

Alberto Marini, associato CNR IMATI Milano

Un approccio discreto e graduale alla matematica

Appunti sulla comunicazione presentata il 5/9/2019 nella Sezione 23 dedicata alla divulgazione della matematica del XX Congresso UMI tenutosi a Pavia.

- a. Problemi e apparati risolutivi
- b. Una esposizione sperimentale
- c. Modello dell'apparato
- d. Comunicazioni e prime elaborazioni
- e. Prime astrazioni e conoscenze di interesse generale
- f. Praticità dell'infinito
- g. Confini degli insiemi ricorsivi e insiemi di uso euristico
- h. Ambienti geometrici
- i. Assiomatizzazioni e logica
- j. Organizzazione dell'esposizione

a. Problemi e apparato matematico risolutivo

L'approccio proposto si rivolge a persone e organizzazioni interessate fortemente e non occasionalmente alle applicazioni della matematica, vuoi a causa di loro dirette esigenze applicative, vuoi in quanto a queste applicazioni assegnano una elevata influenza culturale.

Si assume un atteggiamento pragmatico attribuendo primaria importanza alla possibilità di risolvere una vasta gamma di problemi attraverso analisi dei fattori, modellizzazione degli elementi essenziali per il problema, calcoli ed elaborazioni che conducano a soluzioni soddisfacenti.

Ci orientano considerazioni storiche sopra i problemi affrontati in questi modi, problemi che chiamiamo **problemi associabili alla matematica**, e sopra le loro soluzioni che più hanno influito su vicende e comportamenti.

Può servire lo studio di problemi "storicamente rilevanti": transazioni commerciali, atti amministrativi, misure di terreni, gestione di scorte, costruzione di edifici e di infrastrutture, attività militari, trasporti e navigazione, osservazioni astronomiche e climatiche.

È utile esaminare soluzioni di successo e problemi che si sono presentati in forme diversificate e hanno portato a metodi risolutivi di ampia portata.

Può anche essere opportuno considerare i periodi di decadenza e di perdita di strumenti e competenze (impoverimento dell'ellenismo, Maya, Cina del sec. XVI, ...).

La storia delle acquisizioni e le prospettive degli odierni avanzamenti scientifici, tecnologici e organizzativi inducono a proporre testi divulgativi sistematici e largamente fruibili sugli strumenti per la soluzione dei problemi collegabili alla matematica.

Questi testi si pongono come obiettivo generale la precisazione di procedimenti risolutivi per problemi specifici e la definizione di metodi applicabili a intere problematiche che possano ottenere ampia **fiducia**.

Gli interessati possono giudicare soddisfacenti le soluzioni dei problemi secondo diverse valutazioni derivate da diverse esigenze applicative.

Le prime valutazioni riguardano:

precisione dei risultati, ampiezza della portata, prontezza della risposta, ridotto impiego delle risorse nelle tre direzioni:

- tempo impiegato,
- quantità delle informazioni da gestire (memorie)
- complessità delle istruzioni per le manovre da eseguire.

Servono inoltre valutazioni di più ampia visione:

flessibilità al variare delle istanze del problema,
adattabilità verso nuovi requisiti per le soluzioni,
versatilità nei confronti degli ampliamenti degli obiettivi,
comprensibilità da parte di esecutori prevedibilmente numerosi.

La varietà delle aspettative e una aspirazione alla completezza metodologica inducono a porsi come obiettivo un apparato risolutivo coerente, articolato e aperto ad ampliamenti e differenziazioni. Questo lo chiamiamo **apparato matematico informatico formale operativo**, in sigla apparato MIFO o qui in breve l'**apparato** per antonomasia.

Di esso si pretendono esposizioni ben motivate, attentamente dettagliate e saldamente coerenti. In particolare devono essere in grado di giustificare esaurientemente le entità che si vengono a coinvolgere.

b. Una esposizione sperimentale

Nel seguito viene segnalata una esposizione *ab ovo* dell'apparato che va considerata solo una sperimentazione a basso costo che riguarda un complesso *in fieri* di nozioni matematiche.

Questa esposizione sperimentale intende servirsi di strumenti informatici che per ora sono soltanto artigianali e che si ritengono cruciali per riuscire efficacemente a controllare la coerenza dei contenuti e a facilitare il reperimento dei brani riguardanti singoli problemi e specifici strumenti risolutivi.

Inoltre gli attuali media informatizzati risultano graditi alle persone con interessi applicativi, in particolare a quelle familiari con le vastissime librerie in dotazione agli odierni prodotti software.

L'esposizione attualmente consiste in circa 2500 pagine accompagnate da circa 700 pagine di indici interamente redatte con il sistema Plain TeX e messe a disposizione in linea attraverso oltre 100 capitoli su files in formato `.pdf` all'indirizzo <http://www.mi.imati.cnr.it/~alberto> .

I contenuti non si discostano molto da quelli dei corsi per la laurea triennale, ma insistono maggiormente sulla giustificazione pragmatica delle scelte, sulla matematica discreta e sulla implementabilità dei

procedimenti mediante strumenti informatici e sul chiarimento degli accorgimenti che devono essere adottati per semplificare certi discorsi rigorosi che rischiano di essere troppo pesanti alla lettura.

Forse possono destare maggiore interesse alcuni concatenamenti di argomenti e alcune scelte non usuali di termini e di notazioni

c. Modello dell'apparato

Le attese nei confronti dell'apparato risolutivo richiedono che ad esso contribuiscano numerosi agenti dotati di ampia varietà di competenze che consentano di controllare una ampia gamma di temi e di procedimenti.

