1

Capitolo D27
digrafi, matrici e raggiungibilità

Contenuti delle sezioni

a. digrafi p. 2
b. passeggiate e nozioni associate p. 6
c. tipi particolari di digrafi p. 14
d. sottodigrafi e morfismi tra digrafi p. 16
e. matrici delle adiacenze p. 19
f. grafi bipartiti e matrici p. 23
g. somme e prodotti di matrici, digrafi e multidigrafi p. 25
h. chiusura di matrici e raggiungibilità sui digrafi p. 29

32 pagine

D270.01 Questo capitolo presenta i digrafi e le loro caratteristiche e proprietà basilarie.
Lo sviluppo di queste pagine somiglia molto a quello del capitolo precedente, in quanto si presenta una specie di struttura con forti somiglianze con i grafi nonorientati.
Molte proprietà e molte costruzioni sui due tipi di strutture sono molto vicine e le due trattazioni presentano vari discorsi molto simili.
Le due trattazioni però intendono essere indipendenti per maggiore chiarezza nei confronti di algoritmi e applicazioni.

D27 a. digrafi

D27a.01 Si dice **digrafo**, o **grafo diretto**, o **grafo orientato**, ogni coppia $D :=: \langle Q, U\rangle$ nella quale Q è un insieme finito ed $U :\subseteq Q \times Q$; Q è detto **insieme dei nodi del digrafo** ed U **insieme degli archi del digrafo** D. L'insieme dei nodi di un digrafo viene chiamato anche il suo terreno.

Il numero dei nodi di D si dice **ordine del digrafo**, mentre il numero degli archi è chiamato **grado del digrafo** D;

Conviene tenere presente che un digrafo equivale a una relazione binaria finita accompagnata dall'insieme entro il quale la si intende collocata.

Denoteremo con **Dgrf** la classe dei digrafi.
Dato un digrafo D, può risultare comodo denotare con $Nod(D)$ l'insieme dei suoi nodi e con $\mathsf{Arc}(D)$ l'insieme dei suoi archi. Potremo quindi riferirci a un digrafo esprimendolo come $D = \big\langle Nod(D), \mathsf{Arc}(D)\big\rangle$.

Un digrafo costituito da un solo nodo e da nessun arco viene chiamato **digrafo nodo**.
Per alcune formulazioni conviene considerare che di **Dgrf** faccia parte anche il cosiddetto **digrafo vuoto**, digrafo costituito da 0 nodi e 0 archi.

D27a.02 Tre esempi di digrafi che prenderemo in considerazione sono:
$D_a = \langle\{0,1,2,3,4\}\ ,\ \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,0\rangle\}\rangle$
$D_b = \langle\{0,1,2,3,4,5\}\ ,\ \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,1\rangle\}\rangle$
$D_c = \big\langle\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\ ,\ \{\langle 0,4\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 3,4\rangle,$
$\langle 1,6\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,4\rangle, \langle 6,4\rangle, \langle 5,6\rangle, \langle 6,5\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 7,3\rangle,$
$\langle 7,8\rangle, \langle 8,8\rangle, \langle 10,10\rangle\}\big\rangle$.

//input pD27a02

//input pD27a02B

D27a.03 Le scritture generali usate precedentemente per definire digrafi sono piuttosto pesanti e conviene servirsi di loro semplificazioni.

Se ogni nodo di $D \in$ **Dgrf** è componente di almeno un arco si può evitare di presentare l'insieme $Nod(D)$; se i nodi sono identificati da segni semplici si possono individuare gli archi mediante digrammi.
Quindi D_a si può presentare come $\{01, 03, 11, 12, 14, 21, 31, 33, 40\}$ e D_b si può individuare con la scrittura $\{00, 12, 14, 22, 23, 25, 32, 42, 43, 51\}$.

Non si può invece presentare in questo modo D_c perché 9 non è membro di alcun arco e uno dei nodi è identificato da una coppia di cifre.
Se si reputa conveniente limitarsi ad archi espressi da digrammi si può sostituire la scrittura 10 con X o con la cifra esadecimale A e, più efficacemente, identificare i nodi mediante lettere maiuscole o minuscole se ne bastano 26, mediante maiuscole e minuscole se ne servono non più di 52, mediante lettere e cifre se non se ne hanno più di 62.

D27a.04 Se $a := \langle q, r\rangle$ è un arco di un digrafo, il nodo q si dice **estremità iniziale dell'arco** a, mentre il nodo r si dice **estremità finale dell'arco** a.

Archi particolari di un digrafo sono i suoi **cappi** o lacci, cioè archi della forma $\langle q, q\rangle$, ovvero gli archi con le due estremità coincidenti.
D_a possiede un cappio; D_b ne possiede due e D_c cinque.

Un digrafo privo di cappi si dice **digrafo semplice**.

D27a.05 In un digrafo, insieme a un arco $\langle q, r\rangle$ che non sia cappio, cioè con $q \neq r$, potrebbe essere presente o meno l'arco $\langle r, q\rangle$; quest'ultimo viene detto **arco riflesso di un arco** precedente.
In D_a $\langle 2, 1\rangle$ è il riflesso di $\langle 1, 2\rangle$; in D_b $\langle 2, 3\rangle$ e $\langle 3, 2\rangle$ sono l'uno il riflesso dell'altro; D_c possiede quattro coppie di archi mutuamente riflessi.

Si dice **digrafo riflesso** o **digrafo trasposto** di un dato digrafo $D = \langle Q, U\rangle$ il digrafo

$$D^{\leftarrow} \ := \ \langle Q, U^{\leftarrow}\rangle ,$$

cioè al digrafo ottenuto cambiando l'orientazione degli archi di D.
Il trasposto di un digrafo D corrisponde alla relazione trasposta di quella associata a D.

D27a.06 Relativamente a un digrafo $D = \langle Q, U\rangle$ si dicono **nodi successori diretti** o **nodi discendenti diretti** del nodo q i nodi che sono estremità finale di un arco che ha q come estremità iniziale.

Si dicono invece **nodi predecessori diretti** o **nodi ascendenti diretti** di un dato nodo q i nodi che sono estremità iniziale di un arco che ha q come estremità finale.

In D_a i successori di 1 sono 2, 4 e lo stesso 1; in D_b l'insieme dei nodi predecessori di 2 è $\{1, 2, 3, 4\}$.
Il nodo q è ascendente diretto di p, e p è discendente diretto di q sse $\langle p, q\rangle \in U$, cioè sse $\langle q, p\rangle \in U^{\leftarrow}$.

I nodi predecessori e successori di un nodo q, si dicono, collettivamente, **nodi adiacenti** a tale nodo. L'insieme dei nodi adiacenti a p è

$$(p \,_{\text{Я}}\, U) \cup (p \,_{\text{Я}}\, U^{\leftarrow}) = (p \,_{\text{Я}}\, U) \cup (U \,_{\text{R}}\, p) \ .$$

Osserviamo esplicitamente che un nodo può essere predecessore (ovvero successore, ovvero adiacente) di se stesso: questo accade sse esso è dotato di cappio.

L'insieme dei nodi adiacenti a un determinato nodo p si dice **intorno del nodo** p.

D27a.07 Due o più archi si dicono **archi convergenti** sse hanno in comune l'estremità finale; si dicono invece **archi divergenti** sse hanno in comune l'estremità iniziale; si dicono inoltre **archi consecutivi** sse l'estremità finale di uno di essi coincide con la iniziale dell'altro.
Più genericamente due archi si dicono **archi incidenti** sse hanno almeno una estremità in comune.

Un nodo si dice **nodo isolato** sse non possiede alcun nodo adiacente. In D_c 9 è isolato.
Un nodo si dice **nodo sconnesso** sse non è adiacente ad alcun nodo diverso da se stesso. Esempi di nodi sconnessi sono 0 in D_b e 10 in D_c.
Ogni nodo isolato è anche sconnesso, mentre i nodi dotati di cappio e di nessun altro arco incidente sono sconnessi e non isolati.

Un nodo si dice **nodo pendente** sse possiede un solo nodo adiacente diverso da se stesso.

D27a.08 Si dice **grado uscente di un nodo** p del digrafo D il numero degli archi che escono da esso, cioè il numero degli archi che hanno p come estremità iniziale, cioè $|p \,_{\text{Я}}\, U|$. Questo intero naturale si denota con $degout(p)$.

Si dice **grado entrante di un nodo** p, e lo denotiamo con $degin(p)$, il numero degli archi che entrano in esso, cioè il numero degli archi che hanno p come estremità finale, cioè $|p \,_{\text{Я}}\, U^{\leftarrow}| = |U \,_{\text{R}}\, p|$.

Si dice **grado di un nodo** o anche **valenza di un nodo** p, e si denota con $deg(p)$, la somma del suo grado entrante e del suo grado uscente.

Di onseguenza

$$deg(p) \;:=\; degout(p) + degin(p) = |p \,_{\exists}\, U| + |p \,_{\exists}\, U^{\leftarrow}| \;.$$

In D_a il nodo 2 ha grado entrante 2 e grado uscente 1; in D_b il nodo 5 ha grado entrante e grado uscente uguali ad 1; in D_c il nodo 4 ha grado entrante 6 e grado uscente 5.

Si osservi che un nodo è isolato sse ha grado 0, mentre un nodo è pendente sse ha grado 1 ed è privo di cappio.

D27a.09 Ricordiamo che relativamente a una funzione $F \in \lceil Q \longmapsto R \rceil$ si dice multicardinale la funzione $Mcard_F \;:=\; \lceil r \in R \nparallel F^{-1}(r) \rceil$.

Tra le funzioni costituenti $\lceil Nod(D) \longmapsto \mathbb{N} \rceil$ si trovano tre funzioni multicardinali semplicemente associate al digrafo: quella dei gradi uscenti, quella dei gradi entranti e quella dei gradi.
Nella pratica in genere conviene assegnare a Q un ordine totale e individuare la sequenza dei suoi gradi uscenti, la sequenza dei suoi gradi entranti e la sequenza dei suoi gradi.

Ricordiamo anche che, se Q è un insieme, si dice **valutazione enumerativa sull'insieme** Q una funzione del genere $\lceil Q \longmapsto \mathbb{N} \rceil$.

Le funzioni *deg*, *degin* e *degout* sono evidentemente valutazioni enumerative per gli insiemi di nodi dei digrafi.

In ogni digrafo la somma dei gradi uscenti di tutti i suoi nodi coincide con la somma dei gradi entranti di tutti i suoi nodi e con il numero dei suoi archi, cioè con il grado del digrafo.

D27a.10 Se si cambiano gli identificatori dei nodi di un digrafo $D = \langle Q, U \rangle$, si ottiene un digrafo che conserva tutte le proprietà di D che dipendono solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi, proprietà che chiamiamo Dgrf-invarianti.
Per esempio i due digrafi hanno lo stesso numero di nodi isolati, lo stesso numero di nodi pendenti e gli stessi multiinsiemi dei gradi entranti, dei gradi uscenti e dei gradi.

