Alberto Marini, associato CNR IMATI Milano

Un approccio discreto e graduale alla matematica

Pagine proiettate durante la comunicazione presentata il 5 settembre 2019 nella Sezione 23 dedicata alla Divulgazione della matematica del XX Congresso UMI tenutosi a Pavia.

1. Un apparato con la matematica

La matematica ha acquisito un vasto corpo di conoscenze incentrato su definizioni ed enunciati saldamente motivati e coerenti.

Questa disciplina oggi gode di ampia considerazione, sia perchè riconosciuta elemento determinante per gran parte delle odierne attività applicative, sia perché, grazie al suo accurato linguaggio, non è incorsa nei costosi cambiamenti di rotta che si sono riscontrati in tanti altri campi.

Forse però non viene sufficientemente riconosciuto il fatto che essa continua a crescere notevolmente e ad ampliare le sue possibilità di influenzare le altre attività.

A questo quadro si deve aggiungere la vicinanza tra la matematica e le tecnologie informatiche (in perdurante sviluppo), sia in termini di applicazioni che di parte dei contenuti.

A questo proposito ricordo che Doron Zeilberger, padre dello studio algoritmico delle identità ipergeometriche e polemista ad ampio raggio, il computer che chiama Shelosh B. Ekhad, lo considera suo coautore, lo fa criticare Yuri Manin e sostiene che fra qualche decina d'anni la matematica sarà sviluppata principalmente da automatismi.

Sono quindi portato a pensare che sia opportuno fare riferimento ad un ambizioso **apparato** che vede le conoscenze matematiche collegate agli algoritmi in grado di risolvere specifici problemi applicativi e di affrontare metodicamente problematiche di ampio impatto.

Questo apparato merita di essere il soggetto di **esposizioni** tendenzialmente estese, solidamente argomentate e ampiamente fruibili.

2. Una esposizione dell'apparato

Passo ora a presentare alcuni aspetti di una esposizione in italiano che tocca argomenti non distanti da quelli dei primi anni universitari, consiste di circa 2500 pagine accompagnate da 600 pagine di indici e che si può considerare come una sperimentazione personale.

Essa è rivolta primariamente a persone interessate non occasionalmente alle applicazioni ed a persone che considerano di primaria importanza culturale le conseguenze dei risultati della matematica e dell'informatica.

Questa **esposizione in fieri** si sforza di essere esaurientemente motivato, stilisticamente omogeneo e aperto agli ampliamenti.

Essa viene presentata in linea su files .pdf ottenuti con il sistema Plain TEXUn centinaio di files riguardano i contenuti organizzati in ripartizioni a 4 livelli chiamate, risp., tomi, capitoli, sezioni e paragrafi; questi ultimi sono individuati da coordinate come B35f06 e G42d12.

Altri files sono dedicati a indici che aiutano a monitorare la consequenzialità degli sviluppi, la coerenza di termini e notazioni e i tanti componenti solo abbozzati.

indice KWIC (KeyWords In Context) dei titoli di capitoli e sezioni;
indice KWIC dei termini;
indice delle notazioni ripartite per ruoli;
indice degli acronimi e delle altre abbreviazioni;
indice delle persone citate;
bibliografia orientativa.

Per perseguire sistematicità e omogeneità sono state adottate notazioni e termini non usuali, nella convinzione che possano contribuire alla coerenza e alla precisione di enunciati e formule.

Per le notazioni si sono definiti alcuni semplici simboli, formati da rettangolini, come i seguenti:
⫓ such that, tale che;
$\sqcap_x$ per alfabeti cui sono attribuiti ruoli generali;
▚ segno esprimente, a esponente, la chiusura di equivalenza;
⊟ operatore di sovrapposizione di matrici ;
⌈ e ⌉ delimitatori di enunciati,
⌈ , ⊮ ed ⌉ segni per funzioni specifiche in espressioni come la ⌈ $R \in \mathsf{Rel}_{\mathfrak{B}}$ ⊮ $R \cup R^{\leftarrow}$ ⌉ .

Molte entità sono identificate da sigle alfanumeriche che utilizzano fonts diversificati e cercano di risultare sia mnemoniche che concise.

Molte sigle e molti termini significanti entità specifiche richiedono precisazioni con ruoli assimilabili ad aggettivi, avverbi e preposizioni.
Nelle formule le entità specifiche sono identificate da simboli arricchiti da precisazioni che compaiono a esponente, a deponente o tra parentesi di diversi aspetti.
Per molti termini si adottano forme chiamate "sincopate" nelle quali le dette precisazioni sono abbreviate da pochi caratteri.