Per agenti e procedimenti facciamo riferimento ad un modello molto schematico che chiamiamo MAP, per Modello Agenti Procedure che prevede **agenti innovatori** (o ricercatori) e **agenti esecutori** i quali sono in contatto con il mondo delle applicazioni, cioè con persone e organismi interessati alle soluzioni di problemi specifici o di ricorrente interesse che chiamiamo **committenti**.

Gli agenti innovatori ricercano e stabiliscono le regole che governano i procedimenti risolutivi; inoltre sopra i procedimenti formulano considerazioni di utilità generale in quanto potenzialmente utili a successivi sviluppi.

La formulazione delle considerazioni generali costituisce un sistema di conoscenze che si è rivelato indispensabile per l'evoluzione dell'apparato:
 supporta i miglioramenti qualitativi ed estensivi dei procedimenti,
 forma una cultura critica solidamente argomentata sui procedimenti e sui metodi risolutivi che si può presentare al mondo delle applicazioni come la *cultura matematica*.

Le conoscenze matematiche consistono in enunciati sopra entità (formali) che si intendono definire gradualmente a partire da entità elementari con ruoli semplici in modo che le argomentazioni sopra proprietà e relazioni delle entità risultino ampiamente e solidamente convincenti. In tal modo ogni enunciato può essere ampiamente condiviso da agenti e committenti e l'intero apparato può essere considerato affidabile.

Si rivela conveniente considerare entità anche le proprietà e le relazioni delle entità consolidate: questo e la adozione di convenzioni proponibili molto adattabili rende il sistema delle conoscenze matematiche altamente versatile.

Inoltre in ogni settore applicativo devono essere stabilite molto chiaramente le relazioni fra le entità formali e gli oggetti e i processi osservabili che esse rappresentano.

Gli esecutori hanno il compito di effettuare i procedimenti risolutivi per istanze particolari dei problemi interpretando con meticolosità le regole che governano i procedimenti.

Mentre agli innovatori sono richieste doti di inventiva e di scoperta di conseguenze, capacità di organizzazione delle conoscenze e abilità nella organizzazione delle conoscenze, agli esecutori non sono richieste capacità di iniziativa di fronte a situazioni operative non previste, ma solo la capacità di riconoscerle e segnalarle; in particolare gli esecutori devono saper rifiutare i dati non regolari che fossero forniti dai committenti.

Secondo il modello MAP gli esecutori si servono di risorse consistenti in tempo per la elaborazione, dispositivi per la registrazione di informazioni (memorie) e impegno o strumenti per interpretare ed eseguire le istruzioni che reggono le esecuzioni dei procedimenti.

Si vuole che gli esecutori consentano di affrontare numerose istanze di problemi che si presentano in ambienti e circostanze diverse.

Va sottolineata la possibilità che pochi innovatori dettino regole operative interpretabili da numerosi esecutori in ampie varietà di contesti; questa possibilità è da collocare alla base della **utilità sociale della matematica**.

Nel passato operavano solo esecutori umani effettuando calcoli e gestendo informazioni con strumenti semplici come carta, matita e al più calcolatrici meccaniche o elettromeccaniche.

A questo proposito sono esemplari le attività di calcolo dell'astronomia del passato e le schiere di contabili delle compagnie di assicurazione e delle maggiori imprese del primo '900.

Attualmente sono disponibili esecutori artificiali, i computers e i molti dispositivi muniti di microprocessori, in grado di effettuare prestazioni che secondo vari punti di vista sono molto superiori alle corrispondenti umane:

velocità di calcolo ed elaborazione,
capacità di memoria, disponibilità di miliardi di esemplari,
interconnettività globale e mobilità,
disponibilità per lunghi periodi e in ambienti ostili,
costi complessivi.

Va evidenziato che questi esecutori stanno aumentando vistosamente l'utilità sociale della matematica.

Nelle esposizioni dell'apparato, di conseguenza, si deve tenere conto adeguatamente delle esigenze degli esecutori artificiali.

d. Comunicazioni e prime elaborazioni

In una esposizione dell'apparato i primi argomenti da affrontare devono riguardare le comunicazioni fra agenti e fra questi e i committenti.

Il modello MAP vede gli agenti scambiarsi messaggi, sequenze di caratteri, cioè segni fissati con convenzioni precise, ma relativizzate e mantenute flessibili.

I caratteri possono avere consistenze materiali diverse (visuali, vocali, elettromagnetiche, circuitali), ma devono essere interpretabili coerentemente da chi li usa per scopi comuni, anche nei casi di operatori molto diversi.

La trasmissione dei messaggi viene effettuata attraverso canali di vari generi, ma è sufficiente prendere in considerazione messaggi seriali costituiti da stringhe su alfabeti ai quali sono assegnati ruoli peculiari.

In particolare:

- alfabeto per i dati delle istanze dei problemi e per i risultati delle elaborazioni per una data problematica,
- alfabeto per le informazioni usate solo nelle elaborazioni,

- alfabeto per le istruzioni costituenti procedure e algoritmi, cioè le precisazioni formali e operative dei procedimenti.
- alfabeto per argomentazioni ed enunciati del sistema delle conoscenze matematiche.

L'attribuzione del carattere discreto ai processi risolutivi e alla formulazione delle conoscenze generali può essere collegata alle esigenze della comunicazione.

In particolare questo punto di vista porta a individuare coordinate temporali discrete e in seguito velocità di trasmissione e di elaborazione diverse ma sincronizzabili.

