1

Capitolo B45
spazi vettoriali e spazi euclidei

Contenuti delle sezioni

16 pagine

B450.01 In questo capitolo introduciamo le nozioni di spazio vettoriale e di spazio euclideo con un numero finito qualsiasi di dimensioni.

Queste strutture costituiscono le generalizzazioni della retta reale $\mathbb{R}$, del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e dello spazio a tre dimensioni $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ studiati da Euclide e dai geometri greco-ellenistici come ambienti per le costruzioni geometriche e per i modelli con i quali schematizzare vari fenomeni fisici, a partire da quelli esaminati dall'ottica geometrica.

In questi spazi, oltre alle costruzioni di carattere algebrico (essenzialmente quelle collegabili con le combinazioni lineari), si possono introdurre una quantità di nozioni (lunghezza, distanza, ampiezza angolare, area, volume, ...) che si rivelano basilari per una vastissima gamma di attività computazionali e di modelli di oggetti e di processi che osserviamo intorno a noi e che sono al centro degli interessi di una miriade di applicazioni.

Nelle prime tre sezioni sono introdotti gli spazi di sequenze di numeri reali, le loro trasformazioni lineari e il prodotto scalare che fa di essi degli spazi metrici.
L'ultima sezione introduce una generalizzazione, quella degli spazi su un generico campo.

B45 a. spazi vettoriali di sequenze di reali

B45a.01 In questo paragrafo riprendiamo le nozioni basate sui numeri razionali esposte in B30 e nelle prime tre sezioni di B32 per adattarle agli spazi vettoriali sui numeri reali, ambienti nei quali si possono svolgere più comodamente le argomentazioni generali che possono prescindere dalle questioni della eseguibilità effettiva.

Denotiamo con d un numero intero positivo e rivolgiamo l'attenzione sulla potenza cartesiana $\mathbb{R}^{\times d}$, cioè sull'insieme delle d-uple di numeri reali $\langle x_1, x_2, \ldots, x_d \rangle$.

Questo spazio vettoriale consente di generalizzare le considerazioni sopra la retta reale $\mathbb{R}$, corrispondente a $d=1$, sopra il piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, relativo a $d=2$, e sopra il cosiddetto "spazio tridimensionale ordinario" $\mathbb{R}^{\times 3}$,riguardante $d=3$.

Spesso si può sottintendere il valore di d senza generare confusioni parlando in modo semplificato di spazi sui reali.

Se si munisce $\mathbb{R}^{\times d}$ delle operazioni di somma componente per componente e di moltiplicazione per un numero reale al quale sarà attribuito il ruolo di scalare, si ottiene la struttura algebrica di spazio vettoriale sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}_{Fld}$ [B42b01].

Gli elementi di $\mathbb{R}^{\times d}$ sono detti punti o **vettori d-dimensionali**; essi spesso si denotano con lettere in grassetto come $\mathbf{x}$ o $\mathbf{b}_j$, oppure con notazioni come $\overrightarrow{E}$ o $|3\rangle$.
In particolare denotiamo con $\mathbf{0}_d$ il vettore avente tutte le d componenti nulle; questo è l'elemento neutro per l'operazione di somma di vettori. Spesso questa notazione si può sostituire con la più semplice scrittura $\mathbf{0}$.

In seguito saranno usate spesso le notazioni **Vsp** per denotare la classe degli spazi vettoriali, $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{F}}$ per denotare la classe degli spazi vettoriali su uno specifico campo $\mathbb{F}$ e $\mathbf{Vsp}_{d,\mathbb{F}}$ per lo spazio vettoriale a d dimensioni sul campo $\mathbb{F}$.

B45a.02 Un insieme di vettori di $\mathbb{R}^{\times d}$ si dice costituire un **insieme di vettori linearmente indipendenti** sse non si può esprimere nessuno di essi come combinazione lineare dei rimanenti.
In caso contrario si parla di **insieme di vettori linearmente dipendenti**.

Esempi di insiemi di vettori linearmente dipendenti sono $\{\mathbf{u}, c\mathbf{u}\}$, quali che siano $c \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\times d}$ e $\left\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{k-1}, \sum_{h=1}^{k-1} d_h\, \mathbf{u}_h\right\}$, quali che siano $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{k-1} \in \mathbb{R}^{\times d}$ e $d_1, ..., d_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Si dimostra [G40a] che un insieme finito di vettori $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ costituisce un insieme di vettori linearmente indipendenti sse ogni uguaglianza della forma $\sum_{h=1}^{k} c_k\, \mathbf{u}_k = \mathbf{0}_d$ implica $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$.

B45a.03 Si dice **base per lo spazio sui reali** $\mathbb{R}^{\times d}$ ogni insieme di vettori linearmente indipendenti di tale spazio tale che ogni altro vettore si possa esprimere come loro combinazione lineare.

Consideriamo i d vettori $\mathbf{e}_1 := \langle 1, 0, ..., 0\rangle$, $\mathbf{e}_2 := \langle 0, 1, ..., 0\rangle$, ... $\mathbf{e}_d := \langle 0, 0, ..., 1\rangle$. Essi costituiscono un insieme di vettori linearmente indipendenti, in quanto l'uguaglianza

$$\sum_{h=1}^{d} c_k\, \mathbf{u}_h \ = \langle c_1, c_2, ..., c_d \rangle \ = \ \mathbf{0}_d$$

implica evidentemente $c_1 = c_2 = \cdots = c_d = 0$.

Ogni vettore d-dimensionale $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_d \rangle$ si può esprimere come combinazione lineare di questi vettori:

$$\mathsf{x} \;=\; \sum_{i=1}^{d} x_i\, \mathsf{e}_i \;.$$

Quindi l'insieme $\mathfrak{B}_{can} \;:=\; \{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_k\}$ costituisce una base di $\mathbb{R}^{\times d}$; tale base è detta **base canonica** di $\mathbb{R}^{\times d}$.

In genere sono più utili le **basi ordinate**, cioè sequenze di vettori mutuamente distinti tali che l'insieme dei suoi d componenti costituisca una base per lo spazio.

In effetti per poter disporre di notazioni concretamente utili, cioè in grado di portare ad algoritmi implementabili e a elaborazioni effettivamente eseguibili si rende necessario fare riferimento a un ordinamento per i vettori di una base (come in generale accade per ogni insieme finito di oggetti che si vogliono elaborare effettivamente).

Fissata una base ordinata, ogni suo vettore si può individuare con l'intero che fornisce la sua posizione nella sequenza.

In particolare fissata una base ordinata, in particolare la base ordinata canonica $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d \rangle$, per taluni sviluppi formali si trova comodo denotare i suoi componenti con i simboli $\big|1\big\rangle,\ \big|2\big\rangle,\ ...,\ \big|d\big\rangle$.

Ciascuno di questi simboli è detto **ket** e fa parte delle cosiddette **notazioni di Dirac per gli spazi vettoriali**, notazioni già introdotte in B32a09 e utilizzate ampiamente per trattare gli spazi di Hilbert [T34] e questioni di meccanica quantistica [P70].

B45a.04 Volendo essere formalmente accurati si devono distinguere l'insieme $\mathbb{R}^{\times d}$ dalla struttura della specie spazio vettoriale che denotiamo con ${\mathbb{R}^{\times d}}_{\mathsf{Fld},Vsp}$ ottenuta munendo il detto insieme con le operazioni di combinazione lineare con coefficienti nel campo $\mathbb{R}_{Fld}$ e con l'elemento $\mathbf{0}_d$.
A tele livello espositivo $\mathbb{R}^{\times d}$ viene detto terreno dello spazio vettoriale ${\mathbb{R}^{\times d}}_{\mathsf{Fld},Vsp}$.