Formalmente il cambiamento di identificatori consiste nel considerare un insieme P con lo stesso numero di elementi di Q (i nuovi identificatori) e una biiezione $\beta \in \lceil Q \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright P \rceil$; essa porta al digrafo $H = \langle P, F \rangle$, dove F è l'insieme degli archi ottenuti da quelli di D modificando le loro estremità, ma stando attenti a mantenere l'orientazione degli archi stessi, mediante l'applicazione β:

$$F \;=\; \{\langle q, p \rangle \in U :| \; \langle \beta(q), \beta(p) \rangle\} \;.$$

Una biiezione che, come la precedente, mantiene l'adiacenza tra nodi e l'orientazione degli archi viene detta **isomorfismo tra digrafi** ed i due digrafi associati dalla biiezione si dicono **digrafi isomorfi**.

Per enunciare che D ed H sono digrafi isomorfi si scrive $D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H$ o più brevemente $D \cong H$, quando il contesto consente di evitare ambiguità.
Con la scrittura $\lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H \rceil$ denotiamo l'insieme di tutti gli isomorfismi tra i digrafi D ed H.
Per enunciare che β è un isomorfismo tra i digrafi D ed H si scrive quindi $\beta \in \lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H \rceil$.

D27a.11 Il digrafo H, ottenuto da un digrafo D cambiando gli identificatori dei suoi nodi, in genere non mantiene le proprietà di D derivanti dalle individualità dei suoi nodi, ovvero dal procedimento specifico con il quale lo si è costruito a partire da oggetti precedentemente noti.
Per molte argomentazioni queste proprietà con certe scelte per H e β tese alla semplicità, potrebbero anche perdere di interesse.

L'isomorfismo tra digrafi è una equivalenza. Infatti l'identità per l'insieme dei nodi del digrafo D si può considerare un isomorfismo di D con se stesso; la composizione di un isomorfismo β tra D ed H con un isomorfismo γ tra H e un terzo digrafo K costituisce un isomorfismo tra D e K; infine ogni isomorfismo β tra D e H è invertibile e la sua applicazione inversa costituisce un isomorfismo tra H e D.

Chiameremo **proprietà invarianti spc Dgrf** le proprietà digrafo condivise da tutti i digrafi isomorfi a D, cioè dai digrafi che insieme a D costituiscono una cosiddetta **classe di isomorfismo della specie digrafi**. La specificazione sincopata "spc -Dgrf" richiama la specie delle strutture digrafo.

D27a.12 Per gli studi nei quali interessano solo proprietà dei digrafi che non dipendono da come sono individuati i loro singoli nodi, ma solo dal complesso dei collegamenti tra i nodi stessi, non sono rilevanti i digrafi singoli, ma le loro classi di isomorfismo.

In molte fasi espositive risulta vantaggioso attribuire le proprietà di un digrafo D condivise da tutti i digrafi della classe di isomorfismo a cui appartiene ad una unica entità che viene chiamata **digrafo astratto** realizzata, in particolare, da D.
Anche questa è una struttura ottenuta con una astrazione espositiva.

Un digrafo astratto non molto elaborato in genere si può studiare attraverso una sua **raffigurazione con nodi anonimi**, figura nella quale non si inserisce alcuna etichetta per i nodi: ciascuno di essi è individuato solo da un punto nella raffigurazione.

D27a.13 Naturalmente una raffigurazione a nodi anonimi non dice nulla delle caratteristiche che dipendono dalle individualità dei nodi stessi.

Occorre peraltro rilevare che di uno stesso digrafo si possono dare diverse raffigurazioni equivalenti e che alcune di esse, a prima vista, possono sembrare presentazioni di digrafi diversi. In particolare vi sono digrafi che in una raffigurazione evidenziano chiaramente una prima proprietà P, ma non una seconda Q, mentre in un'altra raffigurazione rendono palese la Q e nascondono la P.

Va detto anche che vi sono proprietà generali che idealmente riguardano digrafi astratti, ma che in pratica conviene analizzare riferendosi a particolari rappresentativi delle loro classi di isomorfismo. Inoltre spesso risulta opportuno assegnare ai nodi di questi digrafi identificatori scelti in modo da evidenziare specifiche caratteristiche il cui chiarimento è di interesse primario.

D27 b. passeggiate e nozioni associate

D27b.01 Si dice **semipasseggiata sul digrafo** $D = \langle Q, U\rangle$ ogni sequenza

$$\gamma \ := \ \langle q_0, u_1, q_1, \ldots, q_{s-1}, u_s, q_s\rangle \in Q \times (U \times Q)^s \quad \text{con} \ \ s \in \mathbb{N}$$

tale che le due estremità di ogni suo arco (eventualmente coincidenti) sono costituite dal nodo che lo precede e da quello che lo segue in γ, cioè tale che sia

$$u_i \in \big\{\langle q_{i-1}, q_i\rangle, \langle q_i, q_{i-1}\rangle\big\} \ .$$

Il numero s degli archi nella sequenza si dice **lunghezza della semipasseggiata**; tale numro naturale si denota con $\gamma^{\vdash\dashv}$ o anche con $|\gamma|$.

La precedente definizione piuttosto laboriosa si giustifica in quanto utile nelle applicazioni nelle quali un digrafo fa da modello per reti di trasporto, per esempio di reti stradali: un arco rappresenta una strada a senso unico.
Una semipasseggiata descrive una serie di spostamenti di un veicolo che in certi tratti potrebbe muoversi "contro mano"in senso vietato.
Insistendo su questo modello si può pensare che ai cappi corrispondano aree di parcheggio e che il percorrere un cappio corrisponda a sostare nella relativa area, in particolare per un "turno", in modo da poter trattare semipasseggiate durante le quali si possa sostare per più turni in un parcheggio-cappio.

Si osserva che ogni arco $u = \langle q_{i-1}, q_i\rangle$ di un digrafo individua due sue semipasseggiate di lunghezza 1, $\langle q_{i-1}, u, q_i\rangle$ e $\langle q_i, u, q_{i-1}\rangle$.
Inoltre di un digrafo conviene considerare come semipasseggiate anche le sequenze costituite semplicemente da singoli nodi; a ciascuna di tali semipasseggiate si attribuisce la lunghezza zero.
Si giustifica questa scelta constatando facilmente che essa consente enunciati di maggiore generalità.

I nodi $q_0, q_1, ..., q_s$ e gli archi $u_1, ..., u_s$ si dicono **giacere sulla semipasseggiata** γ oppure si dicono **appartenere alla semipasseggiata**.
Si dicono, risp., **estremità iniziale di una semipasseggiata** e **estremità finale di una semipasseggiata** il suo primo e il suo ultimo nodo componente; i rimanenti nodi sono detti **nodi interni della semipasseggiata**.

D27b.02 Una semipasseggiata del digrafo D $\gamma = \langle q_0, u_1, q_1, \ldots, q_{s-1}, u_s, q_s\rangle$ si dice **passeggiata** su D sse per ogni suo arco si ha $u_i = \langle q_{i-1}, q_i\rangle$, cioè sse ogni coppia di archi successivi presenta l'estremità finale del primo coincidente con l'iniziale del secondo.

Quindi gli archi che si succedono su una passeggiata sono consecutivi. Secondo il modello espresso dal veicolo che si muove su strade a senso unico, la passeggiata corrisponde a un movimento che rispetta le regole.

Accade quindi di parlare di una **passeggiata che raggiunge la sua estremità finale** a partire dalla sua estremità iniziale.

D27b.03 La definizione data di passeggiata ha il vantaggio di riferirsi a quella più generale di semipasseggiata, utile in varie applicazioni; inoltre essa consente di attribuire a una semipasseggiata sia dei nodi che degli archi.
Vedremo in seguito che essa è utilizzabile anche per i multidigrafi [D28h].

Essa però è piuttosto pesante, in quanto una passeggiata su un digrafo può essere individuato dalla sola sequenza dei suoi archi o dalla sola sequenza dei suoi nodi. Si potrebbe definire passeggiata su

un digrafo come una sequenza di suoi archi tali che l'estremità finale di un arco, che non sia l'ultimo, coincide con l'estremità iniziale dell'arco successivo.
In tal modo la sua lunghezza, cioè il numero dei suoi archi, risulta essere un caso particolare della nozione di lunghezza per le sequenze.

Per individuare una passeggiata quindi, invece di una scrittura come

$$\big\langle q_0, \langle q_0, q_1\rangle, q_1, \langle q_1, q_2\rangle, q_2 ... q_{s-1}, \langle q_{s-1}, q_s\rangle, q_s\big\rangle \ ,$$

si potrebbe usare una scrittura riguardante solo i suoi archi come la

$$\langle\!\langle \langle q_0, q_1\rangle, \langle q_1, q_2\rangle, ..., \langle q_{s-1}, q_s\rangle\rangle\!\rangle \ ,$$

oppure una scrittura che presenta solo i suoi nodi come la

$$\langle\!\![q_0, q_1, q_2, ..., q_{s-1}, q_s]\!\!\rangle \ .$$

Per esempio, la scrittura $\langle 1, \langle 1, 2\rangle, 2, \langle 3, 2\rangle, 3, \langle 3, 2\rangle, 2\rangle$ rappresenta una semipasseggiata in D_a, mentre $\langle 1, \langle 1, 1\rangle, 1, \langle 1, 4\rangle, 4, \langle 4, 0\rangle, 0\rangle$ definisce una passegiata in D_a che può essere anche individuata come $\langle\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 0\rangle\rangle$, oppure come sequenza di nodi $\langle\!\![1, 1, 4, 0]\!\!\rangle$.

D27b.04 Una semipasseggiata di un digrafo D $\gamma = \big\langle q_0, u_1, q_1, \ldots, q_{s-1}, u_s, q_s\big\rangle$ si dice **semipasseggiata chiusa** o **semicircuito** sse il suo primo e il suo ultimo nodo coincidono, cioè sse $q_0 = q_s$.
Si parla invece di **semipasseggiata aperta** sse $q_0 \neq q_s$.

In particolare le semipasseggiate chiuse che sono passeggiate si dicono **passeggiate chiuse** o **circuiti sul digrafo**, mentre le rimanenti passeggiate si dicono **passeggiate aperte**.

I cappi di un digrafo sono le sue semipasseggiate chiuse e le sue passeggiate chiuse di lunghezza 1.

Gli esempi di semipasseggiate e passeggiate appena visti sono anche esempi di semipasseggiate e passeggiate aperte, mentre $\langle 1, \langle 1, 2\rangle, 2, \langle 4, 2\rangle, 4\langle, 1, 4\rangle, 1\rangle$ individua un semicircuito in D_b e $\langle\!\![1, 2, 5, 1]\!\!\rangle$ un circuito sempre in D_b.

D27b.05 Si dice **semipercorso sul digrafo** D o **semipasseggiata euleriana sul digrafo** D una semipasseggiata su D in cui tutti gli archi sono distinti.

Si dice **percorso sul digrafo** D, o **passeggiata euleriana sul digrafo** D, una passeggiata costituita da archi distinti. Equivalentemente possiamo definirlo come un semipercorso in cui ogni coppia di archi successivi presenta l'estremità finale del primo coincidente con l'iniziale del secondo (cioè presenta una sequenza di archi consecutivi).

