Capitolo W50:
prontuario: trasformate di funzioni

Contenuti delle sezioni

5 pagine

W50:a. trasformata di Fourier

Supponiamo sia t una variabile reale per $\infty < t < +\infty$, ω una variabile in $\mathbb{R}$ ed $f(t)$ una funzione-RtR differenziabile a pezzi e assolutamente integrabile, ossia tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\, |f(t)| < \infty$.
Si definisce trasformata di Fourier della $f(t)$

$$\widehat{f}(\omega) \;:=\; \mathcal{F}_\omega\big(f(t)\big) \;:=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,\omega\, t}\, f(t)$$

In molti contesti il deponente della $\mathcal{F}$ si può trascurare.
L'enunciato $F(w) = \widehat{f}(t)$ si esprime anche con la scrittura $f(t) \supset F(\omega)$ o con la equivalente trasposta $F(\omega) \subset f(t)$.

W50:a.01 proprietà della trasformata di Fourier

linearità: $\mathcal{F}\big(\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t)\big) \;=\; \alpha_1 \cdot \mathcal{F}_\omega\big(f_1(t)\big) + \alpha_2 \cdot \mathcal{F}\omega\big(f_2(t)\big)$

simmetria: $f(t) \supset g(\omega) \Longrightarrow g(t) \supset 2\,\pi\, f(-\omega)$

parità: $f(t)$ pari $\Longrightarrow \widehat{f}(\omega)$ pari , $f(t)$ dispari $\Longrightarrow \widehat{f}(\omega)$ dispari

derivazione rispetto a un parametro:

$$F(\omega,\alpha) \;:=\; \mathcal{F}_\omega\big(f(t,\alpha)\big) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}_\omega\left(\frac{\partial}{\partial\,\alpha}\, f(t,\alpha)\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial\,\alpha}\,\mathcal{F}_\omega\left(f(t,\alpha)\right)$$

derivazione reiterata:

$$G(\omega) \;:=\; \mathcal{F}_\omega\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^{\,n}} f(t)\right) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}_\omega\big(f(t)\big) \;=\; \frac{G(\omega)}{(\mathsf{i}\,\omega)^n} + \sum_{j=0}^{n-1} c_j\, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\,\omega^j}\,\delta$$

$$g(t) \;:=\; \mathcal{F}_t\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\omega^n}\, F(\omega)\right) \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{F}_\omega\big(g(t)\big) \;:=\; \frac{g(t)}{(-\mathsf{i}\,t)^n} + \sum_{j=0}^{n-1} k_j\, \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^{\,j}}\,\eta(t)$$

formula di sommazione di Poisson:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \;\;\vdots\;\; \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(\alpha \cdot j) \;=\; \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\,n\,\pi}{\alpha}\right)$$

W50:b. trasformata di Laplace

Consideriamo una funzione-RtC $f(t)$ continua a pezzi in $\mathbb{R}_+$ che soddisfa una limitazione della forma $|f(t)| \leq c_1\, \mathsf{e}^{c_2\, t}$ e tale che esista $\displaystyle\int_0^{+\infty} dt\, \mathsf{e}^{-s\,t} f(t)$ e che valga una limitazione della forma $|f(t)| \leq c_1\, \mathsf{e}^{c_2\, t}$; sia inoltre s una variabile complessa.
Si dice trasformata di Laplace della $f(t)$ la funzione

$$F(s) \ := \ \mathcal{L}\left(f(t)\right) \ := \ \int_0^{+\infty} dt\ \mathsf{e}^{s\,t}\, f(t)$$

W50:b.01 proprietà della trasformata di Laplace

linearità: $\mathcal{L}\big(\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t)\big) \ = \ \alpha_1 \cdot \mathcal{L}\big(f_1(t)\big) + \alpha_2 \cdot \mathcal{L}\big(f_2(t)\big)$

proprietà di convoluzione: $\displaystyle\mathcal{L}\left(\int_0^t du\, f_1(t-u) \cdot f_2(u)\right) \ = \ \mathcal{L}\big(f_1(t)\big) \cdot \mathcal{L}\big(f_2(t)\big)$

proprietà di integrazione: $\displaystyle\mathcal{L}\left(\int_0^t du\, f(u)\right) \ = \ \frac{1}{s}\,\mathcal{L}(f(t))$

proprietà di derivazione: $\displaystyle\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}^{\,n} f(t)\right) \ = \ s^n\, \mathcal{L}\big(f(t)\big) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \left(\lim_{t\to 0+} \frac{d^j}{dt^{\,j}}\, f(t)\right)$

proprietà di traslazione: $\mathcal{L}\big(f(t-d)\big) \ = \ \mathsf{e}^{-d\,s}\, \mathcal{L}\big(f(t)\big)$

proprietà di omotetia: $\displaystyle\mathcal{L}\big(f(\alpha\, t)\big) \ = \ \frac{1}{\alpha}\, F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ per $\alpha \in \mathbb{R}_+$

proprietà di smorzamento o damping: $\mathcal{L}\big(\mathsf{e}^{-\alpha\, t} f(t)\big) \ = \ F(s+\alpha)$

proprietà di moltiplicazione: $\displaystyle\mathcal{L}\big(t^n\, f(t)\big) \ = \ (-1)^n\, \frac{d}{ds}^{\,n}\, F(s)$

