Capitolo W40:
prontuario: analisi infinitesimale multidimensionale

Contenuti delle sezioni

12 pagine

W40:a. spazio reale finitodimensionale

W40:**a.01** Consideriamo $\mathbb{R}^{\times d}$, spazio vettoriale delle sequenze di numeri reali di lunghezza $d \in \mathbb{P}$; consideriamo le sequenze(o vetori d-dimensionali $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle$ e $\mathsf{y} = \langle y_1, y_2, ..., y_d \rangle$ e definiamo le seguenti operazioni

$\mathsf{x} + \mathsf{y} := \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_d + y_d \rangle$, somma di vettori $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} := x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_d\, y_d$, prodotto scalare o prodotto interno $c\,\mathsf{x} := \langle c\, x_1, c\, x_2, ...c\, x_d \rangle$, moltiplicazione per lo scalare c reale.

$|\mathsf{x} - \mathsf{y}| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \cdots + (x_d - y_d)^2}$, distanza euclidea tra i vettori, radice della loro norma al quadrato

$\mathbb{R}^{\times d}$ è quindi il terreno di uno spazio vettoriale finito dimensionale sui reali a prodotto interno e normato; inoltre esso è uno spazio metrico [:ea.02].

x e y sono vettori ortogonali, e si scrive $\mathsf{x} \perp \mathsf{y}$ sse $\mathsf{x} \cdot \mathsf{y} = 0$

x e y, diversi dal vettore nullo $\mathbf{0}_d := \langle 0, 0, ..., 0 \rangle$, sono vettori paralleli, e si scrive $\mathsf{x} /\!/ \mathsf{y}$ sse $xSd = c\mathsf{y}$ per qualche c reale.

diciamo versore ogni vettore di norma (o lunghezza) pari a 1. Il vettore normalizzato di x è $\dfrac{\mathsf{x}}{\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_d}^2}}$

si definisce angolo θ tra i vettori x e y l'angolo tale che $\cos\theta := \dfrac{\mathsf{x} \cdot \mathsf{y}}{|\mathsf{x}| \cdot |\mathsf{y}|}$

Versori della base canonica dello spazio $\mathbb{R}^{\times d}$: $\mathbf{e}_1 := \langle 1, 0, ..., 0 \rangle$, $\mathbf{e}_1 := \langle 0, 1, ..., 0 \rangle, ..., \mathbf{e}_d := \langle 0, 0, ..., 1 \rangle$

ogni vettore x si può esprimere come combinazione lineare dai versori della base: $\mathsf{x} = \sum i = 1^d\, x_i\, \mathbf{e}_i$

W40:a.02 topologia di $\mathbb{R}^{\times d}$

gli elementi di $\mathbb{R}^{\times d}$ vengono chiamati, oltre che vettori d-dimensionali, punti dello spazio cartesiano a d dimensioni;

tratteremo i punti $P_i = \mathbf{p}_i$ e $Q_i = \mathbf{q}_i$ per $i = \mu, 0, 1, 2, ...$ ed insiemi di punti S, T,...

bolla aperta di centro x e raggio $r \in \mathbb{R}_+$ $\mathsf{ball}(\mathbf{p}, r) := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \; ¶ \; |\mathsf{x} - \mathbf{p}| < r\}$

bolla chiusa corrispondente $\overline{\mathsf{ball}}(\mathbf{p}, r) := \{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \; ¶ \; |\mathsf{x} - \mathbf{p}|`r\}$

insieme aperto di $\mathbb{R}^{\times d}$ insieme ciascun punto del quale è contenuto in una bolla aperta interamente contenuta in esso

insieme chiuso di $\mathbb{R}^{\times d}$ sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\times d}$ complementare di un insieme aperto

l'unione di una collezione qualsiasi di insiemi aperti è un insieme aperto

l'intersezione di una collezione finita di insiemi aperti è un insieme aperto

l'intersezione di una collezione qualsiasi di insiemi chiusi è un insieme chiuso

l'unione di una collezione finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso

intorno di un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ insieme contenente una bolla aperta di centro $\mathbf{p}$

intorno impoverito di un $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ intorno di $\mathbf{p}$ privato dello stesso $\mathbf{p}$

intorno ipercuboide aperto di $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{\times d}$ insieme della forma

$$\left\{\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times d} \;\; ¶ \;\; \forall i = 1, ..., d \; \vdots \; p_i - \delta_i < x_i < p_i + \delta_i\right\}$$

