1

Capitolo W40
prontuario: analisi infinitesimale multidimensionale

Contenuti delle sezioni

a. spazio reale finitodimensionale p. 2
b. derivate parziali p. 4
c. operatori su campi vettoriali p. 5
d. curve piane e calcolo infinitesimale p. 6
e. integrali doppi p. 7
g. solidi di rivoluzione p. 8
h. centroidi e momenti di inerzia p. 9
i. analisi dei campi vettoriali p. 11

11 pagine

W40 a. spazio reale finitodimensionale

W40a.01 Consideriamo $\mathbb{R}^{\times d}$, spazio vettoriale delle sequenze di numeri reali di lunghezza $d \in \mathbb{P}$; consideriamo le sequenze(o vetori d-dimensionali $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle$ e $\mathsf{y} = \langle y_1, y_2, ..., y_d \rangle$ e definiamo le seguenti operazioni

$\mathsf{x} + \mathsf{y} := \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_d + y_d \rangle$, somma di vettori $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} := x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_d\, y_d$, prodotto scalare o prodotto interno $c\,\mathsf{x} := \langle c\, x_1, c\, x_2, ...c\, x_d \rangle$, moltiplicazione per lo scalare c reale.

$|\mathsf{x} - \mathsf{y}| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \cdots + (x_d - y_d)^2}$, distanza euclidea tra i vettori, radice della loro norma al quadrato

$\mathbb{R}^{\times d}$ è quindi il terreno di uno spazio vettoriale finito dimensionale sui reali a prodotto interno e normato; inoltre esso è uno spazio metrico [:ea.02].

x e y sono vettori ortogonali, e si scrive $\mathsf{x} \perp \mathsf{y}$ sse $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} = 0$

x e y, diversi dal vettore nullo $\mathsf{0}_d := \langle 0, 0, ..., 0 \rangle$, sono vettori paralleli, e si scrive $\mathsf{x} /\!/ \mathsf{y}$ sse $xSd = c\mathsf{y}$ per qualche c reale.

diciamo versore ogni vettore di norma (o lunghezza) pari a 1. Il vettore normalizzato di x è $\dfrac{\mathsf{x}}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_d}^2}}$

si definisce angolo θ tra i vettori x e y l'angolo tale che $\cos\theta := \dfrac{\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}}{|\mathsf{x}| \cdot |\mathsf{y}|}$

Versori della base canonica dello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$: $\mathsf{e}_1 := \langle 1, 0, ..., 0 \rangle$, $\mathsf{e}_1 := \langle 0, 1, ..., 0 \rangle, ..., \mathsf{e}_d := \langle 0, 0, ..., 1 \rangle$

ogni vettore x si può esprimere come combinazione lineare dai versori della base: $\mathsf{x} = \sum i = 1^d\, x_i\, \mathsf{e}_i$

W40a.02 topologia di $\mathbb{R}^{\times d}$

gli elementi di $\mathbb{R}^{\times d}$ vengono chiamati, oltre che vettori d-dimensionali, punti dello spazio cartesiano a d dimensioni;

tratteremo i punti $P_i = \mathsf{p}_i$ e $Q_i = \mathsf{q}_i$ per $i = \mu u, 0, 1, 2, ...$ ed insiemi di punti S, T,...

bolla aperta di centro x e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ $\mathsf{ball}(\mathsf{p}, r) := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \between |\mathsf{x} - \mathsf{p}| < r\}$

bolla chiusa corrispondente $\overline{\mathsf{ball}}(\mathsf{p}, r) := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \between |\mathsf{x} - \mathsf{p}| \text{‘} r\}$

insieme aperto di $\mathbb{R}^{\times d}$ insieme ciascun punto del quale è contenuto in una bolla aperta interamente contenuta in esso

insieme chiuso di $\mathbb{R}^{\times d}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\times d}$ complementare di un insieme aperto

l'unione di una collezione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto

l'intersezione di una collezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto

l'intersezione di una collezione qualsiasi di insiemi chiusi è un insieme chiuso

l'unione di una collezione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso

intorno di un punto $\mathsf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ insieme contenente una bolla aperta di centro p

intorno impoverito di un $\mathsf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ intorno di p privato dello stesso p

intorno ipercuboide aperto di $\mathsf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ insieme della forma

$$\left\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \between \forall i = 1, ..., d : p_i - \delta_i < x_i < p_i + \delta_i\right\}$$