proprietà di divisione: $\displaystyle\mathcal{L}\left(\frac{1}{t}\, f(t)\right) \ =_{i\exists} \ \int_s^{+\infty} du\, F(u)$

inversione della trasformazione: $\displaystyle f(t) \ := \ \mathcal{L}^{-\mathbf{1}}\, F(s) \ := \ \frac{1}{2\,\pi\, \mathsf{i}} \int_{c_3 - \mathsf{i}\infty}^{c_3+\mathsf{i}\infty} dt\ \mathsf{e}^{s\,t}\, F(s)$

relazione con la trasformata di Fourier

$$\forall t < 0 \ \vdots \ \ f(t) = 0 \ \wedge \ \int_{-\infty}^{+\infty} dt\ |f(t)| < \infty \ \implies \ \widehat{f}(\omega) \ = \ \mathcal{L}\big(f(\mathsf{i}\,\omega)\big)$$

W50:b.02 trasformate di Laplace specifiche

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad , \quad \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad \mathcal{L}\left(\mathsf{e}^{-\alpha\, t}\, t^n\right) \ = \ \frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$$

W50:b.03 antitrasformate di Laplace specifiche

$$F(s) \ = \ \frac{1}{s} \ \implies \ f(t) \ = \ 1 \quad ,$$

W50:c. trasformata.z

Consideriamo la successione $\mathsf{x} = \langle n \in \mathbb{N} :| x_n \rangle$ e la variabile reale z; si dice trasformata -z della x la serie di potenzenonpositive della z lo sviluppo

$$\mathcal{Z}_z(\mathsf{x}) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, \frac{1}{z^n}$$

In questa sezione ci serviremo della funzione di Heavyside sugli interi $\mathsf{Hvsd}(n) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{sse } n < 0 \\ 1 & \text{sse } n \geq 0 \end{cases}$ e della delta di Kronecker $\delta_{k,n} \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{sse } k \neq n \\ 1 & \text{sse } k = n \end{cases}$.

W50:c.01 proprietà della trasformata-z

linearità: $\mathcal{Z}_z\Big(\alpha_1 \cdot \mathsf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathsf{x}_2\Big) \;=\; \alpha_1 \cdot \mathcal{Z}_z\Big(\mathsf{x}_1\Big) + \alpha_2 \cdot \mathcal{Z}_z\Big(\mathsf{x}_2\Big)$

successione inizialmente azzerata

$$\forall k \in \mathbb{P} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in [k : +\infty) :| x_n \big\rangle\Big) \;=\; \mathcal{Z}(\mathsf{x})$$

successione traslata

$$\forall k \in \mathbb{P} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| x_{n+k} \big\rangle\Big) \;=\; z^k \cdot \mathcal{Z}_z(\mathsf{x}) - \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-j} \, x_j$$

$$\mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| a^n \cdot x_n \big\rangle\Big) \;=\; \mathcal{Z}_{z/a}\big(\mathsf{x}\big)$$

$$\forall k \in \mathbb{P} \;:\; \mathcal{Z}_z\left(\left\langle n \in \mathbb{N} :| (-1)^k \prod_{j=1}^{k} (n-j) \, x_{n-k} \, \mathsf{Hvsd}(n) \right\rangle\right) \;=\; \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^{\,k}} \, \mathcal{Z}_z\big(\mathsf{x}\big)$$

$$\mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| n \cdot x_n \big\rangle\Big) \;=\; -z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \big(\mathcal{Z}_z\big(\mathsf{x}\big)$$

convoluzione di due successioni, x ed $\mathsf{y} \;=\; \langle n \in \mathbb{N} :| y_n \rangle$

$$\mathcal{Z}_z\left(\left\langle n \in \mathbb{N} :| \sum_{j=0}^{n} x_{n-j} \, y_j \right\rangle\right) \;=\; \mathcal{Z}_z\left(\left\langle n \in \mathbb{N} :| \sum_{j=0}^{n} x_j \, y_{n-j} \right\rangle\right) \;=\; \mathcal{Z}_z\big(\mathsf{x}\big) \cdot \mathcal{Z}_z\big(\mathsf{y}\big)$$

W50:c.02 trasformate-z specifiche

$$\forall k \in \mathbb{P} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| \delta_{k,n} \big\rangle\Big) \;=\; \frac{1}{z^k}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| \alpha^n \big\rangle\Big) \;=\; \frac{z}{z-\alpha}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| \alpha^n \big\rangle\Big) \;=\; \frac{z}{z-\alpha}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{Hvsd}(n-k) \, \alpha^{n-k} \big\rangle\Big) \;=\; \frac{z^{1-k}}{z-\alpha}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} \;:\; \mathcal{Z}_z\Big(\big\langle n \in \mathbb{N} :| n \, \alpha^n \big\rangle\Big) \;=\; \frac{\alpha \, z}{(z-\alpha)^2}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} \ : \ \mathcal{Z}_z\Big(\Big\langle n \in \mathbb{N} :|\ n^2\, \alpha^n \Big\rangle\Big) \ = \ \frac{\alpha\,(z+\alpha)\,z}{(z-\alpha)^3}$$

`Testi dell'`*esposizione* `in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`