punto interno a un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ punto che possiede un intorno interamente contenuto in S

interiore di $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ insieme dei punti interni di S; lo denotiamo con $\mathsf{Intrn}(\mathsf{S})$

punto esterno a un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ punto che possiede un intorno che non interseca S

punto di frontiera di un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ punto tale che ciascuno dei suoi intorni interseca sia S che il suo complementare;

frontiera di S insieme dei punti di frontiera di S; denotiamo tale insieme con $\partial\mathsf{S}$

chiusura di un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ ampliamento di S ottenuto aggiungendo la sua frontiera;
la denotiamo con $\overline{\mathsf{S}}$ e definiamo $\overline{\mathsf{S}} := \mathsf{S} \cup \partial\mathsf{S}$

un punto $\mathbf{q}$ si dice **punto di accumulazione** o **punto di aderenza** o **punto limite** di $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ sse ogni suo intorno impoverito contiene almeno un punto di S.

si dice **aderenza** di un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ (B36:a.03) l'insieme dei suoi punti di accumulazione e che tale insieme si denota con $\boldsymbol{Adrn}_{\mathbb{R}^{\times d}}(\mathsf{S})$; spesso questa notazione si può semplificare nella $\boldsymbol{Adrn}(\mathsf{S})$.

un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ si dice limitato sse $\mathbb{R}_+ \ni R$ tale che $\mathsf{S} \subset \mathsf{ball}(\mathbf{0}_d, R)$

ogni insieme limitato infinito di $\mathbb{R}^{\times d}$ possiede almeno un punto di accumulazione
(**teorema di Bolzano-Weierstrass**)

un $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ si dice compatto sse da ogni successione di suoi punti si può estrarre una sottosuccessione che converge a un suo punto

sia $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{\times d}$ compatto e sia $\{i \in I :| O_i\}$ una sua copertura numerabile di insiemi aperti;
da essa si può estrarre una copertura finita (**teorema di Pincherle-Heine-Borel**)

W40:b. derivate parziali

consideriamo $f(x,y) \in \lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, $D := \mathsf{dom}(f)$ e $\langle a,b\rangle \in \mathsf{Intrn}(D)$;

si dice **derivata parziale** della f rispetto ad x in $\langle a,b\rangle \in D$ (se esiste)

$$\mathrm{D}_x\, f(a,b) \;=\; {f_x}'(a,b) \;=\; \frac{\partial\, f}{\partial\, x} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\ .$$

si dice derivata parziale della f rispetto ad y in $\langle a,b\rangle \in D$ (se esiste)

$$\mathrm{D}_y\, f(a,b) \;=\; {f_y}'(a,b) \;=\; \frac{\partial\, f}{\partial\, y} \;=\; \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\ .$$

derivate seconde $\quad {\mathrm{D}_x}^2\, f(a,b) \;=\; f_{xx}(a,b) \;=\; \dfrac{\partial^2 f}{\partial\, x^2}$,

$$\mathrm{D}_y\,\mathrm{D}_x\, f(a,b) \;=\; f_{xy}(a,b) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial\, y\,\partial\, x} \quad , \quad {\mathrm{D}_y}^2\, f(a,b) \;=\; f_{yy}(a,b) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial\, y^2}$$

le funzioni f_{xy} e f_{yx}, se sono continue coincidono

definizioni analoghe per le derivate parziali delle funzioni in $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, aventi forme come $\mathrm{D}_{x_n} \cdots \mathrm{D}_{x_2}\,\mathrm{D}_{x_1}\, f\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n) \;=\; f_{x_1 x_2 \ldots x_n}\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$

W40:c. operatori su campi vettoriali

consideriamo spazi cartesiani d-dimensionale $\mathbb{R}^{\times d}$ con coordinate x_i per $i = 1, 2, ..., d$ che in particolare si possono ridurre a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$con coordinate x e y o a $\mathbb{R}^{\times 3}$ con coordinate x, y e z.

consideriamo funzioni da domini D in valori scalari o d dimensionali che assumiamo sufficientemente regolari.

operatore nabla $\qquad \nabla \ := \ \mathbf{e}_1 \, \mathrm{D}_{x_1} + \mathbf{e}_2 \, \mathrm{D}_{x_2} + \cdots + \mathbf{e}_d \, \mathrm{D}_{x_d} \ = \ \sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_i \, \mathrm{D}_{x_i}$

gradiente della funzione $f \in \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil \qquad \nabla f \ := \ \sum_{i=1}^{d} \mathbf{e}_1 \, \mathrm{D}_{x_i} f$