Si dice **terreno di sottospazio** di $\mathbb{R}^{\times d}$ ogni suo sottoinsieme S tale che ogni combinazione lineare di suoi vettori appartenga allo stesso S. Munendo tale terreno delle operazioni di somma e combinazione lineare sul campo $\mathbb{R}_{Fld}$ si ottiene uno spazio vettoriale che viene detto sottospazio vettoriale di ${\mathbb{R}^{\times d}}_{\mathsf{Fld},Vsp}$.
Tuttavia in genere è possibile semplificare il linguaggio senza incorrere in ambiguità usando intercambiabilmente i termini "spazio" e "terreno dello spazio" e i termini "sottospazio" e "terreno del sottospazio".

Due casi molto particolari di sottospazi di $\mathbb{R}^{\times d}$ sono $\{\mathbf{0}_d\}$, chiamato **sottospazio nullo**, e lo stesso $\mathbb{R}^{\times d}$, chiamato **sottospazio improprio** di $\mathbb{R}^{\times d}$.

Per denotare che S è sottospazio di $\mathbb{R}^{\times d}$ scriviamo $S \leq_{Vsp} \mathbb{R}^{\times d}$, mentre per denotare che T è sottospazio proprio di $\mathbb{R}^{\times d}$ scriviamo $T <_{Vsp} \mathbb{R}^{\times d}$.

Si possono considerare anche sottospazi T di ogni sottospazio S di $\mathbb{R}^{\times d}$ e si trova facilmente che ogni tale T è sottospazio anche dell'intero $\mathbb{R}^{\times d}$: in formula $T \leq_{Vsp} S \leq_{Vsp} \mathbb{R}^{\times d} \implies T \leq_{Vsp} \mathbb{R}^{\times d}$.
Di conseguenza la relazione $\leq_{Vsp}$ è una relazione d'ordine per l'insieme dei sottospazi di $\mathbb{R}^{\times d}$.

B45a.05 Per $d \geq 2$ talora è utile considerare i sottospazi particolari costituiti da d-uple le quali hanno alcune componenti uguali a 0 e le componenti rimanenti arbitrariamente variabili in $\mathbb{R}$.
Per questi sottospazi, introdotti già in B32b02, usiamo il termine **sottospazi con coordinate azzerate** e la corrispondente abbreviazione **sscz**.

Tra di essi si trovano il sottospazio nullo e l'intero $\mathbb{R}^{\times d}$.

Ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ appartengono altri due sscz: l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate, denotati in genere con Ox e Oy.

In $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono sscz, oltre a $\{\mathbf{0}_3\}$ e $\mathbb{R}^{\times 3}$:
$\mathsf{Sscz}_{100} := \{x \in \mathbb{R} :| \langle x, 0, 0\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $\ulcorner y = z = 0 \urcorner$, chiamato **asse della prima coordinata**, in genere denotato con Ox;
$\mathsf{Sscz}_{010} := \{y \in \mathbb{R} :| \langle 0, y, 0\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $\ulcorner x = z = 0 \urcorner$, chiamato **asse della seconda coordinata**, in genere Oy; 5
$\mathsf{Sscz}_{001} := \{z \in \mathbb{R} :| \langle 0, 0, z\rangle\}$, insieme individuato dal sistema di equazioni $\ulcorner x = y = 0 \urcorner$, chiamato **asse della terza coordinata** e in genere denotato con Oz.
$\mathsf{Sscz}_{011} := \{y, z \in \mathbb{R} :| \langle 0, y, z\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $x = 0$, in genere chiamato piano $\ulcorner x = 0 \urcorner$ e denotato con Oyz;
$\mathsf{Sscz}_{101} := \{x, z \in \mathbb{R} :| \langle x, 0, z\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $y = 0$, in genere chiamato piano $\ulcorner y = 0 \urcorner$ e denotato con Oxz;
$\mathsf{Sscz}_{110} := \{x, y \in \mathbb{R} :| \langle x, y, 0\rangle\}$, insieme individuato dall'equazione $z = 0$, in genere chiamato piano $\ulcorner z = 0 \urcorner$ e denotato con Oxy.

B45a.06 Le precedenti notazioni si possono generalizzare per gli sscz di dimensioni superiori a 3 in notazioni che presentano d-uple di cifre binarie del genere $\mathsf{Sscz}_{b_1\, b_2\, \dots\, b_d}$; una di queste scritture individua lo sscz dei vettori la cui i-esima coordinata vale 0 sse per il corrispondente si ha $b_i = 0$ e può assumere qualsiasi valore reale diverso da 0 sse $b_i = 1$.

Per esempio in $\mathbb{R}^{\times 4}$ si trovano i sscz

$$\mathsf{Sscz}_{1101} := \{x, y, w \in \mathbb{R} :| \langle x, y, 0, w\rangle\} \quad \text{e} \quad \mathsf{Sscz}_{1011} := \{x, z, w \in \mathbb{R} :| \langle x, 0, z, w\rangle\} \ .$$

Un evidente esempio di sottospazio nullo è $\mathsf{Sscz}_{0\,0\,0\,0\,0} = \{\langle 0, 0, 0, 0\rangle\}$, mentre $\mathsf{Sscz}_{1\,1\,1\,1\,1\,1} = \mathbb{R}^{\times 5}$.

Il numero dei sscz dello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ è evidentemente uguale al numero delle sequenze di bits di lunghezza d, ossia 2^d .

B45a.07 Come si è detto, in genere per le variabili riguardanti le due coordinate di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si usano le lettere x e y, mentre per le variabili concernenti le coordinate di $\mathbb{R}^{\times 3}$ si usano le lettere x, y e z. Per le variabili riguardanti le dimensioni di $\mathbb{R}^4$ si usano talora le lettere x, y, z e w, talora le lettere x, y, z e t.

Nell'ambito di $\mathbb{R}^{\times d}$ con d generico di solito si conviene che per $i = 1, 2, ..., d$ il simbolo x_i denoti la i-esima delle coordinate.

Lo sscz che riguarda l'annullamento della sola coordinata i-esima si può individuare con la scrittura generale $\mathsf{Soln}(x_1 = 0)$, spesso semplificabile con la semplice scrittura $\ulcorner x_i = 0 \urcorner$.

Un sscz che corrisponde all'annullamento di più coordinate si individua con un semplice sistema di equazioni: per esempio Sscz_{1001} con il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \mathsf{Soln}\,[\, y = 0 \wedge z = 0 \,] \quad \text{oppure} \quad \ulcorner y = 0 \wedge z = 0 \urcorner \ .$$

Se si intersecano due sottospazi sscz si ottiene un altro sottospazio dello stesso tipo: per esempio

$$\mathsf{Sscz}_{1101} \cap \mathsf{Sscz}_{1010} = \{x, w \in \mathbb{R} :| \langle x, 0, 0, w\rangle\} = \mathsf{Sscz}_{1001} \ .$$

Si osserva che lo sscz intersezione di due sscz si individua con il sistema di equazioni di annullamento di coordinate costituito dall'unione delle equazioni che individuano i due sottospazi che vengono intersecati.

Si osserva anche che la corrispondente sequenza binaria è ottenuta come congiunzione, cioè come $\vee$, delle sequenze binarie dei sottospazi sscz intersecati.

Per esempio per l'intersezione dei due sscz

$$\mathsf{Sscz}_{10010} \quad : \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\mathsf{Sscz}_{01010} \quad : \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

si ha

$$\mathsf{Sscz}_{00010} \quad : \quad \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

B45a.08 In generale anche l'intersezione di due sottospazi qualsiasi S_1 e S_2 di uno spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ è un sottospazio.
Infatti scelti come si vuole l'intero positivo k, i vettori $\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_k$ in $S_1 \cap S_2$, e altrettanti numeri reali c_1, ..., c_k, la combinazione lineare $\displaystyle\sum_{h=1}^{k} c_h\, \mathbf{v}_h$ deve appartenere ad entrambi i sottospazi e quindi anche alla loro intersezione.

