1

Capitolo B60
calcolo proposizionale

Contenuti delle sezioni

16 pagine

B600.01 La “logica” tradizionalmente, a partire dai commentatori di Aristotele, è stata considerata una delle principali parti della filosofia, quella che si occupa dei problemi che riguardano la ragionevolezza, la correttezza, la validità e (per taluni) la verità dei ragionamenti e delle argomentazioni che esprimono le frasi (scritte, pronunciate o comunque formulate) che vengono proposte nelle diverse attività che intendono contribuire a produrre conoscenze.

Più recentemente (in particolare seguendo le idee di Leibniz e Boole, ma anche ricordando i lavori degli stoici) si è dato maggior peso al richiedere alla logica di studiare sistematicamente le forme nelle quali sono presentati i processi di inferenza, cioè lo studio della struttura formale delle argomentazioni che vengono proposte a sostegno di qualche genere di validità della relazione che intercorre tra alcune assunzioni e successive affermazioni che intendono essere le loro conseguenze.

In particolare per **logica formale** si intende lo studio dei processi di inferenza considerati solo per il loro contenuto formale.

Ancor più in particolare si definisce **logica simbolica** lo studio delle astrazioni simboliche che intendono rappresentare gli aspetti formali dell'inferenza.

Si definisce inoltre **logica matematica** l'applicazione della logica simbolica agli sviluppi della matematica e delle sue applicazioni.

B600.02 Questo è il primo capitolo dedicato primariamente alla logica matematica ed introduce come suo settore basilare il calcolo proposizionale, settore detto anche calcolo sentenziale, logica proposizionale, logica enunciativa e logica di ordine 0.

I primi studi di logica proposizionale si devono agli stoici (come `Zenone di Cizio (wi)` e `Crisippo di Soli (wi)`) che hanno sostenuto l'importanza dell'analisi dei costrutti del linguaggio con cui i pensieri vengono espressi.
Questa analisi va sviluppata in autonomia per potere essere proposta come base per lo sviluppo di una logica rigorosa, tale da risultare svincolata dalle influenze che possono provenire dalle passioni e dalle soggettività che possono generare.
In tal modo le conclusioni degli sviluppi conoscitivi possono essere maggiormente indipendenti dalle semplici sensazioni e dalle impressioni che provocano, elementi che possono contribuire alla instabilità delle suddette conclusioni.

B60 a. sentenze

B60a.01 Le frasi che compaiono comunemente nei testi e nei discorsi si possono distinguere tra quelle di carattere dichiarativo-affermativo, le esclamative, le imperative e le interrogative.

Qui ci occuperemo delle più semplici frasi affermative a partire dalla osservazione che esse si configurano come affermazioni che riguardano oggetti che vengono ritenuti sufficientemente ben definiti e delle proprietà, anch'esse giudicate sufficientemente ben definite, che sono loro attribuite.

Questo capitolo si occupa di queste affermazioni senza occuparsi della loro consistenza ontologica, della loro ambientazione, della loro provenienza e della fondatezza dei loro significati, ma assumendo di considerare gli oggetti che sono trattati come **entità individuali**.

Ciascuna entità deve essere individuabile con almeno un preciso nome o con almeno una precisa notazione e deve essere dotata di un significato attribuibile ad un modello riguardante situazioni o processi reali o mentali o consistente in un ruolo attribuito convenzionalmente da essere giocato in uno sviluppo formale.

Sulla validità e sulla adeguatezza dell'accennato modello o della accennata convenzione qui non si intende indagare. Non viene quindi espresso un giudizio sulla validità o sulla adeguatezza o sulla portata delle affermazioni che si prendono in esame.
Quello che interessa è soltanto lo studio delle relazioni che intercorrono o che potrebbero intercorrere tra le affermazioni stesse.

La validità di ciascuna affermazione è solo oggetto di ipotesi: quindi nelle analisi di questo capitolo la validità di ogni affermazione può essere trattata come un componente variabile.

Queste entità si possono considerare casi particolari delle entità generiche che sono caratterizzate solo dall'appartenere o meno a insiemi ai quali si chiede solo di soddisfare proprietà sufficientemente determinate (insiemi-P).
Alle affermazioni che intendiamo esaminare comparativamente chiediamo che riguardino attributi delle entità individuali e relazioni che intercorrono tra di esse che siano espresse in modo tanto accurato da risultino ben determinate quanto le entità stesse.

B60a.02 Qui dunque intendiamo considerare frasi alle quali si possa attribuire in qualche modo soltanto ipotizzato (tendenzialmente ragionevole) il carattere della verità o quello della falsità.

Tra queste affermazioni si collocano, evidentemente, quelle che si ritengono avere lo status di affermazioni scientifiche, cioè condivisibilmente attendibili; per queste useremo preferibilmente i termini **enunciato** e **proposizione**.
Tra queste presteremo particolare attenzione alle proposizioni riguardanti proprietà di componenti degli algoritmi, osservazioni empiriche ed entità matematiche, alle a

Più specificamente e per maggiore generalità o astrazione per le affermazioni qui trattate useremo il termine di sentenze dichiarative o più brevemente il termine **sentenze**.

Consideriamo le seguenti frasi

(1) $\frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{2}{7}$

(2) Archimede visse nel III secolo a. C.

(3) $\log_e 5 + \log_e 7 = \log_e 12$

(4) Cameriere, mi porti il conto!

(5) Speriamo che domani non piova.

(6) Che fai tu luna in ciel?

Le prime due frasi esprimono affermazioni vere, la prima può essere esaminata con considerazioni matematiche, la seconda con documentazioni storiche. Entrambe sono sentenze. Mediante considerazioni matematiche si trova che la (3) è falsa; anch'essa comunque va considerata una sentenza.
Viceversa la (4) esprime una richiesta, la (5) un auspicio e la (6) una interrogazione retorico-poetica: quindi non ha senso affermare la loro verità o falsità e chiaramente non si possono considerare sentenze.