Alcuni esempi:
$\mathsf{RelTrns}_{A^*}$ insieme delle relazioni transitive tra stringhe sull'alfabeto A ;
$\odot^{be}$ estensione booleana dell'operazione o della funzione $\odot$;
$\mathsf{CircfQQ}_{C,n/d}$ circonferenza in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con centro in C e raggio n/d ;
$R^{▚}$ chiusura di equivalenza della relazione R ;
FunQQ insieme delle funzioni da razionali a razionali ;
$\mathsf{FunRRCnt}$ insieme delle funzioni di variabile reale a valori reali continue ;
$\boldsymbol{R}[[X, X^{-1}]]$ insieme delle serie formali di Laurent sul corpo commutativo $\boldsymbol{R}$ nella variabile X ;
$[a : b)$ intervallo degli interi r tali che $a \leq r < b$;
$(a :: b]$ intervallo dei razionali r tali che $a < r \leq b$;
(a, b) intervallo dei reali r tali che $a < r < b$;
$\langle \mathcal{E} | \mathcal{F} \rangle$ prodotto scalare alla Dirac del bra $\mathcal{E}$ e del ket $\mathcal{F}$;
$⫴_{i=0}^{\omega} \mathtt{M}_i$ fiancheggiamento delle matrici $\mathtt{M}_i$;
$[\ \mathcal{O}\ ]$ classe degli insiemi chiusi risp. alle operazioni algebriche fornite dalla scrittura $\mathcal{O}$;

L'attuale esposizione è stata portata avanti utilizzando strumenti informativi artigianali. In seguito, grazie all'intervento di Maria Teresa Artese e Isabella Gagliardi (Istituto CNR IMATI), si intendono adottare automatismi più efficaci e studiare piattaforme più interattive del sistema Plain TEX.

Come in tutte le esposizioni estese per evitare la prolissità si devono adottare semplificazioni e abusi di linguaggio; per questo ci si è sforzati di esplicitare gli accorgimenti semplificativi, anche introducendo apposite astrazioni.

3. Avvio dell'esposizione

Vediamo alcuni aspetti della parte iniziale dell'esposizione e in particolare il suo procedere graduale e la priorità del discreto.

Le ambizioni dell'apparato richiedono l'impiego di numerosi **agenti** dotati di varie competenze.

Con una drastica schematizzazione si propongono tre tipi di **agenti**:
gli **innovatori**, o ricercatori, dedicati a portare avanti la ricerca matematica e la sua presentazione,
gli **esecutori umani** e
gli operatori costituiti da automatismi.

Gli innovatori incaricano gli esecutori di risolvere istanze di problemi loro presentate da **committenti** svolgendo elaborazioni rette da **algoritmi**.

Alla possibilità di demandare a molti esecutori le soluzioni di problemi che si pongono in circostanze diverse si attribuisce il valore sociale della matematica.

È ormai inevitabile contare sugli esecutori automatici a causa dei crescenti livelli delle loro prestazioni nelle varie dimensioni della velocità, della precisione, della disponibilità nel tempo e negli ambienti ostili, del numero e dei costi complessivi.

La prima questione da affrontare riguarda le comunicazioni fra agenti e committenti. Essi si scambiano messaggi costituiti da stringhe di caratteri appartenenti ad alfabeti definiti con convenzioni che si vogliono adattabili alle esigenze che via via si incontrano.

Le prime elaborazioni da esaminare riguardano operazioni sopra le stringhe che si scambiano agenti e committenti e vengono affidate a quelle che chiamiamo Macchine Sequenziali Multinastro (MSM), macchine con caratteristiche simili a quelle delle classiche macchine di Turing ma di queste meno spartane; la scelta è motivata dal fatto che le loro manovre sono assimilabili a quelle richieste agli esecutori umani.

Sostanzialmente queste macchine operano su stringhe e sono in grado di effettuare sequenze di operazioni molto elementari basate sulla capacità di decidere se due caratteri sono uguali o diversi e di scegliere di conseguenza fra due successivi comportamenti.

La estrema semplicità delle loro operazioni e l'elevato livello qualitativo degli odierni dispositivi elettronici inducono a proporre di condividere ampiamente la loro elevata affidabilità.