D27b.06 Si dice **semicammino sul digrafo** D o **semipasseggiata hamiltoniana sul digrafo** D una semipasseggiata in cui tutti i nodi sono distinti, ad esclusione dei nodi iniziale e finale che possono coincidere. Se questo accade abbiamo una cosiddetta **semipasseggiata chiusa**.

Si dice **cammino sul digrafo** D o **passeggiata hamiltoniano sul digrafo** D una passeggiata in cui tutti i nodi sono distinti ad esclusione dei nodi iniziale e finale che possono coincidere. Se questo accade abbiamo una cosiddetta **passeggiata chiusa**.
Equivalentemente si definisce cammino su D un suo semicammino in cui ogni coppia di archi successivi presenta l'estremità finale del primo coincidente con l'iniziale del secondo (cioè presenta una sequenza di archi consecutivi).

D27b.07 Chiaramente un semicammino, non potendo presentare archi ripetuti, è un semipercorso. Per considerazione analoga un cammino è un percorso.

I percorsi e i cammini, essendo particolari passeggiate, possono venire rappresentati mediante scritture in cui compaiono solo gli archi oppure solo i nodi. Le definizioni di lunghezza per percorsi e cammini non sono che casi particolari della definizione di lunghezza introdotta per le semipasseggiate.

Possiamo quindi dire che in D_a $\Big\langle(\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle)\Big\rangle$, cioè $\langle\![3,1,2]\!\rangle$, è un cammino di lunghezza 2; possiamo affermare che in D_b $\Big\langle(\langle 5,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle)\rangle = \langle\![5,1,2,2,3]\Big\rangle$, è un percorso di lunghezza 4; abbiamo invece che $\langle\![0,4,5,6,1,2,3,7,8]\!\rangle$ è un cammino su D_c di lunghezza 8.

D27b.08 Una passeggiata di lunghezza 0 si può considerare anche un percorso o un cammino di lunghezza 0; essa si può individuare con una notazione della forma $\langle\![q_i]\!\rangle$, ma non con altre notazioni contenenti archi.

In un digrafo non ridotto a pochissimi elementi e non di tipo particolare l'insieme dei semicammini è contenuto propriamente nell'insieme dei semipercorsi e questo a sua volta è contenuto propriamente nell'insieme delle semipasseggiate.
Similmente, se si escludono pochi casi particolari, l'insieme dei cammini è contenuto strettamente in quello dei percorsi che a sua volta è contenuto strettamente in quello delle passeggiate.

Se il digrafo non è di tipo particolare, si hanno passeggiate euleriane (cioè percorsi) che non sono hamiltoniane (cioè cammini) e passeggiate che non sono euleriane (né, a fortiori, passeggiate hamiltoniane).

Per avere un esempio di quest'ultimo caso basta considerare passeggiate in cui qualche nodo, oppure qualche arco, si ripetono.
In D_c la $\langle\![0,4,4,6,4,6,5]\!\rangle$ rappresenta una passeggiata che non è euleriana, in quanto l'arco $\langle 4,6\rangle$ è ripetuto, e non è nemmeno hamiltoniana perché i nodi 4, 6 sono presenti più d'una volta.
Una semipasseggiata su D_c che non è un percorso ma un semipercorso è: $\big\langle\langle 7,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,6\rangle\big\rangle$.
Un percorso che non è un cammino in D_b è $\langle\![5,1,2,2,3]\!\rangle$; in D_c è $\langle\![4,7,3,4,5,6,1]\!\rangle$.

D27b.09 È facile dimostrare che una semipasseggiata si può ridurre a un semipercorso che a sua volta si può ridurre a un semicammino [b13].
La prima di queste riduzioni si effettua cercando sulla sequenza degli archi le componenti ripetute ed eliminandole una alla volta.
La riduzione dei nodi ripetuti si può effettuare in modo analogo, operando sulla sequenza dei nodi.
Similmente una passeggiata può essere ridotta ad un percorso che può essere ulteriormente ridotto a un cammino.

D27b.10 Consideriamo ora quali effetti possono avere le riduzioni delle semipasseggiate e di alcuni loro casi particolari.
Evidentemente riducendo una semipasseggiata si ottiene una semipasseggiata e riducendo un semipercorso si ottiene un semipercorso.
Inoltre può accadere che riducendo, risp., una semipasseggiata, un semipercorso o un semicammino, si ottenga, risp., una passeggiata, un semipercorso o un semicammino. Riducendo una passeggiata si può ottenere un percorso e riducendo un percorso si può ottenere un cammino.

D27b.11 Ogni semipasseggiata, su un digrafo dotato di qualche arco, può essere estesa illimitatamente con nodi posti prima di un iniziale e nodi posti dopo di un finale.
Per quanto riguarda le passeggiate, solo nel caso di digrafi dotati di circuiti alcune di esse possono estendersi illimitatamente. In mancanza di circuiti non è possibile alcuna estensione illimitata.

Si possono avere semipercorsi (percorsi) illimitati solo per digrafi aventi un nodo su due semicircuiti (circuiti) che hanno insiemi di archi disgiunti.

Un semicammino (cammino) non può mai essere esteso a una lunghezza superiore all'ordine del digrafo.

D27b.12 Si dice **semicammino massimale su un digrafo** un semicammino che non può essere esteso. Si dice **cammino massimale su un digrafo** un cammino che non può essere esteso.

D27b.13 Si dice **discendente nel digrafo** D del nodo p ogni nodo q raggiungibile da p percorrendo un cammino che ha p come estremità iniziale.
In D_a ogni nodo ha come discendenti tutti i nodi del digrafo, se stesso compreso; l'insieme dei discendenti di 4 in D_b è $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Un nodo di un digrafo D da cui sono raggiungibili tutti i rimanenti si dice **radice del digrafo** D.

Per dualità-LR un nodo di un digrafo D che sia raggiungibile da tutti i rimanenti si dice **coradice del digrafo**.

Si dice **ascendente su un digrafo** D **di un nodo** q ogni nodo p dal quale si può raggiungere q percorrendo un cammino che ha inizio in p.

In D_c l'insieme degli ascendenti di 8 è $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, mentre 9 non possiede discendenti e neanche ascendenti. In D_c inotre il nodo 10 ha se stesso come unico ascendente e discendente, a causa della presenza del cappio.
I nodi predecessori di un dato nodo sono casi particolari dei suoi ascendenti, mentre i nodi successori sono casi particolari dei suoi discendenti.
Le nozioni di nodo ascendente e discendente si collegano a quelle di chiusura riflessivo-transitiva di una relazione:

p è ascendente di q sse $q \in p \,{}_{\sqcap}\, U^{\otimes}$ sse q è discendente di p sse $p \in q \,{}_{\sqcap}\, (Q^{\leftarrow\otimes})$.

D27b.14 Si dice **semipercorso chiuso sul digrafo** D o **semicircuito euleriano sul digrafo** D un semipercorso con il nodo iniziale coincidente con il nodo finale, cioè un semipercorso che sia anche semipasseggiata chiusa e senza ripetizioni di archi.

In modo analogo si definiscono il **percorso chiuso sul digrafo** o **circuito euleriano sul digrafo**, il **semicammino chiuso sul digrafo** o **semicircuito hamiltoniano sul digrafo**, il **cammino chiuso sul digrafo** o **circuito hamiltoniano sul digrafo**.

Ovviamente le inclusioni viste per semipasseggiate, semipercorsi e semicammini (e quindi per passeggiate, percorsi e cammini) valgono anche per i semicircuiti (e quindi per i circuiti).
Il percorso individuato in precedenza non è un circuito euleriano. Un percorso chiuso in D_a che non è cammino chiuso è $\langle\!\langle 1, 4, 0, 1, 2, 1 \rangle\!\rangle$. Oppure $\langle\!\langle 2, 5, 1, 2, 3, 2 \rangle\!\rangle$ in D_b. Un semipercorso chiuso non semicammino chiuso su in D_b è $\langle\!\langle 1, 2, 3, 2, 5, 1 \rangle\!\rangle$.
I due cammini individuati in precedenza non sono circuiti hamiltoniani. Un cammino chiuso in D_a è invece $\langle\!\langle 1, 4, 0, 1 \rangle\!\rangle$. Mentre un semicammino di D_c è $\langle\!\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1 \rangle\!\rangle$.

D27b.15 Si definiscono anche le seguenti configurazioni:

- **semipasseggiate iniettive sui nodi**, semipasseggiate che toccano ogni nodo al più una volta, a esclusione del primo e dell'ultimo (queste sono le semipasseggiate hamiltoniane);
- **semipasseggiate suriettive sui nodi**, semipasseggiate che toccano tutti i nodi almeno una volta;
- **semipasseggiate biiettive sui nodi**, semipasseggiate che toccano tutti i nodi una e una sola volta (ad esclusione del primo e dell'ultimo che coincidono nel caso di semipasseggiate chiuse);
- **semipasseggiate iniettive sugli archi**, semipasseggiate che toccano ogni arco al più una volta (queste sono le semipasseggiate euleriane);

- **semipasseggiate suriettive sugli archi**, semipasseggiate che toccano tutti gli archi almeno una volta;
- **semipasseggiate biiettive sugli archi**, semipasseggiate che toccano tutti gli archi una e una sola volta;

Di queste semipasseggiate si possono poi considerare le varianti chiuse e si possono avanzare richieste corrispondenti sui nodi e sugli archi.

D27**b.16** Date due semipasseggiate tali che l'estremità finale della prima coincida con l'estremità iniziale della seconda, $\alpha = \langle q_0, u_1, q_1, ..., u_s, q_s \rangle$ e $\beta = \langle q_s, u_{s+1}, q_{s+1}, ..., u_{s+t}, q_{s+t} \rangle$, si può considerare la **concatenazione delle semipasseggiate** o **giustapposizione delle semipasseggiate**

$$\alpha \,{}_{\shortmid}\, \beta \ := \ \langle\!\langle q_0, u_1, q_1, ..., q_s, ..., u_{s+t}, q_{s+t} \rangle\!\rangle \ .$$

Considerando in particolare la concatenazione di due passeggiate si ottiene una nuova passeggiata.

Concatenando due semipercorsi si potrebbe ottenere una semipasseggiata che non è un semipercorso; essa però è sempre riducibile a un semipercorso.

Similmente concatenando due semicammini si potrebbe ottenere una semipasseggiata che non è un semicammino; essa però è sempre riducibile a un semicammino. Similmente si possono definire la concatenazione di percorsi e la concatenazione di cammini.

Componendo $\langle\!\langle q_0, q_1, ..., q_s \rangle\!\rangle$ e $\langle\!\langle q_s, q_{s+1}, ..., q_{s+t} \rangle\!\rangle$ si ottiene $\langle\!\langle q_0, q_1, ..., q_s, q_{s+1}, ..., s_{s+t} \rangle\!\rangle$.

Si ha anche che componendo due percorsi si ottiene una passeggiata che se non è percorso si può ridurre a una tale configurazione.

Inoltre componendo due cammini si ottiene una passeggiata che se non è un cammino si può ridurre a tale configurazione.

D27**b.17** All'opposto delle concatenazioni, sopra una semipasseggiata (e quindi sopra un semipercorso, sopra un semicammino, sopra una passeggiata,...) si possono effettuare **decomposizioni della semipasseggiata** ottenute "separando" tale configurazioni in due o più parti.