Se si confrontano due sottospazi S_1 ed S_2 di $\mathbb{R}^{\times d}$ propri e nonnulli possono verificarsi le seguenti situazioni:

(1) $S_1 = S_2$;

(2) $S_1 \subset S_2$, relazione equivalente alla $S_1 \cap S_2 = S_1$;

(3) $S_2 \subset S_1$, relazione equivalente alla $S_1 \cap S_2 = S_2$;

(4) $S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{0}_d\}$;

(5) $\{\mathbf{0}_d\} \subset S_1 \cap S_2 \subset S_1, S_2$.

Nei primi tre casi S_1 e S_2 si parla di due **sottospazi comparabili**; nei due casi restanti si hanno due cosiddetti **sottospazi noncomparabili** e in tal caso esistono vettori di S_1 che non appartengono ad S_2 e vettori di S_2 che non appartengono ad S_1.

Semplici esempi delle precedenti situazioni si ottengono ci seguenti sscz:

$\mathsf{Sscz}_{1010} \subset \mathsf{Sscz}_{1011}$, $\mathsf{Sscz}_{10101} \supset \mathsf{Sscz}_{00100}$

$\{\mathbf{0}_6\} \subset \mathsf{Sscz}_{011010} = \mathsf{Sscz}_{011110} \cap \mathsf{Sscz}_{111011} \subset \mathsf{Sscz}_{011110}$, Sscz_{111011} .

B45a.09 Dato un $E \subset \mathbb{R}^{\times d}$ si dice **chiusura lineare** di E l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di E ottenute con coefficienti reali; denotiamo tale insieme con $\boldsymbol{span}(E)$.

Evidentemente la chiusura lineare di un qualsiasi insieme di vettori di $\mathbb{R}^{\times d}$ è un sottospazio di tale spazio ambiente.
Infatti la combinazione lineare di due vettori che sono combinazioni lineari di vettori di un dato insieme E si può riscrivere senza difficoltà come combinazione lineare di vettori di E.

Un insieme di vettori che sia chiusura lineare e che possa assumere la forma $\boldsymbol{span}(E)$ viene anche chiamato **sottospazio sotteso** dall'insieme di vettori E.

La $\boldsymbol{span}$ è una funzione che ha come dominio $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^{\times d})$, la collezione di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\times d}$, e come codominio l'insieme di tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^{\times d}$ che denotiamo con $\boldsymbol{Sbvsp}(\mathbb{R}^{\times d})$.

Questa funzione di insiemi è evidentemente un ampliamento, cioè per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^{\times d}$ si ha $E \subseteq \boldsymbol{span}(E)$. Inoltre essa è idempotente, ovvero $\boldsymbol{span}(\boldsymbol{span}(E)) = \boldsymbol{span}(E)$.

È rilevante osservare che la chiusura lineare di un insieme di vettori E si può anche definire come il più ridotto dei sottospazi di $\mathbb{R}^{\times d}$ che contiene tutti gli elementi di E e anche come intersezione di tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^{\times d}$ che contengono tutti gli elementi di E.

B45a.10 Consideriamo due sottospazi S_1 ed S_2 e la loro unione $U := S_1 \cup S_2$. Ovviamente se essi sono confrontabili la loro unione coincide con il più esteso tra S_1 ed S_2, mentre se non sono confrontabili U non è un sottospazio.

Un controesempio evidente si osserva in due dimensioni: due sottospazi noncomparabili sono due rette per l'origine ed esse hanno in comune solo l'origine, mentre la somma di due vettori nonnulli, il primo appartenente (solo) alla prima retta, il secondo (solo) alla seconda, non può appartenere a nessuna delle due rette.

Altri semplici controesempi sono forniti da opportuni sscz, ad esempio da Sscz_{1100} e Sscz_{0110}: $\mathbf{e}_1 \in \mathsf{Sscz}_{1100}$, $\mathbf{e}_3 \in \mathsf{Sscz}_{0110}$ mentre $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \notin \mathsf{Sscz}_{1100} \cup \mathsf{Sscz}_{0110}$.

In generale si possono considerare i due vettori $\mathbf{v}_1 \in S_1 \setminus S_2$ e $\mathbf{v}_2 \in S_2 \setminus S_1$; la loro somma $\mathbf{s} := \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ non può appartenere ad S_1, perché in tal caso si avrebbe $\mathbf{v}_2 = \mathbf{s} - v_1 \in S_1$ contro l'ipotesi; simmetricamente $\mathbf{s}$ non può appartenere ad S_2 e dunque non fa parte di $S_1 \cup S_2$.

B45a.11 È invece sottospazio la chiusura lineare dell'unione di due sottospazi, cioè $\boldsymbol{span}(S_1 \cup S_2)$. Per esempio, riprendendo i due sottospazi precedenti, accade che $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 \in \boldsymbol{span}(\mathsf{Sscz}_{1100} \cup \mathsf{Sscz}_{0110}) = \mathsf{Sscz}_{1110}$.

Il sottospazio $\boldsymbol{span}(S_1 \cup S_2)$ si dice anche **somma dei sottospazi** S_1 ed S_2 in quanto esso si può esprimere come

$$\left\{ \mathbf{v}_1 \in S_1, \mathbf{v}_2 \in S_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^{\times d} \;\; :| \;\; c_1\,\mathbf{v}_1 + c_2\,\mathbf{v}_2 \right\} .$$

Questo sottospazio viene denotato anche con $S_1 \boxplus S_2$, notazione che si serve dell'operatore binario $\boxplus$. Questo operatore si può definire chiedendo $\boxplus \; := \; ((+)^{ce})^{be}$.

Talora è utile considerare la somma di tre e più spazi. A questo proposito conviene osservare che l'operazione $\boxplus$ è del genere $\lceil \boldsymbol{Sbvsp} \times \boldsymbol{Sbvsp} \longmapsto \boldsymbol{Sbvsp} \rceil$, è commutativa e associativa:

$$\forall S_1, S_2, S_3 \in \boldsymbol{Sbvsp} \;\; \vdots \;\; S_1 \boxplus S_2 = S_2 \boxplus S_1 \; , \; (S_1 \boxplus S_2) \boxplus S_3 = S_1 \boxplus (S_2 \boxplus S_3) \; .$$

Di conseguenza, come per le altre operazioni binarie associative, è giustificata a spesso conveniente la eliminazione delle parentesi:

$$S_1 \boxplus S_2 \boxplus S_3 := (S_1 \boxplus S_2) \boxplus S_3 = S_1 \boxplus (S_2 \boxplus S_3) \; .$$

Gli sscz forniscono semplici esempi anche per la somma di sottospazi:

$$\mathsf{Sscz}_{0101} \boxplus \mathsf{Sscz}_{0110} = \mathsf{Sscz}_{0111} \quad , \quad \mathsf{Sscz}_{010100} \boxplus \mathsf{Sscz}_{010011} \boxplus \mathsf{Sscz}_{101011} = \mathbb{R}^{\times 6} \; .$$

B45 b. trasformazioni lineari e cambiamenti di base

B45b.01 Consideriamo due interi positivi d ed e e i due spazi vettoriali di sequenze di numeri reali $\boldsymbol{V} = \mathbb{R}^{\times d}$ e $\boldsymbol{W} = \mathbb{R}^{\times e}$.

Si dice **trasformazione lineare** di $\mathbb{R}^{\times d}$ in $\mathbb{R}^{\times e}$ ogni funzione del genere $L \in \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \rceil$ tale che,

$$\forall\, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathsf{dom}(L)\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\ \ \vdots\ \ L(a\,\mathsf{v} + b\,\mathsf{w}) = a\,L(\mathsf{v}) + b\,L(\mathsf{w})\ .$$

Una tale entità viene chiamata anche **operatore lineare**, **omomorfismo di spazi vettoriali** e **omomorfismo lineare** di $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$. L'insieme di queste funzioni si denota con $\lceil \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$.