punto interno a un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ punto che possiede un intorno interamente contenuto in S

interiore di $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ insieme dei punti interni di S; lo denotiamo con $\mathsf{Intrn}(\mathsf{S})$

punto esterno a un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ punto che possiede un intorno che non interseca S

punto di frontiera di un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ punto tale che ciascuno dei suoi intorni interseca sia S che il suo complementare;

frontiera di S insieme dei punti di frontiera di S; denotiamo tale insieme con $\partial\mathsf{S}$

chiusura di un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ ampliamento di S ottenuto aggiungendo la sua frontiera;
la denotiamo con $\overline{\mathsf{S}}$ e definiamo $\overline{\mathsf{S}} := \mathsf{S} \cup \partial\mathsf{S}$

un punto q si dice **punto di accumulazione** o **punto di aderenza** o **punto limite** di $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ sse ogni suo intorno impoverito contiene almeno un punto di S.

si dice **aderenza** di un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ [B36a03] l'insieme dei suoi punti di accumulazione; tale insieme si denota con $\boldsymbol{Adrn}_{\mathbb{R}^{\times d}}(\mathsf{S})$; spesso questa notazione si può semplificare nella $\boldsymbol{Adrn}(\mathsf{S})$.

un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ si dice limitato sse $\mathbb{R}_+ \ni R$ tale che $\mathsf{S} \subset \mathsf{ball}(\mathbf{0}_d, R)$

ogni insieme limitato infinito di $\mathbb{R}^{\times d}$ possiede almeno un punto di accumulazione
(**teorema di Bolzano-Weierstrass**)

un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ si dice compatto sse da ogni successione di suoi punti si può estrarre una sottosuccessione che converge a un suo punto

sia $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ compatto e sia $\{i \in I :| O_i\}$ una sua copertura numerabile di insiemi aperti;
da essa si può estrarre una copertura finita (**teorema di Pincherle-Heine-Borel**)

W40 **b. derivate parziali**

W40b.01 consideriamo $f(x,y) \in \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, $D := \mathsf{dom}(f)$ e $\langle a,b \rangle \in \mathsf{Intrn}(D)$;
si dice **derivata parziale** della f rispetto ad x in $\langle a,b \rangle \in D$ (se esiste)

$$\mathrm{D}_x\, f(a,b) \;=\; f_x{}'(a,b) \;=\; \frac{\partial\, f}{\partial\, x} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \;.$$

si dice derivata parziale della f rispetto ad y in $\langle a,b \rangle \in D$ (se esiste)

$$\mathrm{D}_y\, f(a,b) \;=\; f_y{}'(a,b) \;=\; \frac{\partial\, f}{\partial\, y} \;=\; \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k} \;.$$

derivate seconde $\quad \mathrm{D}_x{}^2\, f(a,b) \;=\; f_{xx}(a,b) \;=\; \dfrac{\partial^2\, f}{\partial\, x^2} \quad ,$

$$\mathrm{D}_y\, \mathrm{D}_x\, f(a,b) \;=\; f_{xy}(a,b) \;=\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y\, \partial\, x} \quad , \quad \mathrm{D}_y{}^2\, f(a,b) \;=\; f_{yy}(a,b) \;=\; \frac{\partial^2\, f}{\partial\, y^2}$$

le funzioni f_{xy} e f_{yx}, se sono continue coincidono

definizioni analoghe per le derivate parziali delle funzioni in $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, aventi forme come $\mathrm{D}_{x_n} \cdots \mathrm{D}_{x_2}\, \mathrm{D}_{x_1}\, f\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \;=\; f_{x_1 x_2 \ldots x_n}\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$

W40 c. operatori su campi vettoriali

W40c.01 consideriamo spazi cartesiani d-dimensionale $\mathbb{R}^{\times d}$ con coordinate x_i per $i = 1, 2, ..., d$ che in particolare si possono ridurre a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$con coordinate x e y o a $\mathbb{R}^{\times 3}$ con coordinate x, y e z.

consideriamo funzioni da domini D in valori scalari o d dimensionali che assumiamo sufficientemente regolari.

operatore nabla $\quad \nabla \;:=\; \mathbf{e}_1\,\mathrm{D}_{x_1} + \mathbf{e}_2\,\mathrm{D}_{x_2} + \cdots + \mathbf{e}_d\,\mathrm{D}_{x_d} \;=\; \sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_i\,\mathrm{D}_{x_i}$

gradiente della funzione $\; f \in \lceil\, \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \,\rceil \qquad \nabla f \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_1\,\mathrm{D}_{x_i} f$