Evidentemente decomponendo una semipasseggiata si ottengono semipasseggiate, decomponendo un semipercorso si ottengono semipercorsi e separando un semicammino si ottengono semicammini.
Più in particolare si definiscono decomposizioni di passeggiate in passeggiate, decomposizioni di percorsi in percorsi e decomposizioni di cammini in cammini.

Dato che tutte queste configurazioni sono individuate da sequenze di nodi e/o di archi, è evidente che le loro concatenazioni e decomposizioni sono strettamente collegate a quelle di giustapposizione e fattorizzazione di stringhe.

Considerazioni particolari meritano le configurazioni chiuse.

Qualche circuito nonhamiltoniano si può decomporre in più circuiti hamiltoniani separando la sua sequenza di nodi e archi in corrispondenza di ogni nodo toccato più volte (che non sia soltanto il primo e ultimo).

Per esempio l'unico nonhamiltono dei circuiti precedenti, $\langle\!\langle 1, 4, 0, 1, 2, 1 \rangle\!\rangle$, in D_a si decompone in $\langle\!\langle 1, 4, 0, 1 \rangle\!\rangle$ e $\langle\!\langle 1, 2, 1 \rangle\!\rangle$; il circuito nonhamiltono su D_b $\langle\!\langle 3, 2, 5, 1, 2, 2, 3, 2, 5, 1, 4, 3 \rangle\!\rangle$ si può decomporre nei quattro circuiti hamiltoniani $\langle\!\langle 2, 2 \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 2, 3, 2 \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle 2, 5, 1, 2 \rangle\!\rangle$ e $\langle\!\langle 3, 2, 5, 1, 4, 3 \rangle\!\rangle$.

Viceversa accanto a un circuito si possono considerare tutti i circuiti ottenuti percorrendolo più volte.
Discorsi analoghi si possono svolgere per i semicircuiti.

D27**b.18** Un digrafo si dice **digrafo acircuitale** sse non presenta passeggiate chiuse (cioè circuiti), ovvero sse non presenta percorsi chiusi, ovvero sse non presenta cammini chiusi.

Più estensivamente un digrafo si dice **digrafo aciclico** sse non presenta semipasseggiate chiuse (cioè semicircuiti) e quindi sse non ha semipercorsi chiusi, ovvero sse non ha semicammini chiusi.
Un esempio di digrafo aciclico è:

//input pD27b18

Ogni digrafo aciclico è necessariamente acircuitale, in quanto ogni circuito è anche un semicircuito.
Un digrafo acircuitale che non è aciclico è il seguente:

//input pD27b18

D27b.19 Due nodi p e q di un digrafo D si dicono **nodi connessi** sse esiste una semipasseggiata su D che collega p e q.

(1) Prop.: Due nodi di un digrafo sono connessi sse esiste un semicammino che li collega ▮

Un digrafo si dice **digrafo connesso** sse ogni coppia di nodi risulta collegata da una semipasseggiata.

(2) Prop.: Un digrafo è connesso sse i due membri di ciascuno dei suoi duetti di nodi sono collegati da un semipercorso, ovvero da un semicammino ▮

D_a è un digrafo connesso, mentre D_b e D_c non lo sono.

La relazione di connessione tra i nodi di un digrafo è riflessiva, simmetrica e transitiva: la riflessività è conseguenza dell'aver ammesso semipasseggiate di lunghezza 0; la simmetria è dovuta al fatto che per le semipasseggiate (e quindi anche per i semicammini) non si distingue l'orientazione degli archi; la transitività segue dalla possibilità di concatenare semipasseggiate, semipercorsi e semicammini.
La connessione tra nodi di un digrafo è quindi una relazione di equivalenza.

D27b.20 L'insieme dei nodi di un digrafo nonconnesso si ripartisce naturalmente nelle classi della equivalenza di connessione; questi sottoinsiemi dell'insieme dei nodi sono detti **classi di connessione del digrafo**.

I digrafi costituiti dai nodi di una di queste classi e dagli archi che li toccano sono evidentemente connessi e si dicon **componenti connesse del digrafo** di partenza.

D_b ha due componenti connesse, quella basata sul solo nodo 0 e quella che si basa sui nodi rimanenti.
D_c possiede tre componenti connesse.

D27b.21 I nodi p e q si dicono **nodi fortemente connessi** su D sse esiste una passeggiata chiusa, cioè un circuito, che tocca sia p che q.
Un digrafo si dice **digrafo fortemente connesso** sse i due membri di ciascuno dei suoi duetti di nodi sono fortemente connessi, cioè sse per ogni duetto di suoi nodi $\langle p, q\rangle$ vi è un circuito che tocca sia p che q, ovvero sse possiede un circuito suriettivo sui nodi.
Ad esempio D_a è un digrafo fortemente connesso.

Ovviamente ogni digrafo fortemente connesso è anche connesso.
Un esempio di un digrafo connesso che non è fortemente connesso è dato dalla componente connessa basata sui nodi 0, 1, ..., 8 di D_c: infatti il nodo 0 non è raggiungibile da alcun altro nodo.

Si dimostra facilmente che anche la connessione forte tra i nodi di un digrafo è una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva. La connessione forte è quindi un'altra equivalenza sull'insieme dei nodi di ogni digrafo.

Per questa relazione adottiamo la notazione $\sim_{sc}$.
Ogni digrafo ottenuto da un digrafo D per riduzione a una sua classe di equivalenza per la relazione di forte connessionen si dice **componente fortemente connessa del digrafo** D.

Per esempio il seguente digrafo presenta tre componenti fortemente connesse:

//input pD27b21

D27b.22 Servendoci della relazione di forte connessione tra i nodi di un digrafo $D \sim_{sc}$, individuiamo ora un digrafo più ridotto di D detto **quoziente di forte connessione del digrafo** D e denotato con $D/\sim_{sc}$.
Nodi di questo digrafo sono le classi di forte connessione di D (cioè i nodi rappresentanti le diverse componenti fortemente connesse); si chiede poi che tra due diversi di questi nodi S_i ed S_j si abbia un arco sse esiste almeno un arco di D tra un nodo in S_i e uno di S_j.

Nella seguente figura viene presentato un grafo connesso e il suo quoziente di forte connessione:

//input pD27b22

D27b.23 **Prop.** Il digrafo $D/\sim_{sc}$ è acircuitale.

Dim.: Questo digrafo è stato definito come privo di cappi; inoltre se esistesse un circuito che tocca due nodi diversi S_i ed S_j si avrebbe su D un circuito che tocca qualche nodo di S_i e qualche nodo di S_j; questo si può estendere a un circuito che tocca tutti i nodi di S_i e tutti i nodi di S_j, quindi tali sottoinsiemi di d dovrebbero appartenere alla stessa classe di forte connessione ▮

I semicammini massimali tra i semicammini sono quelli di interesse prevalente per la determinazione delle proprietà di connessione; infatti basta la loro ispezione per determinare le componenti connesse del digrafo.

Similmente i cammini massimali tra i cammini sono quelli di interesse prevalente per la determinazione delle proprietà di forte connessione; infatti basta la loro ispezione per determinare le componenti fortemente connesse del digrafo.

A questo proposito valgono i due enunciati che seguono.

D27b.24 **(1) Prop.**: In un digrafo connesso due semicammini aventi lunghezza massima hanno almeno un nodo in comune ▮

(2) Prop.: In un digrafo fortemente connesso due cammini aventi lunghezza massima hanno almeno un nodo in comune ▮

D27b.25 I nodi p e q si dicono **nodi unilateralmente connessi sul digrafo** D sse il digrafo possiede una passeggiata, ovvero un cammino, che va da p a q, ma non una passeggiata cha va da q a p, oppure presenta una passeggiata che va da q a p, ma non una cha va da p a q.

I nodi p e q si dicono **nodi quasifortemente connessi sul digrafo** D sse esiste un nodo r di D tale che sia p che q sono raggiungibili da r.

D27b.26 Ricordiamo che per radice di un digrafo si intende un nodo dal quale siano raggiungibili tutti i restanti [b13]. Evidentemente perché un digrafo possegga una radice è necessario ma non sufficiente che esso sia connesso. Che la connessione non sia una condizione sufficiente all'esistenza di una radice è mostrato dal semplicissimo controesempio:

//input pD27b27

(1) Prop.: Un digrafo è fortemente connesso sse tutti i suoi nodi sono radici ▮

D27 c. tipi particolari di digrafi

D27c.01 Presentiamo una breve rassegna di alcuni tra i molti tipi particolari di digrafi che risulta utile studiare.

Si dice **digrafo completo** o **digrafo ovvio** un digrafo della forma $\langle Q, Q \times Q\rangle$.
Si dice **digrafo assurdo** un digrafo della forma $\langle Q, \emptyset\rangle$.
Questi nomi, a prima vista stravaganti, hanno le seguenti motivazioni: i digrafi ovvi corrispondono alle relazioni ovvie, cioè alle relazioni verificate da tutte le coppie di oggetti che ha senso prendere in considerazione; i digrafi assurdi corrispondono alle relazioni assurde, relazioni non verificate da alcuna delle coppie di oggetti per i quali ha senso prendere in considerazione.

D27c.02 Risulta utile studiare vari tipi di digrafi corrispondenti ai diversi tipi di relazioni. Si parla quindi di digrafi riflessivi, simmetrici, antisimmetrici, transitivi, di equivalenza, di preordine, d'ordine e non solo.
In particolare denotiamo con **DgrfSym** la collezione dei digrafi simmetrici.

D27c.03 Digrafi molto particolari con varie applicazioni sono i digrafi bipartiti.
Formalmente $G := \langle Q, U\rangle$ si dice **digrafo bipartito** sse Q si può bipartire come $Q = Q_1 \dot\cup Q_2$ in modo che sia $U \subseteq Q_1 \times Q_2$.
Con **DgrfBp** denotiamo la classe dei digrafi bipartiti.

In generale i nodi di un digrafo bipartito si tripartiscono tra nodi con grado uscente positivo e grado entrante 0, nodi con grado uscente 0 e grado entrante positivo e nodi isolati. I primi si dicono **nodi origine del digrafo** e i secondi **nodi bersaglio del digrafo**.
L'insieme dei nodi origine del digrafo G si denota con $G^{\vdash}$; l'insieme dei nodi bersaglio del digrafo G si denota con $G^{\dashv}$.

I nodi isolati, in considerazioni generali che prescindono da specifiche applicazioni hanno scarso interesse. Spesso quindi si chiede che un digrafo bipartito sia privo di nodi isolati. questo equivale a chiedere $Q = G^{\vdash} \dot\cup G^{\dashv}$ e $U \subseteq G^{\vdash} \times G^{\dashv}$.
In effetti i digrafi bipartiti più interessanti sono quelli connessi, in quanto i nonconnessi si ottengono semplicemente "accostando" digrafi bipartiti connessi.

D27c.04 Ogni arco di un digrafo bipartito, dunque, va da un nodo origine ad un nodo bersaglio. Nei nodi origine non entra alcun arco, dai nodi bersaglio non esce alcun arco.