B60a.03 Consideriamo altre semplici affermazioni

(1) Napoli nel 1860 era la città più popolosa d'Italia.

(2) "Le nozze di Figaro" è la più bella opera di Mozart.

(3) Esistono infiniti numeri perfetti.

L'affermazione (1) potrebbe essere ritenuta vera da taluni e falsa da altri: prescindendo da quanto si conosca sull'argomento, è comunque ragionevole ritenere che essa possa essere confermata o smentita consultando opportuni documenti e quindi è lecito considerarla una sentenza, anche prima di aver effettuati questi accertamenti.

La decisione sulla verità della frase (2) appare molto meno facilmente ottenibile in modo ampiamente condivisibile.
La stessa definizione di bellezza di un'opera artistica non sembra essere formulabile in modo da essere ampiamente condivisa; sicuramente qualcuno in un momento di riposo preferirebbe riascoltare qualche brano di *Così fan tutte* e molti ragazzini preferirebbero i pezzi cantati da Papageno. Si deve quindi ritenere poco utile o almeno poco effettivamente condivisibile attribuire alla (2) la qualifica di sentenza.

L'affermazione (3) contiene invece termini sulle cui definizioni c'è un accordo proponibile come unanime; purtroppo per i cultori della matematica però, nonostante i numeri perfetti siano stati oggetto di studio per oltre 2000 anni, il problema della finitezza o meno del loro insieme è tuttora aperto.

Tuttavia anche la frase (3) in qualche contesto può essere considerata una sentenza per vari motivi. Forse tra qualche tempo potrà essere confermata o smentita e nell'incertezza possono essere formulate argomentazioni maggioritariamente condivisibili che si basano sulla sua supposta verità o sulla sua supposta falsità e che da questa incertezza sono condizionate.

Si potrebbero poi formulare deduzioni che a partire dalla sua verità o dalla sua falsità ricavano altre proprietà di qualche interesse, forse anche proprietà che possono avere influenza sul problema della finitezza dell'insieme dei numeri perfetti.

Inoltre la (3) può essere utilizzata come componente della seguente affermazione

Esistono infiniti numeri perfetti, oppure i numeri perfetti costituiscono un insieme finito

la quale non solo va considerata una sentenza, ma si ritiene esprima un fatto incontestabilmente vero.

B60a.04 Le sentenze sono interessanti perché risultano utili in molte circostanze, non solo per l'organizzazione delle conoscenze matematico-algoritmiche, scientifiche e tecnologiche, ma anche in discipline come la storia (e in particolare l'archeologia), la giurisprudenza e in attività come le indagini giudiziarie, le valutazioni dei rischi e le assunzioni di decisioni.

Infatti in molti procedimenti di interesse sia teorico che applicativo che vanno portati avanti con precisione e riproducibilità, talora anche mediante sistemi automatici, vengono effettuate numerose scelte sulla base della verità o falsità di determinate sentenze.

In particolare nei linguaggi di programmazione procedurali un ruolo essenziale viene svolto da costrutti selettivi che possono assumere una forma come la seguente

if(*clausola* **)** *blocco di istruzioni primario* **else** *blocco di istruzioni alternativo*

Qui i termini in corsivo rappresentano possibili porzioni del testo sorgente e in particolare *clausola* esprime una sentenza della quale nel corso dell'esecuzione del programma si presume possibile stabilire la verità o la falsità.
In conseguenza di questa decisione il sistema procederà a eseguire le istruzioni che seguono la parentesi chiusa dopo la *clausola* oppure le istruzioni alternative.

Sempre in ambito informatico, ma non più al livello delle operazioni dettagliate, si trovano moltissime sentenze nei documenti che descrivono il funzionamento dei dispositivi, delle apparecchiature e dei sistemi software.

Queste dovrebbero essere tutte sentenze vere, ma occorre osservare che molti sistemi informatici, a causa della loro complessità, (enorme per i singoli umani) possono effettuare manovre erronee, cioè con esiti diversi di quelli previsti e dichiarati.

Da notare che di queste sentenze si può cercare di sostenere la validità attraverso verifiche sistematiche. Nella pratica queste verifiche per i maggiori prodotti software sono effettivamente effettuate sulle istallazioni del prodotto e possono portare agli aggiornamenti correttivi che in effetti da alcuni anni sono effettuati (insieme a modifiche aggiuntive) tramite Internet a gran parte dei computers sui nostri tavoli.

B60a.05 Consideriamo le due seguenti semplici affermazioni

la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a 180°;

$\pi = 3.14$.

Si tratta di sentenze e ci possiamo chiedere se siano vere o false?

La prima frase va ritenuta vera nell'ambito della geometria euclidea e falsa nell'ambito di una geometria iperbolica o di una geometria ellittica.
La risposta dipende quindi dal contesto, ovvero dalle assunzioni iniziali della presentazione nella quale essa si trova collocata.

La seconda esprime un'approssimazione e va assunta come vera se vuole essere una precisazione che serve a un calcolo pratico al quale non si richiede una elevata precisione. Essa invece va considerata falsa nell'ambito di considerazioni sopra i numeri trascendenti.

Quando, in un determinato contesto e in relazione con una determinata attività conoscitiva si stabilisce se una sentenza è vera o falsa si dice che le si attribuisce un **valore di verità**.

Su un piano puramente formale per valore di verità intendiamo un elemento di un insieme di due simboli come $\{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$, { si, no } o $\{0, 1\}$.

B60a.06 L'attribuzione del valore di verità a una sentenza, anche semplice come le precedenti, in linea di massima dipende da un **modello** che si assume, pragmatisticamente, in relazione alle finalità delle argomentazioni, delle deduzioni o delle elaborazioni che si stanno sviluppando e in relazione ai fini per i quali si intendono utilizzare l'affermazione e sue conseguenze.

Questo modello riguarda i componenti di un "mondo esterno", più o meno reale dal quale provengono i problemi che si vogliono indagare e/o risolvere.

