Capitolo W45:
prontuario: equazioni differenziali, equazioni integrali

Contenuti delle sezioni

3 pagine

W45:a. equazioni differenziali ordinarie, ossia ODE

W45:**a.00** Per molti enunciati per la derivazione rispetto alla variabile x risulta conveniente usare la la notazione D_x
Qui le a_i, le α_i, β e le $\mathtt{C}_i$ e le $\mathtt{D}_i$ denotano costanti reali.

Sia $P(t)$ un polinomio della forma $a_n\, t^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + \cdots + a_1\, t + a_0$ per il quale, trattando equazioni lineari , spesso si può assumere $a_n = 1$.
Come argomento del polinomio si può assumere l'operatore D_x e si può trattare l'operatore differenziale applicabile a funzioni della x

$$P(\mathrm{D}_x) \;=\; {\mathrm{D}_x}^n + a_{n-1}\, {\mathrm{D}_x}^{n-1} + \cdots + a_1\, \mathrm{D}_x + a_0 \ .$$

W45:**a.01** **ODE lineari: coefficienti costanti**

Si considera l'equazione avente come incognita una funzione $y(x)$

$$P(\mathrm{D}_x)\, y(x) = Q(x) \quad \text{ossia} \quad \Big({\mathrm{D}_x}^n + a_{n-1}\, {\mathrm{D}_x}^{n-1} + \cdots + a_1\, \mathrm{D}_x + a_0\Big)\, y(x) = R(x)$$

che denotiamo con $\boldsymbol{E}_R$. Insieme a questa conviene esaminare anche la sua corrispondente equazione omogenea relativa ad $R(x) = 0$ che possiamo denotare con $\boldsymbol{E}_0$.
Casi particolari

$$(\mathrm{D}_x - \alpha) y = 0 \implies y = \mathtt{C}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x}$$

$$(\mathrm{D}_x - \alpha)^m\, y = 0 \implies y = \Big(\mathtt{C}_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0\Big)\, \mathsf{e}^{\alpha\, x}$$

$$\Big((\mathrm{D}_x - \alpha + \mathsf{i}\, \beta)\, (\mathrm{D}_x - \alpha - \mathsf{i}\, \beta)\Big)\, y(x) \quad \implies \quad y = (\mathtt{C}\, \cos\, \beta\, x + \mathtt{D}\, \sin\, \beta\, x)\, \mathsf{e}^{\alpha\, x}$$

$$\Big((\mathrm{D}_x - \alpha + \mathsf{i}\, \beta)^m\, (\mathrm{D}_x - \alpha - \mathsf{i}\, \beta)^m\Big)\, y(x) = 0 \quad \implies$$

$$y = \Big(\big(\mathtt{C}_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0\big)\, \cos\, \beta\, x + \big(\mathtt{D}_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + \mathtt{D}_1\, x + \mathtt{D}_0\big)\, \sin\, \beta\, x\Big)\, \mathsf{e}^{\alpha\, x}$$

Nelle precedenti relazioni $\mathtt{C}$, $\mathtt{D}$ $\mathtt{C}_i$, $\mathtt{D}_i$ per $i \in \mathbb{N}$ denotano costanti reali arbitrarie.
Alla soluzione generale della $\boldsymbol{E}_R$ si può dare la forma $y(x) \;=\; y_p(x) + y_h(x)$, con y_p particolare soluzione della $\boldsymbol{E}_R$ e $y_h(x)$ soluzione della $\boldsymbol{E}_0$.
Questa si può ottenere sommando soluzioni delle equazioni precedenti.

W45:b. equazioni integrali

W45:**b.01** **equazioni di Fredholm**

del primo genere $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del primo genere $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del secondo genere $\displaystyle y(x) - \int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

W45:**b.02** **equazioni di Volterra**

del primo genere $\displaystyle\int_a^x \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del primo genere $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

del secondo genere $\displaystyle y(x) - \int_a^x \mathrm{d}t\, K(x,t)\, y(t) \;=\; h(x)$

Il problema di Cauchy $\mathsf{y}'(x) = \mathsf{f}(x, \mathsf{y})$, $\mathsf{y}(x_0) = \mathsf{y}_0$ equivale alla equazione integrale

$$\mathsf{y}(x) = \int_{x_0}^x \mathrm{d}t\, \mathsf{f}(t, \mathsf{y}(t) \;+\; \mathsf{y}_0 \ .$$

`Testi dell'`*esposizione* `in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`