In particolare se $d = 2$ la $f(x, y)$ può rappresentare una superficie e il gradiente in ogni punto inteno a D è ortogonale alla corrispondente curva di livello.
Se $d = 3$ la $f(x, y, z)$ può rappresentare una densità e il gradiente è ortogonale alla corrispondente superficie di livello.

divergenza della $\mathbf{f} = \left\langle f_{x_1}, f_{x_2}, ..., f_{x_d} \right\rangle \in \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil \qquad \nabla f \ := \ \sum_{i=1}^{d} \mathrm{D}_{x_i} f$

rotore della funzione $\mathbf{f} \ = \ \mathbf{e} \, f_x + \mathbf{e}_y \, f_y + \mathbf{e}_z \, f_z \in \lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{f} \ := \ \nabla \wedge \mathbf{f} \ = \ \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \ = \ \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

operatore di Laplace applicato alla $f \in \lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil \qquad \nabla \cdot \nabla \, f(\mathbf{x}) \ := \ \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial {x_i}^2} f(\mathbf{x})$

W40:d. curve piane e calcolo infinitesimale

W40:**d.00** In questa sezione usiamo t per denotare una variabile reale e per ogni funzione $\phi(t)$ scriveremo $\dot{\phi}(t) \;:=\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\phi(t)$.
Useremo A per l'area di una regione, s per la lunghezza di un arco, κ per la sua curvatura e $\rho = \dfrac{1}{|\kappa|}$ per il suo raggio di curvatura.
Verranno trattate funzioni $f(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$ definite nell'intervallo $\mathsf{I} \;:=\; [x_1, x_2]$.
Verranno inoltre trattate le regioni $\mathsf{R}_{f_1,f_2} := \{\langle x,y\rangle \mid: x \in \mathsf{I}\ ,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ e

W40:**d.01** curve date da funzioni $y = f(x)$

area della regione R delimitata da $f_1(x)$ ed $f_2(x)(\geq f_1(x))$ per $x_1 \leq x \leq x_2$

$$A \;:=\; \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left(f_2(x) - f_1(x)\right)$$

centroide $\langle x_c, y_c\rangle$ della R

$$x_c \;:=\; \frac{1}{A}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, x \left(f_2(x) - f_1(x)\right) \qquad y_c \;:=\; \frac{1}{2\,A}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left({f_2}^2(x) - f_1(x)^2\right)$$

lunghezza della curva $y = f(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ $\quad s \;:=\; \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\,\sqrt{1 + f'(x)^2}$

W40: d.02 curve in forma parametrica

W40: d.03 curve in forma implicita

W40: d.04 curve in coordinate polari

W40: d.05 famiglie di curve

W40:e. integrali doppi

Consideriamo una regione $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ limitata, chiusa e quadrabile, una funzione limitata peri cui genere poniamo $f \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ e scriviamo $m := \inf_{\langle x,y\rangle \in D} f(x,y)$ ed $M := \sup_{\langle x,y\rangle \in D} f(x,y)$. Denotiamo con $\mathsf{PrtnFQdrb}_D$ l'insieme delle partizioni di D costituite da collezioni finite di sottoinsiemi di D quadrabili.

Sia $\mathsf{R} = \{i = 1, ..., r :| D_{\mathsf{R},i}\}$ una collezione in $\mathsf{PrtnFQdrb}_D$ e quindi sia $\overset{\cdot}{\bigcup}_{i=1,\ldots,r} D_{\mathsf{R},i} = D$. Introduciamo inoltre per ogni R e ogni $D_{\mathsf{R},i}$:

$$d_{\mathsf{R}} := \max_{i=1,\ldots,r} \operatorname{diag}(D_{\mathsf{R},i}) \quad , \quad A_{\mathsf{R},i} := \boldsymbol{Area}(D_{\mathsf{R},i}) \quad , \quad m_{\mathsf{R},i} := \inf_{\langle x,y\rangle \in D_{\mathsf{R},i}} f(x,y) \quad ,$$

$$M_{\mathsf{R},i} := \sup_{\langle x,y\rangle \in D_{\mathsf{R},i}} f(x,y) \quad , \quad s_{\mathsf{R},i} := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathsf{R},i}\, m_{\mathsf{R},i} \quad , \quad S_{\mathsf{R},i} := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathsf{R},i}\, M_{\mathsf{R},i} \quad ,$$