Questo mondo esterno potrebbe riguardare uno scenario tangibile o in qualche modo osservabile, oppure potrebbe consistere in una schematizzazione vuoi dettagliata, vuoi drasticamente semplificata di situazioni o processi che destano interesse, oppure potrebbero anche rispecchiare una situazione puramente ipotetica o un esperimento solo pensato.

Con la modellizzazione agli oggetti del mondo esterno si associano delle entità rappresentative che possano essere trattate (esaminate, rielaborate, trasformate e utilizzate) con strumenti numerici, geometrici, fisico-matematici, strutturali, logici e informatici per i quali si manifesta ampio consenso nel giudicare attendibili, precisi e obiettivi.

Queste entità rappresentative sono di natura formale, in linea di massima costituiscono delle idealizzazioni schematiche e semplificate degli oggetti del mondo modellizzato e fanno parte di un complesso di definizioni e caratterizzazioni dotato di elevata coerenza e versatilità.

Queste semplificazioni più o meno drastiche si rendono necessarie per riuscire ad applicare i meccanismi elaborativi, computazionali e dimostrativi che consentono di procedere con sistematicità a cercare le risposte alle questioni inerenti ai problemi provenienti dal mondo esterno.

La fase della modellizzazione costituisce sempre un momento essenziale della risoluzione dei problemi mediante procedimenti matematico-informatici, anche se spesso non viene dichiarata esplicitamente o viene presentata solo per cenni.

B60a.07 Molti lavori di modellizzazione di mondi esterni può essere difficoltosa e risultare insoddisfacente.

Un modello potrebbe rivelarsi troppo semplicistico e fornire risultati poco utilizzabili per effettuare previsioni ed estrapolazioni sugli oggetti reali modellizzati.

All'opposto si possono individuare modelli molto complessi che non consentono di portare molto avanti le attività deduttive e le elaborazioni necessarie per dare soluzioni affidabili a un buon numero di problemi.
Spesso quindi la definizione di un modello richiede dei compromessi.

Molti problemi impegnativi richiedono diverse successive modellizzazioni che possono avere svolgimenti differenti.
Si possono avere svolgimenti che inizialmente si servono solo di modelli parziali o molto semplificati e successivamente vedono emergere dai primi tentativi modelli più completi e più ricchi di particolarità.
In altri svolgimenti invece si hanno risultati iniziali (con successi e insuccessi) che conducono a individuare una variante più elaborata del mondo esterno al quale si rivolgono, oppure conducono a più varianti del modello che tendono a rivolgersi ad altrettanti scenari del mondo esterno e che si differenziano per adeguarsi a raggruppamenti più ridotti di situazioni reali ma più precisamente formalizzabili.
Questi nuovi modelli tendenzialmente più evoluti richiedono nuovi lavori risolutivi e nuove valutazioni dei risultati con svolgimenti complessivi da esaminare secondo una ottica evolutiva.
In questa ottica si possono avere passi evolutivi particolarmente positivi nei quali diversi modelli parziali riescono a convergere in un unico modello comprensivo che in linea generale deve essere molto più elaborato ddei modelli che unifica e richiedere strumenti formali risolutivi e procedimenti valutativi molto più impegnativi.
Questi peraltro in genere sono resi sostenibili dagli avanzamenti matematico-informatici e delle tecnologie per le osservazioni degli eventi nel mondo esterno modellizzato.

B60a.08 Tutti gli esempi iniziali delle sentenze hanno riguardato frasi semplici riguardanti un solo oggetto individuale.

Una sentenza meno semplice è la seguente

    2431 è divisibile per 11 e per 13

Questa si può riscrivere nella forma equivalente

2431 è divisibile per 11 e 2431 è divisibile per 13

la quale presenta chiaramente due sentenze semplici contenute, ma meno distinguibili, nella sentenza precedente:

2431 è divisibile per 11

2431 è divisibile per 13

Ciascuna di queste può essere vera o falsa e sono facilmente concepibili due indagini che consentono di stabilire i due valori di verità.

Una sentenza va considerata semplice quando non presenta al suo interno sentenze più semplici.
Si osserva poi che la seconda delle sentenze precedenti si ottiene collegando due sentenze semplici con la “e”, segno che per lo studio delle sentenze viene detto connettivo di **congiunzione**.

Similmente la frase (potrebbe trovarsi tra le argomentazioni in una storia poliziesca)

Il ladro è entrato dalla cantina o dalla finestra della cucina.

equivale alla

Il ladro è entrato dalla cantina o il ladro è entrato dalla finestra della cucina.

e chiaramente va considerata come sentenza composita da due semplici collegate dalla “o”, segno che viene detto connettivo di **disgiunzione**.

B60a.09 Altre sentenze, come la

Il programma `newsolution.exe` non ha conclusa la sua esecuzione.

e possono ripresentarsi con una forma come la seguente

Non è accaduto che il programma `newsolution.exe` concludesse la sua esecuzione.

si presentano come negazioni di sentenze più semplici; il segno “non” viene detto **connettivo di negazione**.

Altre sentenze come la

L’interposizione ottica della Luna tra Terra e Sole implica il verificarsi di un’eclisse.

si presentano come due sentenze collegate dal connettivo “implica” chiamato **connettivo di implicazione**.
Altre ancora come

Un numero intero è divisibile per 5 se e solo se presenta come ultima cifra decimale 0 o 5.

si presentano come due sentenze più semplici collegate dal connettivo “se e solo se” che si dice **connettivo di doppia implicazione**.
La seconda delle due sentenze sopra individuate è a sua volta va considerata composta.

In generale si possono avere sentenze composte nelle quali si possono individuare numerosi connettivi.
Si può anche intuire, anche prima di approfondire la questione, sulla semplice base dei significati intuitivi dei connettivi, come il valore di verità di una sentenza composita si possa derivare dai valori di verità delle sue componenti più semplici e dal connettivi che organizzano queste ultime.