Evidentemente passando al riflesso di un digrafo bipartito si ottiene un secondo digrafo bipartito; in esso i ruoli di nodi origine e di nodi bersaglio si scambiano.

I digrafi bipartiti vengono presentati vantaggiosamente mediante la loro **raffigurazione sagittale dei digrafi bipartiti**:

– sulla sinistra della figura vengono incolonnati i nodi origine;
– sulla destra vengono incolonnati i nodi bersaglio;
– ogni arco va da un nodo della prima colonna a uno della seconda.

//input pD27c04

In queste raffigurazioni le orientazioni delle frecce potrebbero essere omesse.

In effetti la differenza tra digrafi bipartiti e grafi nonorientati bipartiti è soltanto un dettaglio formale: ogni digrafo bipartito si ottiene da un grafo bipartito aggiungendo solo la distinzione tra nodi origine e nodi bersaglio.

D27c.05 Casi particolari di digrafi bipartiti sono i **digrafi funzionali**, digrafi per i quali da un nodo origine può uscire un solo arco. Essi forniscono gli esempi più semplici e maneggevoli della fondamentale nozione di funzione.

//input pD27c05

Alcuni fatti riguardanti funzioni e relazioni concernenti insiemi poco numerosi risultano evidenti dall'esame della sola raffigurazione sagittale.

Ad esempio, si vede con chiarezza il fatto che invertendo una generica funzione non è garantito che si ottenga una seconda funzione: in generale si ottiene una relazione, in quanto in qualcuno dei nodi bersaglio del relativo digrafo bipartito possono entrare più archi.
In particolare se vengono invertite le due funzioni precedenti, solo la seconda fornisce una nuova funzione.

Si hanno inoltre raffigurazioni assai chiare per le funzioni suriettive, iniettive, biiettive e costanti.

//input pD27c05B

D27c.06 I digrafi bipartiti sono strettamente collegati alle relazioni tra due insiemi disgiunti.
Essi sono ampiamente utilizzati per schematizzare i collegamenti tra due entità che intervengono in un archivio organizzato con il computer. Il passaggio da un digrafo bipartito al suo riflesso costituisce il corrispondente matematico della operazione informatica basilare detta **file inversion**.

D27 d. sottodigrafi e morfismi tra digrafi

D27d.01 Dati due digrafi $D_i := \langle Q_i, U_i \rangle$ con $i = 1, 2$, si dice che D_1 è **sottodigrafo del digrafo** di D_2 sse $Q_1 \subseteq Q_2$ e $U_1 \subseteq U_2 \cap (Q_1 \times Q_1)$.
Denoteremo questa relazione con $D_1 \leq_{Dgrf} D_2$.

Un digrafo abbastanza ricco di nodi e archi possiede numerosi sottodigrafi. Alcuni si possono ottenere eliminando alcuni archi e mantenendo tutti i nodi. Altri si ottengono eliminando alcuni nodi e tutti e soli gli archi incidenti nei nodi eliminati.
Altri sottodigrafi interessanti sono ottenuti richiedendo che soddisfino particolari proprietà e attuando opportune eliminazioni di nodi e archi.
Tra queste ultime eliminazioni possiamo collocare i passaggi alle componenti connesse e alle componenti fortemente connesse.
Altri casi interessanti sono gli isolamenti dei sottodigrafi circuitali, ottenibili per eliminazione progressiva di archi e i passaggi ai sottodigrafi completi, ottenibili attaverso eliminazioni di nodi e archi relativi.

D27d.02 Riprendiamo ora la nozione di isomorfismo tra digrafi ricordando che due digrafi $D :=: \langle Q, U \rangle$ ed $H :=: \langle P, F \rangle$. si dicono **digrafi isomorfi** sse si trova una corrispondenza biunivoca β, tra i due insiemi di nodi Q e P che preserva l'orientazione degli archi che collegano i nodi di ogni digrafo, cioè induce una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi di archi U ed F. La suddetta biiezione $\beta \in \lceil V \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright W \rceil$ è chiamata **isomorfismo tra i digrafi** D ed H.

Per enunciare che D ed H sono digrafi isomorfi si scrive specificamente $D \triangleleft\!\!-\!\!\triangleright_{Dgrf} H$ o più semplicemente $D \cong H$; per enunciare che β è un isomorfismo tra D ed H si scrive $\beta \in \lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Dgrf} H \rceil$.

Questa scrittura equivale alla seguente:
$$\beta \in \lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright H \rceil \;\; ¶ \;\; F = \big\{ \langle q, r \rangle \in U :| \; \langle \beta(q), \beta(r) \rangle \big\} \; .$$

Per **invariante di un digrafo** D si intende una entità (valore numerico, insieme, funzione, relazione, proprietà, ...) associata a D che ha lo stesso valore per ogni digrafo isomorfo al detto D.

D27d.03 È evidente che condizione necessaria ma non sufficiente per l'isomorfismo di due digrafi è il fatto che essi abbiano lo stesso numero di nodi e di archi.
Più in generale si hanno condizioni necessarie ma non sufficienti per l'isomorfismo di due digrafi riguardanti le coincidenze di altri invarianti.

Il problema di stabilire se due digrafi D e H sono isomorfi o meno è un problema di grande importanza, in quanto molte situazioni di interesse matematico, informatico o applicativo sono schematizzate da digrafi: in particolare all'isomorfismo tra digrafi si riconducono molte questioni riguardanti riconoscimenti di configurazioni che si pongono soprattutto nelle applicazioni dell'intelligenza artificiale.

Possiamo supporre di aver già banalmente verificato che essi abbiano lo stesso ordine n e lo stesso grado.
Senza una analisi preliminare di altre caratteristiche dei due digrafi, si dovrebbe cercare un isomorfismo entro le $n!$ corrispondenze biunivoche tra i due insiemi di nodi; per n elevato si tratterebbe di un lavoro enormemente oneroso.
La decisione dell'isomorfismo si può sveltire notevolmente osservando che, una tale biiezione deve associare nodi aventi le stesse caratteristiche puramente relazionali, cioè le stesse proprietà concernenti i collegamenti con gli altri nodi.

Queste caratteristiche vengono dette **invarianti per isomorfismo dei nodi**.

D27d.04 È evidente che due nodi corrispondenti per isomorfismo devono avere lo stesso grado entrante e lo stesso grado uscente.
Quindi una condizione necessaria per l'isomorfismo di D ed H è la coincidenza dei corrispondenti multiinsiemi di gradi uscenti e multiinsiemi di gradi entranti.

Altre caratteristiche essenziali dei digrafi sono i cammini delle diverse lunghezze ed in particolare i cammini chiusi e i cammini massimali: in un isomorfismo a ogni cammino chiuso (risp. massimale) deve corrispondere un cammino chiuso (risp. massimale) della stessa lunghezza. Sono quindi invarianti proprietà come la aciclicità o meno, il numero dei cappi, il numero delle componenti connesse, i vari tipi di connessione.

Osserviamo che, qualora si tenga conto delle caratteristiche dei cammini, non serve tener conto di quelle dei percorsi e delle passeggiate, in quanto ciascuna di queste configurazioni si riduce a concatenazione di cammini.

D27d.05 Nella ricerca di un effettivo isomorfismo in genere è molto utile ridurre le corrispondenze biunivoche tra nodi da esaminare chiedendo che a nodi circuitali di un digrafo corrispondano nodi circuitali dell'altro, a nodi su un cammino massimale di data lunghezza corrispondano nodi su cammini massimali della stessa lunghezza e avanzando richieste di uguaglianza di altre caratteristiche che siano effettivamente valutabili con manovre efficienti.

D27d.06 Sarebbe molto vantaggioso individuare i cosiddetti **insiemi completi di invarianti**, sistemi di invarianti che permettono di individuare univocamente ogni classe di equivalenza di digrafi.
In tal caso si potrebbe affrontare il problema dell'isomorfismo tra due digrafi D ed H procedendo a controllare in successione la coincidenza di questi invarianti; in tal modo, oltre a decidere il non isomorfismo qualora un invariante non abbia lo stesso valore per D ed H, si giunge a decidere l'isomorfismo qualora tutti gli invarianti superino i tests di coincidenza.
In effetti per una specie di strutture variegata come i digrafi si conoscono solo invarianti la cui diversità permette di stabilire il non isomorfismo, i quali cioè portano a condizioni necessarie ma non sufficienti all'isomorfismo.

D27d.07 I digrafi, come le strutture discrete di ogni altra specie, possono essere studiati, essenzialmente, in due modi.
Un digrafo può essere considerato come un oggetto formale costruito a partire da altri oggetti di partenza specifici.
In tale caso la stessa costruzione del digrafo potrebbe essere piuttosto impegnativa, o in quanto richiede molti nodi e molti archi, o in quanto la stessa individuazione dei nodi richiede uno sforzo di astrazione dagli oggetti di partenza non trascurabile (gli oggetti di partenza potrebbero avere le nature più svariate).
Operando in questo modo, può essere necessario individuare i nodi ed gli archi del digrafo con scritture ben precise ed elaborate; inoltre lo studio del digrafo può condurre a configurazioni la cui reinterpretazione può risultare onerosa.

Un secondo modo di studiare un digrafo D, viceversa, prescinde dalla identità dei suoi nodi e attribuisce importanza esclusivamente alle sue proprietà derivanti dai collegamenti esistenti tra i suoi nodi.
Questo studio, tendenzialmente più astratto, porta a risultati che valgono anche per ogni altro digrafo H che si può considerare ottenuto da D solo per la modifica degli identificatori dei suoi nodi: i nodi di

H si possono porre in corrispondenza biunivoca con quelli di D in modo che $Arc(H)$, l'insieme degli archi di H, sia posto in corrispondenza biunivoca con $Arc(G)$.

D27d.08 Le nozioni di isomorfismo e di invarianti sono nozioni matematiche assai generali e molto importanti.

In effetti la nozione di isomorfismo si può introdurre per tutte le specie di strutture, a cominciare dai vari arricchimenti e specializzazioni di digrafi e grafi nonorientati.

Per tutte le specie di strutture si può quindi parlare di invarianti per isomorfismo (quantità invarianti, multiinsiemi invarianti, relazioni invarianti, polinomi invarianti, proprietà invarianti, ...).

Tra le peculiarità di una specifica struttura S di una specie $\mathbf{S}$ è importante saper distinguere tra quelle invarianti per isomorfismo e le rimanenti.
Queste ultime dipendono da qualche particolare della sua definizione, ovvero della costruzione che ha condotto ad S, e quindi non sono trasferibili facilmente ad altre strutture della specie $\mathbf{S}$.

Gli invarianti per isomorfismo si possono considerare caratteristiche "essenziali", cioè elementi sui quali è opportuno concentrare gran parte dello studio delle strutture.
Infatti il chiarimento di fatti riguardanti queste caratteristiche per una struttura particolare S (un grafo nonorientato, un digrafo, ...) costituisce un chiarimento per tutte le strutture della specie $\mathbf{S}$ isomorfe ad S stessa.

Quindi si tratta di una conoscenza utilizzabile non episodicamente, ma per una estesa gamma di situazioni.