Le prime elaborazioni da proporre (e da osservare) come eseguibili affidabilmente dagli esecutori riguardano stringhe e si basano sul riconoscimento della identità o meno di due caratteri e la conseguente scelta dei comportamenti successivi.

Si chiede inoltre che gli esecutori siano in grado di interpretare algoritmi e procedure costituiti da istruzioni riguardanti registri sequenziali per stringhe variabili.

Come primi esecutori artificiali si propongono quelle che chiamiamo Macchine Sequenziali Multinastro trasformatrici, in sigla MSMt; si tratta di macchine formali non sostanzialmente diverse ma meno spartane delle classiche macchine di Turing ed aventi prestazioni che si possono descrivere come simili ed equivalenti alle più semplici prestazioni degli esecutori umani.

Il linguaggio dei sistemi di istruzioni o programmi per le MSMt si precisa senza difficoltà.

Le prime prestazioni riguardano composizioni e proprietà delle stringhe:

copiatura, giustapposizione, riflessione, riconoscimento della presenza di un carattere, sostituzioni di caratteri e stringhe, ordinamenti di stringhe indotti da ordinamenti dei caratteri, riconoscimento di prefissi, suffissi, infissi, scansione di coppie e liste di stringhe più semplici, fino a prestazione di controllo di strutture formali variamente articolate.

Va rilevato in particolare che si può definire una MSMt in grado di controllare la legalità di ogni programma proponibile per le MSMt.

L'affidabilità di queste elaborazioni e degli algoritmi che le reggono viene proposta come fondamentale e viene sostenuta empiricamente da osservazioni sopra la storia della matematica e delle sue applicazioni e sopra l'alta qualità dei prodotti delle tecnologie informatiche.

Le prime elaborazioni di stringhe e liste consentono di introdurre in versioni semplici e completamente osservabili e gestibili nozioni matematiche di rilevante incidenza.

Tra le prime le liste relazionali, liste non ripetitive di coppie, e tra queste, riconoscibili, le liste esprimenti ordinamenti, equivalenze e funzioni (tra le quali distinguere endofunzioni, iniezioni, suriezioni, biezioni, permutazioni), nonché operazioni dotate di proprietà algebriche e simmetrie (dualità per riflessione, per traslazioni, ...), fino a individuare i più semplici omomorfismi.

Si osserva che stringhe e liste si possono articolare tanto da essere in grado di rappresentare grandi varietà di informazioni e di nozioni pratiche, anche grazie alla loro derivazione da convenzioni flessibili.

Si osserva inoltre che si possono organizzare composizioni di algoritmi su stringhe che conducono alla possibilità di governare con padronanza procedimenti affidabili di portata e articolazione via via maggiore.

È quindi giustificato e opportuno porre in evidenza la operatività e la applicabilità delle entità simboliche.

L'odierna possibilità di elaborazioni che contano su risorse molto rilevanti governate da algoritmi molto articolati ma riconducibili a istruzioni semplici consolida la prospettiva di crescita delle attività rivolte alla risoluzione affidabile di ampie classi di problemi.

e. Prime astrazioni e conoscenze di interesse generale

Acquisiti gli algoritmi per le manipolazioni basilari delle stringhe, si riscontra la necessità di adottare delle astrazioni.

Le stringhe su un solo segno si possono associare a tutte le altre stringhe per esprimere le loro lunghezze e possono chiamarsi **rappresentazioni unadiche degli interi naturali**; derivate da esse le corrispondenti notazioni posizionali nelle varie basi, dopo aver constatata l'equivalenza operativa di tutte queste scritte, si definiscono gli interi naturali come classi di equivalenza di queste loro rappresentazioni.

Con un procedimento simile si definiscono gli insiemi finiti come classi della equivalenza rispetto alla verifica dell'occorrenza dei componenti delle liste non ripetitive.

Già queste astrazioni si rivelano fundamentalmente utili per la semplificazione della esposizione delle considerazioni generali e dei modelli per le applicazioni: esse consentono argomentazioni che sospendono le esigenze realistiche inevitabili quando si intendono dare soluzioni effettive a particolari istanze dei problemi.

[figura AstrConcr].

In generale le argomentazioni condotte su astrazioni facilitano la formulazione di indicazioni di ampia portata che forniscono linee guida per le attività risolutive di nuovi problemi che condividono una parte delle rispettive caratteristiche.

Esse costituiscono, al fianco delle conoscenze sugli algoritmi, la seconda componente dell'apparato.

A questo punto può essere opportuno soffermarsi sulla relazione fra gli algoritmi in grado di governare elaborazioni effettive con il fine di risolvere diversi problemi specifici immanenti e le argomentazioni per fini generali, più o meno astratte, in grado di aprire la strada a potenziali molteplici applicazioni successive. Questa relazione, mentre dall'esterno può essere giudicata una contrapposizione, per i suoi molti risultati complessivi va considerata positivamente come una sinergia; si propone quindi di chiamarla **dialettica algoritmi-astrazioni**.

Le argomentazioni per le potenzialità generali devono essere esposte in modo da poter essere ampiamente utilizzate e quindi devono essere

robustamente convincenti,

ampiamente utilizzabili da agenti e committenti

riesaminabili dagli studiosi,

Inoltre in una prospettiva ormai realistica, devono poter essere oggetto di elaborazioni volte a verificare e a rafforzare la loro coerenza e la loro versatilità.

f. Praticità dell'infinito

Dopo le liste e gli insiemi finiti si rende necessario servirsi degli insiemi infiniti.

Ai committenti l'adozione di queste entità non fattivamente realizzabili va giustificata illustrando i vantaggi per l'esposizione delle conoscenze generali che esse consentono.