B60a.10 Oggetto primario del calcolo proposizionale sono dunque le regole formali che governano le sentenze e le loro composizioni.
Per quanto riguarda le sue finalità, limitiamoci ora a segnalare che esso cercare di stabilire se una sentenza è valida, oppure contraddittoria, oppure se due sentenze sono equivalenti.

Il calcolo proposizionale non si occupa invece della attività di valutazione dei modelli dei mondi esterni che si vogliono schematizzare.

Questa indifferenza verso la effettiva verità o falsità delle sentenze e verso il modello adottato può indurre a pensare che esso possa trovare poco riscontro nelle applicazioni pratiche.

In realtà il suo sviluppo costituisce un primo stadio per gran parte delle attività logiche, cioè delle attività volte a dare una struttura rigorosa e governabile con procedimenti riproducibili alle argomentazioni che vengono proposte nei vari settori conoscitivi e volte a consentire che i diversi corpi di argomentazioni possano raggiungere uno status scientifico che renda legittima la possibilità di dedurre una vasta mole di risultati a partire da complesso tendenzialmente più ristretto di risultati di osservazioni e di ipotesi di modellizzazione.

B60 **b. linguaggio del calcolo proposizionale**

B60b.01 Il calcolo proposizionale è un sistema formale e quindi tratta tutti i propri oggetti mediante simboli o espressioni simboliche costituenti un preciso linguaggio.

Esso innanzi tutto tratta sentenze elementari riservandosi di identificare ciascuna di esse mediante un simbolo peculiare detto **simbolo proposizionale** che può considerarsi una variabile sull'insieme dei **valori di verità** $\mathsf{VV} := \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$.

In questo modo il calcolo proposizionale prescinde dal significato che ogni sentenza può assumere nell'ambito di un possibile modello di un possibile mondo esterno, lasciando aperte le due possibilità per il valore di verità che la sentenza può assumere.

I simboli proposizionali possono essere scelti con libertà: i criteri di maggior rilievo riguardano solo la ricerca della chiarezza espositiva.

Il calcolo proposizionale si serve poi di connettivi e di una coppia di delimitatori; anche questi elementi formali sono individuati da simboli i quali però sono stabiliti univocamente.

Altri oggetti trattati sono le sentenze composite, date da espressioni la cui forma segue regole precise: queste sono stabilite in modo da evitare le ambiguità e le indeterminatezze che spesso si incontrano in un linguaggio naturale, sia nelle espressioni colloquiali, che in opere letterarie.

Queste espressioni costituiscono dunque un linguaggio formale ben definito, il linguaggio del calcolo proposizionale.
È quindi giustificato il fatto che le sentenze oggetto del calcolo proposizionale vengano dette anche sentenze simboliche.

B60b.02 Definiamo il linguaggio delle sentenze simboliche che denotiamo con LCPrp.

L'alfabeto del linguaggio, che denotiamo con ALCPrp, è costituito dai seguenti simboli

I simboli di verità **t** e **f** che rappresentano, risp., i valori vero e falso.

La coppia di parentesi "(" e ")" con funzione di delimitatori di sottoespressioni.

I connettivi proposizionali *not*, *and*, *or*, *eor* (or esclusivo), $if\ then$, $if\ then\ else$, iff (if and only if).

I simboli proposizionali, per le sentenze elementari, P, Q, R, S e le loro varianti munite di deponenti consistenti in interi naturali o lettere

$$P_0,\ Q_0,\ P_1,\ Q_1,\ R_1,\ S_1,\ P_2,\ Q_2,\ R_2, S_2,\ ..., P_n,\ Q_n,\ R_n, S_n,\ ...\ .$$

Si osserva come alfabeto ALCPrp può essere scelto un insieme numerabile; spesso però ci si limita a chiedere che sia un alfabeto finito.

Nella presentazione degli sviluppi di LCPrp useremo anche i simboli $E,\ F,\ G,\ H$ e le loro varianti con deponenti interi naturali e lettere $E_1,\ F_1,\ G_1, H_1,\ E_2,\ F_2,\ G_2, H_2,\ ..., E_n,\ F_n,\ G_n, H_n,\ ...$ al fine di abbreviare delle sentenze.
Questi simboli non fanno parte dell'alfabeto di LCPrp, ma si possono considerare elementi dell'alfabeto di un metalinguaggio da usare per la presentazione di LCPrp sulla cui formalizzazione consideriamo ragionevole non insistere.

B60b.03 Le sentenze costituenti LCPrp sono definite costruttivamente con le cosiddette **regole di produzione** che seguono.

I simboli di verità e i simboli delle sentenze elementari sono sentenze.

Se F è una sentenza, lo è anche la sua **negazione** $(not\ F)$.

Se F e G sono sentenze, lo è anche la loro **congiunzione** $(F\ and\ G)$; di quest'ultima sentenza F e G si dicono i **congiunti**.

Se F e G sono sentenze, lo è anche la loro **disgiunzione** $(F\ or\ G)$; di quest'ultima sentenza F e G si dicono i **disgiunti**.

Se F e G sono sentenze, lo è anche la loro **implicazione** $(if\ F\ then\ G)$; di quest'ultima sentenza F è detto **antecedente** e G **conseguente**.

Se F e G sono sentenze, lo è anche la loro **equivalenza** $(F\ iff\ G)$; di quest'ultima sentenza F è detto **membro sinistro** e G **membro destro**.

Se F, G e H sono sentenze, lo è anche la loro **condizionale** $(if\ F\ then\ G\ else\ H)$; di quest'ultima sentenza F è detto **clausola if**, G **conseguenza then** e H **conseguenza else**.

Va segnalato che tutte le richieste sul linguaggio trovano una adeguata presentazione nel formalismo delle grammatiche acontestuali [C14], più precisamente nell'ambito delle grammatiche acontestuali a operatori.