Inoltre si individuano numerosi tipi di macchine aventi la stessa portata delle MSM che diremo macchine sequenziali programmabili, MSP; tra queste si trovano sia le macchine di Turing che gli odierni computers.

Già le prime operazioni sulle stringhe consentono di introdurre nelle versioni più semplici, ma anche maneggiabili tangibilmente, operazioni e relazioni matematiche di ampia applicazione.

Le prime operazioni sono giustapposizione, riflessione, le relazioni essere prefisso, suffisso o infisso, riconoscimento di coppie e di liste di stringhe più semplici, e quindi relazioni in generale e in particolare equivalenze, ordinamenti, funzioni, permutazioni, matrici, grafi, ...

Successivamente si incontrano dualità e simmetrie e attraverso le sostituzioni di caratteri e stringhe si giunge agli omomorfismi. Di tali nozioni si sottolinea l'utilità in termini di economia operativa e di pensiero nell'ambito delle argomentazioni per fini generali e della organizzazione delle conoscenze matematiche.

Gli insiemi finiti e i numeri naturali vengono presentati come prime astrazioni motivate dai vantaggi che apportano alla organizzazione delle conoscenze matematiche; queste inoltre vengono proposte come utili per sostenere la crescita in una ampia prospettiva del patrimonio di algoritmi (e di sistemi software).

4. Praticità dell'infinito

Mentre i primi sviluppi dell'apparato si svolgono nel finito e fanno riferimento a osservazioni empiriche, si pone il problema dell'infinito.

Per prime si mettono in campo le successioni infinite, oggetti che possono suscitare il rifiuto di chi si preoccupa delle risorse disponibili per applicazioni specifiche.

Una visione più lungimirante si aspetta che nel tempo vengano richiesti oggetti manipolabili sempre più estesi, in particolare rappresentazioni unadiche di numeri naturali sempre più grandi e stringhe sempre più articolate.

La generazione di questi oggetti può essere portata avanti da macchine facilmente realizzabili del tipo MSM o di tanti altri tipi che si dimostrano loro equivalenti; ovviamente per generare oggetti maggiori servono risorse maggiori.
Su questi temi si rivela molto conveniente argomentare per fini generali prescindendo totalmente dagli esami di disponibilità delle risorse, pur riconoscendo la necessità di affrontarli prima di ogni elaborazione a fini specifici.
I primi vantaggi si hanno nelle presentazioni di proposte di algoritmi in linea di principio applicabili a interi naturali qualsiasi e a stringhe qualsiasi, nelle situazioni reali attuabili previo accertamento delle risorse effettivamente disponibili o almeno ragionevolmente estendibili.

Mentre per un problema specifico si attua una elaborazione con le risorse disponibili, per una visione complessiva conviene sospendere la preoccupazione per le risorse, servirsi di insiemi come $\mathbb{N}$ e A^* per i vari alfabeti finiti utili A per definire concisamente algoritmi un poco idealizzati e ricavare dai loro effetti indicazioni e valutazioni potenzialmente riutilizzabili da formalizzare tra le conoscenze matematiche, lasciando alle successive singole situazioni la verifica della disponibilità delle risorse.

Questo atteggiamento dettato dal pragmatismo consente di evitare conflitti come quello sulla esistenza o meno dell'insieme $\mathbb{N}$ che vede contrapposti costruzionisti e ultrafinitisti.

A questo punto conviene riconoscere esplicitamente un dualismo algoritmi-astrazioni, la relazione fra soluzioni di problemi specifici e prospettive aperte dalle conoscenze matematiche. Questo dualismo da certi punti di vista è conflitto, mentre è sinergia secondo l'atteggiamento pragmatistico che si preoccupa sia delle necessità realistiche delle situazioni specifiche che della opportunità di migliorare l'organizzazione delle conoscenze matematiche evitando esposizioni pesantemente meticolose e poco leggibili.

Procedendo in questo modo si individuano costruttivamente insiemi ambiente ottenibili attraverso estensioni e composizioni di $\mathbb{N}$ e degli A^8 come $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^{\times 3}$, $\mathbb{Q}$, ...

Si rende poi disponibile una ampia gamma di insiemi illimitati ricchi di applicazioni ottenibili aggiungendp manovre selettive alle suddette procedure generatrici. Si individuano così gli insiemi dei numeri pari, dei numeri primi, delle stringhe palindrome, delle formule ben formate su parentesi, lettere e alcuni segni di operatore ed altri.