Si definiscono, risp., integrale inferiore e integrale superiore della f in D

$$\underline{\iint_D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) := \inf_{\mathsf{R} \in \mathsf{PrtnFQdrb}_D} s_{\mathsf{R},i} \qquad , \qquad \overline{\iint_D} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) := \sup_{\mathsf{R} \in \mathsf{PrtnFQdrb}_D} s_{\mathsf{R},i} \ .$$

Se questi due numeri reali coincidono il loro valore si dice integrale doppio della f in D e si denota con

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) \ .$$

Un **insieme rinchiudibile in una regione** $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è un insieme finito di curve continue contenute in D che possono essere racchiuse in regioni aperte di area complessiva riducibile a piacere.

Se una funzione-RRtR $f(x,y)$ definita in una regione D chiusa, limitata e quadrabile è limitata e continua in tutto D a eccezione dei punti di un insieme rinchiudibile, possiede integrale doppio ottenibile come

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) := \lim_{\mathsf{R} \in PrtnFQdrb\,,\, d_{\mathsf{R}} \to 0} \sum_{i=1}^{r} A_{\mathsf{R},i}\, f(x_i,y_i) \quad \text{per qualsiasi} \quad \langle x_i, y_i \rangle \in D_{\mathsf{R},i} \ .$$

W40:f. integrali tripli

W40:g. solidi di rivoluzione

volume del solido che presenta sezioni di area $A(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$ $\qquad V := \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\ A(x)$

volume del solido di rivoluzione intorno ad Ox delimitato da $f_1(x)$ e $f_2(x)$ per $x_1 \leq x \leq x_2$

$$V \ := \ \pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \left((f_2(x))^2 - (f_1(x)^2 \right)$$

volume del solido di rivoluzione intorno ad Oy delimitato da $g_1(y)$ e $g_2(y)$ per $y_1 \leq y \leq y_2$

$$V \ := \ \pi \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}x \left((g_2(y))^2 - (g_1(y))^2 \right)$$

W40:h. centroidi e momenti di inerzia

W40:h.00 centroidi e momenti di inerzia in 2D

Per varie figure presentiamo le coordinate del centroide, o centro di massa, $C\ x_C$, y_C e z_C, i momenti d'inerzia I_x, I_y, I_z relativi, risp., agli assi Ox, Oy e Oz e i momenti d'inerzia I_u, I_v ed I_w relativi ad assi determinati da opportuni vettori **u**, **v** e **w** che in genere sono applicati al centroide.

W40:h.01 centroidi e momenti di inerzia in 2D

riguardano lamine rigide e omogenee la cui massa denotiamo con m

asta o barra con estremità O e $\langle s, 0\rangle$ (appartenente ad Ox), considerando **v** parallelo ad Oy e applicato in C

$$x_C = \frac{s}{2}\ ,\ y_C = 0\ \ ,\ \ I_x = 0\ ,\ I_y = \frac{m\,s^3}{3}\ ,\ I_v + \frac{m\,s^3}{12}$$

rettangolo con due vertici opposti in $\langle a, 0\rangle$ e $\langle 0, b\rangle$ un lato appartenenti ad Ox e di lunghezza a e un lato appartenente ad Oy e di lunghezza b

$x_C = \frac{a}{2}\ ,\ y_C = \frac{b}{2}\ ,\ I_x = \frac{m\,b^2}{3}\ ,\ I_y = \frac{m\,a^2}{3}\ ,\ I_u = \frac{m\,a^2}{12}\ ,\ I_v = \frac{m\,a^2}{12}$ con **u** orizzontale e **v** verticale applicati in C

triangolo con un lato (su Ox) con estremità in $\langle -a_1, 0\rangle$ e $\big\langle a_2, 0\big\rangle$, il vertice opposto in $V = \langle 0, h\rangle$

$$x_C = \frac{c-b}{3}\ ,\ y_C = \frac{h}{3}\ ,\ I_x = \frac{m\,h^2}{6}\ ,\ I_y = \frac{m({a_1}^3 + {a_2}^3)}{6\,a_1 + a_2}\ ,\ I_u = \frac{m\,h^2}{18}\ ,\ I_w = \frac{m\,h^2}{2}$$

ove **u** e **w** sono orizzontali, il primo applicato in C ed il secondo in V

cerchio con centro (centroide) in O e raggio r $\quad I_x = I_y \frac{m\,r^2}{4}\ ,\ I_u = I_v = \frac{5\,m\,r^2}{4}$ $\quad$ dove **u** è orizzontale e tangente al cerchio in $\langle 0, -r\rangle$ e **v** verticale e tangente al cerchio in $\langle -r, 0\rangle$

