ma spesso queste nozioni trattate come equivalenti possono essere identificate.
In particolare ogni vettore applicato $\langle P, Q\rangle$ si denota anche con $\overrightarrow{PQ}$

Un vettore applicato può essere sommato con un qualsiasi vettore. Si dice somma del vettore applicato $\langle P, Q\rangle = \Big\langle \langle x_P, y_P\rangle, \langle x_Q, y_Q\rangle \Big\rangle$ con il vettore $\mathsf{v} = \langle v_x, v_y\rangle$ il vettore

$$\langle P, Q\rangle + \mathsf{v} \;:=\; \big\langle P+\mathsf{v}, Q+\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \Big\langle \big\langle x_P+v_x, y_P+v_y\big\rangle, \big\langle x_Q+v_x, y_Q+v_y\big\rangle \Big\rangle \;=\; \boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}\langle P, Q\rangle \;.$$

Contrariamente ai vettori, per i vettori applicati si definisce la somma sse l'estremo finale del primo addendo coincide con l'estremo iniziale del secondo, ovvero sse i due corrispondenti segmenti orientati costituiscono una coppia di segmenti orientati consecutivi Precisamente si definisce come **somma dei vettori applicati** $\langle P, Q\rangle$ e $\langle Q, S\rangle$ il vettore applicato $\langle P, S\rangle$; con notazioni equivalenti si definisce scrive $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} \;:=\; \overrightarrow{PS}$.

//input pG30d05

G30d.06 Ci chiediamo ora se o quando si può definire convenientemente la differenza tra due vettori applicati.

Preliminarmente diciamo che due segmenti orientati $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono **segmenti equipollenti** sse risultano coincidenti i due vettori associati $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OR}$, cioè sse $x_Q-x_P=x_S-x_R$ e $y_Q-y_P=y_S-y_R$.

Grazie al criptomorfismo la relazione di equipollenza risulta definita anche tra vettori applicati.
Chiaramente l'equipollenza è una relazione di equivalenza e si possono considerare le classi di equipollenza di segmenti orientati e di vettori applicati. La classe di equipollenza contenente $\overrightarrow{PQ}$ viene caratterizzata dal vettore $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$.

Se $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{RS}$ sono due vettori applicati equipollenti, si definisce come loro **differenza** il vettore $\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}$; per l'equipollenza esso coincide con $\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OQ}$. Questo vettore può denotarsi semplicemente come differenza di vettori come $R-P$ o come $S-Q$.

//input pG30d06

G30d.07 Il risultato della somma di un vettore applicato con un vettore v può considerarsi il risultato dell'applicazione a v della trasformazione $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}{}^{ce}$, estensione cartesiana all'insieme dei vettori applicati della traslazione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ relativa allo spostamento v.
Anche per queste trasformazioni in genere si trascura di parlare di estensione cartesiana e si può dire che le traslazioni costituiscono delle azioni sull'insieme dei vettori applicati. Anche queste applicazioni costituiscono un gruppo di trasformazioni e valgono le uguaglianze presentate in d05 per le traslazioni considerate azioni su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Si osserva che ogni classe di equipollenza dei vettori applicati si può ottenere applicando le diverse traslazioni $\boldsymbol{Trsl}_{\mathsf{v}}$ a un unico vettore applicato: in altri termini, la classe di equipollenza di $\overrightarrow{PQ}$ si può esprimere come $\{\mathsf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} :| \overrightarrow{PQ}+\mathsf{v}\}$.
Inoltre la scelta dell'elemento rappresentativo di una classe si può effettuare senza alcun vincolo a priori e in luogo di $\overrightarrow{PQ}$ si potrebbe scegliere quello equipollente avente come estremo iniziale l'origine, cioè $\langle O, Q-P\rangle$.
Si osserva anche che le classi di equipollenza sono le orbite del gruppo delle traslazioni agente sull'insieme dei vettori applicati.

G30d.08 La addizione di vettori si ottiene con la **regola del parallelogramma**. Con una variante di questa regola si ottiene la regola corrispondente per la sottrazione tra vettori.
Queste situazioni conviene vederle servendosi delle traslazioni.

//input pG30d06

G30d.09 In linea di principio risulta utile conoscere come si trasformano le varie entità che si costruiscono su $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in conseguenza dell'applicazione delle traslazioni. Infatti le traslazioni trasformano queste entità in entità analoghe e gli effetti delle trasformazioni stabiliscono dei collegamenti tra le entità accennate che possono contribuire a conoscerle meglio.
Questo è un fatto del tutto generale e può valere per ogni genere di trasformazioni applicabili a ogni tipo di ambiente.

Particolare utilità rivestono le entità invarianti per tutte le traslazioni o per insiemi significativi di traslazioni. Anche questa considerazione costituisce una particolarizzazione di una osservazione valida per tutte le trasormazioni.

Consideriamo il vettore $\mathbf{v} = \langle v_x, v_y \rangle$, il corrispondente vettore applicato nell'origine $\overrightarrow{OP}$, la retta passante per O e P $\overline{OP} = \overline{\mathbf{0}\,\mathbf{v}}$ e la corrispondente traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{v}}$.
Alla $\overline{OP}$ si può dare la forma $\mathsf{Soln}(v_y \cdot x + v_x \cdot y = 0)$
Tra le rette invarianti per la traslazione relativa a $\mathbf{v}$ si trova sicuramente la $\overline{OP}$. Questa è invariante anche per ogni traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{r\cdot\mathbf{v}}$, ove r è un qualsiasi reale nonnullo e può essere posta nella forma $\{r \in \mathbb{R} :| \langle r \cdot v_x \ , \ r \cdot v_y \rangle\}$.

G30d.10 L'insieme delle traslazioni della forma $\boldsymbol{Trsl}_{r\cdot\mathbf{v}}$ relative ai diversi $r \in \mathbb{R}$ costituiscono un sottogruppo del gruppo delle traslazioni e precisamente il loro terreno può definirsi come il sottoinsieme delle traslazioni che lasciano invariata la $\overline{OP}$.

Ogni retta ottenibile per qualche traslazione da una retta data $\mathcal{R}$ si dice **retta parallela** della $\mathcal{R}$.
La parallela alla $\overline{OP}$ contenente il punto $Q = \langle x_Q, y_Q \rangle$ ha la forma $\{r \in \mathbb{R} :| Q + r \cdot \mathbf{v}\}$; per essa si usa anche la equivalente forma concisa $Q + \mathbb{R}\,\mathbf{v}$.

Si constata che ogni retta invariante per $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{v}}$ è una retta parallela alla $\overline{OP}$.

Una parallela alla $\overline{OP}$ che non coincide con essa non può avere punti in comune con essa: in caso contrario il punto comune può essere trasformato dalle traslazioni in un qualsiasi punto delle due rette.
Per transitività anche due qualsiasi parallele alla $\overline{OP}$ aut coincidono, aut non hanno punti comuni.
Dunque il parallelismo con la retta $\overline{OP}$ è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Per denotare il fatto che le rette $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ sono parallele si scrive $\mathcal{R} /\!\!/ \mathcal{S}$. Una classe di rette parallele viene anche detta **fascio di rette parallele**.

Consideriamo una retta $\mathcal{R}$ e la sua traslata per lo spostamento $\mathbf{u}$ $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})$; il loro parallelismo viene enunciato dalla espressione $\boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{u}}(\mathcal{R}) /\!\!/ \mathcal{R}$ e il fascio delle rette parallele alla $\mathcal{R}$ è denotato con $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} :| \boldsymbol{Trsl}_{\mathbf{u}}(\mathcal{R})\}$.

G30d.11 L'insieme delle rette passanti per un punto S si dicono costituire un **fascio di rette** e il punto comune, unico, si dice **sostegno del fascio**.
Si osserva che l'appartenenza a una retta del fascio avente come sostegno S è una relazione di equivalenza su $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{S\}$
In generale due rette si dicono parallele sse non hanno punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ comuni. Le varie rette per l'origine ovviamente non possono presentare parallelismo, come pure due diverse rette di qualsiasi altro fascio.

Le varie classi di parallelismo tra rette in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si dicono **direzioni delle rette reali**. Due rette parallele hanno in comune la direzione. Ogni direzione può chiamarsi anche **punto improprio del piano reale**.
In accordo con questa dizione si può dire che le rette parallele hanno in comune un punto improprio.
Questa entità si può pensare come un punto all'infinito, raggiungibile percorrendo una qualsiasi delle rette parallele.

Con questa terminologia una classe di rette parallele si può considerare un **fascio di rette improprio**, cioè un fascio di rette avente come sostegno il loro comune punto improprio, ovvero la loro comune direzione.

Collettivamente i punti di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e i punti impropri si dicono **punti del piano proiettivo reale**; a loro volta i fasci di rette propri e impropri si dicono **fasci proiettivi di rette**.

Queste denominazioni risultano più chiare nell'ottica della geometria proiettiva [G61].

G30 e. prodotto scalare, parallelismo, ortogonalità, distanze

G30e.01 Si definisce **prodotto scalare di due vettori** $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ e $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la composizione

(1) $$\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle \;:=\; v_1\, w_1 + v_2\, w_2 \;.$$

Si tratta di una funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times 2} \times \mathbb{R}^{\times 2} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ per la quale si dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

(2) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; \langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle$ **simmetria del prodotto scalare**

(3) $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ e $\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$ **definitezza positiva del prodotto scalare**

(4) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; \langle \alpha\, \mathbf{u} + \beta\, \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle \;=\; \alpha \langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle$ e

(5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; \langle \mathbf{v} \,|\, \alpha\, \mathbf{w} + \beta\, \mathbf{x} \rangle \;=\; \alpha \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle + \beta \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{x} \rangle$ **bilinearità del prodotto scalare**

G30e.02 Il prodotto scalare costituisce una composizione di grande importanza per la geometria e il calcolo vettoriale; la sua interpretazione geometrica completa verrà data dopo l'introduzione della nozione generale di angolo e delle funzioni trigonometriche. Ora ci limitiamo ai casi dei due vettori allineati e dei due vettori che diciamo ortogonali.

Il carattere definito positivo del prodotto scalare di un vettore con se stesso consente di servirsene per definire come **lunghezza di un vettore-RR** o **norma di un vettore-RR**

(1) $$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; ||\mathbf{v}|| \;:=\; \sqrt{\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \;.$$

Se il vettore appartiene a uno degli assi la definizione fa coincidere la lunghezza del vettore con la lunghezza del segmento corrispondente sull'asse.

