1

Capitolo W50
prontuario: trasformate di funzioni

Contenuti delle sezioni

- a. trasformata di Fourier p. 2
- b. trasformata di Laplace p. 3
- c. trasformata-z p. 4

5 pagine

W50 a. trasformata di Fourier

Supponiamo sia t una variabile reale per $-\infty < t < +\infty$, ω una variabile in $\mathbb{R}$ ed $f(t)$ una funzione-RtR differenziabile a pezzi e assolutamente integrabile, ossia tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)| < \infty$.

Si definisce trasformata di Fourier della $f(t)$

$$\widehat{f}(\omega) := \mathcal{F}_\omega(f(t)) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\omega t} f(t)$$

In molti contesti il deponente della $\mathcal{F}$ si può trascurare.

L'enunciato $F(\omega) = \widehat{f}(t)$ si esprime anche con la scrittura $f(t) \supset F(\omega)$ o con la equivalente trasposta $F(\omega) \subset f(t)$.

W50a.01 proprietà della trasformata di Fourier

linearità: $\mathcal{F}(\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t)) = \alpha_1 \cdot \mathcal{F}_\omega(f_1(t)) + \alpha_2 \cdot \mathcal{F}_\omega(f_2(t))$

simmetria: $f(t) \supset g(\omega) \implies g(t) \supset 2\pi f(-\omega)$

parità: $f(t)$ pari $\implies \widehat{f}(\omega)$ pari, $f(t)$ dispari $\implies \widehat{f}(\omega)$ dispari

derivazione rispetto a un parametro:

$$F(\omega, \alpha) := \mathcal{F}_\omega(f(t, \alpha)) \implies \mathcal{F}_\omega\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathcal{F}_\omega(f(t, \alpha))$$

derivazione reiterata:

$$G(\omega) := \mathcal{F}_\omega\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) \implies \mathcal{F}_\omega(f(t)) = \frac{G(\omega)}{(i\omega)^n} + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \frac{d^j}{d\omega^j} \delta$$

$$g(t) := \mathcal{F}_t\left(\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)\right) \implies \mathcal{F}_\omega(g(t)) := \frac{g(t)}{(-it)^n} + \sum_{j=0}^{n-1} k_j \frac{d^j}{dt^j} \eta(t)$$

formula di sommazione di Poisson:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ : \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(\alpha \cdot j) = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)$$

W50 b. trasformata di Laplace

Consideriamo una funzione-RtC $f(t)$ continua a pezzi in $\mathbb{R}_+$ che soddisfa una limitazione della forma $|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$ e tale che esista $\int_0^{+\infty} dt e^{-st} f(t)$ e che valga una limitazione della forma $|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$; sia inoltre s una variabile complessa.

Si dice trasformata di Laplace della $f(t)$ la funzione

$$F(s) := \mathcal{L}(f(t)) := \int_0^{+\infty} dt e^{st} f(t)$$

W50b.01 proprietà della trasformata di Laplace

linearità: $\mathcal{L}(\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t)) = \alpha_1 \cdot \mathcal{L}(f_1(t)) + \alpha_2 \cdot \mathcal{L}(f_2(t))$

proprietà di convoluzione: $\mathcal{L}\left(\int_0^t du f_1(t-u) \cdot f_2(u)\right) = \mathcal{L}(f_1(t)) \cdot \mathcal{L}(f_2(t))$

proprietà di integrazione: $\mathcal{L}\left(\int_0^t du f(u)\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t))$

proprietà di derivazione: $\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = s^n \mathcal{L}(f(t)) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d^j}{dt^j} f(t)\right)$

proprietà di traslazione: $\mathcal{L}(f(t-d)) = e^{-ds} \mathcal{L}(f(t))$

proprietà di omotetia: $\mathcal{L}(f(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$ per $\alpha \in \mathbb{R}_+$

proprietà di smorzamento o damping: $\mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t)) = F(s + \alpha)$

proprietà di moltiplicazione: $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds} F(s)$

proprietà di divisione: $\mathcal{L}\left(\frac{1}{t} f(t)\right) =_{\text{if}\exists} \int_s^{+\infty} du F(u)$

inversione della trasformazione: $f(t) := \mathcal{L}^{-1} F(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_{c_3-i\infty}^{c_3+i\infty} dt e^{st} F(s)$

relazione con la trasformata di Fourier

$$\forall t < 0 : f(t) = 0 \wedge \int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(t)| < \infty \implies \widehat{f}(\omega) = \mathcal{L}(f(i\omega))$$