Quando, raramente, si rende necessario segnalare che la linearità di una trasformazione riguarda il campo dei numeri reali si parla d "trasformazione lineare-$\mathbb{R}$".

Le trasformazioni lineari sono entità matematiche estesamente studiate ed utilizzate e presentano una grande varietà di tipi.
Vediamo una loro prima classificazione basata solo sul loro dominio e sul loro codominio.

Preliminarmente osserviamo che la definizione della generica trasformazione lineare L implica che essa possa applicarsi a ogni combinazione lineare di vettori sui quali si può definire e quindi stmabiliamo che $\mathsf{dom}(L)$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^{\times d}$.

Inoltre ogni combinazione lineare di due vettori in $\mathbb{R}^{\times e}$ ottenuti come $L(\mathsf{v})$ e $L(\mathsf{w})$, cioè ogni $a\,L(\mathsf{v}) + b\,L(\mathsf{w})$ si può esprimere come $L(a\,\mathsf{v} + b\,\mathsf{w})$ e quindi $\mathsf{cod}(L)$ deve essere un sottospazio di $\mathbb{R}^{\times e}$.

B45b.02 Denotiamo con $\lceil \boldsymbol{V} \longmapsto_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$ l'insieme degli omomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{V}$. Questo insieme di trasformazioni si denota anche con $\mathbf{Lintr}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

Denotiamo con $\lceil \boldsymbol{V} \!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$ l'insieme degli omomorfismi L da $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{cod}(L) = \boldsymbol{W}$; essi sono detti anche **epimorfismi lineari**.

Denotiamo con $\lceil \boldsymbol{V} \!\longmapsto\!\!\triangleright_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$ l'insieme degli omomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ sull'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali chedom$(L) = \boldsymbol{V}$ e $\mathsf{cod}(L) = \boldsymbol{W}$.

Denotiamo con $\lceil \boldsymbol{V} \longleftrightarrow_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$ l'insieme degli omomorfismi L da $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$ invertibili, cioè tali che esista $L^{-\mathbf{1}}$; essi sono detti anche **monomorfismi lineari**.

Denotiamo con $\lceil \boldsymbol{V} \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{Lin} \boldsymbol{W} \rceil$ l'insieme dei monomorfismi L dall'intero $\boldsymbol{V}$ nell'intero $\boldsymbol{W}$, cioè tali che $\mathsf{dom}(L) = \boldsymbol{V}$, che $\mathsf{cod}(L) = \boldsymbol{W}$ e che esista $L^{-\mathbf{1}}$; essi sono detti anche **isomorfismi lineari**.

Quando $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}$ si parla di **endomorfismi lineari** entro $\boldsymbol{V}$ e anche di **operatori lineari** su $\boldsymbol{V}$.

Gli endomorfismi che sono isomorfismi, e quindi permutazioni dello spazio loro dominio, si dicono **automorfismi lineari** di $\boldsymbol{V}$, oppure **operatori lineari invertibili** su $\boldsymbol{V}$.

B45b.03 Per ogni $r \in \mathbb{R}_{nz}$ la funzione $\lceil \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \mid\!\!\rightarrow r \cdot \mathsf{v} \rceil$ si dice **omotetia centrale** di fattore r dei vettori di $\boldsymbol{V}$ oppure moltiplicazione di vettore per scalare.

Chiaramente si tratta di trasformazioni lineari invertibili e la trasformazione inversa della omotetia centrale di fattore r è l'omotetia centrale di fattore r^{-1}.

La moltiplicazione per 1 è l'identità o trasformazione identica di $\boldsymbol{V}$, $\mathsf{Id}_{\boldsymbol{V}}$; l'omotetia di fattore r si può quindi denotare con $r \cdot \mathsf{Id}_{\boldsymbol{V}}$.

L'insieme delle omotetie di $\boldsymbol{V}$ si denota con $\boldsymbol{Hmtt}_{\boldsymbol{V}}$.

Se $r > 1$ si parla di **dilatazione lineare**, mentre se $0 < r < 1$ si parla di **contrazione lineare**; infine se $r = -1$ si parla di **simmetria centrale** di $\boldsymbol{V}$ con centro nell'origine.

Altre trasformazioni lineari molto semplici si individuano a partire dai vettori di una base, in particolare dai vettori della base canonica $\mathfrak{B}_{can} := \langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d \rangle$.

B45b.04 Prima di procedere conviene però riprendere le notazioni che utilizzano la funzione delta di Kronecker e i cosiddetti "bra" e "ket" di Dirac [T34].

Nel seguito ci serviamo delle variabili intere positive $i, j \in (\mathrm{d}\,]$ e della funzione del genere $\lceil \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longmapsto \{0,1\} \rceil$ chiamata delta di Kronecker

$$\delta_{i,j} \;:=:= \mathsf{Bval}(i = j) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{sse } i \neq j \\ 1 & \text{sse } i = j \end{cases} .$$

Per le notazioni di Dirac chiediamo che ogni vettore e_i della base canonica possa essere denotato anche con il ket $|i\rangle$ per $i = 1, 2, ..., d$ e che il vettore ottenuto applicandogli la trasformazione lineare L sia denotato anche con la scrittura $L_{|}|i\rangle$, espressione che in genere si semplifica con la $L\,|i\rangle$.

Si osserva che la componente j-esima del vettore e_i è $\delta_{i,j}$: quindi si può scrivere

$$\mathsf{e}_i \;=\; |i\rangle \;=\langle j \in (\mathrm{d}\,] :|\; \delta_{i,j} \rangle \;=:\; \delta_{(\mathrm{d}\,],i} .$$

Si osserva anche che la matrice identità $d \times d$ si può considerare ottenuta dalla sovrapposizione dei d vettori riga corrispondenti ai successivi vettori della base canonica e, per dualità-rc , come l'affiancamento dei corrispondenti vettori colonna; quindi tale matrice si può scrivere $[i, j \in (\mathrm{d}\,] :|\; \delta_{i,j}]$.

B45b.05 Per ogni $i = 1, 2, ..., d$ denotiamo con $\mathbb{R}\,\mathsf{e}_i$ oppure con Ox_i il sottospazio monodimensionale dei vettori aventi tutte le componenti nulle a eccezione della $i - esima$ che può assumere ogni valore reale.

Definiamo **proiezione** o **proiettore** nel sottospazio $\mathbb{R}\,\mathsf{e}_i$ la trasformazione

$$\boldsymbol{Prj}_{\mathsf{e}_i} \;:=\; \left\lceil \sum_{j=1}^{d} c_j\, \mathsf{e}_j \mapsto c_i\, \mathsf{e}_i \right\rceil .$$

Se si presuppone di fare riferimento alla sola base canonica ordinata, il precedente proiettore si può denotare semplicemente con $\boldsymbol{Prj}_i$.

Si osserva che tutti i proiettori sono operatori lineari idempotenti e che la composizione dei proiettori relativi a due diversi vettori di una base è la trasformazione di ogni vettore nel vettore nullo

$$\lceil \mathsf{v} \in \boldsymbol{V} \mapsto \mathsf{0}_d \rceil .$$

B45b.06 Più in generale fissiamo una base $\mathfrak{B} = \langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, ..., \mathsf{u}_d \rangle$, un suo elemento u_h e consideriamo il generico vettore $\mathsf{x} = \sum_{j=1}^{d} x_j\, \mathsf{u}_j$; definiamo come **proiezione** di x sulla direzione u_h il vettore $x_h \mathsf{u}_h$.