Nel caso di vettore generico si può scrivere

(2) $$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;:\; ||\mathbf{v}|| \;:=\; \sqrt{||\boldsymbol{Prj}_1(\mathbf{v})||^2 + ||\boldsymbol{Prj}_2(\mathbf{v})||^2} \;.$$

Evidentemente

(3) $$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,,\; k \in \mathbb{R} \;:\; \langle k\, \mathbf{v} \,|\, k\, \mathbf{v} \rangle \;=\; k^2\, ||\mathbf{v}||^2 \quad \text{ovvero} \quad ||k\, \mathbf{v}|| \;=\; |k| \cdot ||\mathbf{v}|| \;.$$

Questa uguaglianza contribuisce a giustificare la precedente definizione di norma di un vettore piano.

Osserviamo che questa definizione è in accordo anche con il classico teorema di Pitagora che trattiamo in un punto seguente.

G30e.03 Si definisce come **distanza pitagorica tra due punti** $P = \langle x_P, y_P \rangle$ e $Q = \langle x_Q, y_Q \rangle$ come la lunghezza del vettore $\overrightarrow{PQ}$, cioè

$$\text{dist}_2(P, Q) \;:=\; ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \;.$$

Questa funzione bivariata è chiaramente simmetrica e gode di tutte le proprietà delle funzioni distanza.

Dunque $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munito della distanza pitagorica costituisce uno spazio metrico.

Nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si possono definire altre interessanti funzioni distanza.

Una distanza molto semplice è la **distanza Manhattan** $\text{dist}_1(P, Q) \;:=\; |x_P - x_Q| + |y_P - y_Q|$.

Le due distanze dist_1 e dist_2 sono casi particolari della funzione definibile per ogni $p \in [1, +\infty)$ con l'espressione seguente

$$\mathrm{dist}_p(P,Q) \ := \ (|x_P - x_Q|^p + |y_P - y_Q|^p)^{\frac{1}{p}} \ .$$

È evidente che tutte queste distanze sono invarianti per tutte le traslazioni. Oltre alla invarianza per queste trasformazioni dimostreremo l'invarianza per altre trasformazioni, le riflessioni e, parzialmente, le rotazioni.
Queste proprietà di simmetria forniscono alle distanze suddette dei pregi che fanno di esse degli strumenti di calcolo proficuamente utilizzabili per varie finalità.

La distanza pitagorica è decisamente la più utile e più utilizzata. Essa quindi spesso viene chiamata *tout court* la distanza e viene denotata con $\mathrm{dist}(P,Q)$, lasciando cadere il deponente $_2$.

Una trasformazione di uno spazio che mantiene le distanze di un determinato genere si dice **isometria**. Vedremo varie isometrie del piano di grande importanza.

G30e.04 La bilinearità del prodotto scalare implica

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ \langle \mathbf{v} + \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{w} \rangle + 2\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle$$

e quindi l'espressione

$$(1) \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{2} \left(||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 - ||\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{w}||^2 \right) \ .$$

A questo punto si osserva che le norme si possono ottenere dai prodotti scalari mediante la e02(1) e che i prodotti scalari si possono ottenere dalle norme mediante la (1).
Possiamo dunque asserire che le conoscenze sui prodotti scalari e quelle sulle lunghezze dei vettori (piani) si equivalgono.

Per il prodotto scalare di due vettori nonnulli allineati abbiamo

$$(2) \qquad \forall k \in \mathbb{R} \ , \ \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{0}\} \ : \ \langle \mathbf{v} \,|\, k\mathbf{v} \rangle = k \ ||\mathbf{v}||^2 \ .$$

Questo prodotto scalare quindi non è mai nullo; inoltre esso è positivo sse i vettori hanno la stessa orientazione ed è negativo sse hanno orientazioni opposte.

Ogni vettore di lunghezza uguale ad 1 viene chiamato **versore** o **vettore normalizzato**.
Grazie alla e02(3), ogni vettore $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ nonnullo si può normalizzare, cioè ridurre a un vettore proporzionale di lunghezza 1, trasformandolo in uno dei due vettori opposti

$$(2) \qquad \pm \frac{1}{\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2}} \, \mathbf{v} \ .$$

L'espressione (1) nel caso in cui $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono due versori diventa $\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle = \dfrac{||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2}{2} - 1$.

Dato che la lunghezza $||\mathbf{v} + \mathbf{w}||$ può assumere tutti i valori da 0 a 2 (0 nel caso $\mathbf{v} = -\mathbf{w}$, 2 quando $\mathbf{v} = \mathbf{w}$), si ha che l'insieme dei possibili valori del prodotto scalare di due versori è $[-1, +1]$.

G30e.05 Due vettori si dicono **vettori ortogonali** sse il loro prodotto scalare è nullo. Abbiamo dunque la relazione di ortogonalità tra vettori piani la quale evidentemente è una relazione simmetrica, antiriflessiva e di conseguenza non transitiva.

Per esprimere il fatto che due vettori sono ortogonali si scrive

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle = 0 \ .$$

Esempi di duetti di vettori ortogonali sono:

$\langle 1,0\rangle \perp \langle 0,1\rangle \quad , \quad \langle 1,1\rangle \perp \langle -2,2\rangle \quad , \quad \langle 1,3\rangle \perp \langle 3,-1\rangle \quad , \quad \langle a,b\rangle \perp \langle -b,a\rangle \quad , \quad \langle a,b\rangle \perp \langle k\,b,-ka\rangle$.

In effetti dalla definizione e01(1) si ha che $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \left\lceil \frac{v_1}{v_2} = -\frac{w_2}{w_1} \right\rfloor$.

G30 f. circonferenze, triangoli e costruzioni con riga e compasso

G30f.01 Per ogni punto $\mathbf{c} = \langle x_c, y_c \rangle$ del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e ogni numero reale positivo r si definisce **circonferenza** avente come **centro c** e come **raggio** r il luogo dei punti del piano che presentano dal centro la stessa distanza euclidea r.

Per questi punti si trova che soddisfano l'equazione

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \quad \text{o la equivalente} \quad x^2 + y^2 - 2\,x\,x_c - 2\,y\,y_+ {x_c}^2 + {y_c}^2 - r^2 = 0 \ .$$

Da qui si ricava che un'equazione della forma $x^2 + y^2 + Bx + Cy + D = 0$ rappresenta la circonferenza avente il centro in $\mathbf{c} = \left\langle -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2} \right\rangle$ e di raggio $\sqrt{\frac{B^2 + C^2}{4} - D}$, sotto la condizione che B, C e D rendano il radicando positivo.

La precedente generica circonferenza dal suo centro $\mathbf{c}$ e dal suo raggio r viene identificata dalla notazione $Circf(\mathbf{c}, r)$.

G30f.02 Le circonferenze del piano si possono vedere come strumenti che vengono utilizzati per una vastissima gamma di costruzioni utili alla soluzione di svariati problemi.
Questo ha indotto a definire un gran numero di nozioni da associare ad ogni circonferenza e numerose costruzioni e metodi costruttivi che riguardano circonferenze e altre figure piane.

Qui ci limitiamo a poche nozioni che ci aiutano a introdurre le nozioni concernenti gli angolio e a enunciare metodi costruttivi e fatti fondamentali come le costruzioni con riga e compasso, il teorema di Talete e il teorema di Pitagora. Molte altre nozioni e costruzioni sono trattate altrove.

G30f.03 Consideriamo dunque la generica circonferenza $\mathbf{C} := Circf(C, r)$.
Dato un suo punto A risulta definita la retta passante per A e C, $\overline{AR}$ e il secondo punto di intersezione di questa retta con la circonferenza $\mathbf{C}$ che chiamiamo $\overline{A}$.

Si definisce **diametro della circonferenza C** passante per A il segmento $A\,\overline{A}$.
La lunghezza di ogni diametro della circonferenza è uguale al doppio della lunghezza del suo raggio.

Occorre avvertire che spesso si identificano l'insieme dei punti di un diametro di circonferenza e la sua lunghezza; anche qui adotteremo questa semplificazione nei contesti che evitano l'ambiguità.

Questa definizione è coerente con la definizione di diametro di un qualsiasi sottoinsieme **E** di uno spazio metrico che è limitato come lunghezza massima tra quelle dei segmenti che hanno come estremità due punti di **E**.

G30f.04 Settore circolare, ...

G30f.05 Il compasso viene assunto come strumento ideale in grado di tracciare circonferenze e archi di circonferenza perfettamente definiti.
Il compasso affianca quindi la riga ideale in grado di tracciare segmenti rettilinei perfettamente definiti.
Questi due strumenti consento servono quindi per definire costruzioni geometriche perfettamemnte definite che chiamiamo **costruzioni geometriche con riga e compasso** in breve **costruzioni-grc**
Con il compasso si possono costruire elementi costruttivi geometrici fondamentali come l'asse di un segmento, un segmento parallelo a uno dato, una retta parallela a una data e un segmento ortogonale a uno dato. Esso inoltre consente di tracciare importanti poligoni regolari: triangoli equilateri, quadrati (e rettangoli), pentagoni regolari, esagoni, ottagoni e altre figure dotate di regolarità.

G30f.06 teorema di Talete, teoremi di Euclide, teorema di Pitagora.

G30 g. angoli convessi e concavi

G30g.01 In matematica il termine angolo riguarda oggetti di larghissimo uso, innanzi tutto nella geometria e nell'analisi infinitesimale, che conviene definire a diversi livelli di portata.
Qui cominciamo con una definizione di angolo convesso che consente di sviluppare senza eccessivi preliminari le basi della geometria piana euclidea.
Ad ogni angolo convesso si associa una ampiezza, una misura che, seguendo abitudini diffuse, esprimiamo in gradi, che assume valori reali compresi tra 0 e 180. Alla definizione degli angoli convessi si aggiunge facilmente quella di angoli concavi; per questi si hanno ampiezze ancora solo positive, ma con valori da 180 a 360 gradi.
Con gli angoli convessi e concavi si possono organizzare le prime nozioni di trigonometria, si possono affrontare numerose costruzioni geometriche e si possono risolvere molti problemi.

In una fase successiva si possono introdurre gli angoli con segno, entità meno intuitive, ma che consentono di definire funzioni trigonometriche con argomenti reali qualsiasi (fatte salve alcune singolarità).
Gli angoli con segno sono da considerare in collegamento con il problema della rettificazione degli archi di circonferenza dotati di verso, alla natura del numero π e alle questioni relative alle aree con segno.
Tutti questi elementi forniscono contributi essenziali alla strumentazione del calcolo infinitesimale e alle applicazioni alla fisica classica e conseguentemente a tutte le discipline quantitative.

G30g.02 A una coppia di semirette si possono attribuire molteplici relazioni di mutua posizione simili a quelle che si possono riscontrare tra due segmenti orientati.
Le situazioni più interessanti e feconde riguardano le coppie di semirette aventi in comune l'estremità.
Una terna della forma $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ si dice **angolo**; di tale angolo V costituisce il **vertice**, $\overrightarrow{VA}$ il **primo lato** e $\overrightarrow{VB}$ il **secondo lato**.

