1

Capitolo D24
partizioni piane

Contenuti delle sezioni

D240.01 Le partizioni piane si possono considerare arricchimenti delle partizioni.i, le partizioni degli interi positivi.

Di queste entità, dopo averne data la definizione formale, viene introdotta la rappresentazione mediante le cosiddette forme di Ferrers, raffigurazioni che facilitano molte argomentazioni sopra le partizioni.i e la descrizione degli algoritmi che si rendono necessari per tenerle sotto controllo in modo costruttivo, in quanto sono poche le loro proprietà che si possono esprimere mediante formule tradizionali, cioè formule nelle quali hanno ruoli importanti gli operatori numerici.

Successivamente si tratta la relazione involutoria di coniugio tra partizioni di interi, si individuano varie sottoclassi del loro insieme e le prime relazioni per i rispettivi cardinali.

Si ottiene poi la classica formula di Eulero per il numero delle partizioni di un dato intero positivo.

Da ultimo si introducono le tavole di Young, arricchimenti delle forme di Ferrers che svolgono un ruolo primario nelle costruzioni e nei calcoli enumerativi concernenti i gruppi simmetrici e le numerose configurazioni discrete collegate a essi e in grado di esprimere molteplici proprietà di simmetria.

D24 a. partizioni piane: definizioni e prime nozioni

D24a.01 Sia n un intero positivo; con il termine **partizione piana** dell'intero n o **partizione-pl** di n si intende un tableau P con le righe e le colonne noncrescenti e con la somma delle entrate uguale ad n. Tale intero si dice **somma della partizione piana** P e si denota con $\mathsf{smm}(\mathsf{P})$.

Denotiamo con $\mathbf{PPrt}_n$ l'insieme delle partizioni-pl aventi somma n e, se $\underline{\lambda} \vdash n$, denotiamo con $\mathbf{PPrt}_{\underline{\lambda}}$ l'insieme delle partizioni-pl corrispondenti a tableaux la cui forma di Ferrers è $\underline{\lambda}$.

Ogni partizione piana P è caratterizzata da una forma di Ferrers, termine che denotiamo con $\mathsf{foF}(\mathsf{P})$ e molti attributi della forma di Ferrers F possono essere ereditati dalle partizioni piane costituenti $\left(\mathsf{foF}^{-1}\right)(\mathsf{P})$.
Possiamo quindi parlare di area (=somma), di numero di righe, di numero di colonne, di diagonale e di rango di una partizione piana.

D24a.02 Per riga i-esima della $\mathsf{P} \in \mathbf{PPrt}$ intendiamo la riga i-esima della sua forma di Ferrers munita dei corrispondenti valori e quindi atta a individuare una partizione.i; analogo significato si attribuisce alla j-esima colonna della P.

Inoltre diciamo **coniugata di una partizione piana** P e scriviamo P^* la partizione-pl ottenuta trasponendo la relativa forma di Ferrers; chiamiamo **partizione-pl simmetrica** una partizione-pl che coincide con la sua coniugata.

Considereremo come unica partizione piana dell'intero 0 l'insieme vuoto, da considerare tableau di 0 righe e 0 colonne e unico elemento di $\mathbf{PPrt}_0$.

Le partizioni piane che corrispondono le somme più piccole sono

$$\emptyset \qquad 1 \qquad 2 \quad 11 \quad \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \qquad 3 \quad 21 \quad 111 \quad \begin{matrix}2\\1\end{matrix} \quad \begin{matrix}11\\1\end{matrix} \quad \begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix} \quad .$$

Per i cardinali delle partizioni piane scriviamo $\mathsf{pp}(n) := |\mathbf{PPrt}_n|$ e si constata che

$\mathsf{pp}(0) = 1 \quad \mathsf{pp}(1) = 1 \quad \mathsf{pp}(2) = 3 \quad \mathsf{pp}(3) = 6 \quad \mathsf{pp}(4) = 13$

D24a.03 Questione di rilevante importanza è il cardinale delle partizioni piane. Ad essa risponde il seguente enunciato che si serve di una serie formale e di un prodotto infinito.

Teorema (**teorema di MacMahon**)

$$\mathsf{pp}(0) + \mathsf{pp}(1)\,x + \mathsf{pp}(2)\,x^2 + \mathsf{pp}(3)\,x^3 + \cdots \;=\; \frac{1}{(1-x)\,(1-x)^2\,(1-x)^3\,\cdots}$$