settore circolare del cerchio di raggio r con centro in O, con asse Ox e ampiezza dell'angolo al centro $2\,\alpha$

$$x_C = \frac{2\,r\,\sin\,\alpha}{3\,\alpha}\ ,\ y_C = 0\ ,\ I_x = \frac{m\,r^2}{4}\left(1 - \frac{\sin\,2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)\ ,\ I_y = \frac{m\,r^2}{4}\left(1 + \frac{\sin\,2\,\alpha}{2\,\alpha}\right)$$

corona circolare delimitata dalle circonferenze con centro in O e raggi r_1 ed r_2 $(> r_1)$

$$I_x = I_y = \frac{m\,({r_1}^2 + {r_2}^2)}{4}\quad ,\quad I_u = I_v = \frac{m\,({r_1}^2 + {r_2}^2)}{4} + m\,{r_2}^2$$

W40:h.02 centroidi e momenti di inerzia in 3D

parallelepipedo con lati sui tre assi aventi lunghezze a, b e c

$$x_C = \frac{a}{2}\ ,\ y_C = \frac{b}{2}\ ,\ z_c = \frac{c}{2}\ ,\ I_y = \frac{m}{3}\,(a^2 + c^2)\ ,\ I_v = \frac{m}{12}\,(a^2 + 4\,c^2)\ ,\ I_u = \frac{m}{3}\,(a^2 + c^2)\ \ ,$$

dove **v** e **u** sono vettori paralleli ad Oy, il primo sulla mediana della faccia inferiore, il secondo applicato in C

sfera con centro in O e raggio r $\quad x_C = y_C = z_C = 0\ \ ,\ I_x = I_y = I_z\ =\ \frac{2}{5}\,m\,r^2$ e

$I_u\ =\ \frac{7}{5}\,m\,r^2$, dove **u** è un vettore tangente alla sfera

sfera cava con centro in O e raggio r $\quad x_C = y_C = z_C = 0\ \ ,\ I_x = I_y = I_z\ =\ \frac{2}{3}\,m\,r^2$ e

$I_u\ =\ \frac{5}{3}\,m\,r^2$, dove **u** è un vettore tangente alla sfera

cilindro con asse di simmetria cilindrica Oz, avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0 \;\;,\;\; z_C = \dfrac{h}{2}\;,\; I_x = I_y \;=\; \dfrac{m}{12}\,(3\,r^2 + 4\,h^2)\;,\; I_z \;=\; \dfrac{1}{2}\,m\,r^2\;,\; I_u \;=\; \dfrac{m}{12}\,(3\,r^2 + h^2)\;,$
dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C

cilindro cavo e senza basi con asse di simmetria cilindrica Oz, avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0 \;\;,\;\; z_C = \dfrac{h}{2}\;,\; I_x = I_y \;=\; \dfrac{m}{6}\,(3\,r^2 + 2\,h^2)\;,\; I_z \;=\; m\,r^2\;,\; I_u \;=\; \dfrac{m}{12}\,(6\,r^2 + h^2)\;,$
dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C

cono avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0 \;\;,\;\; z_C = \dfrac{h}{4}\;,\; I_x = I_y \;=\; \dfrac{m}{20}\,(3\,r^2 + 2\,h^2)\;,\; I_z \;=\; \dfrac{3}{10}\,m\,r^2\;,\; I_u \;=\; \dfrac{m}{12}\,(6\,r^2 + h^2)\;,$
dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C

cono cavo e privato della base avente come base un cerchio sul piano Oxy di raggio r e avente altezza h

$x_C = y_C = 0 \;\;,\;\; z_C = \dfrac{2}{3}\,h\;,\; I_x = I_y \;=\; \dfrac{m}{4}\,(r^2 + 2\,h^2)\;,\; I_z \;=\; \dfrac{1}{2}\,m\,r^2\;,\; I_u \;=\; \dfrac{m}{18}\,(9\,r^2 + 10\,h^2)$
e $I_v \;=\; \dfrac{m}{4}\,(r^2 + 2\,h^2)\;,$ dove **u** è un vettore orizzontale applicato in C e **v** un vettore orizzontale passante per il vertice