La definizione data stabilisce un ordine preciso tra i due lati, cioè riguarda angoli orientati.
I due angoli $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ e $\langle\overrightarrow{VB}, V, \overrightarrow{VA}\rangle$ si dicono **angoli opposti**.
Per molte considerazioni non occorre distinguere tra angoli opposti e si può limitare a utilizzare angoli nonorientati, oggetti che si possono definire formalmente come duetti costituiti da due angoli orientati opposti.

Spesso si può adottare la semplificazione consistente nel trattare degli angoli senza distinguere se si tratta di angoli orientati o meno, giungendo a risultati che riguardano sia gli orientati che i nonorientati e che il contesto consente di precisare.
Questa semplificazione si incontra nelle definizioni che seguono.

Si dice **angolo piatto** un angolo della forma $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ con i due lati costituenti semirette collineari e divergenti.
Si dice **angolo retto** un angolo della forma $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle$ con $\langle\overrightarrow{VA} \perp \overrightarrow{VB}\rangle$.

G30g.03 Per rendere gli angoli strumenti di calcolo è necessario associare a ciascuno di essi un sottoinsieme di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che essi delimitano che chiamiamo **angolo.s** e introdurre una misura di tale figura-RR costituita da un numero reale che chiamiamo **ampiezza dell'angolo**. Con questi elementi si può stabilire una classificazione degli angoli e si possono introdurre le relazioni di congruenza, di esplementarità di complementarità e di supplementarità.

Prima di queste nozioni conviene di riprendere quelle di traslazioni, parallelismo e ortogonalità e le conseguenti nozioni riguardanti punti impropri.

G30g.04 Le rette L ed M sono dette **rette parallele** sse si possono associare a due equazioni aventi le forme $a\,x+b\,y+c=0$ e $a\,x+b\,y+c'=0$. Va notato che due rette coincidenti costituiscano un caso particolare di coppia di rette parallele.
Si trova che due rette L ed M sono parallele sse esse sono entrambe verticali oppure esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $L+k=M$.

Si osserva poi che due rette parallele non coincidenti non hanno alcun punto in comune, mentre due rette non parallele hanno sempre un punto in comune (come accade per le rette-QQ).
Infatti per individuare tale punto devono essere soddisfatte entrambe le equazioni delle rette, cioè si deve trovare una soluzione e una sola
Esso si trova facilmente, cioè si trovano facilmente espressioni reali per le sue coordinate.

G30g.05 Definiamo **angolo convesso** un angolo $\langle\overrightarrow{VA}, V, \overrightarrow{VB}\rangle = \langle S, V, T\rangle$ il cui corrispondente angolo.s è un sottoinsieme convesso di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Quindi questo angolo.s è tale che contiene tutti i punti dei segmenti che hanno una estremità sul lato S e l'altra sul lato T.
Per l'angolo.s di un qualsiasi angolo α adottiamo la notazione $\mathsf{SetY}(\alpha)$.
Osserviamo che deve risultare chiaro che $\mathsf{SetY}\langle S, V, T\rangle$ denota l'angolo.s dell'angolo convesso $\langle S, V, T\rangle$.

Abbiamo visto che se le semirette sono diverse ma appartengono alla stessa retta R, ciascuno dei due semipiani definiti da R muniti del vertice (necessario per distinguere le due semirette) si dice **angolo piatto**.
Ogni angolo piatto $\langle S, V, T\rangle$ tripartisce $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nell'insieme dei punti della retta contenente i suoi lati, nel semipiano aperto parte del suo insieme-s e nel semipiano aperto dei punti restanti.

Se invece le due semirette S e T appartengono a due rette diverse (e incidenti), $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ viene tripartito in tre insiemi ben distinti: l'insieme dei punti appartenenti alle due semirette (tra i quali il vertice) che diciamo **frontiera dell'angolo**, e i due insiemi connessi K_1 e K_2 separati dai punti della frontiera. Uno di questi due insiemi, chiamiamolo K_1, è l'angolo.s di $\langle S, V, T\rangle$ e quindi è un insieme convesso.
Il terzo insieme, K_2, non è convesso, ma è l'angolo.s dell'angolo $\langle T, V, S\rangle$, cioè dell'angolo opposto di $\langle S, V, T\rangle$.
Due angoli di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tali che l'uno è l'opposto dell'altro sono detti anche **angoli esplementari** e la relazione che li collega è chiamata **esplementarità**.
Conviene dire, per completezza, che l'angolo esplementare di un angolo piatto è l'angolo piatto suo opposto.

G30g.06 Consideriamo ancora un angolo concavo (non piatto) $\alpha := \langle S, V, T\rangle$.

Per il suo opposto scriviamo $\ominus\alpha := \langle T, V, S\rangle$, per il suo primo lato $\boldsymbol{Prj}_1(\alpha) = S$, per il suo secondo lato $\boldsymbol{Prj}_3(\alpha) = T$, per il suo vertice $\boldsymbol{Vrtx}(\alpha) = V$ e per la sua frontiera $\mathsf{Frntr}(\alpha) := S \cup T$.

La tripartizione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che α determina si individua con la scrittura

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \;=\; (S\cup T)\,\dot{\cup}\,\Big(\mathsf{SetY}(\alpha)\setminus\mathsf{Frntr}(\alpha)\Big)\,\dot{\cup}\,\Big(\mathsf{SetY}(\ominus\alpha)\setminus\mathsf{Frntr}(\alpha)\Big)\;.$$

Si dice che i due angoli definiti dalle due semirette sono **angoli esplementari**, ovvero che si trovano nella relazione di **esplementarità**.

Angoli.s convessi e concavi sono, quindi, sottoinsiemi illimitati del piano.
Si osserva che una definizione equivalente di angolo.s convesso lo vede come intersezione di due semipiani definiti da due rette orientate che si intersecano in uno e un solo punto (il vertice dell'angolo).

Consideriamo l'insieme $\overline{V}$ costituito degli angoli $\langle S, V, T\rangle$ ottenuti tenendo fisso il primo lato S e muovendo il secondo T.
Per $T = S$ abbiamo l'angolo nullo il cui angolo.s si riduce alla semiretta S. Ruotando leggermente T nel verso positivo si hanno angoli convessi tra i quali l'angolo retto per $T \perp S$ Ruotando ancora T quando si giunge a $T = \ominus S$ si ha un angolo piatto e quando si continua si hanno angoli concavi fino a glingere a sovrapporre T a S ottenendo quello che viene chiamato **angolo giro**.
Un angolo piatto si può quindi considerare un elemento di separazione tra gli angoli convessi e gli angoli concavi dell'insieme $\overline{V}$. JR

G30g.07 È interessante esaminare gli angoli individuati da una terna di punti non allineati A, B e C.
Questi tre punti individuano 6 rette orientate.
Esse prese a coppie individuano 12 angoli orientati convessi in quanto intersezioni di semipiani.
Si individua inoltre una partizione del piano in 3 punti, tre segmenti aperti finiti, 6 semirette, tre angoli.s aperti illimitati e un triangolo aperto.

//input pG30g07

G30g.08 È naturale porsi il problema di "misurare gli angoli": gli angoli possono servire per tante costruzioni e se a essi si associano misure numeriche ci si aspetta che per molte costruzioni possano essere utili calcoli numerici su queste misure.

Ci proponiamo quindi di associare ad ogni angolo α la sua cosiddetta **ampiezza angolare** che denotiamo con $\text{ampl}(\alpha)$.
Procederemo con una certa gradualità motivando le scelte e riservandoci di ampliare la stessa nozione di angolo.

Consideriamo due angoli orientati positivamente convessi o concavi α e β con lo stesso vertice, se **SetY**(α) è sottoinsieme di **SetY**(β), situazione che si determina solo se i lati di β sono sottoinsiemi di **SetY**(α), è ragionevole chiedere che l'ampiezza di α sia maggiore della misura di β.

Dato un angolo convesso positivo $\alpha = \langle S, V, T\rangle$ si dice **semiretta bisettrice dell'angolo** la semiretta avente come estremità V e i cui punti sono equidistanti dai lati di α. Essa si può costruire facilmente con un compasso.
La stessa definizione si applica per gli angoli convessi negativi.
Si definisce poi la semiretta bisettrice di un angolo concavo come la semiretta opposta alla semiretta bisettrice del suo angolo (convesso) esplementare.
La semiretta bisettrice $\mathcal{B}$ di un angolo α positivo convesso o concavo e ciascuno dei due lati di α determinano due angoli convessi positivi.
La bisettrice di un angolo piatto positivo è la semiretta ortogonale alla retta dei lati e si ottiene ruotando positivamente il primo lato dell'angolo piatto.
Anche questa definizione si estende agli angoli piatti negativi.

I due angoli che si ottengono da un angolo α convesso, piatto o concavo si dicono **semiangoli** dell'angolo dato.
Si osserva che la riflessione rispetto alla retta contenente la bisettrice $\mathcal{B}$ di α scambia i due lati di questa e trasforma ciascuno dei due semiangoli nell'opposto dell'altro.

È quindi ragionevole attribuire ai due semiangoli di un angolo α una ampiezza che sia la metà dell'ampiezza di α.

È ancheabbastanza ragionevole affermare, sbrigativamente, che i due angoli determinati dalla semiretta bisettrice "sono la metà" dell'angolo di partenza.

G30g.09 Un angolo convesso si dice **angolo retto** se i suoi due lati sono ortogonali; in parole povere un angolo retto è la metà di un angolo piatto.
Un angolo strettamente contenuto in un angolo retto avente il suo stesso vertice si dice **angolo acuto**.
Un angolo convesso contenente un angolo retto avente lo stesso vertice si dice **angolo ottuso**.
Due angoli α e β convessi con lo stesso vertice e tali che il secondo lato di α coincida con il primo lato di β si dicono **angoli adiacenti**.
Si definisce angolo **somma di due angoli** convessi adiacenti $\big\langle S,V,T\big\rangle$ e $\big\langle T,V,U\big\rangle$ l'angolo $\big\langle S,V,U\big\rangle$.
Per la somma di due angoli convessi α e β adottiamo l notazione

$$\alpha \oplus \beta \ .$$

Si osserva che la somma di due angoli convessi potrebbe essere sia convesso che concavo e che anche per il segno di tale composizione di angoli orientati si possono ottenere varie possibilità.

//input pG30g09

G30g.10 L'unione di due angoli adiacenti convessi è l'angolo definito dalle due semirette che sono i lati di uno solo dei due angoli.
Un tale angolo unione può chiamarsi **angolo somma dei due angoli adiacenti** A e B; inoltre è ragionevole assegnargli come misura la somma delle misure degli angoli adiacenti.
L'angolo somma di due angoli adiacenti convessi potrebbe essere convesso o concavo: è sicuramente convesso l'angolo somma di due angoli acuti.