Prima di effettuare un primo passo verso l'infinito è opportuno segnalare che i risultati delle elaborazioni effettuate dalle MSMt possono essere ottenuti da tanti altri generi di apparecchiature automatiche.

Infatti si possono definire molti altri tipi di macchine che trasformano affidabilmente stringhe dati in stringhe risultati che possono simulare le MSMt e sono simulabili da queste e per questo si possono considerare equivalenti ad esse in quanto esecutrici di trasformazioni di dati in risultati.

Si trovano sia macchine dotate di più dispositivi delle MSMt, che macchine capaci di prestazioni più elementari e in grado di servirsi di pochi nastri. Dalla parte delle macchine più articolate si raggiunge il livello degli odierni computers dotati di linguaggi di programmazione evoluti; dalla parte opposta si hanno le macchine di Turing che dispongono di pochi tipi di istruzioni e di un solo nastro.

Naturalmente queste simulazioni sono effettuate con consumi di risorse di tempo, di memorie e di lavoro di interpretazioni delle istruzioni enormemente diversi.

Questi risultati su simulazioni e considerazioni sulla collegabilità delle macchine portano a convincimenti di rilevanza strategica:

- i problemi associabili alla matematica possono essere affrontati da una grande varietà di algoritmi;
- le elaborazioni affidabili possono essere demandate a molteplici esecutori;
- le attività volte a soluzioni affidabili dei problemi costituiscono un corpo unitario di possibilità operative.

Si giunge anche alla cosiddetta congettura di Church-Turing che qui esprimiamo affermando che tutte le elaborazioni affidabili possono essere effettuate da macchine di Turing o da macchine loro equivalenti.

Inoltre la unitarietà delle attività risolutive affidabili è rafforzata dalla dimostrazione della esistenza della macchina di Turing universale, macchina in grado simulare tutte le macchine di Turing (e anche se stessa).

Si possono svolgere anche considerazioni che fanno riferimento a esecutori automatici equivalenti alle MSMt ma di genere imprecisato che chiamiamo Macchine Sequenziali Programmabili trasformatrici, in sigla MSPt. Per alcuni sviluppi di questioni generali risulta conveniente riferirsi, per la loro essenzialità, alle macchine di Turing, nelle due versioni, le trasformatrici MTt e le generatrici MTg.

Come primo passo verso l'infinito si propone l'astrazione delle successioni illimitate di oggetti semplici come le stringhe su un dato alfabeto e i numeri interi naturali, successioni la cui produzione può essere portata avanti da vari tipi di esecutori, in particolare dalle varianti generatrici delle MSM chiamate macchine MSMg.

Una tale attività illimitata potrebbe essere rifiutata da chi si preoccupa delle risorse disponibili per applicazioni specifiche.

Una visione più lungimirante, invece, si aspetta che nel tempo vengano avanzate richieste sempre più esigenti che necessitano di risorse progressivamente crescenti la cui disponibilità dovrà essere esaminata caso per caso.

Per questo si rivela molto conveniente sviluppare argomentazioni per fini generali che prescindono totalmente dagli esami di disponibilità delle risorse, pur riconoscendo la necessità che siano affrontati prima di ogni elaborazione a fini specifici.

Come primo passo si propone la possibilità di fare riferimento ad insiemi ambiente illimitatamente generabili costituiti da entità facilmente controllabili, a cominciare da \mathbb{N} e più in generale da monoidi liberi della forma \mathbb{F}^* per i vari alfabeti finiti \mathbb{F} che possono essere utili.

Specificamente si individuano quelle che chiamiamo MSP generatrici, in breve MSPg, varianti delle MSPt precedentemente viste. Ciascuna delle MSPg è costruita per un solo tipo di esecuzione che consiste nel procedere fino a un qualche punto alla generazione di successive stringhe da emettere su un nastro di uscita. Questo processo potrebbe proseguire illimitatamente, ma nella realtà ogni esecuzione è condizionata dalle risorse disponibili, cioè dal tempo di funzionamento e dalla estensione disponibile del nastro di uscita (anche se queste risorse potrebbero essere ampliabili).

Parleremo comunque di generazione illimitata di una successione di stringhe.

È facilmente precisabile una MSPg in grado di procedere a generare le successive notazioni unadiche degli interi naturali.

Anche se meno semplice, è possibile precisare una MSPg in grado di procedere alla emissione delle stringhe su un dato alfabeto A ; essa opera in successive fasi $F_0, F_1, F_2, \dots, F_s, \dots$ e nella F_s effettua la generazione secondo l'ordine lessicografico dell'insieme finito di tutte le stringhe di lunghezza n .

Le due successioni potenzialmente illimitate generate si rappresentano, risp., con le notazioni \mathbb{N} e A^* . Come le altre successioni generabili dalle MSPg sono dette **insiemi ricorsivamente enumerabili**.

Accade che data una stringa qualsiasi è banale stabilire se appartiene o meno a \mathbb{N} e a A^* .

Ciascuno di questi insiemi è abbastanza controllabile in quanto si individua qualche suo ordinamento algoritmico, cioè tale che si conosca un algoritmo che dati due suoi elementi decide quale di essi precede l'altro secondo il detto ordinamento.

Diciamo insieme procedurale o insieme ricorsivamente enumerabile ogni insieme ottenibile da una macchina MSPg.

Più in particolare si dice **insieme ricorsivo** un insieme procedurale R per il quale si conosce un algoritmo che per ciascuno degli elementi dell'ambiente nel quale esso si colloca geneticamente consente di decidere se appartiene o meno ad R ; si dice anche che per tale insieme è decidibile il **problema dell'appartenenza**.