La individuazione di un isomorfismo e di un invariante, quindi, possono portare a notevoli economie di pensiero.

D27d.09 Quando un digrafo viene studiato senza considerarlo costruito a partire da oggetti particolari, interessano soprattutto le sue proprietà invarianti.
Quindi interessano maggiormente le classi di isomorfismo dei singoli digrafi. Di solito è possibile confondere una classe di isomorfismo con un suo ben determinato rappresentante, e anche con una sua raffigurazione.

D27 e. matrici delle adiacenze

D27e.01 Per individuare i nodi di una struttura grafica studiata per una determinata applicazione, e quindi per considerarla in relazione con altre entità, può essere opportuno contrassegnare i suoi nodi con notazioni elaborate che forniscano un loro significato.

Quando invece si studia una struttura grafica senza collegarla ad altre, è comodo individuare i suoi nodi con oggetti semplici, in particolare con interi naturali consecutivi.

In tal modo si introduce anche un ordinamento nell'insieme dei suoi nodi, relazione che risulta sostanzialmente indispensabile per organizzare praticamente le manovre che si devono eseguire sui digrafi in gioco.

Per individuare un digrafo $D = \langle Q, U \rangle$ per il computer conviene assumere $Q = \{1, ..., n\}$ oppure $Q = \{0, ..., n-1\}$ e servirsi della funzione indicatrice di U entro $Q \times Q$.
Questa funzione è una matrice binaria detta **matrice delle adiacenze del digrafo** e qui viene denotata con $Mad(D)$.

D27e.02 Le matrici delle adiacenze dei digrafi D_a, D_b e D_c visti all'inizio del capitolo sono:

$$D_a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad D_b = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D_c = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

D27e.03 Alcune caratteristiche di un digrafo D possono essere lette facilmente nella sua matrice delle adiacenze $A := Mad(D)$ e con le matrici delle adiacenze si possono effettuare in modo semplice varie operazioni sui digrafi.

Su una riga di A si ha un 1 in corrispondenza di ogni arco uscente dal nodo caratterizzante la riga stessa. Su una colonna di A si ha invece un 1 in corrispondenza di ogni arco che entra nel nodo che caratterizza tale linea.

Le componenti uguali ad 1 sulla diagonale principale corrispondono biunivocamente ai cappi del digrafo.

Le somme delle componenti di una riga (risp. le componenti di una colonna) danno il numero degli archi uscenti dal (risp. archi entranti nel) nodo corrispondente; a sua volta la somma delle componenti sulla diagonale principale fornisce il numero dei cappi del digrafo.

D27e.04 Il passaggio da un digrafo al suo riflesso, cioè al digrafo che presenta gli stessi nodi e gli archi con la direzione delle frecce capovolta, corrisponde al passaggio alla matrice delle adiacenze trasposta: $Mad(D^{\leftarrow}) = (Mad(D))^{\mathsf{T}}$

Per esempio le trasposte delle matrici delle adiacenze di D_a e D_b sono:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

//input pD27e04

D27e.05 La simmetria e la riflessività dei digrafi vengono caratterizzati facilmente attraverso le matrici delle adiacenze.

Un digrafo D è simmetrico sse la sua matrice $Mad(D)$ è simmetrica.

Un digrafo D è riflessivo sse la diagonale della sua matrice $Mad(D)$ ha tutte le componenti uguali ad 1.

La **complementazione di una matrice binaria** A porta alla matrice che ha come componenti $C_{ij} := 1 - A_{ij}$.

La complementare della matrice delle adiacenze $Mad(D)$ di un digrafo D fornisce la matrice delle adiacenze del cosiddetto **digrafo complementare** di D, digrafo associato alla relazione opposta a quella espressa da D.

D27e.06 La matrice delle adiacenze con tutte le entrate uguali ad 1 corrisponde al digrafo completo $\langle Q \ , \ Q \times Q \rangle$, ovvero alla relazione ovvia.
La matrice delle adiacenze con tutte le entrate uguali a 0 corrisponde al digrafo $\langle Q \ , \ \emptyset \rangle$, ovvero alla relazione assurda.

Nel seguito denoteremo con Mzr_Q la matrice di profilo $Q \times Q$ avente tutte le entrate uguali a 0 e denoteremo con $\mathcal{M}un_Q$ la matrice $Q \times Q$ con tutte le entrate uguali ad 1.

D27e.07 Quando si cambia l'ordinamento dei nodi di un digrafo la matrice delle adiacenze deve essere modificata sottoponendo sia le sue righe che le sue colonne alla permutazione corrispondente al riordinamento.
Una buona scelta dell'ordine dei nodi può portare a matrici delle adiacenze significative, in grado di chiarire alcune proprietà dei digrafi.

D27e.08 Una matrice numerica quadrata M di profilo $Q \times Q$ si dice **matrice diagonalizzabile a blocchi** sse Q si può ripartire come $Q = Q_1 \dot\cup \ldots \dot\cup Q_k$, in modo che $a, b \in_{\neq} \{1, ..., k\}, i \in Q_a, j \in Q_b \Longrightarrow M_{i,j} = 0$.

Se le prime linee della matrice riguardano gli elementi di Q_1, quelle di un successivo gruppo Q_2, ..., le ultime i nodi di Q_k, la matrice ha la forma del tipo:

$$A = \begin{vmatrix} a & \dots & b & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & \dots & d & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e & \dots & f & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g & \dots & h & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & w & \dots & x \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & y & \dots & z \end{vmatrix}$$

Le sottomatrici formate dalle righe e dalle colonne relative a un solo Q_a si dicono **blocchi diagonali della matrice**, le sottomatrici costituite da soli zeri relative a un Q_a e un Q_b diversi **blocchi nondiagonali della matrice**.
Inoltre la matrice di partenza si dice esprimibile come **somma diretta delle matrici** costituenti i suoi blocchi diagonali.

Se si riordinano i nodi del digrafo senza tener conto della ripartizione può accadere che la matrice presenti un aspetto dal quale non risulta affatto evidente il suo essere diagonale a blocchi.

D27e.09 Un digrafo ottenuto considerando come unico digrafo due digrafi dati ha come matrice delle adiacenze la matrice diagonale a due blocchi somma diretta delle matrici delle adiacenze dei due digrafi di partenza.

Più in generale con una analoga costruzione a partire da k digrafi si ottiene una matrice binaria somma diretta di k blocchi.

Particolari matrici diagonali a blocchi sono quelle nelle quali tutte le entrate dei blocchi diagonali sono uguali ad 1.
Queste matrici esprimono l'accorpamento di diversi digrafi completi per costituire un unico digrafo (nonconnesso).

I digrafi così ottenuti sono tutti e soli i digrafi associati alle relazioni di equivalenza che presentano k blocchi, ossia k classi di equivalenza.

D27e.10 Le matrici delle adiacenze costituiscono una **implementazione canonica dei digraf**, ovvero delle relazioni binarie esplicite. Questa implementazione è piuttosto conveniente, in quanto si serve di bits, cioè di informazioni che ogni computer consente di registrare e manipolare in modo altamente efficiente.

I digrafi dunque si possono trattare in tre modi equivalenti: (1) come insiemi di coppie, (2) mediante raffigurazioni e (3) con matrici binarie quadrate.

Quando si affronta un problema impegnativo riguardante digrafi può essere vantaggioso servirsi ora di una ora di un'altra di queste modalità.

In linea di massima gli insiemi di coppie (cioè le relazioni) consentono di trattare i problemi nel modo più sintetico; le raffigurazioni sono preferibili per presentazioni intuitive, per prime prese in visione delle situazioni che rappresentano; le matrici delle adiacenze invece sono le più vicine alle esigenze delle elaborazioni automatiche.

D27e.11 Molte situazioni riguardanti digrafi spesso risulta vantaggioso esaminarle parallelamente secondo i tre diversi punti di vista:

- (1) Relazione riflessiva; (2) digrafo nel quale ogni nodo è dotato di cappio; (3) matrice binaria con tutte le componenti sulla diagonale principale uguali ad 1.
- (1) Relazione simmetrica; (2) digrafo nel quale, insieme a ogni arco, è presente il suo riflesso; (3) matrice simmetrica, cioè matrice uguale alla sua trasposta.
- (1) Relazione antisimmetrica; (2) digrafo nel quale accanto a un suo arco non può essere presente il suo riflesso. (3) matrice con soli 0 sulla diagonale principale e che per ogni entrata estranea alla diagonale e uguale a 1 presenta una componente 0 nella entrata simmetrica rispetto alla diagonale principale.
- (1) Relazione di equivalenza; (2) digrafo nel quale si individuano sottoinsiemi di nodi che costituiscono digrafi completi e tra i quali non vi sono connessioni; (3) matrice diagonalizzabile a blocchi con blocchi diagonali formati da soli 1. e entrate nulle al di fuori dei suddetti blocchi.

D27e.12 Consideriamo i digrafi aventi come supporto $\{1, ..., n\}$ e forniti, risp., dalle relazioni $\leq$, $<$ e "essere l'immediato predecessore". Essi, nel caso $n = 5$ hanno come matrici delle adiacenze:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Esse sono dette, risp., **matrici binarie triangolari superiori**, **matrici binarie strettamente triangolari superiori** e **matrici di shift uguale a +1**.

Similmente si definiscono le **matrici binarie triangolari inferiori**, le **matrici binarie strettamente triangolari inferiori** e le **matrici di shift uguale a** -1.

D27e.13 Altre matrici particolari sono quelle relative alle permutazioni circolari.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

In generale si dicono **matrici circolanti** le matrici che sono individuate dalla loro prima riga, le righe successive essendo ottenute applicando alla precedente una permutazione circolare di un posto.

Si dicono **matrici circolanti binarie elementari** le matrici circolanti individuate da una prima riga contenente una sola entrata uguale a 1, le rimanenti entrate essendo uguali a 0.
La precedente matrice esplicita è una delle matrici circolanti binarie elementari di ordine 5.

Una matrice circolante binaria non elementare, evidentemente somma di due circolanti elementari, è la seguente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

D27 f. grafi bipartiti e matrici

D27f.01 La matrice delle adiacenze di un digrafo bipartito può essere sostituita da una sua sottomatrice. Consideriamo un digrafo bipartito con n nodi e supponiamo che i nodi origine siano 1, 2, ..., s e i nodi bersaglio $s+1$, $s+2$, ..., n. La sua matrice delle adiacenze assume una forma a blocchi della forma:

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & & s & s+1 & & n \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ s \\ s+1 \\ \vdots \\ n \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & b & \dots & b \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & b & \dots & b \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

La matrice è quindi formata da quattro blocchi individuati dalla ripartizione tra nodi origine e nodi bersaglio e tre di questi blocchi (quello relativo agli archi da origine ad origine, quello relativo agli archi da bersaglio a bersaglio, quello relativo agli archi da bersaglio a origine) hanno tutte le componenti uguali a zero.

È quindi opportuno considerare una **matrice delle adiacenze ridotta** costituita dal solo blocco relativo alle righe dei nodi origine e alle colonne dei nodi bersaglio: in tal modo si trascurano segnalazioni di scarso interesse.