Possiamo generalizzare anche questo tipo di costruzione considerando un sottoinsieme $\mathcal{I}$ di $(\mathrm{d}\,]$, $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ con $k \leq d$ e il sottospazio $\boldsymbol{span}(\mathcal{I})$ sotteso dai suoi vettori; si definisce quindi proiezione di x su questo sottospazio $\boldsymbol{span}(\mathcal{I})$, il vettore $\sum_{h=1}^{k} x_{j_h}\, \mathsf{u}_{j_h}$.

I proiettori sui vari sottospazi della forma $\boldsymbol{span}(\mathcal{I})$ costituiscono altri esempi di endomorfismi.

B45b.07 Consideriamo una permutazione degli interi 1, 2, ..., d, $\Pi = \langle \pi_1, \pi_2, ..., \pi_d \rangle \in \mathsf{Perm}(\mathrm{d}\,]$.
Ad essa si associa la endofunzione di $\mathbb{R}^{\times d}$ chiamata **permutazione degli assi** associata alla Π

$$Axperm(\Pi) \;:=\; \left\lceil \sum_{i=1}^{d} x_i\, \mathsf{e}_i \mapsto \sum_{j=0}^{d} x_j\, \mathsf{e}_{\pi_j} \right\rceil .$$

Questa endofunzione, grazie alla sua forma, è un omomorfismo lineare; più precisamente è un isomorfismo, in quanto ogni vettore di $\mathbb{R}^{\times d}$ si può porre sotto la forma $\sum_{j=0}^{d} x_j\, \mathbf{e}_{\pi_j} = \sum_{i=0}^{d} x_{\psi_i}\, \mathbf{e}_i$, dove denotiamo con $\Psi := \langle \psi_1, \psi_2, ..., \psi_d \rangle$ la permutazione inversa della Π.
La $Axperm(\Pi)$ possiede come inversa la trasformazione

$$Axperm^{-\mathbf{1}}(\Pi) \ := \ \left\lceil \ \sum_{j=1}^{d} x_j\, \mathbf{e}_j \ \mapsto \ \sum_{i=0}^{d} x_{\rho_i}\, \mathbf{e}_i \ \right\rfloor \ .$$

Quindi ogni permutazione di assi è un isomorfismo lineare.

B45b.08 Fissate una base per $\mathbb{R}^{\times d}$ e una per $\mathbb{R}^{\times e}$, gli omomorfismi di $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto_{Lin} \mathbb{R}^{\times e} \rceil$ sono rappresentati fedelmente da matrici del profilo $d \times e$.

Alla composizione di trasformazioni lineari corrisponde il prodotto righe per colonne delle matrici.

B45b.09 Un automorfismo trasforma una base in una seconda base.
La cosa è particolarmente evidente nel caso delle permutazioni degli assi

La matrice della trasformazione inversa è l'inversa della matrice della trasformazione diretta.

B45 c. prodotto scalare, distanza pitagorica e angoli

B45c.01 Consideriamo due punti (vettori) di $\mathbb{R}^{\times d}$. $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle$ e $\mathsf{y} = \langle y_1, y_2, ..., y_d \rangle$.
Si dice **prodotto scalare** o **prodotto interno** di x e y il numero reale

$$\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} \ := \ \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \ .$$

Questa espressione definisce una funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \times \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$; il termine prodotto interno viene usato per una nozione più generale definibile per una classe di spazi più estesa di quella degli spazi vettoriali di dimensioni finite.

Dalla sua forma si ricava facilmente che il prodotto scalare gode delle proprietà che seguono.

(1) $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^{\times d} \ : \ \mathsf{x} \cdot \mathsf{y} = \mathsf{y} \cdot \mathsf{x}$ (simmetria)

(2) $\forall \mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^{\times d}\ ,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \ : \ (\alpha_1 \mathsf{x}_1 + \alpha_2 \mathsf{x}_2) \cdot \mathsf{y} = \alpha_1 \mathsf{x}_1 \cdot \mathsf{y} + \alpha_2 \mathsf{x}_2 \cdot \mathsf{y}$ (bilinearità)

Per la simmetria la (2) equivale alla seguente uguaglianza

(3) $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y}_1, \mathsf{y}_2 \in \mathbb{R}^{\times d}\ ,\ \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \ : \ \mathsf{x} \cdot (\beta_1 \mathsf{y}_1 + \beta_2 \mathsf{y}_2) = \beta_1 \mathsf{x} \cdot \mathsf{y}_1 + \beta_2 \mathsf{x} \cdot \mathsf{y}_2$.

B45c.02 Si dice **norma di un vettore x** il numero reale nonnegativo

$$||\mathsf{x}|| \ := \ \mathsf{x} \cdot \mathsf{x} \ = \ \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_d}^2} \ .$$

Anche il termine norma si usa in una accezione più ampia per spazi più generali chiamati spazi normati.

La norma e il prodotto scalare soddisfano una disuguaglianza molto importante che ora dimostriamo limitatamente agli spazi $\mathbb{R}^{\times d}$.

(1) Prop.: (**disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**) $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathbb{R}^{\times d} \ : \ |\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}| \ \leq \ ||\mathsf{x}|| \cdot |\mathsf{y}||$.

Dim.: Consideriamo il seguente sviluppo di un'espressione algebrica:

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}(x_i\, y_j - x_j\, y_i)^2 = \sum_{i=1}^{d}{x_i}^2 \ \sum_{j=1}^{d}{y_j}^2 + \sum_{j=1}^{d}{x_j}^2 \ \sum_{i=1}^{d}{y_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{d}x_i\, y_i \ \sum_{j=1}^{d}x_j\, y_j = 2\,||\mathsf{x}||^2\,||\mathsf{y}||^2 - 2\,(\mathsf{x} \cdot \mathsf{y})^2$$

Dato che il primo membro è una somma di quadrati deve valere la relazione

$$0 \ \leq \ ||\mathsf{x}||^2\,||\mathsf{y}||^2 - (\mathsf{x} \cdot \mathsf{y})^2 \ ,$$

cioè la disuguaglianza enunciata ▮

B45c.03 Si dice **distanza pitagorica** o anche **distanza euclidea** tra x e y

$$\mathrm{dist}_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \ := \ ||\mathsf{x} - \mathsf{y}|| \ = \ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2} \ .$$

La distanza pitagoricaa è una funzione del genere $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \times \mathbb{R}^{\times d} \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ simmetrica nei suoi due argomenti che evidentemente è si annulla sse i due argomenti coincidono.
È inoltre evidente che essa è invariante per traslazione dei vettori suoi argomenti, ossia

(1) $$\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{t} \in \mathbb{R}^{\times d} : \ ||(\mathsf{x} + \mathsf{t}) - (\mathsf{y} + \mathsf{t})|| \ = \ ||\mathsf{x} - \mathsf{y}|| \ .$$

Inoltre vale la proprietà che segue

(2) Prop.: (**disuguaglianza triangolare**) $\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathbb{R}^{\times d} \ : \ ||\mathsf{x} - \mathsf{z}|| \leq ||\mathsf{x} - \mathsf{y}|| + ||\mathsf{y} - \mathsf{z}||$.

Dim.: Deduciamo la relazione dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Osserviamo che, introdotti i vettori $\mathbf{v} := \mathbf{x} - \mathbf{y}$ e $\mathbf{w} := \mathbf{y} - \mathbf{z}$, la disuguaglianza implica

$$(3) \qquad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\times d} \;\;:\;\; ||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| \ .$$

Più precisamente, grazie all'invarianza per traslazione della distanza pitagorica , le relazioni (2) e (3) sono equivalenti.
Per dimostrare la (3) consideriamo lo sviluppo che segue.

$$||\mathbf{v} + \mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}||^2 + 2\,\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + ||\mathbf{w}||^2 \leq ||\mathbf{v}||^2 + 2\,|\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| + ||\mathbf{w}||^2 \leq$$

$$\text{(per Cauchy-Schwarz)} \leq ||\mathbf{v}||^2 + 2\,||\mathbf{v}||\,||\mathbf{w}|| + ||\mathbf{w}||^2 \;=\; (||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||)^2 \ .$$

Passando alle radici quadrate si ha l'enunciato ∎

L'aggettivo "triangolare" della precedente relazione trova evidente giustificazione dalla visualizzazione nel caso $d = 2$ con il triangolo avente come vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

Alla disuguaglianza triangolare si può dare anche la forma più completa

$$(4) \qquad ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| \ .$$

Segnaliamo che la funzione distanza pitagorica soddisfa le proprietà che più in generale caratterizzano le funzioni del genere $\lceil S \times S \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ (funzioni bivariate) chiamate distanze [B46a01].