Ogni insieme ricorsivo può essere generato progressivamente, ovvero secondo un ordinamento totale algoritmico, cioè in modo tale che, si trova un algoritmo che, dati due suoi elementi, è in grado di decidere quale dei due preceda l'altro. Questo contribuisce a rendere gli insiemi ricorsivi relativamente controllabili.

Dunque \mathbb{N} e gli A^* sono **insiemi ricorsivi**. Dopo di essi si possono individuare altri insiemi ricorsivi effettuando facili estensioni e composizioni dei precedenti con macchine generatrici facilmente definibili: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \mathbb{Q}^{\times 3}, \dots$.

Questi insiemi costituiscono degli ambienti nei quali si possono collocare molte costruzioni con proprietà e applicazioni interessanti.

Molti altri insiemi ricorsivi interessanti si ottengono aggiungendo a una MSPg che fornisce un insieme ricorsivo già noto qualche tipo di algoritmo selettivo.

Si individuano in tal modo gli insiemi dei numeri pari, dei numeri primi, delle stringhe palindrome, delle stringhe le cui lunghezze sono date da formule calcolabili e altri insiemi caratterizzati da proprietà finitamente decidibili.

Insiemi di questo genere più elaborati e con promettenti conseguenze sono:

- l'insieme delle formule ben formate costruibili con parentesi, segni di operatori e identificatori di operandi costanti o variabili.
- l'insieme dei programmi che possono governare le MSPt o le MSPg di un particolare genere.

Abbiamo quindi che molti insiemi di formule e gli insiemi delle MSP dei vari generi sono ricorsivi; si può quindi procedere alla generazione di ciascuno di essi con una qualche macchina generatrice.

Conviene segnalare che questi accennati insiemi ricorsivi, come i finiti, hanno una vasta gamma di applicazioni e che per essi si possono definire operazioni e relazioni ben controllabili e di sperimentata utilità.

In particolare si possono introdurre utili strutture algebriche che hanno come terreno questi insiemi. In particolare si definiscono le algebre di Boole di sequenze e questo conduce alla possibilità di avvalersi del calcolo dei predicati.

È utile ribadire che queste nozioni basate su costruzioni portano notevoli vantaggi per la organizzazione delle conoscenze matematiche e per la definizione di problemi di ogni genere.

Attraverso esempi coinvolgenti insiemi finiti e ricorsivi si può consolidare l'utilizzazione del linguaggio degli insiemi, sia per la formulazione di conoscenze generali che per la definizione di molteplici applicazioni.

g. Confini degli insiemi ricorsivi e insiemi di uso euristico

Per servirsi affidabilmente degli insiemi ricorsivi occorre conoscere meglio i confini del loro insieme. Per questo occorre chiarire quali possono essere i comportamenti delle macchine sequenziali programmabili generatrici.

Per le evoluzioni di una di tali macchine \mathbf{M} , che possiamo limitarci a considerare che non emetta stringhe ripetute, si riscontrano e si individuano vari tipi di possibilità.

- (1) \mathbf{M} si arresta dopo un numero finito di passi dopo aver emesso un insieme finito.
- (2) La macchina potrebbe procedere a generare illimitatamente stringhe che si ripetono ciclicamente e può essere arrestata avendo generato un insieme finito.
- (3) la macchina si dimostra procedere a generare progressivamente un insieme ricorsivo illimitato.
- (4) si riconosce che la macchina potrebbe procedere illimitatamente a generare stringhe, ma non si riesce a stabilire se sarà generato un insieme finito (eventualmente vuoto) o una successione illimitata di stringhe.
- (5) \mathbf{M} procede disordinatamente e a un certo punto della sua evoluzione non si sa in quale modo potrebbe proseguire. Questa è la possibilità più incerta e preoccupante: lasciando proseguire la sua evoluzione si potrebbe giungere a una conclusione o a una situazione più chiara; per contro si corre il rischio di sprecare risorse.

Un chiarimento importante si ha con la individuazione di una macchina generatrice che genera un insieme non ricorsivo.

Dopo aver chiarito che un insieme ricorsivamente enumerabile è ricorsivo sse è ricorsivamente enumerabile anche il suo complementare, si individua con una tipica costruzione diagonale alla Cantor una macchina in grado di simulare tutte le MSPG che genera un insieme L per il quale non si può trovare alcuna MSPG in grado di generare il suo complementare.

Questo risultato negativo costituisce un punto di debolezza per le macchine procedurali, in quanto per poter contare su una tale macchina è opportuno accertarsi che generi un insieme ricorsivo.

Questo dice anche che procedendo con metodi esclusivamente costruttivi si incontrano insiemi con limiti poco definiti il cui utilizzo affidabile viene posto in dubbio.

Nello sviluppo della descrizione delle conoscenze matematiche sono molte le occasioni in cui si sente la necessità di fare riferimento, almeno a livello intuitivo, a entità da chiamare insiemi in quanto sarebbe comodo servirsi di nozioni come elementi che gli appartengono, entità che gli sono estranee e suoi sottoinsiemi. Per queste occasioni si possono individuare esempi familiari per molti.

Questi che chiamiamo **insiemi euristici** devono avere chiare finalità conoscitive e devono potersi illustrare mediante metafore di ampia adozione (contenitori, zone delimitate da confini ben comprensibili, ...) .

Alcuni esempi di insiemi euristici:

insieme delle funzioni dagli interi naturali a valori interi naturali;

insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;

insieme delle permutazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

insieme delle traslazioni di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sottoinsieme del precedente;

insieme dei programmi per le MSM, per le MSP o per le MT.