B60b.04 Vediamo alcuni esempi di sentenze

$(not\ P\ and\ (not\ Q))$
$((P\ and\ Q)\ or\ R)$
$((P\ and\ (not\ Q))or(Q\ and\ (not\ P)))$
$((not\ (P\ or\ Q))\ iff\ ((not\ P)\ and\ (not\ Q)))$.

In generale le sentenze più semplici che compaiono in una regola di produzione $\mathcal{R}$ si chiamano le **sentenze componenti** di $\mathcal{R}$; tutte le sentenze che si individuano all'interno di una sentenza F sono invece dette **sottosentenze** della F; la stessa sentenza F si considera sua sottosentenza e le rimanenti sono dette sottosentenze proprie della F.

Nell'ultimo esempio si individuano 10 sottosentenze, tra le quali 5 sottosentenze proprie non elementari. In una sentenza si possono avere più occorrenze di una sottosentenza; nell'ultimo esempio compaiono 2 occorrenze della sottosentenza P e 2 della Q.

Si osserva anche che il linguaggio LCPrp è numerabile: infatti esso contiene l'insieme numerabile delle stringhe su ALCPrp che presentano un numero n arbitrario di connettivi *not*, una sola sentenza elementare ed n coppie di parentesi; inoltre è contenuto nell'insieme numerabile $\mathsf{ALCPrp}^\star$.

B60b.05 Osserviamo esplicitamente che data una stringa σ sull'alfabeto ALCPrp, si riesce sempre a decidere se si tratta di una sequenza o meno, cioè se appartiene o meno a LCPrp.

Delineiamo un procedimento ricorsivo in grado di effettuare questa decisione.

(1) Algoritmo: Data $\sigma \in \mathsf{ALCPrp}^\star$, stabilire se $\sigma \in \mathsf{LCPrp}$.

L'esecuzione di un riconoscimento opera con una lista variabile L di stringhe da riconoscere come sentenze che inizialmente contiene solo la σ.

Si procede per fasi successive ciascuna delle quali cerca di stabilire se una sottostringa τ della stringa σ prelevata dalla lista L è o meno una sentenza.
La prima fase esamina la stessa σ, le successive esaminano sottostringhe isolate in fasi precedenti e poste nella L in quanto risulta necessario controllare se sono sentenze.
Una fase inizia con la verifica se la sottostringa τ sottoposta si riduce a un solo simbolo: in caso positivo si conclude la fase positivamente; in caso negativo si cerca un connettivo racchiuso solo tra

le due parentesi più esterne: deve essercene uno e uno solo e se questo non accade la τ non è una sentenza.
Se questo connettivo è *not* la τ deve avere la forma $(not\ E)$ e il problema si sposta nello stabilire se E è una sentenza, cioè se $E \in \mathsf{LCPrp}$; questo operativamente si traduce nel porre E in cima alla lista L.
Se il connettivo in gico è binario, scriviamolo *bin*, la sequenza deve avere la forma $(E\ bin\ F)$ e la fase si conclude con la richiesta di stabilire se $E \in \mathsf{LCPrp}$ e se $F \in \mathsf{LCPrp}$, cioè ponendo E ed F in cima alla L.

Nel corso del procedimento nella L possono essere poste varie stringhe, ma queste altre stringhe da esaminare sono sempre più corte delle precedenti e quindi si procede con fasi di verifica di stringhe via via più corte.
Se nessuna fase si conclude negativamente si giunge ad esaminare singoli simboli e quindi la procedura deve giungere a una conclusione ▮

Si dispone quindi di un procedimento che, data una qualsiasi stringa su ALCPrp, sa decidere se appartiene o meno a LCPrp.
Ricordando che un linguaggio numerabile per il quale si sa decidere il problema dell'appartenenza si dice **linguaggio ricorsivo**, risulta lecito affermare che LCPrp è un linguaggio di questo genere.

B60b.06 Le sentenze ottenute con le produzioni utilizzate nella definizione sono nella forma chiamata **forma completamente parentesizzata**. Ogni connettivo compare racchiuso in una coppia di parentesi.

Talune coppie di parentesi possono essere eliminate mantenendo la possibilità di ricostruirle e quindi la possibilità di individuare la produzione con le quali il nido che delimitano è stato ottenuto.
Questa manovra viene detta individuazione della **struttura sintattica** di una sentenza.

Si possono sempre eliminare le parentesi più esterne e le parentesi che delimitano direttamente il connettivo *not* e il suo operando, queste pur di chiedere che la valutazione del *not* sia considerata prioritaria.

Si possono effettuare altri risparmi di parentesi introducendo altre priorità su altri connettivi. Si potrebbe introdurre anche una definizione formale di queste stringhe ridottamente parentesizzate.
Queste definizioni alternative portano a espressioni più leggibili ma le loro manipolazioni risultano più complesse da descrivere.
Talora conviene considerare queste varianti facendo ricorso al semplice buon senso. Secondo questo atteggiamento risulta anche conveniente inserire nelle sentenze parentesi di diverse grandezze e di diversa forma, come le parentesi quadrate e le graffe.
Inoltre nelle sentenze può risultare opportuno far comparire simboli come E ed F_2 introdotti come abbreviazioni di altre sentenze.
Infine talune sequenze sono presentate in modo più chiaro disponendole su più linee con spaziature opportune.

B60b.07 Per i simboli che denotano i connettivi di LCPrp sono stati scelte stringhe che si avvicinano a notazioni usate nei linguaggi di programmazione e che rendono alcune sentenze più leggibili per chi pratica la programmazione.
Inoltre abbiamo preferito servirci di termini in inglese per la formalizzazione in modo da distinguere meglio le sentenze formalizzate dai commenti e dalle osservazioni discorsive sulle sequenze.
Queste, come molte altre osservazioni di carattere matematico, preferiamo presentarle con un tono più intuitivo, bastandoci segnalare che potrebbero essere riformulate in modo più formale servendosi dei risultati concernenti argomenti di logica matematica che compaiono nel presente capitolo e in altri come B61.