In particolare se $d = 2$ la $f(x, y)$ può rappresentare una superficie e il gradiente in ogni punto inteno a D è ortogonale alla corrispondente curva di livello.
Se $d = 3$ la $f(x, y, z)$ può rappresentare una densità e il gradiente è ortogonale alla corrispondente superficie di livello.

divergenza della $\mathbf{f} = \left\langle f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_d} \right\rangle \in \lceil\, \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \,\rceil \qquad \nabla f \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \mathrm{D}_{x_i} f$

rotore della funzione $\mathbf{f} \;=\; \mathbf{e}\, f_x + \mathbf{e}_y\, f_y + \mathbf{e}_z\, f_z \in \lceil\, \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \,\rceil$

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \;:=\; \nabla \wedge \mathbf{f} \;=\; \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial\, f_z}{\partial\, y} - \frac{\partial\, f_y}{\partial\, z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial\, f_x}{\partial\, z} - \frac{\partial\, f_z}{\partial\, x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial\, f_y}{\partial\, x} - \frac{\partial\, f_x}{\partial\, y} \right) \;=\; \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

operatore di Laplace applicato alla $\; f \in \lceil\, \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \,\rceil \qquad \nabla \cdot \nabla\, f(\mathbf{x}) \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial\, {x_i}^2}\, f(\mathbf{x})$

W40 d. curve piane e calcolo infinitesimale

W40d.01 In questa sezione usiamo t per denotare una variabile reale e per ogni funzione $\phi(t)$ scriveremo $\dot{\phi}(t) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\phi(t)$.
Useremo A per l'area di una regione, s per la lunghezza di un arco, κ per la sua curvatura e $\rho = \dfrac{1}{|\kappa|}$ per il suo raggio di curvatura.
Verranno trattate funzioni $f(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definite nell'intervallo $\mathsf{I} := [x_1, x_2]$.
Verranno inoltre trattate le regioni $\mathsf{R}_{f_1,f_2} := \{\langle x, y\rangle \,|\!:\, x \in \mathsf{I}\,,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ e

W40d.02 curve date da funzioni $y = f(x)$

area della regione R delimitata da $f_1(x)$ ed $f_2(x)(\ge f_1(x))$ per $x_1 \le x \le x_2$

$$A := \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left(f_2(x) - f_1(x)\right)$$

centroide $\langle x_c, y_c\rangle$ della R

$$x_c := \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, x \left(f_2(x) - f_1(x)\right) \qquad y_c := \frac{1}{2\,A}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left({f_2}^2(x) - f_1(x)^2\right)$$

lunghezza della curva $y = f(x)$ per $x_1 \le x \le x_2$ $\quad s := \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \sqrt{1 + f'(x)^2}$

W40 e. integrali doppi

W40e.01 Consideriamo una regione $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ limitata, chiusa e quadrabile, una funzione limitata peri cui genere poniamo $f \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rceil$ e scriviamo $m := \inf_{\langle x,y\rangle\in D} f(x,y)$ ed $M := \sup_{\langle x,y\rangle\in D} f(x,y)$. Denotiamo con $\mathsf{PrtnFQdrb}_D$ l'insieme delle partizioni di D costituite da collezioni finite di sottoinsiemi di D quadrabili.

Sia $\mathsf{R} = \{i = 1, ..., r :| D_{\mathsf{R},i}\}$ una collezione in $\mathsf{PrtnFQdrb}_D$ e quindi sia $\overset{:}{\bigcup}_{i=1,\dots,r} D_{\mathsf{R},i} = D$.
Introduciamo inoltre per ogni R e ogni $D_{\mathsf{R},i}$:

$$d_{\mathsf{R}} := \max_{i=1,\dots,r} \operatorname{diag}(D_{\mathsf{R},i}) \quad , \quad A_{\mathsf{R},i} := \boldsymbol{Area}(D_{\mathsf{R},i}) \quad , \quad m_{\mathsf{R},i} := \inf_{\langle x,y\rangle\in D_{\mathsf{R},i}} f(x,y) \quad ,$$

$$M_{\mathsf{R},i} := \sup_{\langle x,y\rangle\in D_{\mathsf{R},i}} f(x,y) \quad , \quad s_{\mathsf{R},i} := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathsf{R},i}\, m_{\mathsf{R},i} \quad , \quad S_{\mathsf{R},i} := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathsf{R},i}\, M_{\mathsf{R},i} \quad ,$$