I suddetti insiemi hanno collocazioni ed esempi di elementi sufficientemente definiti, ma può risultare comodo fare riferimento ad altri insiemi euristici ancor più generici:

insieme dei sottoinsiemi di un generico insieme S ,

insieme di tutte le relazioni binarie,

insieme di tutti gli insiemi.

Anche per utilizzare affidabilmente uno di questi insiemi risulta necessario conoscerlo meglio ed in particolare conoscere i suoi confini; serve almeno saper riconoscere suoi elementi ed entità ad esso estranee.

Accade però che si individuano insiemi procedurali per i quali non è decidibile il problema dell'appartenenza e a questo fatto si collegano varie questioni critiche che costituiscono problemi aperti.

In particolare si individua facilmente una procedura generatrice progressiva che fornisce la successione di tutti i sottoinsiemi finiti di \mathbb{N} o di un altro insieme numerabile, mentre viene dimostrata la non esistenza di una procedura in grado di generare tutti i sottoinsiemi, finiti e infiniti, di un insieme numerabile.

Inoltre va subito detto che quando si prende in considerazione l'insieme di tutti gli insiemi si giunge a paradossi che intorno al 1900 hanno posto in crisi gli stessi fondamenti della matematica.

h. Ambienti geometrici

Le nozioni geometriche sono argomenti che si ritiene particolarmente opportuno introdurre con gradualità e con atteggiamento costruttivo.

Si può procedere a definire ambienti strutturati via via più estesi e dotati di operazioni, trasformazioni e simmetrie sempre più ricche in modo da risultare via via più prestanti nei confronti delle molte possibili applicazioni.

Passiamo in rassegna una successione di questi ambienti geometrici.

Intervallo di interi con la simmetria della riflessione, ovvero dotato della dualità dovuta a due ordinamenti totali opposti.

Insieme ricorsivo \mathbb{N} , estensione del precedente nella quale si possano sommare tutte le coppie di elementi.

Insieme \mathbb{Z} ottenuto ampliando \mathbb{N} per disporre della simmetria per riflessione o, equivalentemente, per garantire la possibilità di effettuare la differenza fra elementi arbitrari.

Questo insieme illimitato può essere utilmente confrontato con gli insiemi finiti $(-2^{n-1} : 2^{n-1} - 1]$ delle implementazioni con n bits dei numeri implementati come **integer**.

Le carte millimtrate (come le scacchiere) costituiscono arricchimenti in due dimensioni degli intervalli di interi e si rendono esplicitamente disponibili mediante la generazione di insiemi di coppie. Questo tipo di ambiente è opportuno associarlo a un modello fisico ottenibile mediante raggi luminosi, regoli e compassi, in quanto è in grado di fornire la base formale per le visualizzazioni a cominciare dalle più semplici, visualizzazioni universalmente utilizzate come strumenti conoscitivi e in particolare per modelli applicativi.

Il piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dei punti a coordinate intere è l'ampliamento illimitato della carta millimetrata; la sua illimitatezza consente tutte le traslazioni, ma poche riflessioni e poche rotazioni; tra queste è da porre in evidenza il mezzo giro come annuncio della versatilità dei numeri complessi.

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si rivela molto ricco di sviluppi operativi e conoscitivi ed in esso si introducono nelle versioni più semplici ma ben tangibili molte nozioni cruciali: vettori e segmenti, semirette, orientazioni/direzioni, pendenze (associabili a rapporti e a numeri razionali), rette e sistemi di equazioni diofantee, (non facilmente trattabili), poligonali (cammini) e poligoni (circuiti).

La retta sui razionali \mathbb{Q} viene introdotta come ampliamento dell'insieme degli interi \mathbb{Z} in seguito al riconoscimento della necessità di trattare precisioni migliorabili per le valutazioni quantitative.

Esso può essere presentato in due fasi: al modello fisico di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si applicano successive riduzioni della unità di misura a suoi sottomultipli al fine di trattare con i soli numeri interi le valutazioni relative a problemi le cui soluzioni si ottengono attraverso un numero finito di passi; la fase finale consiste nella invocazione della illimitatezza potenziale.

In effetti \mathbb{Q} dispone della omotetia, trasformazione ben più ricca della dilatazione disponibile in \mathbb{Z} , e quindi consente di effettuare la divisione, operazione costituente una trasformazione inversa e quindi portatrice di elevate potenzialità risolutive.

In un'ottica algebrica il potenziamento di \mathbb{Z} con \mathbb{Q} può vedersi come passaggio dai semigruppri ambivalenti in monoidi liberi della forma \mathbb{F}^* per opportuni alfabeti \mathbb{F} ai più incisivi gruppi.

Passando alle due dimensioni si effettua l'ampliamento cartesiano dei razionali ottenendo il piano sui razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. In questo ambiente si possono trattare le equazioni lineari e l'algebra lineare, strumenti risolutivi molto più maneggevoli delle equazioni diofantee.

Va notato che, sia per l'ampliamento di \mathbb{Z} con \mathbb{Q} , che con il passaggio da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si deve definire un ambiente costitutivamente più elaborato, ma si ottiene a un ambiente operativamente superiore.

Il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è ulteriormente ampliabile senza difficoltà a 3 e più dimensioni per fornire versioni più generali, ma sempre maneggevoli, dell'algebra lineare e per predisporre ad operare in più astratti e più prestanti spazi vettoriali.

In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si possono introdurre le terne pitagoriche, il teorema di Pitagora, le rotodilatazioni e gli angoli con tangente, seno e coseno razionali.