Spesso vengono usati altri simboli più sintetici, oppure termini della lingua italiana o anche della latina, che presenta qualche ambiguità in meno della italiana.
Le varie alternative possibili sono presentate nel seguente quadro.

$true$	1	$\mathbf{t}$	$vero$
$false$	0	$\mathbf{f}$	$falso$
not	$\neg$	$\sim$	non
and	$\wedge$	$\&$	e
or	$\vee$	o	vel
eor	$\ominus$		aut
$if\ then$	$\longrightarrow$	$\supset$	$implica$
iff	$\longleftrightarrow$	$\equiv$	$equivale\ a$
$if\ then\ else$	$se\ allora\ altrimenti$		

B60b.08 Eserc. Riscrivere le sentenze precedenti con notazioni alternative per i connettivi.

B60 c. significato e semantica delle sentenze

B60c.01 Dopo aver date le regole formali per la struttura delle sentenze del calcolo proposizionale, occorre determinare il loro significato. In altre parole, dopo aver data la sintassi di LCPrp si tratta di dotarla di una semantica.

Questa viene definita in termini dei possibili valori di verità assunti dalle sentenze in funzione dei valori di verità che possono essere assegnati alle sentenze elementari che le compongono.

B60c.02 Consideriamo una sentenza E e diciamo sequenza delle sue sentenze elementari la lista di queste sue sentenze considerate nell'ordine da sinistra a destra delle rispettive occorrenze.
Questa lista la denotiamo con $\mathsf{seqsentel}(E)$ e la si ottiene con l'algoritmo che segue che per semplicità supponiamo agisca sopra una sentenza E completamente parentesizzata.

Si organizza una iterazione primaria che scorre i caratteri della E da sinistra verso destra al fine di individuare le coppie di parentesi coniugate mediante un cosiddetto deposito a pila di coppie di interi naturali.
Questa lista viene gestita da un contatore che a partire da 0 cresce di 1 quando si incontra una parentesi aperta e diminuisce di 1 quando si incontra una parentesi chiusa.
Di ogni parentesi si registrano le posizioni delle parentesi, distinguendo primi membri di coppie le posizioni delle parentesi aperte e come secondi membri le parentesi chiuse.
In questa lista di coppie di posizioni si individuano le parentesi che delimitano nidi non contenenti altri nidi. Tutte le sentenze elementari contenute nella E sono contenute in uno di questi nidi e per ottenere la $\mathsf{seqsentel}(E)$ basta trasferire queste sentenze evitando le ripetizioni.

Per esempio se $E = ((not\ (P\ or\ Q))\ iff\ ((not\ P)\ and\ (not\ Q)))$, si ottiene

$$\mathsf{seqsentel}(E) = \big\langle \langle P\ or\ Q\rangle, \langle not\ P\rangle, \langle not\ Q\rangle \big\rangle\ .$$

B60c.03 Si dice **interpretazione della sentenza** E ogni assegnazione di valori di verità alle sue sentenze elementari.
Se k è il numero delle sentenze elementari e se scriviamo $\mathsf{seqsentel}(E) = \big\langle P_1, P_2, ..., P_k \big\rangle$, si ottiene una interpretazione per ciascuna delle k-uple di valori di verità, cioè per ogni elemento della potenza cartesiana k-esima $\{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}^{\times k}$.

L'insieme delle interpretazioni viene fornito dall'insieme dei valori che assume la funzione del genere $\big\lceil \big\langle P_1, P_2, ..., P_k \big\rangle \longmapsto \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\} \big\rceil$.

Questo insieme può essere presentato con chiarezza mediante una matrice sui valori in $\{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$ di profilo $(2^k] \times (k+1]$; in essa di solito le righe presentano le k-uple secondo un ordine lessicografico che assume false precedente true (in accordo con l'alternativa $\langle 0, 1\rangle$ alla coppia $\langle \mathsf{false}, \mathsf{true}\rangle$).

Equivalentemente può essere costruita una matrice binaria, con i valori 0 e 1, avente lo stesso profilo $(2^k] \times (k+1]$.

Le nozioni di sequenza di sentenze elementari e di interpretazione si possono estendere alle liste e agli insiemi finiti di sentenze $\{E_1, ..., E_h\}$ Se la sequenza delle sentenze elementari che compaiono in tali sentenze la scriviamo $\langle P_1, P_2, ..., P_m\rangle$, si dice **interpretazione dell'insieme di sentenze** $\{E_1, ..., E_h\}$ ogni funzione del genere $\big\lceil \{P_1, P_2, ..., P_m\} \longmapsto \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\} \big\rceil$.

Si osserva che in molte di queste situazioni una gran parte delle sentenze E_i dipendono da piccole parti dell'insieme di sentenze $\{P_1, P_2, ..., P_m\}$.

B60c.04 Consideriamo un insieme di simboli proposizionali $\mathcal{S} :=: \{P_1, P_2, ..., P_k\}$ e una sua interpretazione I espressa dalla k-upla di valori di verità che denotiamo con $\langle b_1, b_2, ..., b_k \rangle$. Ci proponiamo di definire una funzione vl_I che associa a ogni sentenza le cui sentenze elementari sono espresse dai simboli in $\mathcal{S}$ un valore di verità che diciamo **valore di verità indotto** da I.

Questa funzione si ottiene con due gruppi di assegnazioni. Con il primo si assegnano i seguenti valori semantici alle sentenze più semplici.

$\mathsf{vl}_I(true) := \mathsf{true} \qquad \mathsf{vl}_I(false) := \mathsf{false}$;

$\mathsf{vl}_I(P_i) := b_i \quad$ per $i = 1, 2, ..., k$.

