1

Capitolo W25
prontuario: matrici, spazi vettoriali e geometria

Contenuti delle sezioni

39 pagine

W25 a. matrici

In questa sezione m ed n denotano due interi positivi (di solito maggiori di 1) e $\mathbb{K}$ un semianello; questo nei casi di maggiore interesse è il campo dei reali o il campo dei complessi. Per gli elementi di $\mathbb{K}$ useremo notazioni come α, β, a_i, $a_{i,j}$ e b_k.

W25a.01 vettori colonna e vettori riga

Per le sequenze di elementi di $\mathbb{K}$, che vengono chiamati anche vettori, e per le loro composizioni che sono chiamate matrici, adottiamo una rappresentazione piana canonica che denotiamo con **VMPR**, abbreviazione di *vector and matrix canonical plane representation.*
Secondo VMPR, innanzitutto, la sequenza $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, ..., a_m \rangle$ viene rappresentata da un vettore colonna e con esso di solito la identifichiamo:

$$\mathbf{a} \;=\; \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Diciamo vettore trasposto di $\mathbf{a}$ la rappresentazione mediante vettore riga della sequenza:

$$\mathbf{a}^\top \;:=\; [a_1, a_2, ..., a_m]$$

Si definisce moltiplicazione per $\alpha \in \mathbb{K}$ di $\mathbf{a}$ la sequenza rappresentata secondo VMPR dal vettore colonna

$$\alpha \cdot \mathbf{a} \;:=\; \begin{bmatrix} \alpha\, a_1 \\ \alpha\, a_2 \\ \vdots \\ \alpha\, a_m \end{bmatrix}$$

Come prodotto scalare delle sequenze $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ con lo stesso numero m di componenti si pone $\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} \;:=\; a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \cdots + a_m\, b_m \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_i\, b_i$.

Il prodotto scalare va considerato una funzione bilineare simmetrica, in quanto si hanno

$$\mathbf{a}^\top \cdot (\beta\, \mathbf{b} + \gamma\, \mathbf{c}) \;=\; \beta\, \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} + \gamma\, \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{c}$$

$$\text{e} \qquad \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{a} \;=\; \mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b}\ .$$

Si dice **norma di un vettore a** o **lunghezza di un vettore a** $|\mathbf{a}| \;:=\; \sqrt{\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{a}} \;=\; \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_m}^2}$.

Due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ si dicono **vettori ortogonali**, e si scrive $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, sse $\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = 0$.

W25a.02 matrici

Consideriamo n vettori colonna $\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{bmatrix}$ per $j = 1, 2, ..., n$ e l'operazione di affiancamento, noncommutativa, che per $\mathbf{a}_1 ⫴ \mathbf{a}_2$ fornisce una funzione del genere $\lceil (m] \times (2] \longmapsto \mathbb{K} \rceil$ che secondo VMPR viene presentata sulla pagina con il quadro $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} \end{bmatrix}$ Si chiede anche che l'affiancamento sia associativo e quindi si definisce matrice ottenuta affiancando $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_n$, la funzione $\lceil (m] \times (\mathrm{n}\ ] \longmapsto \mathbb{K} \rceil$ che secondo VMPR viene presentata dal quadro

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \qquad \text{e concisamente da} \qquad [a_{i,j}\ |:\ i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]] \ .$$

Denotiamo con $\mathsf{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici $m\ timesn$ con entrate in $\mathbb{K}$; a queste matrici si attribuisce il **profilo** $m \times n$.

Si dice **matrice quadrata** una matrice con le righe etichettate come le colonne e in particolare con i numeri delle righe e delle colonne coincidenti. $\mathsf{Mat}_{m,m}(\mathbb{K})$ si abbrevia spesso con $\mathsf{Mat}_m(\mathbb{K})$.

Particolari matrici quadrate sono le **matrici triangolari inferiori** aventi la forma $\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}$

cioè le matrici $[a_{i,j}\ |:\ i,j \in (m]]$ tali che $i < j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.