Si dice **angolo giro** la somma di due angoli piatti adiacenti. Il corrispondente angolo.s coincide con l'intero piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; esso va associato anche a una semiretta alla quale si affidano i due ruoli dei suoi lati coincidenti.
Un angolo giro si può anche considerare come il limite di angoli concavi aventi in comune un solo lato e via via più estesi, ovvero definiti da un lato "fisso" e un lato mobile che si muove fino a sovrapporsi al precedente.

G30g.11 Il processo di dimezzamento di un angolo può essere portato avanti quanto si vuole. Quindi, dato un angolo si possono individuare quanti si vogliono suoi sottomultipli relativi a potenze di 2.

Ogni angolo può essere "approssimato" quanto si vuole come somma di angoli adiacenti come i prececenti.
Questa affermazione naturalmente richiede che venga definito con precisione la nozione di angolo che approssima un altro angolo. Queste considerazioni comunque inducono ad attribuire agli angoli misure costituite da numeri reali.

Due angoli trasformabili l'uno nell'altro mediante isometrie si dicono **angoli congruenti**.
Evidentemente una misura degli angoli invariante per le isometrie costituisce uno strumento con molti vantaggi: in particolare consente di individuare le classi di congruenza degli angoli. Quindi si chiede una misura degli angoli a valori reali e invariante per congruenza.

G30g.12 Nella nomenclatura degli angoli contenuti in un angolo giro si è soliti usare aggettivi particolari per gli angoli che si trovano in una data relazione con un particolare angolo dato.
Si dice **angolo complementare** di un angolo acuto ogni angolo(acuto) che sommato al precedente fornisce un angolo retto.
Si dice **angolo supplementare** di un angolo convesso ogni angolo (convesso) che sommato al precedente fornisce un angolo piatto.
Come si è già rilevato, si dice **angolo esplementare** di un angolo convesso o concavo ogni angolo (concavo o convesso) che sommato al precedente fornisce un angolo giro.

G30 h. radianti e rotazioni piane

G30h.01 Una circonferenza particolare è quella con centro nell'origine e raggio 1; essa viene detta **circonferenza goniometrica**.
Ogni circonferenza di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ viene trasformata nella goniometrica dalla **trasloomotetia**
$$\boldsymbol{Trsl}(\langle -x_C, -y_C \rangle) \circ_{lr} \boldsymbol{Hmtt}(1/r) \ .$$
Di conseguenza molte proprietà delle varie circonferenze si possono ottenere da proprietà della circonferenza goniometrica attraverso opportune traslazioni e omotetie.

G30h.02 Definiamo ora la lunghezza della circonferenza goniometrica.

Intuitivamente essa si può pensare come la lunghezza del segmento che si ottiene tagliando la circonferenza in un suo punto e "rettificando" questa curva, cioè immaginandola costituita da un materiale filiforme flessibile ma non estendibile e facendo assumere a tale oggetto forma rettilinea.
Più matematicamente tale lunghezza si ottiene come limite [v.a. B43d02] della lunghezza dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti nella circonferenza goniometrica aventi $4,\ 8,\ 16, ...,\ 2^n, ...$ lati.

//input pG30h02

Con questo procedimento si ottiene un numero reale costruibile che si denota con π.
La ricerca di approssimazioni sempre più precise di questo importantissimo numero reale è stata considerata una sfida intellettuale per molti studiosi dai tempi antichi fino alle attuali attività che utilizzano con tecniche sofisticate potenti computers `History of numerical approximations of pi (we)`.
La sua approssimazione con 50 cifre è la seguente:

$$\pi \approx 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510 \ .$$

G30h.03 La lunghezza di una circonferenza di raggio r è data da $r\,\pi$. Infatti tutti i poligoni che servono alle approssimazioni successive di questa lunghezza, rispetto ai poligoni utilizzati per la circonferenza goniometrica hanno lati e perimetri moltiplicati per r.

Si dice **arco iniettivo** di una circonferenza l'insieme dei suoi punti determinati da una coppia di essi, chiamiamola $\langle P, Q\rangle$, e dall'essere toccati da un punto che si muove nel verso orario da P a Q.
Esso si denota con $\overline{PQ}$. Una circonferenza con una coppia di suoi punti coincidenti $\langle P, P\rangle$ si può associare a un arco di lunghezza 0 ridotto al punto P o all'intera circonferenza da percorrere da P a P una o più volte vuoi nel verso positivo, vuoi nel negativo.

Si definisce come **lunghezza di un arco iniettivo** il limite della sincc ottenuta con le poligonali inscritte [B43d03] e con le circoscritte all'arco stesso; in particolare quelle determinate dagli angoli ottenuti con successivi dimezzamenti (e aventi ampiezze esprimibili mediante l'ampiezza α dell'angolo dato come $\dfrac{k}{2^n}\,\alpha$. La lunghezza dell'arco $\langle P, Q\rangle$ si denota con $|\langle P, Q\rangle|$.
La lunghezza di una circonferenza si può considerare come un caso limite delle lunghezze dei suoi archi.
Le lunghezze degli archi di una circonferenza di raggio 1 sono esprimibili significativamente con espressioni della forma $k\dot{\pi}$.

G30h.04 Ad un arco iniettivo $\overline{PQ}$ si associano due ordinamenti totali dei suoi punti che chiamiamo **versi di percorrenza**: quello che porta da P a Q che diciamo **verso positivo** o **verso antiorario** e quello che porta da Q a P che diciamo **verso negativo** o **verso orario**.

Si dice **arco orientato iniettivo** di una circonferenza una coppia costituita da un suo arco iniettivo $\overline{PQ}$ e da uno dei suoi due versi di percorrenza. L'arco orientato corrispondente ad $\overline{PQ}$ con verso positivo si denota con $+\overline{PQ}$; l'arco orientato opposto del precedente, corrispondente ad $\overline{PQ}$ con verso negativo, si denota con $-\overline{PQ}$.

Agli archi orientati iniettivi con verso antiorario $+\overline{PQ}$ si attribuisce una lunghezza positiva, $|\overline{PQ}|$, cioè la lunghezza del relativo arco; agli archi orientati con verso orario $-\overline{PQ}$ una lunghezza negativa, $-|\overline{PQ}|$.

Consideriamo una circonferenza di centro C e raggio r un suo arco iniettivo $\overline{PQ}$ e i corrispondenti due archi orientati $+\overline{PQ}$ e $-\overline{PQ}$.

All'arco orientato antiorario $+\overline{PQ}$ associamo la coppia $\left\{\overline{CP}\,, \frac{|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ che chiamiamo **angolo orientato positivo**.

All'arco orientato orario $-\overline{PQ}$ associamo la coppia $\left\{\overline{CP}\,, \frac{-|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ che chiamiamo **angolo orientato negativo**.

A un arco limite $\overline{PP}$ costituito dal solo punto P si associa l'angolo $\langle\overline{CP}\,, 0\rangle$.

A un arco costituito dai punti dell'intera circonferenza percorsi a partire da un punto P in verso antiorario si attribuisce l'angolo $\langle\overline{CP}\,, 2\pi\rangle$; al suo opposto, ovvero alla circonferenza percorsa in verso orario, l'angolo $\langle\overline{CP}\,, -2\pi\rangle$.

Gli angoli degli archi orientati iniettivi sono quindi coppie $\langle\sigma, a\rangle$ costituite da una semiretta e da un numero reale di $[-2\pi\,,\,2\pi]$. Questo si dice **ampiezza in radianti dell'angolo**.

Può servire presentare queste entità con descrizioni intuitive; $\left\{\overline{CP}\,, +\frac{|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ si presenta come l'insieme dei punti del piano toccati muovendo una semiretta variabile $\overline{CA}$ determinata dal punto A che si muove sull'arco da P a Q; $\left\{\overline{CP}\,, -\frac{|\overline{PQ}|}{r}\right\}$ si visualizza come l'insieme dei punti del piano toccati muovendo una semiretta variabile $\overline{CA}$ determinata dal punto A che si muove sull'arco da Q a P.

Chiaramente l'ampiezza di un arco orientato iniettivo non dipende dal raggio della circonferenza alla quale appartiene l'arco utilizzato per la definizione. Può essere vantaggioso riferirsi a circonferenze di raggio 1, in quanto le lunghezze con segno dei loro archi forniscono direttamente le ampiezze in radianti degli angoli orientati.

G30h.05 In generale si può definire **angolo orientato** del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ogni coppia $\langle\overline{VP}\,, a\rangle$ costituita da una qualsiasi semiretta e da un numero reale qualsiasi; V ha il ruolo del vertice dell'angolo e α il ruolo della sua ampiezza.

Intuitivamente un angolo orientato corrisponde a un movimento di una semiretta di estremo V che parte dalla posizione $\overline{VP}$ e ruota in verso antiorario se $a > 0$, in verso orario se $a < 0$, in modo da percorrere sulla circonferenza di centro C e raggio 1 un arco di lunghezza $|a|$, con la possibilità di compierere più di un giro completo.

In molte questioni della geometria e delle sue applicazioni interessano soprattutto angoli aventi ampiezze in valore assoluto inferiori a 2π, spesso inferiori a π, e quindi la definizione data può essere considerata inutilmente complicata.

La definizione data però consente di utilizzare gli angoli e le loro ampiezze in molte costruzioni formali e in molte procedure di grande utilità. In particolare si possono effettuare senza restrizioni tutte le operazioni aritmetiche sulle ampiezze degli angoli orientati e queste operazioni si possono utilizzare in molte composizioni e trasformazioni geometriche.

Conviene comunque ribadire che in molti contesti risulta comodo confondere gli angoli con i loro angoli.s e con le loro ampiezze; spesso inoltre si possono trascurare le orientazioni degli archi e degli angoli.