Il secondo gruppo assegna le seguenti **regole semantiche** alle espressioni riguardanti singoli connettivi e loro operandi generici:

$\mathsf{vl}_I(not\ F) := \mathsf{false}$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{true}$ $:=$ true sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{false}$;

$\mathsf{vl}_I(F\ and\ G) := \mathsf{true}$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{vl}(G) = \mathsf{true}$ $:=$ false sse altrimenti ;

$\mathsf{vl}_I(F\ or\ G) := \mathsf{false}$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{vl}_I(G) = \mathsf{false}$ $:=$ true sse altrimenti ;

$\mathsf{vl}_I(F\ eor\ G) := \mathsf{false}$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{vl}_I(G)$ $:=$ true sse altrimenti ;

$\mathsf{vl}_I(if\ F\ then\ G) := \mathsf{false}$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{true}$ e $\mathsf{vl}_I(G) = \mathsf{false}$ $:=$ true sse altrimenti ;

$\mathsf{vl}_I(F\ iff\ G) := \mathsf{true}$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{vl}_I(G)$ $:=$ false sse altrimenti ;

$\mathsf{vl}_I(if\ F\ then\ G\ else\ H) := \mathsf{vl}_I(G)$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{true}$ $:=$ $\mathsf{vl}_I(H)$ sse $\mathsf{vl}_I(F) = \mathsf{false}$.

Applicando reiteratamente le assegnazioni precedenti si può ottenere il valore di verità di ciascuna sentenza di $\mathsf{LCPrp}(\mathcal{S})$.

B60c.05 Le precedenti regole semantiche possono essere presentate in forma concisa nelle cosiddette **tavole di verità**, matrici che rappresentano i valori della funzione vl_I al variare della interpretazione I.

F	$not\ F$
true	false
false	true

F	G	$F\ and\ G$	$F\ or\ G$	$F\ eor\ G$	$if\ F\ then\ G$	$F\ iff\ G$
true	true	true	true	false	true	true
true	false	false	true	true	false	false
false	true	false	true	true	true	false
false	false	false	false	false	true	true

F	G	H	$if\ F\ then\ G\ else\ H$
true	true	true	true
true	true	false	true
true	false	true	false
true	false	false	false
false	true	true	true
false	true	false	false
false	false	true	true
false	false	false	false

B60c.06 Conviene chiarire il fatto che le regole semantiche consentono di determinare il valore di verità indotto da una qualsiasi interpretazione in ogni sentenza.

Consideriamo per esempio la sentenza

$F \ := \ (if\ (P\ and\ (not\ Q)\ then\ ((not\ P)\ or\ R))$

e l'interpretazione

$\left\downarrow \begin{matrix} P & Q & R \\ \mathsf{true} & \mathsf{false} & \mathsf{false} \end{matrix} \right\downarrow .$

La valutazione di F si ottiene con i seguenti passaggi

$\mathsf{vl}(not\ Q) = \mathsf{true} \qquad \mathsf{vl}(P\ and\ (not\ Q)) = \mathsf{true}$

$\mathsf{vl}(not\ P) = \mathsf{false} \qquad \mathsf{vl}((not\ P)\ or\ R) = \mathsf{false}$

$\mathsf{vl}(F) = \mathsf{vl}\,(if\ \mathsf{true}\ then\ \mathsf{false}) = \mathsf{false}.$

B60c.07 Fissiamo l'attenzione sopra una sentenza F e la sequenza delle sue sentenze elementari $\mathsf{seqsentel}(F) = \langle P_1, ..., P_k \rangle$. Chiamiamo inoltre **dominio interpretativo della sentenza** F l'insieme delle k-uple $\boldsymbol{domint}(F) := \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}^k$.
Le funzioni $\mathsf{vl}_I(F)$ al variare della interpretazione I in $\boldsymbol{domint}(F)$ determinano la funzione

$$\mathsf{val}_F \ := \ \lceil I \in \boldsymbol{domint}(F) \mapsto \mathsf{vl}_I(F) \rceil \ \in \ \lceil \boldsymbol{domint}(F) \longmapsto \mathsf{VV} \rceil \ .$$

Questa viene detta **valutazione della sentenza** F.

Le caratteristiche di questa funzione costituiscono proprietà importanti della F; complessivamente l'insieme LCPrp delle sentenze del calcolo proposizionale viene opportunamente classificato attraverso le proprietà delle funzioni valutazione delle sentenze stesse.
Per queste caratterizzazioni spesso si fa riferimento al cosiddetto **dominio di validità di una sentenza** F, l'insieme delle sue interpretazioni che la rendono vera, dominio definito come $\boldsymbol{domvld}(F) \ := \ {\mathsf{val}_F}^{-1}(\mathsf{true})$.

B60c.08 Introduciamo dunque i più importanti sottoinsiemi di LCPrp dopo aver introdotti i termini che seguono.

Una sentenza F si dice **sentenza valida** sse è vera sotto ogni interpretazione, cioè sse $\mathsf{cod}(\mathsf{val}_F) \ = \ \{\mathsf{true}\}$.
Una tale sentenza viene anche detta **tautologia**.

Una sentenza F si dice **sentenza contradditoria** sse è falsa sotto ogni interpretazione, cioè sse $\mathsf{cod}(\mathsf{val}_F) \ = \ \{\mathsf{false}\}$.

Una sentenza F si dice **sentenza soddisfacibile** sse esiste una sua interpretazione sotto la quale è vera, cioè sse $\mathsf{true} \in \mathsf{cod}(\mathsf{val}_F)$. Chiaramente l'insieme delle sentenze soddisfacibili è il complementare in LCPrp dell'insieme delle sentenze contradditorie ed è sovrainsoeme dell'insieme delle tautologie.

Due sentenze F e G si dicono **sentenze logicamente equivalenti** sse sotto ciascuna interpretazione sono entrambe vere o false, cioè sse $\mathsf{val}_F \ = \ \mathsf{val}_G$.
Chiaramente l'equivalenza logica tra sentenze è una relazione di equivalenza: più precisamente essa è l'equivalenza canonicamente associata alla funzione $\lceil F \in \mathsf{LCPrp} \mapsto \mathsf{val}_F \rceil$.