Si definiscono, risp., integrale inferiore e integrale superiore della f in D

$$\underline{\iint_D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) := \inf_{\mathsf{R}\in\mathsf{PrtnFQdrb}_D} s_{\mathsf{R},i} \quad , \quad \overline{\iint_D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) := \sup_{\mathsf{R}\in\mathsf{PrtnFQdrb}_D} s_{\mathsf{R},i} \ .$$

Se questi due numeri reali coincidono il loro valore si dice integrale doppio della f in D e si denota con

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) \ .$$

Un **insieme rinchiudibile in una regione** $D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ è un insieme finito di curve continue contenute in D che possono essere racchiuse in regioni aperte di area complessiva riducibile a piacere.

Se una funzione-RRtR $f(x,y)$ definita in una regione D chiusa, limitata e quadrabile è limitata e continua in tutto D a eccezione dei punti di un insieme rinchiudibile, possiede integrale doppio ottenibile come

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) := \lim_{\mathsf{R}\in PrtnFQdrb\,,\, d_{\mathsf{R}}\to 0} \sum_{i=1}^{r} A_{\mathsf{R},i}\, f(x_i,y_i) \quad \text{per qualsiasi} \quad \langle x_i, y_i\rangle \in D_{\mathsf{R},i} \ .$$

W40 g. solidi di rivoluzione

W40g.01 volume del solido che presenta sezioni di area $A(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ $\qquad V := \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; A(x)$

volume del solido di rivoluzione intorno ad Ox delimitato da $f_1(x)$ e $f_2(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$

$$V \;:=\; \pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left((f_2(x))^2 - (f_1(x)^2 \right)$$

volume del solido di rivoluzione intorno ad Oy delimitato da $g_1(y)$ e $g_2(y)$ per $y_1 \leq y \leq y_2$

$$V \;:=\; \pi \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}x \left((g_2(y))^2 - (g_1(y))^2 \right)$$

W40 h. centroidi e momenti di inerzia

W40h.01 centroidi e momenti di inerzia in 2D

Per varie figure presentiamo le coordinate del centroide, o centro di massa, C x_C, y_C e z_C, i momenti d'inerzia I_x, I_y, I_z relativi, risp., agli assi Ox, Oy e Oz e i momenti d'inerzia I_u, I_v ed I_w relativi ad assi determinati da opportuni vettori **u**, **v** e **w** che in genere sono applicati al centroide.

consideriamo lamine rigide e omogenee la cui massa denotiamo con m

asta o barra con estremità O e $\langle s, 0\rangle$ (appartenente ad Ox), considerando **v** parallelo ad Oy e applicato in C

$$x_C = \frac{s}{2}\ ,\ y_C = 0\ \ ,\ \ I_x = 0\ ,\ I_y = \frac{m\,s^3}{3}\ ,\ I_v + \frac{m\,s^3}{12}$$

rettangolo con due vertici opposti in $\langle a, 0\rangle$ e $\langle 0, b\rangle$ un lato appartenenti ad Ox e di lunghezza a e un lato appartenente ad Oy e di lunghezza b

$x_C = \frac{a}{2}$, $y_C = \frac{b}{2}$, $I_x = \frac{m\,b^2}{3}$, $I_y = \frac{m\,a^2}{3}$, $I_u = \frac{m\,a^2}{12}$, $I_v = \frac{m\,a^2}{12}$ con **u** orizzontale e **v** verticale applicati in C

triangolo con un lato (su Ox) con estremità in $\langle -a_1, 0\rangle$ e $\langle a_2, 0\rangle$, il vertice opposto in $V = \langle 0, h\rangle$

$$x_C = \frac{c-b}{3}\ ,\ y_C = \frac{h}{3}\ ,\ I_x = \frac{m\,h^2}{6}\ ,\ I_y = \frac{m({a_1}^3 + {a_2}^3)}{6\,a_1 + a_2}\ ,\ I_u = \frac{m\,h^2}{18}\ ,\ I_w = \frac{m\,h^2}{2}$$

ove **u** e **w** sono orizzontali, il primo applicato in C ed il secondo in V

cerchio con centro (centroide) in O e raggio r $\quad I_x = I_y \frac{m\,r^2}{4}$, $I_u = I_v = \frac{5\,m\,r^2}{4}$ dove **u** è orizzontale e tangente al cerchio in $\langle 0, -r\rangle$ e **v** verticale e tangente al cerchio in $\langle -r, 0\rangle$