G30h.06 In molte attività pratiche conviene esprimere le ampiezze degli angoli nella scala dei gradi sessagesimali.
Si tratta di una scala proporzionale alla scala dei radianti secondo la quale all'ampiezza π radianti, ampiezza degli angoli piatti, corrisponde l'ampiezza di 180°; alla scala sessagesimale inoltre si chiede di utilizzare come sottomultipli del grado le sue sessantesime parti chiamate **gradi primi**, come sottomultipli del grado primo le sue sessantesime parti chiam **gradi secondi** e i sottomultipli decimali dei gradi secondi.
Si usano quindi notazioni per le ampiezze degli angoli come $37^\circ\ 23'\ 07.56''$.

$$36 + \frac{23}{60} + \frac{7.56}{3\,600} = \frac{36 \cdot 360\,000 + 23 \cdot 6\,000 + 756}{360\,000} = \frac{13\,098\,756}{360\,000} = 36.3854\overline{3} \text{ gradi sessagesimali.}$$

Si hanno dunque le seguenti uguaglianze

$$1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi} \text{ gradi} \qquad 1' = \frac{1}{60} \text{ gradi} \qquad 1'' = \frac{1}{3\,600} \text{ gradi}$$

e si utilizzano i seguenti fattori di conguaglio

$$1^\circ = 0.017\,453\,29... \text{ rad} \qquad 1' = 0.000\,290\,888... \text{ rad} \qquad 1'' = 0.000\,000\,484\,81 \text{ rad} \ ,$$

$$1 \text{ rad} = 57.295\,779\,51^\circ = 3\,437.7468' = 206\,264.81'' \ .$$

Talora però si esprimono gli angoli mediante i gradi e i loro sottomultipli decimali; in questo caso si parla di scala dei gradi decimali.

Nel seguito, salvo avvertimento contrario, esprimeremo tutte le ampiezze degli angoli in radianti.

G30 i. omotetie e riflessioni

G30i.01 Ad ogni punto $C = \langle x_C, y_C \rangle$ e a ogni $\rho \in \mathbb{R}_{nz}$ si associa una permutazione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ chiamata **omotetia** il cui **centro** è C e il cui **rapporto** è ρ.
Per tale trasformazione usiamo la notazione $\boldsymbol{Hmtt}(C, \omega)$ e si definisce

$$\boldsymbol{Hmtt}(C, \rho) \ := \ \ulcorner \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \overrightarrow{OC} + \rho(\mathbf{v} - \overrightarrow{OC}) \urcorner \ .$$

Se $\rho > 0$ si parla di **omotetia diretta**, se $\rho < 0$ di **omotetia inversa**; nel primo caso se $\rho > 1$ si parla di **dilatazione**, mentre se $0 < \rho < 1$ si parla di **contrazione**.
Evidentemente $\boldsymbol{Hmtt}(C, -1)$ è la simmetria centrale di centro C.

Dalla definizione segue che solo il centro è punto fisso di una omotetia; sono invece rette invarianti tutte le rette passanti per il centro C e solo esse.

G30i.02 Conviene considerare in particolare le omotetie aventi centro nell'origine, in quanto semplici da analizzare.

$$\boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho) \ = \ \ulcorner \mathbf{v} \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \rho \mathbf{v} \urcorner \ .$$

Evidentemente $\boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, 1)$ è la trasformazione identità. È chiaro inoltre che per il prodotto di due omotetie con centro nell'origine si ha

$$\forall \rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho_1) \circ \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho_2) \ = \ \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho_1 \cdot \rho_2) \ = \ \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho_2) \circ \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho_1) \ .$$

Abbiamo quindi che le omotetie aventi centro nell'origine costituiscono un gruppo isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali diversi da 0.

Le omotetie con centro nell'origine agiscono in modo molto semplice sulle coordinate cartesiane dei punti:

$$\boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho)\,(\langle a, b \rangle) = \langle \rho\, a, \rho\, b \rangle \ .$$

È quindi evidente la loro azione sulle distanze:

$$\forall P, Q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \ \rho \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ \operatorname{dist}\left(\boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho)(P), \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho)(Q)\right) \ = \ |\rho| \operatorname{dist}(P, Q) \ .$$

Dunque le sole omotetie con centro nell'origine che non cambiano le distanze sono l'identità del piano e la simmetria centrale con centro nell'origine $\boldsymbol{Hmtt}(C, -1) \ = \ \ulcorner \mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v} \urcorner$.

G30i.03 Una omotetia generica si può ottenere come prodotto di composizione di traslazioni e omotetia con centro nell'origine:

$$\boldsymbol{Hmtt}(C, \rho) = \boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{CO}} \circ_{rl} \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0}, \rho) \circ_{rl} \boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{OC}} \ .$$

//input pG30i03

Da questa, per la invarianza delle distanze per traslazione, discende la seguente formula di trasformazione delle distanze per omotetia:

$$\forall C, P, Q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ , \ \rho \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ \operatorname{dist}\left(\boldsymbol{Hmtt}(C, \rho)(P), \boldsymbol{Hmtt}(C, \rho)(Q)\right) \ = \ |\rho| \operatorname{dist}(P, Q) \ .$$

G30i.04 Un'altro genere di trasformazioni del piano di primario interesse sono le riflessioni rispetto a una retta.

Le più semplici sono le riflessioni rispetto agli assi Ox e Oy date, risp., dalle seguenti definizioni:

$$\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}} := \lceil \langle a,b\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle -a,b\rangle \rceil \quad , \quad \mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} := \lceil \langle a,b\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle a,-b\rangle \rceil \ .$$

È evidente che queste permutazioni del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sono involuzioni e che la composizione delle due, quale che sia l'ordine dei fattori, coincide con la simmetria centrale con centro nell'origine:

$$\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}} \circ \mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} = \mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} \circ \mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}} = \lceil \langle a,b\rangle \mapsto \langle -a,-b\rceil = \boldsymbol{Hmtt}(\mathbf{0},-1) \ .$$

G30i.05 In generale si dice **riflessione rispetto a una generica retta** del piano $\mathcal{R}$ la trasformazione che a un punto P associa il punto $\overline{P}$ ottenuto considerando la retta passante per P e ortogonale alla $\mathcal{R}$ e su questa trovando il punto che dista da $\mathcal{R}$ quanto P ma, se non appartiene alla $\mathcal{R}$ (caso in cui $\overline{P}=P$), appartiene al semipiano aperto delimitato da $\mathcal{R}$ diverso da quello cui appartiene P.

Questa trasformazione del piano viene detta anche **simmetria assiale** relativa all'asse $\mathcal{R}$.

Dalla definizione risulta chiaro che questa trasformazione è un'involuzione e che i suoi punti fissi sono i punti della $\mathcal{R}$.

Risulta chiaro anche che una riflessione trasforma rette in rette e segmenti in segmenti di uguale lunghezza; essa quindi mantiene le distanze, cioè è un'isometria piana. Inoltre è chiaro che tutte le rette ortogonali all'asse di riflessione sono invarianti per tale trasformazione e che, insieme alla stessa $\mathcal{R}$, sono le sole con questa proprietà.

La riflessione rispetto alla retta passante per l'origine individuata da un vettore a lei ortogonale $\mathbf{n}$ è data dall'espressione

$$\mathsf{Mirr}[\perp \mathbf{n}] = \lceil \mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ \mapsto \ 2\,\boldsymbol{Prj}_{\perp\mathbf{n}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v} \rceil \ .$$

Questa si ricava considerando il parallelogramma (rombo) individuato dall'aver $\overrightarrow{OP}$ per lato e $2\,\boldsymbol{Prj}_{\perp\mathbf{n}}(\mathbf{v})$ per diagonale.

//input pG30i05

Questa formula si può riscrivere servendosi dei prodotti scalari dei vettori in causa nella seguente forma:

$$\forall \mathbf{v}\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \ : \ \mathsf{Mirr}[\perp \mathbf{n}](\mathbf{v}) = 2\,\frac{\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{n}\rangle}{\langle \mathbf{n}\,|\,\mathbf{n}\rangle}\,\mathbf{n} - \mathbf{v} \ .$$

G30i.06 Una espressione per $\mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}}$, la riflessione rispetto a una generica retta $\mathcal{R}$ che non necessariamente passa per l'origine si ottiene riconducendo questa trasformazione del piano a una riflessione del tipo precedente mediante traslazioni.
Infatti, se R è un qualsiasi punto della $\mathcal{R}$, la traslazione $\boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{RO}}$ porta tale retta a passare per l'origine e quindi, denotando con $\mathbf{n}$ un qualsiasi vettore ortogonale alla $\mathcal{R}$, si ha l'espressione

$$\mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}} = \boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{RO}} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}[\perp \mathbf{n}] \circ_{lr} \boldsymbol{Trsl}_{\overrightarrow{OR}} \ .$$

G30i.07 Vediamo ora il risultato dell'applicazione di due successive riflessioni rispetto a due rette parallele $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{S}$.
Per semplificare la spiegazione supponiamo che le due rette siano poco inclinate rispetto all'asse Ox e che si possa dire senza ambiguità che la Scl si colloca al di sopra della Rcl a una distanza d da essa.
Inoltre denotiamo con d il vettore ortogonale alle due rette la cui traslazione porta la $\mathcal{R}$ nella $\mathcal{S}$.

Si tratta di esaminare le azioni delle trasformazioni $T_1 := \mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{\mathcal{S}}$ e $T_2 := \mathsf{Mirr}_{\mathcal{S}} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}}$.

La T_1 porta la $\mathcal{R}$, invariante rispetto alla $\mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}}$, nella retta parallela a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ viene collocata al di sopra della seconda a distanza d da essa e a distanza $2\,d$ dalla retta dipartenza.
Essa porta invece la $\mathcal{S}$ in un primo momento nella retta parallela al di sotto della $\mathcal{R}$ a distanza d da questa e alla fine nella parallela al di sopra della $\mathcal{S}$ a distanza $2\,d$ da questa.

Si constata anche che tutti i punti, oltre a quelli delle due rette, vengono traslati di $2\,d$ nella direzione ortogonale alle rette e verso l'alto.
Quindi $T_1 = \boldsymbol{Trsl}_{2\,\mathbf{d}}$.

L'azione della T_2 si ottiene dalla precedente scambiando il ruolo delle due rette e quindi deve essere la traslazione relativa allo spostamento $-2\,\mathbf{d}$, opposto del precedente. Quindi

$$\mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{Trsl}_{2\mathbf{d}} = \left(\mathsf{Mirr}_{\mathcal{S}} \circ_{lr} \mathsf{Mirr}_{\mathcal{R}}\right)^{\mathbf{-1}} .$$

Vedremo, dopo aver introdotte le rotazioni, che la composizione di due riflessioni rispetto a due rette incidenti è una rotazione avente come centro il punto di intersezione dei due assi. Vedremo anche che questo risultato generalizza il precedente, in quanto le traslazioni si possono considerare rotazioni degeneri, cioè rotazioni con centro di rotazione all'infinito.

G30 j. varianti delle equazioni per le rette nel piano

G30j.01 Abbiamo introdotto le rette piane mediante la loro equazione generale

$$\mathsf{Rtlin}_{gen}(a,b,c) \;:=\; \mathsf{Soln}(a\,x+\;y+c,=,0) \qquad \text{con} \quad a^2+b^2>0\ .$$

Si parla di **equazione incompleta** quando qualcuno dei parametri a, b e c è uguale a 0.