Una sentenza F si dice trattarsi di una **sentenza che implica un'altra sentenza** G quando tutte le interpretazioni che rendono vera la F rendono vera anche la G, cioè sse il dominio di validità della F è contenuto in quello della G, ossia sse $\boldsymbol{domvld}(F) \subseteq \boldsymbol{domvld}(G)$.

Diciamo inoltre che un insieme di sentenze $\{F_1, F_2, ...\}$ è un **insieme di sentenze consistente** sse esiste qualche interpretazione per tali affermazioni che le rende tutte vere, cioè sse l'intersezione dei domini di validità delle diverse val_{F_i} non è vuota.

B60c.09 Eserc. Dimostrare, richiamando le opportune definizioni, i seguenti fatti.

(a) Ogni sentenza elementare è soddisfacibile.

(b) La più semplice tautologia è la $P\ or\ (not\ P)$.

(c) È una tautologia la $if\ P\ then\ Q\ else\ (not\ Q)$.

(d) La più semplice sentenza contraddittoria è la $P\ and\ (not\ P)$.

(e) Sono equivalenti
- le sentenze P e $not\ (not\ P)$,
- le sentenze $P\ and\ Q$ e $Q\ and\ P$,
- le sentenze $P\ and\ (Q\ and\ R)$ e $(P\ and\ Q)\ and\ R$,
- le sentenze $P\ or\ Q$ e $Q\ or\ P$,
- le sentenze $P\ or\ (Q\ or\ R)$ e $(P\ or\ Q)\ or\ R$,
- le sentenze $P\ eor\ Q$ e $Q\ eor\ P$,
- le sentenze $P\ iff\ Q$ e $Q\ iff\ P$.

(f) Due sentenze elementari diverse P e Q non possono essere equivalenti

(g) La sentenza $P\ and\ Q$ implica la P (e la Q) .

(h) La sentenza P implica la $P\ or\ Q$ per ogni Q .

(i) Un semplice insieme di sentenze consistenti è $\{P\ ,\ P\ or\ Q\ ,\ not\ Q\}$.

(j) Un insieme di sentenze inconsistenti è $\{P\ and\ Q\ ,\ R\ and\ (not\ (P\ or\ Q))\}$.

B60c.10 Eserc. Dimostrare, richiamando le opportune definizioni, i seguenti fatti.

(a) Una sentenza F è soddisfacibile sse $notF$ non è valida.

(b) Una sentenza F è contradditoria sse $notF$ è valida.

(c) La sentenza F implica la G sse la sentenza $if\ F\ then\ G$ è valida.

(d) Le sentenze F e G sono equivalenti sse la $F\ iff\ G$ è una sentenza valida.

(e) Le sentenze F e G sono equivalenti sse $if\ F\ then\ G$ e $if\ G\ then\ F$ sono sentenze valide.

(f) L'insieme di sentenze $\{F_1, F_2, ..., F_{n-1}, F_n\}$ è compatibile sse la sequenza ottenuta con la congiunzione di tutte loro $F_1\ and\ (F_2\ and\ (...\ and\ (F_{n-1}\ and\ F_n)...))$ è soddisfacibile.

B60 **d. dimostrazioni della validità delle sentenze**

B60d.01 Molte questioni del calcolo proposizionale si possono ricondurre a problemi volti a decidere se una certa sentenza è valida.

Si dimostra che questa decisione può sempre essere ottenuta, ma la relativa elaborazione potrebbe richiedere molte elaborazioni.

Questi problemi in particolare si incontrano nell'elaborazione dei dati e nella programmazione; in particolare devono essere effettuate decisioni del genere suddetto, anche in numero molto elevato, durante l'esecuzione di programmi interattivi o per il controllo dei processi, programmi ai quali si chiedono rapide risposte.

È quindi opportuno individuare tecniche della dimostrazione della validità di elevata efficienza.

B60d.02 Il modo più diretto per decidere la validità di una sentenza consiste nella costruzione della sua tavola di verità.

Per esempio per la sentenza $F := (not\ (P\ or\ Q)\ iff\ ((not\ P)\ and\ (not\ Q))$ abbiamo

P	Q	$P\ or\ Q$	$not\ (P\ or\ Q)$	$not\ P$	$not\ Q$	$(not\ P)\ and\ (not\ Q)$	F
true	true	true	false	false	false	false	true
true	false	true	false	false	true	false	true
false	true	true	false	true	false	false	true
false	false	false	true	true	true	true	true

Nelle prime due colonne compaiono le possibili combinazioni di valori per le due sentenze elementari presenti nella sentenza da esaminare in modo che le righe successive diano tutte e sole le interpretazioni; i valori nelle successive colonne riguardano le successive sottosequenze della sequenza F da esaminare e sono forniti direttamente dalle regole semantiche; l'ultima colonna fornisce i valori richiesti.

B60d.03 Lo stesso procedimento permette di individuare sentenze contradditorie e sequenze soddisfacibili.

Per decidere se due sentenze sono equivalenti si può procedere a costruire le due corrispondenti tavole di verità e a confrontarle.

Talora risulta più chiaro e più efficiente stabilire la contradditorietà di una sentenza F controllando la validità della sua negazione $not\ F$; inoltre può risultare più chiaro e più efficiente stabilire l'equivalenza di due sentenze F e G provando la validità della $F\ iff\ G$.

Varianti facilmente immaginabili permettono di individuare, attraverso l'esame di più colonne insiemi di sentenze validi, contradditori, consistenti, inconsistenti ed equivalenti.

B60d.04 Per le sentenze contenenti un elevato numero di sentenze elementari e con un elevato numero di connettivi la costruzione della tavola di verità si fa rapidamente onerosa.

È opportuno trovare altri metodi più efficienti. Uno di questi è il cosiddetto metodo degli alberi semantici, un altro è quello della falsificazione (*Manna, Waldinger I* pp. 23-33).