In $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si può trattare una gamma di rotazioni densa e maneggevole che consente di portare avanti una trigonometria che necessita solo di funzioni sui razionali.

Inoltre, seguendo la proposta della trigonometria razionale di N. J. Wildberger, si possono trattare in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tutti i triangoli rettangoli ed effettuare rotazioni e numerosi calcoli geometrici mediante quadrante e altre funzioni quadratiche a valori razionali.

I limiti della strumentazione razionale si manifestano con la necessità di risolvere semplici problemi di geometria piana che richiedono di servirsi dei numeri algebrici a cominciare da $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$.

Proseguendo nell'allargamento delle prestazioni computazionali si giunge a richiedere i numeri illimitatamente costruibili, entità che consentono di risolvere molti problemi mediante algoritmi in grado di fornire valutazioni approssimate che, in linea di principio, riescono a conseguire tutte le precisioni richiedibili.

Si trova dunque che per molte esigenze applicative basta lo strumento costruttivo delle procedure progressive, mentre la nozione dei cosiddetti numeri reali può essere rinviata.

Va tuttavia segnalato che rimanendo nell'ambito costruttivo risultano decisamente indeterminati i confini degli insiemi dei numeri costruibili e degli insiemi costruibili, insiemi che si devono lasciare aperti ai gradualmente ampliamenti ottenibili con nuovi contributi specifici condizionati dalla eventualità.

In effetti il panorama degli ambienti matematici, accanto ad insiemi con confini ben definiti (come \mathbb{Z} e \mathbb{Q}), ne presenta altri con alcune regioni ben controllabili e altre permanentemente aperte a nuove esplorazioni; tipico è l'insieme dei numeri primi.

j. Assiomatizzazioni e logica

Per ampliare sostanzialmente le conoscenze matematiche e i conseguenti strumenti risolutivi è necessario ricorrere a generalizzazioni e a ulteriori operazioni di astrazione.

Esempi incisivi di generalizzazione si trovano nella trattazione di quelle che si possono chiamare specie di strutture algebriche e algebrico-relazionali classiche: semigrupperi, gruppi, anelli, campi, spazi vettoriali, ordini, reticoli,

Ciascuna di queste specie di strutture viene introdotta da un suo sistema di assiomi che richiede siano soddisfatte determinate proprietà prescindendo da come possano essere costruiti gli elementi delle singole strutture e questo consente di individuare proprietà soddisfatte da estese collezioni di strutture, con notevole economia di pensiero e vantaggi per la organizzazione delle relative conoscenze.

Accade inoltre che per ciascuna di queste specie di strutture si trovano numerosi esemplari concretamente individuabili che in buona parte si rivelano utili per applicazioni dirette e indirette.

Questo induce a confidare che con le astrazioni fondate su assiomi si possono conseguire due vantaggi:

- (1) rilevanti economie di pensiero consentite da dimostrazioni a livello astratto di portata generale che spesso si rivelano più semplici ed essenziali di quelle condotte su loro esemplari di utilità diretta, ma appesantite da dettagli costruttivi;
- (2) una gestione delle conoscenze matematico-computazionali che la letteratura mostra essere complessivamente molto affidabile e incisiva.

Si impongono quindi le introduzioni assiomatiche a cominciare da quelle dei numeri reali e degli insiemi. I due sistemi di assiomi di queste entità, non semplici per i non addetti, sono resi giustificabili dalla disponibilità di esempi di forte impatto: per i reali i numeri costruibili e le loro ben note scritte decimali illimitatamente estendibili; per gli insiemi, oltre ai finiti e ai ricorsivi, le collezioni e le famiglie imposte da una quantità di sviluppi con finalità generali (ad esempio gli insiemi delle relazioni con le diverse caratterizzazioni di interesse applicativo).

A questo punto risulta ineludibile anche la introduzione della logica formale, disciplina non facile ma determinante per garantire la attendibilità delle dimostrazioni poco intuibili.

A sostegno della importanza della logica e dei suoi formalismi può essere utile citare le sue applicazioni all'informatica e alla programmazione.

Sopra la dialettica algoritmi - astrazioni vanno segnalate da un lato la poca incisività dei numeri reali non costruibili, evidentemente non esemplificabili, e all'opposto la rilevante utilità della totalità dei numeri reali per la divulgazione del calcolo infinitesimale e delle sue fondamentali applicazioni.

Avvalendosi sia del metodo logico deduttivo che di esempi di valenza applicativa si può quindi procedere con esposizioni (che possono svilupparsi a diversi livelli di sofisticazione formale) di tematiche come calcolo differenziale ed integrale, geometria analitica, sintetica e differenziale, equazioni differenziali, calcolo variazionale, probabilità e statistica, ricerca operativa, calcolo vettoriale fino alla fisica matematica, al calcolo delle probabilità e alla statistica con tutte le loro applicazioni in ingegneria, economia etc etc etc.

i. Organizzazione dell'esposizione

Lo sviluppo di ogni estesa esposizione della matematica che sia aperta ad ampliamenti e a collegamenti con contenuti esterni richiede la adozione di criteri organizzativi ben determinati e il più possibile omogenei.

L'esposizione proposta presenta gli sviluppi dei contenuti organizzati da ripartizioni di quattro livelli: tomi, capitoli (ciascuno veicolato da un file in formato .pdf), sezioni e paragrafi; ogni paragrafo è individuato da sigle come la B32:c.06 o la equivalente B32c06 .

Essa viene accompagnata da indici che aiutano a monitorare la consequenzialità degli sviluppi, molti dettagli delle definizioni e degli enunciati, la coerenza dei termini e delle notazioni e le perduranti mancanze tra i contenuti.