Queste equazioni si caratterizzano facilmente.
Se $c=0$ si ha l'equazione generale delle rette passanti per l'origine.
Se $b=0$ deve essere $a\neq 0$ e si ha l'equazione delle rette verticali $x=-\dfrac{c}{a}$; se in particolare $b=c=0$, si ha l'equazione $x=0$ caratterizzante l'asse Ox.
Se $a=0$, dualmente-xy, deve essere $b\neq 0$ e si ha l'equazione delle rette orizzontali $y=-\dfrac{c}{b}$; se in particolare $a=c=0$, si ha l'equazione $y=0$ esprimente i punti dell'asse Oy.
Le rette date da una equazione generale completa sono dunque le rette che non passano per l'origime e non sono parallele agli assi Ox e Oy. Usando la terminologia della geometria proiettiva, sono le rette che non passano per i tre punti $\langle 0,0\rangle$, $\langle\infty,0\rangle$ e $\langle 0,\infty\rangle$.

G30j.02 Consideriamo la retta passante per un dato punto $P_0=\big\langle x_0,y_0\big\rangle$; se la sua equazione generale è $a\,x+b\,y+c=0$, deve essere $a\,x_0+b\,y_0+c=0$ e da queste due equazioni segue

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0\ .$$

Si consideri il vettore $\mathbf{n}:=\langle a,b\rangle$; l'equazione dice che tale vettore è ortogonale a ogni vettore applicato $\overrightarrow{PP_0}$ determinato dal punto fisso P_0 e dal punto $P=\langle x,y\rangle$ variabile sulla retta. Quindi la precedente equazione definisce la retta che passa per P_0 ed è ortogonale a un dato vettore.

L'affermazione della equivalenza di due equazioni $ax+by+c=0$ e $a_1x+b_1y+c_1=0$ equivale alla relazione di parallelismo $\big\langle a_1,b_1\big\rangle /\!\!/ \big\langle a,b\big\rangle$, ovvero equivale alle uguaglianze $a_1=ka,\ b_1=kb,\ c_1=kc$ per qualche scalare k diverso da 0, ovvero equivale ad affermare la relazione di proporzionalità

$$\left|\!\!\left|\!\!\left| \;\frac{a}{a_1} \;=\; \frac{b}{b_1} \;=\; \frac{c}{c_1}\; \right|\!\!\right|\!\!\right|\ .$$

Si osserva che ogni retta del piano è in biiezione con il raggio dello spazio tridimensionale a cui appartiene il vettore $\langle a,b,c\rangle$.

G30j.03 Consideriamo le rette date da una equazione generale completa, rette che non passano per l'origine e non sono parallele agli assi. L'equazione $a\,x+b\,y+c=0$, introdotti $A:=-\dfrac{c}{a}$ e $B:=-\dfrac{c}{b}$, assume la forma

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B} \;=\; 1\ .$$

Questa viene detta **equazione segmentaria della retta** o equazione delle intercette della retta.
Questi nomi sono dovuti al fatto che A esprime la ascissa del punto nel quale la retta interseca l'asse Ox, retta di equazione $y=0$, e che B esprime la ordinata del punto nel quale la retta interseca l'asse Oy, retta di equazione $x=0$.

Per tracciare manualmente su carta una retta è particolarmente conveniente servirsi della sua equazione segmentaria, ovvero dei punti in cui essa interseca gli assi.

G30j.04 Una retta del piano può essere determinata dalla conoscenza di un suo punto $P_1=\big\langle x_1,y_1\big\rangle$ e di un vettore che esprime la sua direzione $\mathbf{d}=\langle l,m\rangle$.

Consideriamo il punto variabile $P = \langle x, y\rangle$ e il vettore $\overrightarrow{P - P_1}$; P appartiene alla retta cercata sse $\overrightarrow{P - P_1} /\!/ \mathbf{d}$ sse vale la relazione di proporzionalità

$$\left\| \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \right\| .$$

Questa caratterizza la retta cercata e viene detta **equazione canonica della retta**.

G30j.05 Spesso serve individuare l'equazione della retta passante per due dati punti $P_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e $P_2 = \langle x_2, y_2\rangle$. Per questo si considerano due vettori: il primo determinato da uno dei punti dati, scegliamo P_1, e dal punto variabile $P = \langle x, y\rangle$, $\overrightarrow{P - P_1} = \langle x - x_1, y - y_1\rangle$ e il secondo determinato dai due punti dati $\overrightarrow{P_2 - P_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
Il punto P appartiene alla retta data sse $\overrightarrow{P - P_1} /\!/ \overrightarrow{P_2 - P_1}$ cioè sse vale la relazione di proporzionalità

$$\left\| \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right\| .$$

Questa equazione caratterizza la retta per due punti assegnati.

G30j.06 Ogni retta del piano può essere individuata da una coppia di espressioni che forniscono le coordinate del suo punto generico $P = \langle x, y\rangle$ in funzione di un parametro reale t. Queste espressioni vengono detti **equazioni parametriche della retta** e si ottengono facilmente da una sua equazione canonica $\left\| \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \right\|$.
Supposto, senza perdere in generalità, che $l \neq 0$, si introduce il parametro $t := \frac{x - x_1}{l}$; per il significato della variabile x, la t varia sull'intero $\mathbb{R}$ e si può scrivere $x = x_1 + l\,t$.
Introducendo la t nell'equazione che precisa la proporzionalità $m(x - x_1) = l(y - y_1)$ si ricava $m\,l\,t = l(y - y_1)$ e in definitiva si può caratterizzare la retta con le equazioni

$$x = x_1 + l\,t \quad , \quad y = y_1 + m\,t \qquad \text{per} \quad -\infty < t < +\infty .$$

G30j.07 Un'altra equazione che risulta spesso utile per trattare una retta nonverticale pone in evidenza la sua pendenza, ovvero l'angolo θ che essa forma con l'asse Ox. Questo angolo viene detto **angolo di inclinazione della retta** e chiediamo che assuma i valori limitati dalla richiesta $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
Chiamiamo poi **pendenza della retta** o **coefficiente angolare della retta** $\tau := \tan\theta$.
Si osserva che per le rette verticali si avrebbe $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, mentre del parametro τ si potrebbe dire solo che "tende all'infinito".

Cerchiamo ora un'equazione della retta passante per un dato punto $P_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ e avente data pendenza. Questa retta può essere individuata fornendo un suo vettore di direzione $\mathbf{d} = \langle l, m\rangle$.
Chiamiamo δ l'angolo con segno definito dalla coppia di semirette $\langle \mathsf{Ox}, \mathbb{R}_{0+}\mathbf{d}\rangle$; per esso si trova:

- se $\mathbf{q}$ appartiene al I quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos\theta$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin\theta$;
- se $\mathbf{q}$ appartiene al II quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos(-\theta)$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin(-\theta)$;
- se $\mathbf{q}$ appartiene al III quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos(-\theta)$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin(-\theta)$;
- se $\mathbf{q}$ appartiene al IV quadrante $l = |\mathbf{q}|\cos\delta = |\mathbf{q}|\cos\theta$ ed $m = |\mathbf{q}|\sin\delta = |\mathbf{q}|\sin\theta$.

In ogni caso si ha $\tau = \tan\theta = \frac{m}{l}$ e la relazione di proporzionalità $\left\| \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} \right\|$ implica $y - y_1 = \tau(x - x_1)$; da questa, posto $B := y_1 - \tau\,x_1$,

$$y = \tau\,x + B \qquad \text{con} \qquad B := y_1 - \tau\,x_1 \quad \text{e} \quad \tau := \frac{m}{l} .$$

Il valore τ esprime la pendenza della retta, mentre B fornisce l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse Ox.

G30j.08 Molte elaborazioni chiedono di individuare angoli formati da due rette secanti $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, angoli che appartengono a una quaterna di angoli opposti-supplementari. Forniamo alcune formule che calcolano $\cos\phi$, coseno dei suddetti angoli, grandezza unica per tutta la quaterna che consente di risolvere tutti i problemi nei quali non risulta necessario assegnare un orientamento alle due rette.
Le diverse formule che otteniamo fanno riferimento a diverse modalità di individuazione di $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$.

Se le rette sono date mediante le equazioni generali $a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0$ e $a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0$, il problema si riduce al calcolo del coseno dell'angolo formato dai vettori $\mathbf{n}_1 := \langle a_1, b_1\rangle$ ed $\mathbf{n}_1 := \langle a_1, b_1\rangle$ ortogonali, risp., ad $\mathcal{R}_1$ e ad $\mathcal{R}_2$; tenuto conto che $\langle \mathbf{n}_1 \,|\, \mathbf{n}_2\rangle = ||\mathbf{n}_1|| \cdot ||\mathbf{n}_2||\,|\cos\phi$, si ottiene

$$\cos\phi \;=\; \frac{a_1\,a_2 + b_1\,b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2}\cdot\sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2}} \;. \tag{1}$$

Da questa espressione scendono la condizione di parallelismo

$$\mathcal{R}_1 /\!\!/ \mathcal{R}_2 \iff \left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{a_1}{a_2} \;=\; \frac{b_1}{b_2} \right|\!\!\right|\!\!\right|$$

e la condizione di ortogonalità

$$\mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff a_1\,a_2 + b_1\,b_2 = 0 \;.$$

G30j.09 Se le rette sono date da equazioni canoniche

$$\left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{x - x_1}{l_1} \;=\; \frac{y - y_1}{m_1} \right|\!\!\right|\!\!\right| \quad , \quad \left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{x - x_2}{l_2} \;=\; \frac{y - y_2}{m_2} \right|\!\!\right|\!\!\right| \;,$$

si ottiene formula analoga esprimente il coseno dell'angolo formato dai vettori di direzione invece che da vettori ortogonali:

$$\cos\phi \;=\; \pm\frac{l_1\,l_2 + m_1\,m_2}{\sqrt{{l_1}^2 + {m_1}^2}\cdot\sqrt{{l_2}^2 + {m_2}^2}} \;. \tag{2}$$

Ora abbiamo la condizione di parallelismo

$$\mathcal{R}_1 /\!\!/ \mathcal{R}_2 \iff \left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{l_1}{l_2} \;=\; \frac{m_1}{m_2} \right|\!\!\right|\!\!\right|$$

e la condizione di ortogonalità

$$l_1\,l_2 + m_1\,m_2 = 0 \;.$$

G30j.10 Se le rette sono definite da equazioni caratterizzate da pendenze

$$y = \tau_1\,x + b_1 \qquad y = \tau_2\,x + b_2 \;, \tag{1}$$

conviene considerare gli angoli di inclinazione di $\mathcal{R}_1$, θ_1, e di $\mathcal{R}_2$, θ_2. Per gli angoli formati dalle due rette abbiamo $\phi = \theta_2 - \theta_1$ e $\phi' = \pi - \phi$.
Si ottiene facilmente la tangente di ϕ e da questa la tangente di ϕ':

$$\tan\phi \;=\; \tan\,\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\tan\,\alpha_2 - \tan\,\alpha_1}{1 + \tan\,\alpha_1\,\tan\,\alpha_2} = \frac{\tau_2 - \tau_1}{1 + \tau_1\,\tau_2} \quad , \quad \tan\,\phi' = -\tan\phi = \frac{\tau_1 - \tau_2}{1 + \tau_1\,\tau_2} \;. \tag{2}$$

Ora la condizione di parallelismo è data da $\tan(\theta_2 - \theta_1) = 0$, cioè

$$\mathcal{R}_1 /\!\!/ \mathcal{R}_2 \iff \tau_1 = \tau_2 \;,$$

mentre la condizione di ortogonalità è data dall'annullarsi del denominatore $1 + \tau_1\tau_2 = 0$, cioè

(3) $$\mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff \mathcal{R}_1 \perp \mathcal{R}_2 \iff \tau_2 \; = \; \frac{1}{\tau_1} \; .$$

G30j.11 Un modo spesso utile per individuare una retta $\mathcal{R}$ del piano si serve della sua distanza dall'origine che denotiamo con p, e di uno dei due versori ortogonali alla stessa $\mathcal{R}$.