Si dicono invece **matrici triangolari superiori** le matrici $[a_{i,j}\ |:\ i,j \in (m]]$ tali che $i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$

Si dicono **matrici diagonali** le matrici quadrate aventi la forma

$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,m} \end{bmatrix}$ ¡ cioè tali che $i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$. La precedente matrice si denota anche con $\mathrm{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots, a_{m,m})$.

L'insieme delle matrici diagonali è l'intersezione dell'insieme delle triangolari inferiori con quello delle triangolari superiori.

Particolari matrici diagonali sono la matrice identità $\mathbf{1}_{n,n} := \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$ e i suoi multipli $h \cdot \mathbf{1}_{n,n} = \mathrm{diag}(h,h,\cdots,h)$.

Si dice **matrice permutativa** corrispondente a una permutazione $\pi = \langle \pi_1, \pi_2, ..., \pi_m \rangle$ la matrice $\mathsf{Mprmt}(\pi) = [M_{i,j}\ |:\ i,j \in (m]]$, dove $M_{i,j} = \delta_{\pi_i,j}$.

Altre matrici particolari sono le matrici nulle aventi tutte le entrate uguali a 0; la matrice nulla di profilo $m \times n$ la scriviamo $\mathbf{0}_{m,n}$.

W25a.03 operazioni su matrici

Consideriamo $m,n,\mu,\nu,p,q \in \mathbb{P}$ e le matrici $A = [a_{i,j}\ |:\ i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]]$, $B = [b_{i,j}\ |:\ i \in (\mu], j \in (\nu]]$ e $C = [c_{i,j}\ |:\ i \in (p], j \in (q]]$.

Si definisce **somma di matrici** (per $\mu = m$ e $\nu = n$) $A + B := [a_{i,j} + b_{i,j}\ |:\ i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]] \in \mathsf{Mat}_{m,n}$

La somma di matrici è associativa e commutativa; inoltre $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ e la matrice $\mathbf{0}_{m,n}$ è l'elemento neutro per la somma di matrici $m \times n$.

Si dice moltiplicazione di matrice per un $\alpha \in \mathbb{K}$ $\alpha \cdot A := [\alpha \cdot a_{i,j}\ |:\ i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]]$

Si possono quindi considerare le combinazioni lineari di matrici $\alpha\, A + \beta\, B$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$; le matrici di un dato profilo quindi costituiscono uno spazio vettoriale.

Si dice **matrice opposta** della A $-A := [a_{i,j}\ |:\ i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]]$

si dice **differenza tra matrici** (per $\mu = m$ e $\nu = n$) $A - B := A + (-B) = [a_{i,j} - b_{i,j}\ |:\ i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]]$

Le matrici $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$ e $B \in \mathsf{Mat}_{\mu,\nu}$ si dicono **matrici conformabili** o matrici moltiplicabili sse $n = \mu$.

prodotto di matrici conformabili $A \cdot B \; := \left[\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, bj,h \;|: i \in (m], h \in (\nu]\right] \; \in \mathsf{Mat}_{m,\nu}$.

Il prodotto si può applicare a ogni coppia di matrici $m \times m$ e fornisce una matrice dello stesso profilo.

La matrice identità $m \times m$ è l'unità per il prodotto tra matrici di tale profilo.

Il prodotto è un'operazione associativa e in genere noncommutativa, anche limitatamente alle matrici quadrate; per esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Inoltre, se π e ϕ denotano due permutazioni, per il prodotto delle corrispondenti matrici permutative si ha $\mathsf{Mprmt}(\pi) \cdot \mathsf{Mprmt}(\phi) = \mathsf{Mprmt}(\pi \circ \phi)$; il prodotto di tali matrici rispetta il prodotto di Peirce delle corrispondenti permutazioni e tale prodotto in generale non è commutativo.