D27f.02 Queste matrici possono avere il numero delle righe diverso dal numero delle colonne. In ogni caso le loro righe sono caratterizzate da un insieme di oggetti (i nodi origine) diverso (e più precisamente disgiunto) da quello che caratterizza le loro colonne (l'insieme dei nodi bersaglio).

Le matrici ridotte dei due seguenti digrafi bipartiti:

//input pD27f02

sono le seguenti:

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{vmatrix}
\qquad \text{e} \qquad
\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}$$

D27f.03 Le matrici ridotte per digrafi bipartiti funzionali, se sono presentate in una forma stilizzata con l'aggiunta di due assi cartesiani, costituiscono raffigurazioni matriciali di configurazioni in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ corrispondenti a funzioni da interi a interi.

$$\begin{vmatrix}
\bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\
\bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\
\bullet & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\
\cdot & \cdot & \bullet & \cdot
\end{vmatrix}$$

Le raffigurazioni dei digrafi bipartiti costituiscono le cosiddette **raffigurazioni sagittali delle relazioni**.

Nel caso di digrafi bipartiti funzionali è lecito parlare più precisamente di **raffigurazioni sagittali delle funzioni**.

D27f.04 I digrafi bipartiti sono stati presentati come casi particolari dei digrafi.
D'altra parte le matrici delle adiacenze dei digrafi generici si possono considerare casi particolari delle matrici ridotte dei digrafi bipartiti.
In effetti lo studio dei digrafi per talune questioni si può ricondurre allo studio dei digrafi bipartiti con il numero dei nodi origine uguale al numero dei nodi bersaglio.

Consideriamo ora un digrafo bipartito con il numero dei nodi origine, denotato con n, uguale al numero dei nodi bersaglio, e una corrispondenza biunivoca tra nodi origine e nodi bersaglio.
Pensiamo a una sua realizzazione meccanica con gli archi costituiti da asticciole di materiale flessibile e parzialmente deformabile e spostiamo i nodi in modo che ciascun nodo origine venga fatto aderire al nodo bersaglio corrispondente.
Se ciascuna di queste coppie di nodi si trasforma in un unico nodo, si ottiene un digrafo con n nodi avente come matrice delle adiacenze la matrice delle adiacenze ridotta del digrafo bipartito di partenza: infatti nella operazione descritta i collegamenti tra nodi non cambiano e conseguentemente la matrice delle adiacenze non si può modificare.

D27 g. somme e prodotti di matrici, digrafi e multidigrafi

D27g.01 Consideriamo due matrici binarie A e B con lo stesso profilo $I \times J$; possono essere interpretate come matrici delle adiacenze ridotte di due digrafi bipartiti riguardanti lo stesso insieme di nodi origine I e lo stesso insieme di nodi bersaglio J.

Si dice **somma booleana delle matrici** A e B, e si denota con $A +_2 B$, la matrice che ha lo stesso profilo di A e B e che ha come componenti:

$$(A+B)_{i,j} \;:=\; A_{i,j} +_2 B_{i,j} \ ,$$

dove ricordiamo che "$+_2$" applicata a 0 e 1 denota la somma binaria, cioè l'operazione tale che

$$0 +_2 0 \;:=\; 0 \;\text{ e }\; 0 +_2 1 \;:=\; 1 +_2 0 \;:=\; 1 +_2 1 \;:=\; 1 \quad ;$$

questo simbolo inoltre abbrevia la sua estensione cartesiana applicata alle matrici di bits.

Si dice invece **somma aritmetica delle matrici** di A e B, e si denota con $A + B$, la matrice dello stesso profilo di A e B che ha come componenti:

$$T_{i,j} \;:=\; A_{i,j} + B_{i,j} \ .$$

La prima di queste matrici ci dice se è possibile per ogni coppia $\langle i, j\rangle$ di nodi origine-bersaglio avere un collegamento o con un arco di A o con un arco di B. La seconda per ogni coppia $\langle i, j\rangle$ dà il numero di tali collegamenti.

Per esempio:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \dot{+} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

D27g.02 La complementazione della matrice ridotta di un digrafo bipartito individua il digrafo bipartito nel quale si hanno tutti e soli i collegamenti "origine $\rightarrow$ bersaglio" che erano assenti nel digrafo di partenza.

D27g.03 È utile interpretare in termini di strutture grafiche anche matrici aventi come entrate interi naturali; per questo ricordiamo la struttura chiamata **multidigrafo**, variante del digrafo costituita da nodi e archi con la possibilità che da un nodo a un altro si possa avere anche più di un arco.

Per queste configurazioni si può chiedere che gli archi siano aut distinguibili aut indistinguibili; per e applicazioni risultano preferibili gli archi distinguibil attraverso opportune etichette.

Formalmente per multidigrafo intendiamo un sistema $M = \langle Q, U, f\rangle$, dove Q ed U sono due insiemi finiti ed $f \in \lceil U \longmapsto Q \times Q \rceil$.
Matrice delle adiacenze di M è la matrice A di profilo $Q \times Q$ con entrate in $\mathbb{N}$ tali che $A_{i,j}$ è uguale al numero di elementi di U che f trasforma nella coppia $\langle i, j\rangle$, cioè $\langle i, j\rangle f^{-1}$.

Anche tra i multidigrafi risulta interessante distinguere vari sottoinsiemi.

In particolare sono trattati i **multidigrafi bipartiti** e le loro matrici ridotte.
Una matrice M con entrate in $\mathbb{N}$ rappresenta ogni multidigrafo bipartito i cui nodi origine sono associati alle righe, i cui nodi bersaglio sono associati alle colonne e che presenta $M_{i,j}(\geq 0)$ archi dal nodo i al nodo j.

D27g.04 Tutte le precedenti definizioni valgono anche per matrici quadrate e in questo caso si possono interpretare come possibilità di collegamenti tra i nodi di un insieme sul quale si considerino due digrafi.

Questi si possono pensare utilmente come rappresentativi di due sistemi di collegamenti tra località (ad esempio collegamenti stradali e collegamenti ferroviari).

La somma binaria e la somma aritmetica di due di queste matrici danno, risp., le possibilità e i numeri dei collegamenti diretti tra le località prese in considerazione.

Per le matrici a componenti intere con lo stesso profilo si può definire anche l'operazione differenza: è quella che porta alla matrice che ha come componenti:

$$D_{i,j} := A_{i,j} - B_{i,j} \ .$$

In genere una tale matrice presenta entrate negative.
Questa operazione differenza è interpretabile in termini di digrafi bipartiti che schematizzano processi come i trasferimenti di merci o di denari positivi e negativi (crediti e debiti) tra nodi origine e nodi bersaglio.

D27g.05 Consideriamo ora due digrafi bipartiti $D_d = \langle I, U_d, J\rangle$ ed $D_e = \langle J, U_e, K\rangle$ tali che i nodi bersaglio del primo coincidano con i nodi origine del secondo.

Per chiarezza conviene raffigurare i due digrafi bipartiti accostati e con i nodi bersaglio del primo vicini ai corrispondenti nodi origine del secondo.

Per semplicità di interpretazione delle linee delle varie matrici, individuiamo con i primi interi positivi gli elementi di tutti gli insiemi di nodi in gioco.

//input pD27g05

La figura ottenuta si può pensare come schematizzazione di una rete di collegamenti (stradali, ferroviari, aerei,...) tra tre gruppi di località.

Lo schema può stabilire che per passare da una località (nodo) di I a una località di K è necessario transitare per una località di J.

D27g.06 Ci chiediamo ora quali sono i possibili modi di passare, tramite una località di J, da una località di I ad una località di K. La risposta si ottiene con un'operazione sulle matrici ridotte delle adiacenze di D_d e D_e, matrici che denoteremo con D ed E.

Si dice **prodotto binario delle matrici** D ed E, la matrice binaria $M = D * E$ avente profilo $I \times K$ le cui componenti sono date da:

$$M_{i,k} \ := \ \sum_{j=1}^{J} D_{i,j} \cdot E_{j,k} = D_{i,1} \cdot E_{1,k} \dot{+} D_{i,2} \cdot E_{2,k} \dot{+} \dots \dot{+} D_{i,J} \cdot E_{J,k} \ .$$

In questa formula il segno $\sum$ denota la sommatoria costruita con la somma booleana.

D27g.07 Nel caso particolare considerato si ha:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C = A * B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

La matrice ottenuta ha le righe associate a nodi di I e le colonne associate a nodi di K e la sua componente $M_{i,k}$ è 1 sse esiste un collegamento a due tratti (passeggiata di lunghezza 2) tra i e k, 0 se non esiste un collegamento di questo genere.

Infatti $M_{i,k}$ vale 1 sse esiste almeno uno $j \in J$ tale che $D_{i,j} = E_{j,k} = 1$, vale zero in caso contrario. Ma, nel primo caso, accade che esiste almeno un nodo di J nel quale entra un arco proveniente da un nodo di I e dal quale esce un arco diretto verso un nodo di K, e solo in questa evenienza si ha un collegamento tra i e k.

In generale due matrici si dicono costituire una **coppia di matrici conformabili** sse le righe della prima sono individuate dagli stessi oggetti che individuano le colonne della seconda.

Le due precedenti matrici D ed E costituiscono una tale coppia. Osserviamo che solo coppie di matrici conformabili possono essere sottoposte a una operazione binaria come il prodotto precedentemente definito.

D27g.08 Accanto alla moltiplicazione booleana si può definire anche la moltiplicazione aritmetica di matrici conformabili come D ed E (che sono anche binarie), servendosi della usuale somma di interi invece della somma booleana.

Si dice dunque **prodotto aritmetico delle matrici** D per E la matrice $N = D \cdot E$ avente profilo $I \times K$ e avente come componenti gli interi nonnegativi dati da:

$$N_{i,k} \;=\; \sum_{j=1}^{J} D_{i,j} \cdot E_{j,k} \;=\; D_{i,1} \cdot E_{1,k} + D_{i,2} \cdot E_{2,k} + \cdots + D_{i,J} \cdot E_{J,k} \;.$$

La componente $N_{i,k}$ dice in quanti modi dal nodo i si può raggiungere k. Infatti $N_{i,k}$ dà il numero di nodi $j \in J$ tali che $D_{i,j} = E_{j,k} = 1$, cioè il numero dei nodi di J che individuano passeggiate di lunghezza due da i a k, passeggiate della forma

$$\big\langle \langle i,j \rangle \;,\; j \;,\; \langle j,k \rangle \big\rangle \;.$$

Per le matrici dell'esempio precedente si ha:

$$D \;=\; A \cdot B \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Le due matrici M ed N hanno dunque un'interpretazione molto chiara in termini di raggiungibilità e di passegiate.

D27g.09 Il prodotto di matrici conformabili può definirsi più in generale quando le entrate delle matrici stesse sono numeri reali o complessi o i generale appartengono a strutture per le quali son definite operazioni di somma e prodotto.
In algebra [B41c02, T15h08] tali entità sono dette **semianelli**.

Nel caso delle matrici con le entrate in $\mathbb{N}$ si ha una interpretazione molto naturale.
Ricordando la formula $N_{i,k} = \sum_j D_{i,j} \cdot E_{j,k}$, si ha che $N_{i,k}$ fornisce il numero delle passeggiate dal nodo i al nodo k: infatti per ogni nodo j intermedio $D_{i,j} \cdot E_{j,k}$ esprime il numero delle passeggiate da i a k passanti per j.