Lo spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ munito della distanza pitagorica si dice **spazio euclideo a d dimensioni**; vedremo [B46a02] che si tratta di uno spazio metrico.

B45c.04 Sia δ è un numero reale positivo. L'insieme dei punti che distano da un punto $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, ..., c_d \rangle$ meno di δ si dice **sfera aperta** di centro $\mathbf{c}$ e raggio δ e si denota con

$$\mathsf{sphr}(\mathbf{c}, \delta) \;:=\; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \;:|\; \mathrm{dist}_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}) < \delta\} \ .$$

Si dice invece **sfera chiusa** di centro $\mathbf{c}$ e raggio δ

$$\overline{\mathsf{sphr}}(\mathbf{c}, \delta) \;:=\; \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \;:|\; \mathrm{dist}_2(\mathbf{x}, \mathbf{c}) \leq \delta\} \ .$$

Se $d = 1$ le sfere aperte e chiuse sono, risp., gli intervalli aperti e chiusi:

$$\mathsf{sphr}(c, \delta) = (c - \delta, c + \delta) \quad , \quad \overline{\mathsf{sphr}}(c, \delta) = [c - \delta, c + \delta] \ .$$

Se $d = 2$ le sfere sono cerchi, le figure che sono anche dette **dischi**.

Se $d = 3$ il termine sfera ora introdotto ha lo stesso significato di quello usato nella geometria elementare: $\mathsf{sphr}(\mathbf{c}, \delta)$ denota l'insieme dei punti delimitati dalla superficie sferica, luogo dei punti che presentano distanza pitagorica da un punto $\mathbf{c}$ uguale a δ; notoriamente $\mathbf{c}$ è detto centro della sfera e δ raggio della stessa.

B45c.05 Invece del termine sfera si usa anche il termine "bolla sferica", termine che richiama il termine più generale "bolla" utilizzato in topologia.

Tra le bolle particolari, si usano altre alternative delle sfere. In particolare sono spesso utili le nozione di "cuboide canonico" che a sua volta è generalizzata dalla nozione di "cella rettangolare"; nozioni più particolari di queste sono, risp., le nozioni di "cubo canonico" e "cella cubica". Il termine celle, come il più comprensivo "bolle" è utilizzabile per tutte le dimensioni.

Consideriamo il vettore $\mathsf{c} = \langle c_1, c_2, ..., c_d \rangle$ e il reale positivo ℓ; si dice **cubo canonico aperto** con centro in c e lato ℓ l'insieme di punti di $\mathbb{R}^{\times d}$

$$\mathsf{cube}(\mathsf{c}, \ell) \ := \ \left\{ \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \ \rceil\!\lceil \ c_1 - \frac{\ell}{2} < x_1 < c_1 + \frac{\ell}{2}, \ \ldots, c_d - \frac{\ell}{2} < x_d < c_d + \frac{\ell}{2} \right\} .$$

Si dice invece **cubo canonico chiuso** con centro in c e lato ℓ l'insieme di punti di $\mathbb{R}^{\times d}$

$$\overline{\mathsf{cube}}(\mathsf{c}, \ell) \ := \ \left\{ \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \ \rceil\!\lceil \ c_1 - \frac{\ell}{2} \le x_1 \le c_1 + \frac{\ell}{2}, \ \ldots, c_d - \frac{\ell}{2} \le x_d \le c_d + \frac{\ell}{2}, \right\} .$$

B45c.06 Dati due punti di $\mathbb{R}^{\times d}$, $\mathsf{a} = \langle a_1, ..., a_d \rangle$ e $\mathsf{b} = \langle b_1, ..., b_d \rangle$, si dice che a è dominato da b, ovvero che b **domina** a, sse per ogni $i = 1, 2, ..., d$ si ha $a_i < b_i$; in tal caso si scrive $\mathsf{a} <^d \mathsf{b}$.

Se a è dominato da b, si dice **cella rettangolare aperta** determinata da a e b

$$(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \ := \ \{ \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \ \rceil\!\lceil \ \forall i = 1, 2, ..., d \ \vdots \ a_i \le x_i \le b_i \} .$$

Si dice invece **cella rettangolare chiusa** determinata da a e b

$$[\mathsf{a}, \mathsf{b}] \ := \ \{ \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle \in \mathbb{R}^{\times d} \ \rceil\!\lceil \ \forall i = 1, 2, ..., d \ \vdots \ a_i < x_i < b_i \} .$$

Si dice centro di ciascuna di queste celle il punto $\left\langle \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \ \ldots, \frac{a_d + b_d}{2} \right\rangle$.

Chiaramente per $d = 1$ le celle aperte e chiuse sono, risp., gli intervalli aperti e chiusi; per $d = 2$ le celle sono dei rettangoli; per $d = 3$ le celle sono dei cuboidi.

Si conviene che se $\neg \ulcorner \mathsf{a} <^d \mathsf{b} \urcorner$ sia $(\mathsf{a}, \mathsf{b}) = \emptyset$ e che se $\mathsf{a} = \mathsf{b}$ sia $[\mathsf{a}, \mathsf{b}] = \{\mathsf{a}\}$.
Si osserva che nel caso $d \ge 2$ le celle chiuse con qualche coordinata superiore coincidente con la corrispondente coordinata inferiore sono insiemi di dimensioni inferiori a d.

Nel seguito del capitolo in luogo del termine cubo canonico useremo il semplice termine cubo e in luogo di cella rettangolare diremo più semplicemente cella.
Evidentemente i cubi sono particolari celle e, definito il vettore $\mathbf{1}_d \ := \ 1^{\times d} := \langle 1, 1, ..., 1 \rangle$, si ottiene

$$\mathsf{cube}(\mathsf{c}, \ell) \ = \ \mathsf{cell}\left(\mathsf{c} - \frac{\ell}{2} \cdot \mathbf{1}_d \ , \ \mathsf{c} + \frac{\ell}{2} \cdot \mathbf{1}_d \right) .$$

B45c.07 Dati due vettori applicati v e w aventi la prima estremità in comune si denota con $\widehat{\mathsf{v}\,\mathsf{w}}$ l'angolo di ampiezza positiva che tali vettori delimitano. Il coseno di tale angolo viene dato dall'espressione

$$\cos \widehat{\mathsf{v}\,\mathsf{w}} \ := \ \frac{\mathsf{v} \cdot \mathsf{w}}{||\mathsf{v}|| \, ||\mathsf{w}||} .$$

Evidentemente questa espressione è simmetrica nei due vettori argomento;

Questo si accorda con l'aver imposto che l'angolo abbia ampiezza positiva.
Si osserva invece che $\cos \widehat{\mathsf{v}\,\mathsf{w}}$ è nullo sse i vettori applicati sono ortogonali, è positivo se formano un angolo acuto ed è negativo sse formano un angolo ottuso.