Tutti questi insiemi infiniti sono detti **insiemi ricorsivi** in quanto per ciascuno di essi è decidibile il problema dell'appartenenza, cioè si trova un algoritmo che per ciascun elemento nell'ambiente nel quale l'insieme si colloca geneticamente è in grado di decidere se gli appartiene o meno.

Gli insiemi ricorsivi, come gli insiemi finiti, sono tangibilmente maneggevoli: ciascuno di essi si può dotare di un ordinamento totale algoritmico, cioè tale che si trova un algoritmo che tra due suoi elementi diversi decide quale precede l'altro; su di essi si possono controllare operazioni e relazioni efficacemente esemplificabili e applicabili.

Inoltre si introducono utili strutture algebriche aventi insiemi ricorsivi come terreni; in particolare si introducono e si controllano facilmente le algebre di Boole e con esse il calcolo dei predicati.

5. Confini degli insiemi ricorsivi

Per servirsi affidabilmente degli insiemi ricorsivi occorre conoscere meglio i confini del loro insieme; per questo preliminarmente occorre chiarire i possibili comportamenti delle MSP.

Per le evoluzioni di una di tali macchine **M**, che possiamo limitarci a considerare che non emetta stringhe ripetute, si riscontrano e si individuano vari tipi di possibilità.

(1) **M** si arresta dopo un numero finito di passi dopo aver emesso un insieme finito.
(2) **M** procede a generare illimitatamente stringhe che si ripetono ciclicamente e può essere arrestata avendo generato un insieme finito.
(3) La macchina si dimostra procedere a generare progressivamente un insieme ricorsivo illimitato.
(4) Si riconosce che la macchina potrebbe procedere illimitatamente a generare stringhe, ma non si riesce a stabilire se sarà generato un insieme finito (eventualmente vuoto) o una successione illimitata di stringhe.
(5) **M** procede disordinatamente e a un certo punto della sua evoluzione non si sa in quale modo potrebbe proseguire. Questa è la possibilità più incerta: lasciando proseguire la sua evoluzione si potrebbe giungere a una conclusione o a una situazione più chiara, ma per contro si rischia di sprecare risorse.

Un chiarimento importante è fornto dalla individuazione mediante una tipica costruzione diagonale alla Cantor di una macchina che genera un insieme non ricorsivo.

Questo risultato negativo costituisce un punto di debolezza per le macchine procedurali, in quanto per poter contare su una tale macchina è opportuno accertarsi che generi un insieme ricorsivo.

In particolare si dimostra impossibile individuare un algoritmo che, data una procedura generatrice qualsiasi **P** e dato un elemento x dell'ambiente al quale devono appartenere gli oggetti generati decida se x verrà generato o meno.

Si conclude che procedendo con metodi esclusivamente costruttivi si incontrano insiemi con limiti poco definiti il cui utilizzo affidabile resta dubbio.

6. Ambienti geometrici

Anche le nozioni geometriche sono introdotte con gradualità e in modo costruttivo procedendo a definire ambienti via via più estesi e dotati di operazioni, trasformazioni e simmetrie sempre più ricche che li rendano via via più prestanti per le applicazioni.

Ecco una progressione di ambienti geometrici.

Intervallo di interi con la simmetria della riflessione.

Insieme ricorsivo $\mathbb{N}$, estensione del precedente tale da consentire la somma per tutte le coppie di elementi.

Insieme $\mathbb{Z}$ ottenuto ampliando $\mathbb{N}$ per disporre della simmetria per riflessione o, equivalentemente, per garantire la possibilità di effettuare la differenza per tutte le coppie di elementi.

Questo insieme illimitato può essere utilmente confrontato con gli insiemi finiti $(-2^{n-1} : 2^{n-1}-1[$ delle implementazioni con n bits dei numeri implementati come `integer`.

Di questo ambiente è opportuno dare un modello fisico ottenibile mediante raggi luminosi, regoli e compassi che dia una base formale per le visualizzazioni, cioè per strumenti conoscitivi essenziali.

Il piano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dei punti a coordinate intere è in grado di consentire tutte le traslazioni, ma poche riflessioni e poche rotazioni. Ricco comunque di sviluppi operativi e conoscitivi è l'ambiente delle versioni più semplici ma tangibili di molte nozioni cruciali:
vettori e segmenti, semirette, orientazioni/direzioni, pendenze (associabili a rapporti e a numeri razionali), rette e sistemi di equazioni diofantee, poligonali (cammini) e poligoni (circuiti).

