

1

Capitolo W45

prontuario: equazioni differenziali, equazioni integrali

Contenuti delle sezioni

- a. equazioni differenziali ordinarie, ossia ODE p. 2
- b. equazioni integrali p. 3

3 pagine

W45 a. equazioni differenziali ordinarie, ossia ODE

W45a.01 Per molti enunciati per la derivazione rispetto alla variabile x risulta conveniente usare la notazione D_x

Qui le a_i , le α_i , β e le C_i e le D_i denotano costanti reali.

Sia $P(t)$ un polinomio della forma $a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ per il quale, trattando equazioni lineari, spesso si può assumere $a_n = 1$.

Come argomento del polinomio si può assumere l'operatore D_x e si può trattare l'operatore differenziale applicabile a funzioni della x

$$P(D_x) = D_x^n + a_{n-1} D_x^{n-1} + \dots + a_1 D_x + a_0 .$$

W45a.02 ODE lineari: coefficienti costanti

Si considera l'equazione avente come incognita una funzione $y(x)$

$$P(D_x)y(x) = Q(x) \quad \text{ossia} \quad \left(D_x^n + a_{n-1} D_x^{n-1} + \dots + a_1 D_x + a_0 \right) y(x) = R(x)$$

che denotiamo con \mathbf{E}_R . Insieme a questa conviene esaminare anche la sua corrispondente equazione omogenea relativa ad $R(x) = 0$ che possiamo denotare con \mathbf{E}_0 .

Casi particolari

$$(D_x - \alpha)y = 0 \implies y = C e^{\alpha x}$$

$$(D_x - \alpha)^m y = 0 \implies y = \left(C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_1 x + C_0 \right) e^{\alpha x}$$

$$\left((D_x - \alpha + i\beta)(D_x - \alpha - i\beta) \right) y(x) \implies y = (C \cos \beta x + D \sin \beta x) e^{\alpha x}$$

$$\left((D_x - \alpha + i\beta)^m (D_x - \alpha - i\beta)^m \right) y(x) = 0 \implies$$

$$y = \left((C_{m-1} x^{m-1} + \dots + C_1 x + C_0) \cos \beta x + (D_{m-1} x^{m-1} + \dots + D_1 x + D_0) \sin \beta x \right) e^{\alpha x}$$

Nelle precedenti relazioni C, D, C_i, D_i per $i \in \mathbb{N}$ denotano costanti reali arbitrarie.

Alla soluzione generale della \mathbf{E}_R si può dare la forma $y(x) = y_p(x) + y_h(x)$, con y_p particolare soluzione della \mathbf{E}_R e $y_h(x)$ soluzione della \mathbf{E}_0 .

Questa si può ottenere sommando soluzioni delle equazioni precedenti.

W45 b. equazioni integrali

W45b.01 equazioni di Fredholm

del primo genere $\int_a^b dt K(x, t) y(t) = h(x)$

del primo genere $\int_a^b dt K(x, t) y(t) = h(x)$

del secondo genere $y(x) - \int_a^b dt K(x, t) y(t) = h(x)$

W45b.02 equazioni di Volterra

del primo genere $\int_a^x dt K(x, t) y(t) = h(x)$

del primo genere $\int_a^b dt K(x, t) y(t) = h(x)$

del secondo genere $y(x) - \int_a^x dt K(x, t) y(t) = h(x)$

Il problema di Cauchy $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ equivale alla equazione integrale

$$\mathbf{y}(x) = \int_{x_0}^x dt \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) + \mathbf{y}_0 .$$

L'esposizione in <https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/> e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php