Della esposizione presentata fanno parte:

- un indice KWIC (KeyWords In Context) dei titoli di capitoli e sezioni;
- un indice KWIC dei termini;
- un indice delle notazioni ripartite per ruoli;
- un indice degli acronimi e delle altre abbreviazioni;
- un indice delle persone citate;
- una bibliografia orientativa.

Le strutture informative che riguardano gli indici finora sono state portate avanti artigianalmente e vanno considerate solo come primi tentativi. In seguito, grazie all'intervento di Maria Teresa Artese e Isabella Gagliardi dell'Istituto CNR IMATI, si intendono adottare automatismi più efficaci; si pensa anche alla adozione di piattaforme informatiche più interattive del sistema $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$.

Per termini e notazioni si ritiene vantaggioso adottare varie scritture non tradizionali per le quali si cercano criteri di omogeneità.

Per le notazioni si sono definiti alcuni simboli formati semplicemente da rettangolini come i seguenti:

- ⏞ such that, tale che;
- ⏞_x per alfabeti con ruoli generali;
- ⏞ segno esprime, a esponente, la chiusura di equivalenza;
- ⏞ operatore di sovrapposizione di matrici ;
- ⏞ e ⏞ delimitatori di enunciati,
- ⏞ e ⏞ delimitatori degli argomenti formali di una proprietà formale ;
- ⏞ , ⏞ ed ⏞ segni per funzioni specifiche per espressioni come la $\text{⏞} R \in \mathbf{Rel}_{\mathfrak{B}} \text{⏞} R \cup R^{\leftarrow} \text{⏞}$.

Nelle formule molte entità sono denotate da sigle alfanumeriche che cercano di risultare sia mnemoniche che concise; per esse si utilizzano fonts diversificati che cercano di identificarne la specie.

Molti sigle e molti termini riguardanti entità specifiche richiedono precisazioni costituite da aggettivi, avverbi e specificazioni.

Nelle formule le entità specifiche sono denotate da simboli arricchiti da precisazioni che compaiono a esponente, a deponente o tra parentesi dei vari aspetti.

Per molti termini si adottano forme chiamate “sincopate” nelle quali le dette precisazioni sono abbreviate da pochi caratteri.

Alcuni esempi:

- $\mathbf{RelTrns}_{A^*}$ insieme delle relazioni transitive tra stringhe sui caratteri dell'alfabeto A ;
- \odot^{be} estensione booleana dell'operazione o della funzione \odot ;
- $\text{CircfQQ}_{C,n/d}$ circonferenza in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con centro in C e raggio n/d ;
- $R^{\text{⏞}}$ chiusura di equivalenza della relazione R ;
- FunQQ insieme delle funzioni da razionali a razionali ;
- FunRRCnt insieme delle funzioni di variabile reale a valori reali continue ;
- $\mathbf{R}[[X, X^{-1}]]$ insieme delle serie formali di Laurent sul corpo commutativo \mathbf{R} nella variabile X ;
- $[a : b)$ intervallo degli interi r tali che $a \leq r < b$;

- $(a :: b)$ intervallo dei razionali r tali che $a < r \leq b$;
- (a, b) intervallo dei reali r tali che $a < r < b$;
- $\langle \mathcal{E} | \mathcal{F} \rangle$ prodotto scalare alla Dirac del bra \mathcal{E} e del ket \mathcal{F} ;
- $\prod_{i=0}^{\omega} M(i)$ fiancheggiamento delle matrici M_i ;
- $[\mathcal{O}]$ classe degli insiemi chiusi risp. alle operazioni algebriche fornite dalla scrittura \mathcal{O} ;
- $[\mathcal{O}] =$ operatore di ampliamento algebrico dovuto alle operazioni rappresentate dalla scrittura \mathcal{O} .

Nelle esposizioni piuttosto estese di argomenti matematici se si utilizzasse un unico linguaggio a un buon livello di precisione si avrebbero discorsi molto prolissi e poco leggibili. Si deve invece ricorrere a vari tipi di semplificazioni più o meno implicite che conducono ai cosiddetti abusi di linguaggio (e anche ad abusi di notazioni); questi quando si rimane in contesti circoscritti sono da considerare difetti veniali, almeno quando l'andamento della esposizione consente di evitare le ambiguità.

Per alcune di queste semplificazioni viene adottata una cosiddetta identificazione: vengono in particolare identificate molte strutture algebriche con il terreno sul quale sono definite, molte entità astratte con le loro rappresentazioni più comuni, molte strutture con strutture loro isomorfe o anche criptomorfe.

Altre semplificazioni di linguaggio consistono nel sostituire alcune entità con oggetti metaforici (di natura visuale, cinematica, dinamica, economica, ...) e a servirsi di termini riconducibili a questi oggetti senza definirli esaurientemente.

Altre semplificazioni consistono nel trascurare elementi qualificanti per le entità su cui si argomenta. Questo accade in particolare quando si alternano considerazioni su entità generali ad analisi di entità più particolari sulle quali si ottengono ed enunciano proprietà più incisive delle corrispondenti generali.

L'esposizione presentata si sforza di esplicitare i molti accorgimenti semplificativi che sono adottati, sia in molta letteratura consolidata, sia all'interno della esposizione stessa.

Va segnalato che per dare veste sistematica a taluni di questi accorgimenti si è reso necessario introdurre apposite astrazioni.



Un ringraziamento a Stefania De Stefano, Renato Betti e Gabriele Lucchini per i loro utili suggerimenti.