Moltiplicando la matrice $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$ a sinistra per la matrice $Mperm(\pi)$ con $\pi \in \mathsf{Sym}_m$ si ottiene la matrice ottenibile anche dalla A sottoponendo le sue righe alla permutazione π.
Dualmente moltiplicando la $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$ a destra per la matrice $Mperm(\phi)$ con $\phi \in \mathsf{Sym}_n$ si ottiene la matrice ottenibile anche dalla A sottoponendo le sue colonne alla permutazione ϕ.

Commutano invece le matrici diagonali:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\, b_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n}\, b_{n,n} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} .$$

Il prodotto mantiene la caratteristica di essere matrici triangolari inferiori e la caratteristica di essere matrici triangolari superiori.

Una matrice $A = [a_{i,j} \;|: i \in (m] \;,\; j \in (\mathrm{n}\,]]$, si può considerare ottenuta, non solo con l'affiancamento di n vettori colonna, ma anche come come sovrapposizione di m vettori riga $\mathsf{a}_{*,i}$ per $i \in (m]$.
Il prodotto di matrici si può considerare un assemblaggio di prodotti scalari; considerando il primo fattore A come sovrapposizione di vettori riga $\mathsf{a}_{i,*}$ e il secondo B come affiancamento di n vettori colonna $\mathsf{b}_{*,h}$, le entrate del prodotto $A \cdot B$ risultano esprimibili da prodotti scalari:

$$A \cdot B \;=\; [\mathsf{a}_{i,*} \cdot \mathsf{b}_{*,h} \;|: i \in (m], h \in (\nu]] \;.$$

Si dice **trasposta della matrice** $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$, e si scrive A^{T}, la matrice in $\mathsf{Mat}_{n,m}$ ottenuta dalla A scambiando di ruolo le righe e le colonne:

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

La trasposizione delle matrici generalizza la trasposizione di vettori riga e vettori colonna. La trasposizione sull'insieme delle matrici quadrate di dato profilo è una involuzione.

Si dice **matrice simmetrica** una matrice quadrata che coincide con la sua trasposta. Le matrici simmetriche sono i punti fissi per l'involuzione trasposizione delle matrici quadrate.

Si dice **matrice antisimmetrica** una matrice quadrata che coincide con l'opposta della sua trasposta.

Ad ogni matrice quadrata A risultano associate la matrice simmetrica $\frac{1}{2}(A + A^\top)$ e la matrice antisimmetrica $\frac{1}{2}(A - A^\top)$; inoltre A è ottenibile come somma delle due.

Per ogni matrice $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$ sono simmetriche le matrici $A \cdot A^\top \in \mathsf{Mat}_{m,m}$ e $A^\top \cdot A \in \mathsf{Mat}_{n,n}$.

La trasposizione rispetta la combinazione lineare delle matrici: in formula:

$$\forall A, B \in \mathsf{Mat}_{m,n} \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad : \quad (\alpha\, A + \beta\, B)^\top = \alpha\, A^\top + \beta\, B^\top \ .$$

La trasposizione di un prodotto comporta invece lo scambio dei fattori trasposti; infatti

$$(A \cdot B)^\top \ = \ (B^\top) \cdot (A^\top) \ .$$

Diciamo complessa coniugata di una matrice avente come entrate dei numeri complessi

$$A \ = \ [a_{i,j} \ |: i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]] \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{C},m,n}$$

la matrice le cui entrate sono i complessi coniugati degli $a_{i,j}$, ${}^*A^* \ := \ [a_{i,j}{}^* \ |: i \in (m], j \in (\mathrm{n}\ ]]$; coniugazione complessa è una involuzione di $\mathsf{Mat}_{\mathbb{C},m,n}$, rispetta la combinazione lineare delle matrici in tale insieme e rispetta anche il prodotto di matrici conformabili, ossia $(A \cdot B)^* \ = \ A^* \cdot B^*$.

Si dice coniugata hermitiana di $A \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{C},m,n}$ e si scrive $A^\dagger$, la matrice complessa coniugata della sua trasposta; si ha $A^\dagger = A^{\top *} = A^{*\top}$.