La definizione di angolo si può estendere anche a una coppia di vettori applicati con prime estremità diverse, come $\mathsf{x} = \overrightarrow{PQ}$ ed $\mathsf{y} = \overrightarrow{RS}$. Basta sostituire uno di essi con il suo traslato y' per il vettore applicato $\overrightarrow{PR}$, in modo da avere

$$\cos \widehat{\mathsf{x}\,\mathsf{y}} \ := \ \cos \widehat{\mathsf{x}, \mathsf{y}'} .$$

B45 d. spazi vettoriali su un campo

B45d.01 Consideriamo il campo $\boldsymbol{F} = \langle F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\rangle$; si dice **spazio vettoriale** sul campo $\boldsymbol{F}$ una struttura della forma $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp\rangle$, dove $\langle V, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}\rangle$ è un gruppo abeliano e $\perp \in \lceil R \times F \longmapsto V \rceil$ tale che

$$\forall a, b \in F,\quad \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \ \colon\ a \perp (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (a \perp \boldsymbol{w})\ ,\qquad (a+b) \perp \boldsymbol{v} = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (b \perp \boldsymbol{v})\ ,$$

$$(a \cdot b) \perp \boldsymbol{v} = a \perp (b \perp \boldsymbol{v})\ ,\qquad 1 \perp \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\ .$$

Relativamente a tale spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$, gli elementi del terreno V si dicono **vettori**, gli elementi di F si dicono **scalari** e la legge di composizione esterna $\perp$ **prodotto esterno** di $\boldsymbol{F}$ su $\boldsymbol{V}$.
Spesso i segni di prodotto "$\cdot$" e "$\perp$" si possono sottintendere senza portare ad ambiguità.

Con $\mathsf{Vsp}_{\boldsymbol{F}}$ denotiamo la classe degli spazi vettoriali sul campo $\boldsymbol{F}$.

B45d.02 Consideriamo un intero positivo d e l'insieme delle sequenze di lunghezza d di elementi di F, $F^{\times d} = \lceil (\mathrm{d}\,] \longmapsto F \rceil$.

Se $\boldsymbol{v} = \langle v_1, ..., v_d\rangle$ e $\boldsymbol{w} = \langle w_1, ..., w_d\rangle$ sono due elementi di tale insieme, definiamo **somma termine a termine** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ $\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w} := \langle v_1 + w_1, ..., v_d + w_d\rangle$;
definiamo inoltre il passaggio alla **sequenza opposta** di $\boldsymbol{v}$
$\boldsymbol{-v} := \langle -v_1, ..., -v_d\rangle$ e il **vettore nullo** $\boldsymbol{0}_d := \langle 0, ..., 0\rangle \in F^d$.
Come si è trovato esaminando i prodotti diretti di gruppi, $\langle F^d, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}\rangle$ costituisce un gruppo abeliano.

Considerando anche il prodotto esterno $a \perp \boldsymbol{v} := \langle a \cdot v_1, ..., a \cdot v_d\rangle$ si verifica che $\langle F^d, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp\rangle$ costituisce uno spazio vettoriale. Esso è chiamato **spazio delle sequenze di lunghezza determinata** d sopra F e si denota con $\mathsf{Vsp}_d(\boldsymbol{F})$ o più semplicemente con $\mathsf{Vsp}_d(F)$.

Particolarmente utili sono gli spazi $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{Q})$, $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{R})$, $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{C})$ e $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{Z}_p)$ per ogni p numero primo.

B45d.03 Introduciamo la nozione di sottostruttura per gli spazi vettoriali.

Si dice **sottospazio di uno spazio vettoriale** ;T B45d03 $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp\rangle$ ogni spazio vettoriale avente come terreno un $S \subseteq V$ e come altre componenti le restrizioni delle operazioni definite per $\boldsymbol{V}$.
Questo equivale a chiedere che S sia chiuso rispetto alle operazioni $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{-}$, che contenga $\boldsymbol{0}$ e che sia stabile rispetto alla moltiplicazione per qualsiasi elemento del campo.

Formalmente si individua come $\langle S, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}|_{S\times S}, \boldsymbol{-}|_{S\times S}, \boldsymbol{0}, \perp|_{\boldsymbol{F}\times S}\rangle$ e si trova che questa struttura appartiene a Vsp_F.
Questo sottospazio si denota con $\boldsymbol{V}|_S$.
Si dimostra facilmente che S è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ sse $\forall a, b \in \boldsymbol{F}$ e $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V} \ \colon\ a \perp \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} b \perp \boldsymbol{w} \in S$.

B45d.04 Con $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$ denotiamo l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\boldsymbol{V}$. In questo insieme si trovano, in particolare, il **sottospazio nullo** $\{\boldsymbol{0}\}$ e l'intero $\boldsymbol{V}$. I sottospazi di $\boldsymbol{V}$ diversi da questa intera struttura si dicono **sottospazi propri**.

Per enunciare che $\boldsymbol{W}$ è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ scriviamo $\boldsymbol{W} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$; per enunciare che $\boldsymbol{W}$ è sottospazio proprio di $\boldsymbol{V}$ scriviamo $\boldsymbol{W} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$.

Per un qualsiasi $\boldsymbol{V} \in \mathsf{Vsp}$ e per ogni suo vettore v nonnullo l'insieme $\{a \in F :| a \perp \mathsf{v}\}$ costituisce il terreno di un sottospazio che in breve si può denotare con $F \perp \mathsf{v}$. Un sottospazio di questo genere si chiama anche **raggio** (*array*) di $\boldsymbol{V}$.

B45d.05 $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$ è ordinato parzialmente dalla relazione "essere sottospazio". Riferendosi ai terreni, possiamo dire che la collezione dei terreni dei sottospazi di uno spazio $\boldsymbol{V}$ è ordinata dalla relazione di inclusione.

(1) Prop.: Se S e T sono sottospazi di $\boldsymbol{V}$, lo è anche $S \cap T$; più precisamente questo è il più esteso dei sottospazi contenuti sia in S che in T. ▮

B45d.06 Accade invece, in generale, che $S \cup T$ non è sottospazio di $\boldsymbol{V}$. Per esempio nel semplice piano $\mathsf{Vsp}_2(\mathbb{R})$ l'unione dei due raggi $\mathbb{R}_\perp\langle 1,0\rangle$ e $\mathbb{R}_\perp\langle 0,1\rangle$ non è chiuso rispetto alla somma di coppie di vettori.

(1) Prop.: $S \cup T$ è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ sse $S \subseteq T$ oppure $T \subseteq S$ ▮

B45d.07 Si dice **somma dei sottospazi** S e T $S \boxplus T := \{\boldsymbol{v} \in S,\ \boldsymbol{w} \in T :| \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\}$.
Evidentemente $S \boxplus T = T \boxplus S$.

(1) Prop.: $S \boxplus T$ è un sottospazio di $\boldsymbol{V}$ e più precisamente è il più ridotto sottospazio il cui terreno contiene $S \cup T$ ▮

Abbiamo quindi che $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$ è un insieme ordinato, dotato di minimo $(\{\mathbf{0}_d\})$ e di massimo $(\boldsymbol{V})$. Come vedremo esso costituisce una struttura della specie dei reticoli e viene chiamato "reticolo dei sottospazi" di $\boldsymbol{V}$.

B45d.08 Se $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} \boxplus \boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{T} = \{\mathbf{0}_d\}$, $\boldsymbol{T}$ è chiamato **sottospazio complementare** di $\boldsymbol{S}$ in $\boldsymbol{V}$ e simmetricamente $\boldsymbol{S}$ è detto sottospazio complementare di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{V}$; in altre parole la relazione "essere complementare" tra sottospazi è una relazione simmetrica.

In generale, ogni sottospazio proprio e nonnullo di uno spazio vettoriale possiede più complementari.