W40:i. analisi dei campi vettoriali

Ricordiamo le notazioni $[\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}] \ := \ \mathbf{f}\cdot(\mathbf{g}\wedge\mathbf{h})$ e
$\nabla(f(\mathbf{r})) \ = \ \mathrm{grad}(f(\mathbf{r})) \ := \ \mathbf{e}_x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(\mathbf{r}) + \mathbf{e}_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(\mathbf{r})$

W40:i.01 curve in più dimensioni

Per ogni $f(t) \in \lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ scriviamo $\dot{f}(t) \ := \ \mathrm{D}_t\, f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ e per ogni
$\mathbf{F}(t) = \langle F_1(t), ..., F_d(t) \rangle$ scriviamo $\dot{\mathbf{F}}(t) \ := \ D_t \mathbf{F}(t)$ (notazioni usate in fisica matematica)
Consideriamo l'intervallo reale $[a,b]$ e per $t \in [a,b]$ le curve in d dimensioni
$\mathbf{r}(t) = \langle x_1(t), ..., x_d(t)\rangle$, $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{h}(T)$ e la funzione $s(t)$
$\mathrm{D}_t\,(\alpha\,\mathbf{f}(t) + \beta\,\mathbf{g}(t)) \ - \ \alpha\,\mathrm{D}_t\,\mathbf{f}(t) + \beta\,\mathrm{D}_t\,\mathbf{g}(t)$, $\mathrm{D}_t\ (s(t)\,\mathbf{f}(t)) \ = \ s(t)\,\dot{\mathbf{f}}(t) + \dot{s}(t)\,\mathbf{f}(t)$
$\mathrm{D}_t \Big(\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t)\Big) \ = \ \mathbf{f}(t)\cdot\dot{\mathbf{g}}(t) + \dot{\mathbf{f}}(t)\cdot\mathbf{g}(t)$, per $d=3$ si ha $\mathrm{D}_t \Big(\mathbf{f}(t)\wedge\mathbf{g}(t)\Big) \ = \ \mathbf{f}(t)\wedge\dot{\mathbf{g}}(t) + \dot{\mathbf{f}}(t)\wedge\mathbf{g}(t)$
$\mathrm{D}_t\,[\mathbf{f},\mathbf{g},\mathbf{h}] \ = \ \mathrm{D}_t\,\big(\mathbf{f}\cdot(\mathbf{g}\wedge\mathbf{h}\big) \ = \ [\dot{\mathbf{f}},\mathbf{g},\mathbf{h}] + [\mathbf{f},\dot{\mathbf{g}},\mathbf{h}] + [\mathbf{f},\mathbf{g},\dot{\mathbf{h}}]$
$\mathrm{D}_t\, s\Big(\mathbf{f}(t)\Big) \ = \ \nabla\,(\mathbf{f}(t))\cdot\dot{\mathbf{f}}(t)$
$\mathbf{f}(t+\Delta t) \ = \ \mathbf{f}(t) + \Delta t\,\dot{\mathbf{f}}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2}\,\dot{\mathbf{f}}(t) + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}\,{D_t}^n\,\mathbf{f}(t) + \cdots$
Consideriamo una curva γ definita dalla funzione $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), x(t)\rangle \in \lceil\, [a,b] \longmapsto \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$
vettore tangente alla γ in $\mathbf{r}$: $\dot{\mathbf{r}}(t) = \langle \dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\rangle$
lunghezza della curva : $\mathsf{len}(\gamma) = \int_\gamma |\mathrm{d}\,\mathbf{r}| = \int_a^b \mathrm{d}t\,|\mathbf{r}(t)| = \int_a^b \mathrm{d}t\ \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$

W40:i.02 traiettoria di una particella

posizione $\mathbf{r}(t)$ versore tangente alla traiettoria $\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}(t)|}$
velocità rispetto al parametro t $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = |\dot{\mathbf{r}}|\,\mathbf{t}$ modulo della velocità $v \ := \ |\dot{\mathbf{r}}|$
versore normale principale $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{r}'' - \dot{v}\,\mathbf{t}}{|\mathbf{r}'' - \dot{v}\,\mathbf{t}|}$
accelerazione rispetto a t $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r}'' = a_t\,\mathbf{t} + a_n\,\mathbf{n}$ con $a_t = \dot{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}''}{|\dot{\mathbf{r}}|}$
$a_n = \kappa\,v^2 = \frac{|\mathbf{v}\wedge\mathbf{a}|}{v} \ = \ \frac{|\dot{\mathbf{f}}\wedge\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|}$

`Testi dell'`*esposizione* `in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`