Se la retta non passa per l'origine, chiamato H il punto della retta più vicino all'origine (in modo che sia $HO = p$), si considera il versore $\mathbf{n}$ diretto come $\overrightarrow{H - O}$; se $\mathcal{R}$ passa per l'origine la scelta è indifferente, in quanto in definitiva è priva di effetti.
Chiamato θ l'angolo con segno determinato dai vettori $\mathsf{e}_1 = \langle 1, 0\rangle$ ed $\mathbf{n}$ da considerare in quest'ordine, possiamo scrivere $\mathbf{n} = \big\langle \cos\theta, \sin\theta \big\rangle$.

Il punto variabile $P = \langle x, y\rangle$ appartiene alla $\mathcal{R}$ sse la proiezione di $\overrightarrow{PO}$ sull'asse definito dal versore $\mathbf{n}$ è uguale a p, cioè, ricordando la definizione del prodotto scalare, sse $\boldsymbol{Prj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{PO}) = \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PO} = p$.
Dato che $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PO} = x\cos\theta + y\sin\theta$, per i punti di $\mathcal{R}$ si ottiene l'equazione

(1) $$x\,\cos\theta + y\,\sin\theta - p \;=\; 0 \; .$$

Questa viene chiamata **equazione normalizzata della retta**.

G30j.12 La precedente equazione consente di introdurre la nozione di **deviazione da una retta di un punto** del piano.
Per deviazione dalla generica retta $\mathcal{R}$ in un punto arbitrario $P = \langle x, y\rangle$ intendiamo un numero reale che denotiamo con $\mathrm{devn}(\mathcal{R}, P)$ uguale in valore assoluto alla distanza del punto dalla retta e preso con segno positivo se P e l'origine si trovano sui due diversi semipiani delimitati dalla retta, con segno negativo in caso contrario.

(1) Prop.: Consideriamo la retta $\mathcal{R}$ determinata dall'equazione normalizzata $x\,\cos\theta + y\,\sin\theta - p = 0$.
La deviazione da tale retta di un punto $\overline{P} = \langle\overline{x}, \overline{y}\rangle$ si ottiene dal primo membro dell'equazione come

$$\mathrm{devn}(\mathcal{R}, \overline{P}) \;=\; \overline{x}\,\cos\theta + \overline{y}\,\sin\theta - p \; .$$

Dim.: Consideriamo la retta orientata ν definita da $\mathbf{n} = \langle\cos\theta, \sin\theta\rangle$ e chiamiamo H l'intersezione di questa con la $\mathcal{R}$; consideriamo inoltre la proiezione di $\overline{P}$ sulla ν e chiamiamo Q il punto ottenuto. La deviazione richiesta è data dalla differenza $QO - HO$; il primo addendo si può esprimere mediante il prodotto scalare $\overrightarrow{\overline{P} - O} \cdot \mathbf{n} = \overline{x}\cos\theta + \overline{y}\sin\theta$ e il secondo è uguale a p ▮

La formula precedente consente di ottenere la distanza di un punto $\overline{P}$ dalla retta $\mathcal{R}$ come $|\mathrm{devn}(\mathcal{R}, \overline{P})|$.

L'equazione normalizzata della retta $\mathcal{R}$ si può ottenere da una sua qualsiasi equazione generale che scriviamo $a\,x + b\,y + c = 0$ s ulla base delle considerazioni in :9.b sulla proporzionalità dei parametri di due equazioni equivalenti.
Si tratta di determinare un reale nonnullo k tale che sia $k\,a = \cos\,\theta$, $k\,b = \sin\theta$ e $k\,c = -p$. Sommando i quadrati delle prime due espressioni si ottiene $k^2(a^2 + b^2) = 1$, da cui

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; .$$

La scelta del segno in questa espressione discende dalla convenzione sul segno della deviazione: dato che si chiede che p sia positivo, il segno di $k = -\frac{p}{c}$ deve essere l'opposto di quello del parametro c, supposto sempre diverso da 0.

Quindi l'equazione normalizzata della retta $\mathsf{Rtlin}[a\,x + b\,y + c = 0]$ è

$$\frac{s\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{s\,b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y + \frac{s\,c}{\sqrt{a^2+b^2}} \;=\; 0 \quad \text{con} \quad s := -\mathrm{sign}(c)\ .$$

G30j.13 Ricordiamo che per **fascio delle rette** aventi il centro in un punto C si intende l'insieme delle rette passanti per tale C; questo punto viene detto anche **sostegno del fascio**.
Il centro di un fascio di rette è completamente determinato dalla conoscenza di due rette del fascio.
Trovato C si determina facilmente l'equazione di una retta del fascio con una data direzione o con una data pendenza.
Spesso è conveniente prendere in considerazione l'intero fascio attraverso una sua equazione; troviamola nel caso in cui si conoscano le equazioni generali di due rette.

(1) Prop.: Consideriamo due rette $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ secanti definite dalle equazioni $a_1\,x + b_1\,y + c_1 \;=\; 0$ e $a_2\,x + b_2\,y + c_2 \;=\; 0$ con ${a_i}^2 + {b_i}^2 > 0$ per $i = 1, 2$. L'equazione

$$(2) \qquad \lambda\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + \mu\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2) \;=\; 0$$

con λ e μ numeri reali non entrambi nulli individua tutte le rette del fascio che ha come centro $C := \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$.

Dim.: L'equazione precedente è l'equazione lineare nelle variabili x e y

$$(3) \qquad (\lambda\,a_1 + \mu\,a_2)\,x + (\lambda\,b_1 + \mu\,b_2)\,y + (\lambda\,c_1 + \mu\,c_2) \;=\; 0$$

Non può accadere che i coefficienti delle due variabili si annullino entrambi: infatti in tal caso, supposto senza ledere la generalità che sia $\lambda \neq 0$, si avrebbero le proporzionalità

$$\left\| \frac{a_1}{a_2} \;=\; -\frac{\mu}{\lambda} \right\| \ , \quad \left\| \frac{b_1}{b_2} \;=\; -\frac{\mu}{\lambda} \right\| \quad \text{ovvero} \quad \left\| \frac{a_1}{a_2} \;=\; \frac{b_1}{b_2} \right\| \ ;$$

ma l'ultima relazione esprime il parallelismo delle rette date, situazione esclusa per ipotesi.

Quindi l'equazione precedente, per ogni scelta di λ e μ tali che $\lambda^2 + \mu^2 > 1$ esprime una retta passante per C, in quanto tale punto porta all'annullamento di entrambe le equazioni combinate linearmente; dunque l'equazione precedente esprime una retta del fascio.

Resta da dimostrare che tutte le rette del fascio sono ottenibili dalla (2) con una scelta opportuna di λ e μ. Consideriamo la retta del fascio diversa da quelle di partenza e caratterizzat dal fatto di passare per un punto $\overline{P} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ al quale si chiede solo di non appartenere a $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Si tratta di garantire la possibilità di individuare un valore per λ e uno per μ tali da rendere soddisfatta la (2) quando in essa si sostituiscano la x con $\overline{x}$ e la y con $\overline{y}$, cioè di individuare valori per λ e μ tali che sia

$$\lambda\,(a_1\,\overline{x} + b_1\,\overline{y} + c_1) + \mu\,(a_2\,\overline{x} + b_2\,\overline{y} + c_2) \;=\; 0\ .$$

Questa va considerata un'equazione in λ e μ i cui coefficienti sono entrambi nonnulli, in quanto in caso contrario si avrebbe che $\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ appartiene a una delle rette di partenza. Si possono dunque trovare dei valori soddisfacentisia per λ che per μ e quindu ogni retta del fascio è rappresentata dalla (2) ∎

Si osserva che i due parametri della (2) si possono ridurre a uno, ma a scapito della generalità. Nell'ipotesi restrittiva $\lambda \neq 0$, posto $\alpha := \dfrac{\mu}{\lambda}$ si ha l'espressione nel solo parametro α

$$(4) \qquad (a_1\,x + b_1\,y + c_1) + \alpha(a_2\,x + b_2\,y + c_2) = 0$$

espressione talora più comoda della (2), ma non in grado di esprimere la retta soluzione dell'equazione $a_2\,x + b_2\,y + c_2 \;=\; 0$.

Situazione simmetrica nell'ipotesi $\mu \neq 0$, anch'essa restrittiva.

G30 k. problemi concernenti rette nel piano

G30k.01 Cerchiamo di determinare una retta $\mathcal{R}$ che passa per un dato punto $P_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ e che forma un dato angolo ϕ con una retta $\mathcal{R}_1$ espressa mediante la sua pendenza dalla equazione $y = \tau_1 x + b_1$.
La $\mathcal{R}$ è individuata dall'equazione

$$y - y_1 \; = \; \tau(x - x_1)$$

e si deve trovare la pendenza τ per la quale l'angolo formato da $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ sia ϕ.

La soluzione, se non accade che sia $\phi = \dfrac{\pi}{2}$, è data da due rette; queste, per la j10(2), sono caratterizzate da

$$\tan \phi \; = \; \pm \frac{\tau - \tau_1}{1 + \tau\tau_1} \; .$$

Questa relazione consente di determinare le pendenze τ dalle $\tau - \tau_1 = \pm \tan\phi \pm \tau\,\tau_1 \tan\phi$, e quindi, se $1 \pm \tau_1 \tan\phi \neq 0$, si ricava

$$\tau \; = \; \frac{\tau_1 \pm \tan\phi}{1 \mp \tau_1 \tan\phi} \; .$$

Se invece $1 \mp \tau_1 \tan\phi = 0$ si ha retta verticale $x = x_1$.