Una $A \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{C},n,n}$ si dice **matrice hermitiana** sse $A = A^\dagger$, cioè sse $A^\top = A^*$; si dice invece **matrice antihermitiana** sse $A^\dagger = -A$, ovvero sse $A^\top = -A^*$.

La coniugazione hermitiana è una involuzione avente come punti fissi le matrici hermitiane; per l'azione della coniugazione hermitiana sul prodotto, similmente a quanto si riscontra per la trasposizione, si ha $(A \cdot B)^\dagger \ = \ B^\dagger \cdot A^\dagger$.

L'insieme delle matrici hermitiane e l'insieme delle matrici antihermitiane sono chiusi rispetto alla combinazione lineare con coefficienti reali.

Per ogni matrice quadrata A e ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha(A + A^\dagger)$ è una matrice hermitiana ed $i\,\alpha\,(A - A^\dagger)$ è una matrice antihermitiana. Inoltre A si può ottenere come somma di una matrice hermitiana con una matrice antihermitiana:

$$A \ = \ \frac{1}{2}(A + A^\dagger) + \frac{\mathsf{i}}{2}(A - A^\dagger) \ .$$

Si definisce **traccia di una matrice quadrata** la somma delle sue entrate diagonali: $\mathrm{Tr}(A) \ := \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

La traccia può considerarsi un funzionale lineare sulle metrici qudrate:

$$\forall A, B \in \mathsf{Mat}_n \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \ : \ \mathrm{Tr}(\alpha\, A + \beta\, B) \ = \ \alpha\,\mathrm{Tr}(A) + \beta\,\mathrm{Tr}(B)$$

$\forall A \in \mathsf{Mat}_{m,n} \ , \ B \in \mathsf{Mat}_{n,m} \ : \ \mathrm{Tr}(A \cdot B) = \mathrm{Tr}(B \cdot A)$.

W25a.04 determinanti

Consideriamo una permutazione π di $\{1, 2, ..., n\}$; denotiamo con $ncdecr(\pi)$ il numero delle coppie $\langle\pi_i, \pi_j\rangle$ con $i < j$ tali che $\pi_i > \pi_j$; si dice **segno della permutazione** π l'intero $\text{sign}(\pi) := (-1)^{ncdecr}(\pi)$; le permutazioni con segno $+1$ si dicono pari (come $ncdecr(\pi)$), quelle con segno -1 si dicono dispari. Se $n \geq 2$ tra le $n!$ permutazioni di Perm_n $n!/2$ sono pari ed altrettante dispari. La funzione segno di permutazione è

Definiamo **determinante** di una matrice quadrata $n \times n$ A l'elemento di $\mathbb{K}$ dato dall'espressione

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix} := \sum_{\pi\in\mathsf{Perm}_n} \text{sign}(\pi)\, a_{1,\pi_1}\, a_{2,\pi_2} \cdots a_{n,\pi_n} .$$

In particolare per $n = 1, 2, 3$: $\quad |a_{1,1}| = a_{1,1} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2}, & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2}, & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1} + a_{1,3}\, a_{2,1}\, a_{3,2} - a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{3,2} - a_{1,3}\, a_{2,2}\, a_{3,1} - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3}$$

Il determinante di una matrice triangolare inferiore, e di una matrice triangolare superiore è dato dal prodotto delle entrate diagonali.

Proprietà: $\quad \det(A^\top) = \det(A) \quad \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \quad \det(\mathbf{1}_n) = 1 \quad \det(k\, A) = k^n \det(A)$. Inoltre il determinante di una matrice permutativa è il segno della corrispondente permutazione.

Se la matrice A presenta una riga o una colonna con tutte le entrate nulle, allora $\det(A) = 0$.

Se nella matrice A si scambiano due righe o due colonne il determinante cambia di segno; se le righe o le colonne della matrice sono sottoposte ad una permutazione π, il determinante viene moltiplicato per $\text{sign}(\pi)$.