settore circolare del cerchio di raggio r con centro in O, con asse Ox e ampiezza dell'angolo al centro $2\,\alpha$

$$x_C = \frac{2\,r\,\sin\alpha}{3\,\alpha}\ ,\ y_C = 0\ ,\ I_x = \frac{m\,r^2}{4}\left(1 - \frac{\sin 2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)\ ,\ I_y = \frac{m\,r^2}{4}\left(1 + \frac{\sin 2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)$$

corona circolare delimitata dalle circonferenze con centro in O e raggi r_1 ed r_2 $(> r_1)$

$$I_x = I_y = \frac{m\,({r_1}^2 + {r_2}^2)}{4}\quad ,\quad I_u = I_v = \frac{m\,({r_1}^2 + {r_2}^2)}{4} + m\,{r_2}^2$$

W40h.02 centroidi e momenti di inerzia in 3D

parallelepipedo con lati sui tre assi aventi lunghezze a, b e c

$x_C = \frac{a}{2}$, $y_C = \frac{b}{2}$, $z_c = \frac{c}{2}$, $I_y = \frac{m}{3}\,(a^2 + c^2)$, $I_v = \frac{m}{12}\,(a^2 + 4\,c^2)$, $I_u = \frac{m}{3}\,(a^2 + c^2)$,
dove **v** e **u** sono vettori paralleli ad Oy, il primo sulla mediana della faccia inferiore,
il secondo applicato in C

sfera con centro in O e raggio r $\quad x_C = y_C = z_C = 0$, $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}\,m\,r^2$ e

$I_u = \frac{7}{5}\,m\,r^2$, dove **u** è un vettore tangente alla sfera

sfera cava con centro in O e raggio r $\quad x_C = y_C = z_C = 0$, $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}\,m\,r^2$ e

$I_u = \frac{5}{3}\,m\,r^2$, dove **u** è un vettore tangente alla sfera

cilindro con asse di simmetria cilindrica Oz, avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$$x_C = y_C = 0\ ,\ z_C = \frac{h}{2}\ ,\ I_x = I_y = \frac{m}{12}\,(3\,r^2 + 4\,h^2)\ ,\ I_z = \frac{1}{2}\,m\,r^2\ ,\ I_u = \frac{m}{12}\,(3\,r^2 + h^2)\ ,$$

dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C

cilindro cavo e senza basi con asse di simmetria cilindrica Oz, avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0$, $z_C = \dfrac{h}{2}$, $I_x = I_y = \dfrac{m}{6}(3\,r^2 + 2\,h^2)$, $I_z = m\,r^2$, $I_u = \dfrac{m}{12}(6\,r^2 + h^2)$,
dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C

cono avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0$, $z_C = \dfrac{h}{4}$, $I_x = I_y = \dfrac{m}{20}(3\,r^2 + 2\,h^2)$, $I_z = \dfrac{3}{10}\,m\,r^2$, $I_u = \dfrac{m}{12}(6\,r^2 + h^2)$,
dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C

cono cavo e privato della base avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0$, $z_C = \dfrac{2}{3}\,h$, $I_x = I_y = \dfrac{m}{4}(r^2 + 2\,h^2)$, $I_z = \dfrac{1}{2}\,m\,r^2$, $I_u = \dfrac{m}{18}(9\,r^2 + 10\,h^2)$
e $I_v = \dfrac{m}{4}(r^2 + 2\,h^2)$, dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C e **v** un vettore orizzontale passante per il vertice

W40 i. analisi dei campi vettoriali

Ricordiamo le notazioni $[\mathsf{f},\mathsf{g},\mathsf{h}] := \mathsf{f}\cdot(\mathsf{g}\wedge\mathsf{h})$ e
$\nabla(f(\mathsf{r})) = \mathrm{grad}(f(\mathsf{r})) := \mathsf{e}_x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\mathsf{r}) + \mathsf{e}_y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(\mathsf{r}) + \mathsf{e}_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(\mathsf{r})$