Si possono quindi scrivere le equazioni delle due rette che risolvono il problema

(1) $$y - y_1 \; = \; \frac{\tau_1 + \tan\phi}{1 - \tau_1 \tan\phi}(x - x_1) \quad , \quad y - y_1 \; = \; \frac{\tau_1 - \tan\phi}{1 + \tau_1 \tan\phi}(x - x_1) \qquad \text{per} \qquad \tau_1 \tan\phi \neq \pm 1 \; ;$$

(2) $$y - y_1 \; = \; \frac{\tau_1 + \tan\phi}{1 - \tau_1 \tan\phi}(x - x_1) \quad , \quad x = x_1 \qquad \text{per} \qquad \tau_1 \tan\phi \; = \; -1 \; ;$$

(3) $$x \; = \; x_1 \quad , \quad y - y_1 \; = \; \frac{\tau_1 - \tan\phi}{1 + \tau_1 \tan\phi}(x - x_1) \qquad \text{per} \qquad \tau_1 \tan\phi = 1 \; .$$

G30k.02 Poniamoci il problema di esprimere le due rette bisettrici di due rette secanti date.
Per questo conviene avere le rette date in forma normalizzata

(1) $$x \cos\theta_1 + y \sin\theta_1 - p_1 \; = \; 0 \qquad x \cos\theta_2 + y \sin\theta_2 - p_2 \; = \; 0 \; .$$

Le due bisettrici si possono individuare, risp., come luogo dei punti aventi uguali le deviazioni dalla rette date

(2) $$(x \cos\theta_1 + y \sin\theta_1 - p_1) - (x \cos\theta_2 + y \sin\theta_2 - p_2) \; = \; 0$$

e come luogo dei punti che presentano le deviazioni dalla rette date uguali in valore assoluto ma di segno opposto

(3) $$(x \cos\theta_1 + y \sin\theta_1 - p_1) + (x \cos\theta_2 + y \sin\theta_2 - p_2) \; = \; 0 \; .$$

G30k.03 Esaminiamo il problema di decidere se una retta data $\mathcal{R}$ interseca o meno un dato segmento $\overline{P_1 P_2}$ Per questo conviene disporre dell'equazione normalizzata della retta $x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0$; sostituendo in questa le coordinate degli estremi del segmento si ottengono le deviazioni $\text{devn}(\mathcal{R}, P_1)$ e $\text{devn}(\mathcal{R}, P_2)$.

Si conclude quindi che la $\mathcal{R}$ interseca il segmento in un punto interno sse le due deviazioni hanno segno opposto.

Naturalmente se la deviazione di un punto P_i è nulla accade che il punto sta sulla retta e se entrambe sono nulle il segmento fa parte della retta.

G30k.04 In varie elaborazioni delle immagini serve stabilire come si collocano un punto $\overline{P} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ e l'origine O rispetto ai 4 angoli.s formati da due date rette secanti e non passanti per l'origine $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Più esplicitamente si tratta di stabilire se $\overline{P}$ e O si trovano (1) nello stesso angolo, (2) in due angoli adiacenti e supplementari, oppure (3) in due angoli opposti.

Anche questo problema conviene risolverlo a partire dalle equazioni normalizzate delle rette, in quanto queste forniscono direttamente le deviazioni $\text{devn}(\mathcal{R}_1, \overline{P})$ e $\text{devn}(\mathcal{R}_2, \overline{P})$

Se entrambe le deviazioni sono negative sia O che $\overline{P}$ si trovano nello stesso angolo.
Se entrambe le deviazioni sono positive O e $\overline{P}$ appartengono a due angoli opposti.
Se le deviazioni hanno segni opposti O e $\overline{P}$ appartengono a due angoli supplementari, cioè adiacenti.

//input pG30k04

G30k.05 Date tre rette nel piano ci si chiede se si intersecano in uno stesso punto, ovvero se appartengono a uno stesso fascio.
Consideriamo che le rette $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ ed $\mathcal{R}_3$ siano date, risp., dalle equazioni generali $a_1\,x + b_1\,y + c_1 = 0 \qquad a_2\,x + b_2\,y + c_2 = 0 \qquad a_3\,x + b_3\,y + c_3 = 0$.
Le due rette di ciascuna delle tre coppie devono essere secanti: in caso contrario si avrebbero due rette parallele e nessun punto in comune, oppure si avrebbero rette coincidenti, ossia un problema riconducibile al più semplice problema della intersezione tra due rette.

Inizialmente dobbiamo stabilire che sia diverso da 0 almeno uno dei tre determinanti

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \ .$$

Assumiamo senza perdere generalità, di avere accertato che le prime due rette hanno un punto in comune. Accade che le tre rette si intersecano in un punto sse la terza retta $\mathcal{R}_3$ appartiene al fascio determinato dalle prime due, $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, ovvero sse l'equazione $a_3\,x + b_3\,y + c_3 = 0$ equivale a una delle equazioni

$$\lambda\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + \mu\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2) \;=\; 0 \ .$$

Per le considerazioni in j11 questo equivale ad affermare che si trovi un fattore di proporzionalità ν tale che valgano le uguaglianze

$$\lambda\,a_1 + \mu\,a_2 \;=\; -\nu\,a_3 \qquad \lambda\,b_1 + \mu\,b_2 \;=\; -\nu\,b_3 \qquad \lambda\,c_1 + \mu\,c_2 \;=\; -\nu\,c_3 \ .$$

Dunque le tre rette si incontrano in un solo punto sse si trova una soluzione diversa dalla $\lambda = \mu = \nu = 0$ per il seguente sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \lambda\,a_1 + \mu\,a_2 + \nu\,a_3 \;=\; 0 \\ \lambda\,b_1 + \mu\,b_2 + \nu\,b_3 \;=\; 0 \\ \lambda\,c_1 + \mu\,c_2 + \nu\,c_3 \;=\; 0 \end{cases} \ .$$

Questo implica che la matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

abbia determinante nullo.
Tenuto conto che si era chiesto che almeno una sottomatrice di ordine 2 avesse determinante diverso da 0, si ha l'enunciato che segue.

(1) Prop.: Tre rette del piano si incontrano in un solo punto sse la matrice dei coefficienti delle equazioni generali per le tre rette ha rango 2 ▮

G30k.06 Si debba considerare un punto C determinato come intersezione di due rette individuate mediante le equazioni generali $a_1\,x + b_1\,y + c_1 \;=\; 0$ e $a_2\,x + b_2\,y + c_2 \;=\; 0$ e si cerchino rette che passano per C e soddisfino qualche ulteriore condizione.

Per questi problemi conviene ricercare la soluzione entro il fascio di rette relativo all'equazione

$$\lambda\,(a_1\,x + b_1\,y + c_1) + \mu\,(a_2\,x + b_2\,y + c_2) \;=\; 0\ .$$

Cominciamo con il chiedere la retta passante per C e parallela a una terza retta $\mathcal{R}_3$ data dall'equazione $a_3\,x + b_3\,y + c_3 \;=\; 0$.
Questa richiesta si traduce [j11(3)] nella proporzionalità per i coefficienti delle variabili x e y

$$\left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{\lambda\,a_1 + \mu\,a_2}{a_3} \;=\; \frac{\lambda\,b_1 + \mu\,b_2}{b_3} \right|\!\!\right|\!\!\right|\ .$$

Questa equivale alla richiesta di risoluzione dell'equazione in λ e μ

$$\lambda\,(a_1\,b_3 - b_1\,a_3) \;=\; \mu\,(b_2\,a_3 - a_2\,b_3)\ .$$

I coefficienti delle incognite non possono essere entrambi nulli, perché in tal caso sarebbe $a_1\,b_3 = b_1\,a_3$ e $b_2\,a_3 \;=\; a_2\,b_3$ dalle quali seguirebbe la proporzionalità $\left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{a_1}{b_1} \;=\; \frac{a_2}{b_2} \right|\!\!\right|\!\!\right|$, equivalente al parallelismo delle prime due rette.
Quindi è garantito che si possa trovare una soluzione dell'equazione in λ e μ diversa dalla $\lambda = \mu = 0$, ovvero una retta che soddisfa le richieste.

G30k.07 Si chieda la retta passante per C e ortogonale a una terza retta $\mathcal{R}_3$ data dall'equazione $a_3\,x + b_3\,y + c_3 \;=\; 0$.
La richiesta di ortogonalità [J10(3)] si traduce nella uguaglianza a 0 di un prodotto scalare, ossia nella $(\lambda\,a_1 + \mu\,a_2)a_3 + (\lambda\,b_1 + \mu\,b_3)b_3 \;=\; 0$, ovvero nella richiesta di risoluzione dell'equazione in λ e μ

$$\lambda\,(a_1\,a_3 + b_1\,b_3) \;=\; -\mu(a_2\,a_3 + b_2\,b_3)\ .$$

Ancora i coefficienti delle incognite non possono essere entrambi nulli, perché in tal caso si avrebbero $a_1\,a_3 \;=\; -b_1\,b_3$ e $a_2\,a_3 \;=\; -b_2\,b_3$, dalle quali seguirebbe ancora la proporzionalità $\left|\!\!\left|\!\!\left| \frac{a_1}{b_1} \;=\; \frac{a_2}{b_2} \right|\!\!\right|\!\!\right|$, equivalente al parallelismo delle due rette $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$.

Quindi è garantito che si possa trovare una soluzione dell'equazione in λ e μ diversa dalla $\lambda = \mu = 0$, ossia una retta che soddisfa le richieste.

Come ultima richiesta ci proponiamo di trovare le rette passanti per un punto C che intercettano sugli assi segmenti di uguale lunghezza.

In questo caso si cercano rette orientate come la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$ od orientate come la bisettrice del secondo e del quarto quadrante $y = -x$.
Queste rette sono caratterizzate da coefficienti delle variabili x e y uguali in valore assoluto; quindi occorre uguagliare i valori assoluti dei coefficienti dell'equazione del fascio: $|\lambda a_1 + \mu a_2| = |\lambda b_1 + \mu b_2|$.

Da qui si ricavano le due richieste

$$\lambda(a_1 - b_1) = -\mu(a_2 - b_2) \qquad \lambda(a_1 + b_1) = -\mu(a_2 + b_2) \ .$$

Anche per queste equazioni i coefficienti delle incognite non si possono annullare entrambi, perché ancora si avrebbe il parallelismo delle rette $\mathcal{R}_1$ ed $\mathcal{R}_2$.
Quindi è garantita la possibilità di trovare una soluzione utile, cioè diversa dalla $\lambda = \mu = 0$, per entrambe le equazioni.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`