Capitolo W55:
prontuario: PDE, funzioni analitiche, spazi di Hilbert

Contenuti delle sezioni

4 pagine

W55:a. equazioni alle derivate parziali, ossia PDE

W55:b. funzioni olomorfe e funzioni analitiche

W55:**b.01** funzioni olomorfe

Diciamo **funzione olomorfa** una funzione $f \in \lceil \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \rceil$, cioè una funzione della forma

$$w \; = \; f(z) \; = \; f(x + \mathsf{i}\, y) \; = \; u(x,y) + \mathsf{i}\; v(x,y) \;,$$

il cui dominio D è connesso e che in ogni punto interno di D è differenziabile, cioè tale che esista $f'(z) \; = \; \lim_{\Delta\, x \to \mathbf{0}_2} \dfrac{f(z + \Delta\, z) - f(z)}{\Delta\, z}$;

la $f(z)$ si dice olomorfa nel punto ∞ sse la $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ è olomorfa in 0

$f(z)$ è differenziabile in z sse le sue derivate parziali sono continue nei punti di D e sono soddisfatte le **equazioni di Cauchy-Riemann** $\quad \dfrac{\partial u}{\partial x} \; = \; \dfrac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} \; = \; -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

e le derivate parziali sono continue nei punti di D

se $f(z)$ è espressa nelle coordinate polari $r := \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta := \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, si devono soddisfare le equazioni $\; r\,\dfrac{\partial u}{\partial r} \; = \; \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \quad , \quad r\,\dfrac{\partial v}{\partial r} \; = \; -\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$

$\Delta\, u \; = \; \dfrac{\partial^2\, u}{\partial^2 x} + \dfrac{\partial^2\, u}{\partial^2 y} \; = \; 0 \;\Longrightarrow\; \Delta\, v \; = \; 0\;$ quindi u e v sono funzioni armoniche coniugate

$\{c_1 \in \mathbb{R} :|\; u(x,y) = c_1\}$ e $\{c_2 \in \mathbb{R} :|\; u(x,y) = c_2\}$ sono due famiglie di curve armoniche coniugate

se $\exists M \in \mathbb{R}_+ \;\; \rrbracket \;\; |f(z)| \leq M$ su una curva chiusa semplice Γ sulla quale $f(z)$ non è costante, allora $|f(z)| \leq M$ nella regione delimitata da Γ (principio del massimo modulo)

$f'(\overline{z}) \neq 0 \;\Longrightarrow\; w = f(z)$ in un intorno di a possiede una funzione inversa analitica e $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w} \; = \; \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}^{\mathbf{-1}}$

una funzione olomorfa nell'intetro piano complesso viene detta **funzione intera**

una funzione intera limitata è una funzione costante (**teorema di Liouville**)

$f(z)$ olomorfa per $|z| < 1$, $f(z) \leq 1$, $f(0) = 0 \;\Longrightarrow\; |f(z) \leq |z|$ con $|f(z) = |z| \Longleftrightarrow f(z) = c\, z$ con $|c| = 1$ (**lemma di Schwarz**)

W55:**b.02** **funzioni analitiche**

W55:c. spazi di Hilbert

Consideriamo uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V} = \langle V, ...\rangle$ sui reali / sui complessi.

Un prodotto interno è una funzione che scriviamo $\langle * \,|\, * \rangle$ di

$\lceil V \times V \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ / $\lceil V \times V \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ tale che

$\forall u, v, w \in V$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}$ / $\forall a, b \in \mathbb{C}$

$\langle u \,|\, u \rangle \geq 0$ e $u = \mathbf{0} \iff \langle u \,|\, u \rangle = 0$

$\langle u \,|\, v \rangle = \langle v \,|\, u \rangle$ / $\langle u \,|\, v \rangle = (\langle v \,|\, u \rangle)^*$

$\langle a\, u + b\, v \,|\, w \rangle = a \,\langle u \,|\, w \rangle + b \,\langle v \,|\, w \rangle$

Spazio di Hilbert sui reali o sui complessi è uno spazio con prodotto interno $\langle \bullet \,|\, \bullet \rangle$ che risulta anche completo.

u e v si dicono ortogonali e si scrive $u \perp v$ sse $\langle u \,|\, v \rangle = 0$.

Definita come norma di u $||u||^2 := \langle u \,|\, u \rangle$, esso risulta essere uno spazio normato.

$|\langle u \,|\, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$ (**disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**)

$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (**disuguaglianza triangolare**)

$u \perp v \implies ||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$ (**uguaglianza pitagorica**)

`Testi dell'`*esposizione* `in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`