Se la matrice A presenta due righe uguali o due colonne uguali, allora $\det(A) = 0$.

Il determinante di una matrice ottenuta dalla A moltiplicando per una costante k una sua riga o una sua colonna è uguale a $k \det(A)$.

Il determinante di una matrice ottenuta dalla A aggiungendo a una sua riga (o risp. una sua colonna) un'altra sua riga (risp. un'altra sua colonna) moltiplicata per una costante è uguale a $\det(A)$.

Sia n un intero maggiore o uguale a 2, A una matrice quadrata di Mat_n ed $i, j \in (\text{n}\,]$; denotiamo con $A_{\setminus\langle i,j\rangle}$ la matrice ottenuta dalla A la i-esima riga e la j-esima colonna e consideriamo $\det(A_{\setminus\langle i,j\rangle})$.

Si definisce come **cofattore della matrice** A relativo a $\langle i, j\rangle$ il valore $\mathsf{Cftr}_{i,j}(A) := (-1)^{i+j} \det\left(A\rfloor_{\neg} i, j\right)$.

Si hanno le seguenti espressioni per il determinante di A:

$$\forall i \in (\text{n}\,] : \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_(i, j)\, \mathsf{Cftr}_{i,j}(A) \qquad \text{sviluppo secondo la riga } i.$$

$$\forall j \in (\text{n}\,] : \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_(i, j)\, \mathsf{Cftr}_{i,j}(A) \qquad \text{sviluppo secondo la colonna } j.$$

Una matrice quadrata ha determinante diverso da 0 sse tutte le sue righe sono linearmente indipendenti sse tutte le sue colonne sono linearmente indipendenti.

W25a.05 inversione di matrici

Sia A una matrice quadrata $n \times n$.

Si dice **matrice inversa** della A, la matrice di Mat_n, se esiste, che si denota con $A^{-\mathbf{1}}$ che soddisfa le relazioni $A \cdot A^{-\mathbf{1}} = A^{-\mathbf{1}} \cdot A = \mathbf{1}_n$.
Se A possiede matrice inversa si dice **matrice invertibile**.

Se A è dotata di inversa A^{-1}, allora anche A^{-1} è invertibile e si ha $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Se A e B sono matrici quadrate invertibili dllo stesso profilo, è tale anche $A \cdot B$ e si ha $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

La trasposizione di matrici e il passaggio alla inversa come azioni sulle matrici quadrate commutano: $(A^{\top})^{-\mathbf{1}} = (A^{-\mathbf{1}})^{\top}$.

La matrice quadrata A è invertibile sse $\det(A) \neq 0$ sse le righe di A sono linearmente indipendenti sse le colonne di A sono linearmente indipendenti.
Ogni matrice permutativa $\mathsf{Mprmt}(\pi)$, avendo il determinante uguale a $\text{sign}(\pi)$, è invertibile e la sua inversa è $\mathsf{Mprmt}(\pi^{-\mathbf{1}})$.

W25a.06 matrici: rango e riduzione a scaglioni

Definiamo **rango di una matrice** $A \in \mathsf{Mat}_{m,n}$ il massimo ordine delle sue sottomatrici quadrate con determinante diverso da 0. Tale intero lo denotiamo con $\text{rnk}(A)$.

Il rango di una matrice si può anche definire come massimo numero di sue righe linearmente indipendenti, oppure come massimo numero di sue colonne linearmente indipendenti.

Diciamo trasformazioni elementari -rnkconsrow le seguenti trasformazioni di matrici:
- scambio di due righe;
- moltiplicazione di una riga per uno scalare diverso da 0;
- addizione a una riga di un'altra riga.

Tutte queste trasformazioni conservano il rango, sono biiezioni e possono ottenersi moltiplicando la matrice da trasformare per una opportuna matrice.

Anche la trasposizione non modifica il rango. Quindi il rango di una matrice non cambia se le si effettuano le corrispondenti delle trasformazioni precedenti riguardanti le colonne, trasformazioni che chiamiamo trasformazioni-rnkconscol elementari.