Per esempio in $\mathbb{R}^2$ tre vettori come $\langle 1,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$ e $\langle 1,1\rangle$ consentono di scrivere

$$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R}_\perp\langle 1,0\rangle) \boxplus (\mathbb{R}_\perp\langle 0,1\rangle) = (\mathbb{R}_\perp\langle 1,0\rangle) \boxplus (\mathbb{R}_\perp\langle 1,1\rangle) = (\mathbb{R}_\perp\langle 0,1\rangle) \boxplus (\mathbb{R}_\perp\langle 1,1\rangle) .$$

B45d.09 Se E è un sottoinsieme di V, si denota con $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E)$ l'insieme delle combinazioni lineari-$\boldsymbol{F}$ dei vettori di E. Formalmente si può enunciare:

$$\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E) := \{h \in \mathbb{P} ,\ a_1, ...a_h \in \boldsymbol{F} ,\ \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{S} :| a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_h\boldsymbol{v}_h\} .$$

Quando l'insieme dei vettori si riduce a un solo vettore $\boldsymbol{v}$, abbiamo $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{v}) = F_\perp\boldsymbol{v}$, cioè abbiamo un raggio dello spazio.

B45d.10 Un insieme di vettori E di $\boldsymbol{V}$ si dice **insieme generatore dello spazio** $\boldsymbol{V}$ sse $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E) = \boldsymbol{V}$.

Un **insieme di vettori** I di $\boldsymbol{V}$ si dice **insieme di vettori linearmente indipendenti** sse per ogni $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_h\} \subseteq I$ si ha:

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_h\boldsymbol{v}_h = \mathbf{0} \implies a_1 = \cdots = a_h = 0 .$$

In caso contrario si parla di **insieme di vettori linearmente dipendenti**.
Regolarmente i vettori del primo insieme sopra definito si dicono **vettori linearmente indipendenti**, mentre i vettori del secondo insieme si dicono **vettori linearmente dipendenti**.

B45d.11 **Prop.** Un insieme di vettori $I \subseteq V$ è linearmente indipendente sse ogni $\mathsf{v} \in \boldsymbol{span}(I)$ si può esprimere in un solo modo come combinazione lineare di elementi di I sse nessuno tra i vettori di I è combinazione lineare dei rimanenti ▮

B45d.12 Ogni insieme $B \subseteq \boldsymbol{V}$ è detto **base dello spazio vettoriale** $\boldsymbol{V}$ sse B è linearmente indipendente e $\boldsymbol{span}(B) = \boldsymbol{V}$.

Si dice **base canonica dello spazio delle sequenze** aventi lunghezza d di elementi di F, $\boldsymbol{F}^d$:

$$\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d\} \quad \text{dove} \quad \mathsf{e}_1 := \langle 1, 0, ..., 0\rangle,\ \mathsf{e}_2 := \langle 0, 1, ..., 0\rangle, \cdots,\ \mathsf{e}_d := \langle 0, 0, ..., 1\rangle\ .$$

B45d.13 Prop. Ogni spazio vettoriale che non si riduca al vettore zero, possiede una base e tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso cardinale ▮

Il cardinale delle basi di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dice **dimensione dello spazio** e si denota con $\dim(\boldsymbol{V})$.

Si dice **spazio vettoriale finitodimensionale** uno spazio ridotto al vettore zero o uno spazio che possieda una base finita. In caso contrario, si parla di **spazio vettoriale infinitodimensionale**.

B45d.14 L'insieme dei numeri complessi si può considerare sia terreno di uno spazio monodimensionale sul campo dei complessi, sia terreno di uno spazio bidimensionale sul campo dei reali.

I polinomi a coefficienti reali in una variabile di grado non superiore ad n costituiscono il terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei reali ad $n + 1$ dimensioni.

I polinomi a coefficienti complessi in una variabile di grado non superiore ad n costituiscono il terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei complessi ad $n + 1$ dimensioni.

I polinomi a coefficienti complessi in una variabile di grado non superiore ad n sono terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei reali ad $2n + 2$ dimensioni.

La totalità dei polinomi a coefficienti reali o complessi in una o più variabili costituiscono il terreno di spazi infinitodimensionali.

Le funzioni di una variabile reale sono terreno di spazi infinitodimensionali con basi più che numerabili.

B45d.15 Introduciamo i morfismi per le strutture di spazio vettoriale.

Consideriamo due spazi vettoriali sullo stesso campo $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, +_V, -_V, \mathsf{0}_V, \cdot_V\rangle \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} = \langle W, \boldsymbol{F}, +_W, -_W, \mathsf{0}_W, \cdot_W\rangle\ .$$

Si dice **trasformazione lineare** di $\boldsymbol{V}$ in $\boldsymbol{W}$ una funzione $\tau \in \lceil V \longmapsto W \rceil$ tale che per arbitrari $a, b \in \boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ si ha: $\tau(a \cdot_V \boldsymbol{u} +_V b \cdot_V \boldsymbol{v}) = a \cdot_W \tau(\boldsymbol{u}) +_W b \cdot_W \tau(\boldsymbol{v})$.

Denotiamo con $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ l'insieme delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$; abbreviamo $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$, l'insieme delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{V}$ in se stesso, con con $\mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V})$.

Le trasformazioni lineari sono chiamate anche applicazioni lineari, **operatori lineari** o **omomorfismi tra spazi vettoriali**.

B45d.16 Si dice **trasformazione lineare nulla** da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$la trasformazione $\mathsf{0}_W{}^{\text{cnst}}$.
La verifica che si tratti effettivamente di una trasformazione lineare è immediata.

Consideriamo lo spazio tridimensionale sui reali $\mathsf{Vsp}_3(\mathbb{R})$, la sua base canonica $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Consideriamo la raffigurazione di $\mathsf{Vsp}_3(\mathbb{R})$ che pone in corrispondenza i tre raggi $\mathbb{R} \cdot \boldsymbol{e}_i$ con tre rette orientate mutuamente ortogonali e che attribuisce ai tre vettori $\boldsymbol{v}_i$ la lunghezza 1.

L'insieme delle combinazioni lineari $\boldsymbol{span}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ corrisponda ai vettori del piano Sscz_{110} che raffiguriamo come "orizzontale";
l'insieme $\boldsymbol{span}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ è costituito dai vettori del piano Sscz_{011} "verticale parallelo alle spalle dell'osservatore";
$\boldsymbol{span}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)$ è l'insieme dei vettori del piano Sscz_{101} "verticale ortogonale al precedente".

Consideriamo un vettore $\boldsymbol{v}$ e la sua espressione come combinazione lineare dei vettori della base canonica sia $\boldsymbol{v} = v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3$. Di questo vettore consideriamo diverse proiezioni.

Proiezione di $\boldsymbol{v}$ sul piano Sscz_{110}: $\boldsymbol{Prj}_{1,2}(\boldsymbol{v}) \;:=\; v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2$;

proiezione di $\boldsymbol{v}$ sul piano Sscz_{101}: $\boldsymbol{Prj}_{1,3}(\boldsymbol{v}) \;:=\; v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_3\,\boldsymbol{e}_3$;

proiezione di $\boldsymbol{v}$ sul piano Sscz_{011}: $\boldsymbol{Prj}_{2,3}(\boldsymbol{v}) \;:=\; v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3$;

proiezione di $\boldsymbol{v}$ sul raggio $\mathbb{R}_{\perp}\boldsymbol{e}_1$: $\boldsymbol{Prj}_1(\boldsymbol{v}) \;:=\; v_1\,\boldsymbol{e}_1$;

proiezione di $\boldsymbol{v}$ sul raggio $\mathbb{R}_{\perp}\boldsymbol{e}_2$: $\boldsymbol{Prj}_2(\boldsymbol{v}) \;:=\; v_2\,\boldsymbol{e}_2$;

proiezione di $\boldsymbol{v}$ sul raggio $\mathbb{R}_{\perp}\boldsymbol{e}_3$: $\boldsymbol{Prj}_3(\boldsymbol{v}) \;:=\; v_3\,\boldsymbol{e}_3$.

Si verifica facilmente che le precedenti trasformazioni sono trasformazioni lineari idempotenti.

`L’esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`