W50b.02 trasformate di Laplace specifiche

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \quad , \quad \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad \mathcal{L}(e^{-\alpha t} t^n) = \frac{n!}{(s + \alpha)^{n+1}}$$

W50b.03 antitrasformate di Laplace specifiche

$$F(s) = \frac{1}{s} \implies f(t) = 1 \quad ,$$

W50 c. trasformata.z

Consideriamo la successione $\mathbf{x} = \langle n \in \mathbb{N} : | x_n \rangle$ e la variabile reale z ; si dice trasformata $-z$ della $\mathbf{x}$ la serie di potenze non positive della z lo sviluppo

$$\mathcal{Z}_z(\mathbf{x}) := \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \frac{1}{z^n}$$

In questa sezione ci serviremo della funzione di Heavyside sugli interi $\text{Hvsn}(n) := \begin{cases} 0 & \text{sse } n < 0 \\ 1 & \text{sse } n \geq 0 \end{cases}$ e

della delta di Kronecker $\delta_{k,n} := \begin{cases} 0 & \text{sse } k \neq n \\ 1 & \text{sse } k = n \end{cases}$.

W50c.01 proprietà della trasformata-z

linearità: $\mathcal{Z}_z(\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \cdot \mathcal{Z}_z(\mathbf{x}_1) + \alpha_2 \cdot \mathcal{Z}_z(\mathbf{x}_2)$

successione inizialmente azzerata

$$\forall k \in \mathbb{P} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in [k : +\infty) : | x_n \rangle) = \mathcal{Z}_z(\mathbf{x})$$

successione traslata

$$\forall k \in \mathbb{P} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | x_{n+k} \rangle) = z^k \cdot \mathcal{Z}_z(\mathbf{x}) - \sum_{j=0}^{k-1} z^{k-j} x_j$$

$$\mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | a^n \cdot x_n \rangle) = \mathcal{Z}_{z/a}(\mathbf{x})$$

$$\forall k \in \mathbb{P} : \mathcal{Z}_z\left(\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| (-1)^k \prod_{j=1}^k (n-j) x_{n-k} \text{Hvsn}(n) \right. \right\rangle\right) = \frac{d^k}{dz^k} \mathcal{Z}_z(\mathbf{x})$$

$$\mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | n \cdot x_n \rangle) = -z \cdot \frac{d}{dz} (\mathcal{Z}_z(\mathbf{x}))$$

convoluzione di due successioni, $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y} = \langle n \in \mathbb{N} : | y_n \rangle$

$$\mathcal{Z}_z\left(\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=0}^n x_{n-j} y_j \right. \right\rangle\right) = \mathcal{Z}_z\left(\left\langle n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{j=0}^n x_j y_{n-j} \right. \right\rangle\right) = \mathcal{Z}_z(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{Z}_z(\mathbf{y})$$

W50c.02 trasformate-z specifiche

$$\forall k \in \mathbb{P} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | \delta_{k,n} \rangle) = \frac{1}{z^k}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | \alpha^n \rangle) = \frac{z}{z - \alpha}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | \alpha^n \rangle) = \frac{z}{z - \alpha}$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | \text{Hvsn}(n-k) \alpha^{n-k} \rangle) = \frac{z^{1-k}}{z - \alpha}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} : \mathcal{Z}_z(\langle n \in \mathbb{N} : | n \alpha^n \rangle) = \frac{\alpha z}{(z - \alpha)^2}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}_{nz} : Z_z \left(\langle n \in \mathbb{N} : | n^2 \alpha^n \rangle \right) = \frac{\alpha (z + \alpha) z}{(z - \alpha)^3}$$

L'esposizione in <https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/> e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php