D27g.10 Estendendo il discorso si può considerare una sequenza di 3, 4, ..., s digrafi o multidigrafi bipartiti tali che i nodi bersaglio di un digrafo coincidano con i nodi origine del digrafo successivo.

Si possono dunque considerare i prodotti binario e aritmetico delle rispettive matrici delle adiacenze ottenendo matrici che sono interpretabili in termini, risp., di possibilità e di numero di collegamenti ad s passi tra un nodo origine del primo digrafo e un nodo bersaglio dell's-esimo.

Con costruzioni di questo genere ci si rende conto agevolmente dell'associatività dei prodotti booleano e normale delle matrici binarie, o più in generale a componenti intere naturali:

$$D * (E * F) = (D * E) * F \qquad\qquad D \cdot (E \cdot F) = (D \cdot E) \cdot F \ .$$

Infatti entrambi i membri della prima uguaglianza danno le possibilità di passaggio da un nodo del primo insieme a uno del quarto, mentre entrambi i membri della seconda danno i numeri delle passeggiate da un nodo del primo insieme a uno del quarto.

D27g.11 Una matrice binaria quadrata $n \times n$ si può quindi interpretare sia come matrice delle adiacenze di un digrafo con n nodi, sia come matrice delle adiacenze ridotta di un digrafo bipartito con n nodi origine ed n nodi bersaglio.

Una matrice quadrata $n \times n$ a entrate intere naturali si può invece interpretare sia come matrice delle adiacenze di un multidigrafo con n nodi, sia come matrice delle adiacenze ridotta di un multidigrafo bipartito con n nodi origine ed n nodi bersaglio.

Il quadrato booleano di una matrice A binaria di profilo $n \times n$, cioè $A^{*2} = A * A$, si può considerare come la matrice che esprime le possibilità di collegamento con passeggiate di lunghezza 2 tra i nodi di un digrafo. Il quadrato aritmetico di una matrice a valori in $\mathbb{N}$ si può considerare come la matrice che esprime i numeri dei collegamenti con passeggiate di lunghezza 2 tra i nodi di un multidigrafo.

D27g.12 Estendendo il discorso, si possono considerare le potenze booleane s-esime con $s \geq 2$ di una matrice quadrata binaria ed interpretarle in termini di possibilità o meno di collegamenti tra i nodi di un digrafo.
Inoltre si possono considerare le le potenze aritmetiche s-esime con $s \geq 2$ di una matrice quadrata a valori in $\mathbb{N}$ed interpretarle in termini di numero di collegamenti tramite passeggiate di lunghezza s tra i nodi di un multidigrafo.

D27 h. chiusure di matrici e raggiungibilità

D27h.01 In questa sezione e talora nel seguito sarà comodo abbreviare il termine "matrice binaria quadrata" con il termine **matrice-BSq**.

Le somme di matrici quadrate si possono applicare in particolare a potenze diverse di una unica matrice delle adiacenze: chiamiamo A tale matrice, diciamo D il digrafo corrispondente e sia n il numero dei suoi nodi (e delle righe e delle colonne della corrispondente matrice.

Per esempio $A^{*2} \dot{+} A^{*3}$ individua la possibilità di collegamento tra i nodi di D mediante passeggiate di lunghezza 2 o di lunghezza 3.

$A + A^2 + A^3$ fornisce invece i numeri dei collegamenti tra i nodi di D ottenuti come passeggiate di lunghezza minore o uguale a 3.

D27h.02 Per esempio per la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

il cui digrafo è raffigurato da:

//input pD27h02

Si trova:

$$A^{*2} \dot{+} A^{*3} \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad\qquad A + A^2 + A^3 \;=\; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

D27h.03 Si dice **chiusura transitiva della matrice** di A la matrice binaria

$$A^{\oplus} \;:=\; A \dot{+} A^{*2} \dot{+} \cdots \dot{+} A^{*n},$$

Per il digrafo precedente abbiamo:

$$A^{\oplus} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \;.$$

Vediamo quali informazioni essa fornisce.

Se $(A^{\oplus})_{i,j} = 1$ evidentemente esiste almeno una passeggiata dal nodo i al nodo j: infatti per almeno un intero s compreso tra 1 e n accade che $(A^{*s})_{i,j} = 1$, cioè esiste una passeggiata di lunghezza s tra i e j.

Se viceversa $(A^{\oplus})_{i,j} = 0$ è garantito che non esiste alcuna passeggiata tra i e j: infatti deve essere $A_{i,j} = (A^{*2})_{i,j} = \cdots = (A^{*n})_{i,j} = 0$, cioè non può esistere alcuna passeggiata di lunghezza inferiore o uguale ad n che va da i a j.
Ma non può esistere neppure una passeggiata di lunghezza superiore ad n da i a j. Infatti se esistesse sarebbe una passeggiata non elementare in quanto almeno uno degli n nodi di D dovrebbe essere toccato almeno due volte e questo implicherebbe l'esistenza di una passeggiata di lunghezza inferiore o uguale ad n, situazione che abbiamo già trovato essere impossibile.

D27h.04 Nella espressione data in precedenza per la chiusura transitiva, la sommatoria booleana spesso si può interrompere con una potenza inferiore ad n: infatti basta considerare la massima distanza tra due nodi del digrafo: tale distanza non può mai superare $n-1$.

Viceversa risulta lecito anche scrivere:

$$A^{\oplus} \;:=\; A \dot{+} A^{*2} \dot{+} \cdots \;,$$

come se si trattasse di somma infinita, in quanto oltre una certa potenza di A non si ha ulteriore contributo al primo membro.

D27h.05 Si dice **chiusura riflessivo-transitiva della matrice** A

$$A^{\otimes} \;:=\; \mathsf{Id}_Q \dot{+} A \dot{+} A^{*2} \dot{+} \cdots \;=\; \mathsf{Id}_Q \dot{+} A^{\oplus} \;.$$

Questa matrice tiene conto anche delle passeggiate di lunghezza zero sul digrafo.

D27h.06 Può avere utili applicazioni anche la **chiusura riflessivo-transitiva simmetrizzata di una matrice** $(A^{\leftarrow})^{\oplus} \cup \mathsf{Id}_Q \cup A^{\oplus}$ ottenibile come $A^{\otimes} \cup (A^{\otimes})^{\mathsf{T}}$.

Il generico elemento $\langle i,j\rangle$ di questa matrice è uguale ad 1 sse esiste un cammino da i a j o un cammino da j a i.

D27h.07 Definiamo **chiusura riflessivo-simmetrico-transitiva di una matrice** A la matrice $(A^{\leftarrow} \cup \mathsf{Id}_Q \cup A)^{\oplus}$.
Essa è detta anche **chiusura di equivalenza della matrice** A; si può definire anche chiedendo che ogni sua entrata $\langle i,j\rangle$ è uguale ad 1 sse sul corrispondente digrafo è possibile raggiungere j da i attraverso un percorso sul digrafo.
In generale questa matrice è diagonalizzabile a blocchi e ciascun blocco individua una componente semplicemente connessa del digrafo corrispondente.

D27h.08 Le matrici precedentemente definite sono utili per dare risposta a varie questioni di raggiungibilità sui digrafi.

Le potenze della matrice delle adiacenze consentono di individuare le passeggiate chiuse del relativo digrafo.
L'entrata $\langle i,i\rangle$ della potenza booleana k-esima A^{*k} è uguale ad 1 sse sul digrafo D si trova una passeggiata chiusa di lunghezza k passante per il nodo i.
L'entrata $\langle i,i\rangle$ della potenza k-esima A^k dà il numero delle passeggiate chiuse di lunghezza k passanti per il nodo i.

In un digrafo esistono passeggiate chiuse sse esistono passeggiate di lunghezza arbitraria (cioè arbitrariamente elevata).

D27h.09 Una matrice quadrata M di profilo $Q \times Q$ si dice **matrice nilpotente** sse si trova un $k \in \mathbb{N}$ tale che $M^k = \mathrm{Mzr}_Q$.
Il minimo intero positivo k per il quale vale la precedente uguaglianza si dice **grado di nilpotenza della matrice**.

Evidentemente tra le matrici di profilo $Q \times Q$ solo la Mzr_Q ha grado di nilpotenza 1.

Tipiche matrici nilpotenti sono le matrici strettamente triangolari superiori e le matrici strettamente triangolari inferiori, ossia le matrici trasposte delle precedenti. Due loro esempi sono

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

/input pD27h09

D27h.10 **(1) Prop.**: Una matrice binaria A è nilpotente con grado di nilpotenza k sse rappresenta un digrafo privo di passeggiate di lunghezza k sse è nulla la sua potenza booleana k-esima.

Dim.: Dato che l'entrata $\langle i, j\rangle$ di A^h esprime il numero di passeggiate di lunghezza h dal nodo i al nodo j, $sihaA^h$ =Mzr sse sul digrafo D che essa rappresenta non esiste alcuna passeggiata di lunghezza h; e quest'ultimo fatto si verifica sse A^{*h} =Mzr ▮

(2) Prop.: Una matrice binaria è nilpotente sse rappresenta un digrafo acircuitale.

Dim.: È la riscrittura sintetica del precedente enunciato ▮

D27h.11 **Prop.** Una matrice a entrate in $\mathbb{N}$ è nilpotente sse rappresenta un multidigrafo acircuitale.

Dim.: Basta osservare che un multidigrafo è acircuitale sse il digrafo che costituisce la sua semplificazione è acircuitale ▮

La proposizione precedente si estende facilmente alle matrici quadrate aventi come entrate interi naturali.

Osserviamo ancora che, in particolare, hanno matrici delle adiacenze nilpotenti i digrafi strettamente ordinati.

D27h.12 Vogliamo ora riprendere la semplificazione generale per i digrafi chiamata quoziente di forte connessione [:B].

Dato un digrafo generico, si possono individuare le sue componenti fortemente connesse e in relazione a queste decomporre la matrice delle adiacenze come somma diretta di matrici con l'aggiunta di valori 1 nelle posizioni triangolari superiori.

In un generico digrafo connesso si possono individuare le componenti fortemente connesse servendosi della $A^{\oplus}$.
Si possono quindi fondere i nodi di ciascuna componente fortemente connessa ed eliminare i cappi ottenendo un digrafo acircuitale (il digrafo quoziente di forte connessione).

Questo a sua volta può essere semplificato eliminando gli archi $\langle i, k\rangle$ quando siano presenti l'arco $\langle i, j\rangle$ e $\langle j, k\rangle$ per qualche nodo j.

Il digrafo essenzialmente ordinato che si ottiene costituisce una forte caratterizzazione del digrafo di partenza.

A ciascuno dei nodi di questo digrafo si possono aggiungere significativamente i numeri dei nodi del digrafo di partenza che gli hanno dato origine fondendosi.

Per esempio il digrafo visto in precedenza si semplifica nel digrafo quoziente con matrice delle adiacenze:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Tutte le matrici delle adiacenze così ottenute sono nilpotenti.

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php