La retta sui razionali $\mathbb{Q}$ amplia $\mathbb{Z}$ per consentire precisioni migliorabili per le valutazioni quantitative. Dispone della omotetia, trasformazione ben più ricca della dilatazione disponibile in $\mathbb{Z}$, che consente di effettuare la divisione, che come ogni trasformazione inversa ha elevate potenzialità risolutive.

Piano sui razionali $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nel quale si possono trattare le equazioni lineari, strumenti risolutivi molto più maneggevoli delle equazioni diofantee.

Il piano $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ è ulteriormente ampliabile senza difficoltà a 3 e più dimensioni per ospitare un'algebra lineare più generale, ma ugualmente meneggevole.

In $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ si possono introdurre le terne pitagoriche, il teorema di Pitagora, le rotodilatazioni e gli angoli con tangente, seno e coseno razionali.

In $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ si può trattare una gamma di rotazioni densa e maneggevole che consente di portare avanti una trigonometria che necessita solo di funzioni sui razionali.

Inoltre, seguendo la proposta della trigonometria razionale di N. J. Wildberger, si possono trattare in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tutti i triangoli rettangoli ed effettuare rotazioni e numerosi calcoli geometrici mediante quadranze e altre funzioni quadratiche a valori razionali.

I limiti della strumentazione razionale vengono superati introducendo i numeri algebrici e in seguito i numeri illimitatamente costruibili, entità che consentono di risolvere molti problemi con valutazioni approssimate illimitatamente precise.

Si trova dunque che per molte esigenze applicative la nozione dei cosiddetti numeri reali può essere rinviata.

Va tuttavia segnalato che risultano indeterminati i confini degli insiemi dei numeri e degli insiemi costruibili, insiemi aperti ai graduali ampliamenti ottenibili con nuovi contributi specifici condizionati dalla contingenza.

7. Assiomatizzazioni e logica

Per ampliare sostanzialmente le conoscenze matematiche e i conseguenti strumenti risolutivi è necessario ricorrere a generalizzazioni e a ulteriori operazioni di astrazione.

Esempi incisivi di generalizzazione si trovano nella trattazione di quelle che si possono chiamare specie di strutture algebriche e algebrico-relazionali classiche: semigruppi, gruppi, anelli, campi, spazi vettoriali, ordini, reticoli, ...

Ciascuna di queste specie di strutture viene introdotta da un suo sistema di assiomi che richiede siano soddisfatte determinate proprietà prescindendo da come possano essere costruiti gli elementi delle singole strutture e questo consente di individuare proprietà soddisfatte da grandi collezioni di strutture, con notevole economia di pensiero e vantaggi per la organizzazione delle relative conoscenze.

Per molte di queste specie di strutture si trovano esemplari concretamente individuabili che si rivelano utili per applicazioni dirette e indirette.

Si propone quindi anche a chi si occupa di applicazioni di confidare che le astrazioni basate su assiomi possono conseguire due vantaggi:

(1) rilevanti economie di pensiero consentite da dimostrazioni a livello astratto di portata generale che spesso si rivelano più semplici ed essenziali di quelle condotte su particolari strutture evidenziate da applicazioni dirette, ma appesantite da dettagli costruttivi;

(2) una gestione delle conoscenze matematico-computazionali che nel suo complesso la letteratura mostra essere altamente affidabile e incisiva.

Si impongono quindi le introduzioni assiomatiche a cominciare da quelle dei numeri reali e degli insiemi.

Sopra il dualismo *algoritmi-astrazioni* vanno segnalate da un lato la poca incisività dei numeri reali non costruibili, evidentemente non esemplificabili, e all'opposto l'utilità di $\mathbb{R}$ per la divulgazione del calcolo infinitesimale e delle sue fondamentali applicazioni.

Risulta ineludibile l'introduzione della logica formale, disciplina non facile ma determinante per garantire la attendibilità delle dimostrazioni poco intuibili.

A sostegno della importanza della logica e dei suoi formalismi può essere utile citare le sue applicazioni all'informatica e alla programmazione.

Va segnalato che la logica è alla base dello sviluppo di algoritmi per svariate applicazioni di intelligenza artificiale, per la Knowledge capture e, tornando a Shelosh B. Ekhad, per verifiche e dimostrazioni automatiche di teoremi.

Un ringraziamento a Stefania De Stefano, Renato Betti e Gabriele Lucchini per i loro utili suggerimenti.