W40i.01 curve in più dimensioni

Per ogni $f(t) \in \lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ scriviamo $\dot{f}(t) := \mathrm{D}_t\, f(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ e per ogni
$\mathsf{F}(t) = \langle F_1(t),...,F_d(t)\rangle$ scriviamo $\dot{\mathsf{F}}(t) := D_t\mathsf{F}(t)$ (notazioni usate in fisica matematica)
Consideriamo l'intervallo reale [a,b] e per $t \in$ [a,b] le curve in d dimensioni
$\mathsf{r}(t) = \langle x_1(t),...,x_d(t)\rangle$, $\mathsf{f}(t)$, $\mathsf{g}(t)$ e $\mathsf{h}(T)$ e la funzione $s(t)$
$\mathrm{D}_t\,(\alpha\,\mathsf{f}(t)+\beta\,\mathsf{g}(t)) - \alpha\,\mathrm{D}_t\,\mathsf{f}(t)+\beta\,\mathrm{D}_t\,\mathsf{g}(t)$, $\mathrm{D}_t\,(s(t)\,\mathsf{f}(t)) = s(t)\,\dot{\mathsf{f}}(t)+\dot{s}(t)\,\mathsf{f}(t)$
$\mathrm{D}_t\left(\mathsf{f}(t)\cdot\mathsf{g}(t)\right) = \mathsf{f}(t)\cdot\dot{\mathsf{g}}(t)+\dot{\mathsf{f}}(t)\cdot\mathsf{g}(t)$, per $d=3$ si ha $\mathrm{D}_t\left(\mathsf{f}(t)\wedge\mathsf{g}(t)\right) = \mathsf{f}(t)\wedge\dot{\mathsf{g}}(t)+\dot{\mathsf{f}}(t)\wedge\mathsf{g}(t)$
$\mathrm{D}_t\,[\mathsf{f},\mathsf{g},\mathsf{h}] = \mathrm{D}_t\left(\mathsf{f}\cdot(\mathsf{g}\wedge\mathsf{h}\right) = [\dot{\mathsf{f}},\mathsf{g},\mathsf{h}]+[\mathsf{f},\dot{\mathsf{g}},\mathsf{h}]+[\mathsf{f},\mathsf{g},\dot{\mathsf{h}}]$
$\mathrm{D}_t\, s\Big(\mathsf{f}(t)\Big) = \nabla\left(\mathsf{f}(t)\right)\cdot\dot{\mathsf{f}}(t)$
$\mathsf{f}(t+\Delta t) = \mathsf{f}(t)+\Delta t\,\dot{\mathsf{f}}(t)+\frac{(\Delta t)^2}{2}\,\dot{\mathsf{f}}(t)+\cdots+\frac{(\Delta t)^n}{n!}\,D_t{}^n\,\mathsf{f}(t)+\cdots$
Consideriamo una curva γ definita dalla funzione $\mathsf{r}(t) = \langle x(t),y(t),x(t)\rangle \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$
vettore tangente alla γ in r : $\dot{\mathsf{r}}(t) = \langle \dot{x}(t),\dot{y}(t),\dot{z}(t)\rangle$
lunghezza della curva : $\mathsf{len}(\gamma) = \int_\gamma |\mathrm{d}\,\mathsf{r}| = \int_a^b \mathrm{d}t\,|\mathsf{r}(t)| = \int_a^b \mathrm{d}t\,\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}$

W40i.02 traiettoria di una particella

posizione $\mathsf{r}(t)$ versore tangente alla traiettoria $\mathsf{t}(t) = \frac{\dot{\mathsf{r}}}{|\mathsf{r}(t)|}$
velocità rispetto al parametro t $\mathsf{v}(t) = \dot{\mathsf{r}}(t) = |\dot{\mathsf{r}}|\,\mathsf{t}$ modulo della velocità $v := |\dot{\mathsf{r}}|$
versore normale principale $\mathsf{n}(t) = \frac{\mathsf{r}''-\dot{v}\,\mathsf{t}}{|\mathsf{r}''-\dot{v}\,\mathsf{t}|}$
accelerazione rispetto a t $\mathsf{a} = \dot{\mathsf{v}} = \mathsf{r}'' = a_t\,\mathsf{t}+a_n\,\mathsf{n}$ con $a_t = \dot{v} = \frac{\mathsf{v}\cdot\mathsf{a}}{v} = \frac{\mathsf{r}'\cdot\mathsf{r}''}{|\dot{\mathsf{r}}|}$
$a_n = \kappa\,v^2 = \frac{|\mathsf{v}\wedge\mathsf{a}|}{v} = \frac{|\dot{\mathsf{f}}\wedge\ddot{\mathsf{r}}|}{|\dot{\mathsf{r}}|}$

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php