Quindi non cambia il rango anche se si applicano le cosiddette **trasformazioni-rnkcol**, cioè sequenze di trasformazioni elementari -rnkconsrow e -rnkconscol; tra queste trasformazioni si trovano le permutazioni di righe e di colonne e la somma a una riga (risp. colonna) di una qualsiasi combinazione lineare di altre righe (risp. colonne).

Due matrici A e B si dicono **equivalenti-rnkcol** sse l'una si può trasformare nell'altra applicando trasformazioni-rnkcol.

Una matrice si dice **matrice a scaglioni**, o anche matrici a gradini, (*echelon*) sse ha le seguenti proprietà:

(1) nella prima riga ha la prima entrata diversa da 0;

(2) per $j = 2, ..., r$ presenta la riga j-esima con z_j zeri iniziali seguiti da una entrata diversa da 0, dove $j < k \leq r \implies 1 \leq z_j < z_k$;

(3) se $r < m$ presenta $m - r$ righe con entrate nulle.

L'entrata nella posizioni $\langle j, z_j + 1$ si dice **pivot della riga** j **della matrice**.

Mediante permutazioni delle colonne una matrice a scaglioni si può ridurre ad avere tutti i pivots sulla diagonale principale.
Infine mediante ricombinazioni lineari delle righe o delle colonne una matrice a scaglioni può essere trasformata in una matrice con la sottomatrice delle prime r righe e delle prime r colonne uguale a $\mathbf{1}_r$.
Ovvio quindi che il rango della matrice a scaglioni suddescritta sia r.

Una qualsiasi matrice mediante trasformazioni -rnkcons si può trasformare in una matrice a scaglioni.
Il rango di una matrice si può anche definire come rango di ogni matrice a scaglioni a essa equivalente -rnkcons.

Valgono le seguenti proprietà del rango:

$$\mathrm{rnk}(A \cdot B) = \min(\mathrm{rnk}(A), \mathrm{rnk}(B)) \qquad \mathrm{rnk}(A \cdot A^\top) = \mathrm{rnk}(A^\top \cdot A) = \mathrm{rnk}(A) \ .$$

W25 b. sistemi di equazioni lineari

W25b.01 matrici ed equazioni lineari

Consideriamo $m, n \in \mathbb{P}$, la matrice $A = \mathsf{a}_{1,*}\,\mathsf{a}_{2,*} \cdots \mathsf{a}_{m,*} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$,

il vettore colonna $\mathsf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots b_m \end{bmatrix}$ ed il vettore colonna $\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots x_n \end{bmatrix}$.

Si dice sistema di m equazioni lineari nelle n incognite x_1, x_2 ... ed x_n il sistema di equazioni della forma

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,n}\,x_n & = b_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,n}\,x_n & = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots & \\ a_{m,1}\,x_1 + a_{m,2}\,x_2 + \cdots + a_{m,n}\,x_n & = b_n \end{cases}$$

Come in precedenza, nel seguito abbrevieremo “sistema di equazioni lineari” ed il suo plurale con la sigla LEsys. Il sistema caratterizzato da A e b lo denotiamo costruttivamente con $\mathcal{S} = \mathsf{SLE}(A, \mathsf{b})$; di questo sistema A si dice **matrice dei coefficienti** e **b vettore di termini noti**; ogni x che soddisfa le sue equazioni, si dice soluzione di Scl, mentre il vettore formale x si dice vettore delle incognite. Ad un LEsys attribuiamo come profilo il profilo della sua matrice dei coefficienti.

$\mathcal{S}$ si dice omogeneo sse $\mathsf{b} = \mathbf{0}_m$, disomogeneo in caso contrario; di ogni $\mathcal{S} = \mathsf{SLE}(A, \mathsf{b})$ disomogeneo il sistema $\mathcal{S}_o := \mathsf{SLE}(A, \mathbf{0}_n$ si dice corrispondente omogeneo.
Inoltre si dice **matrice dei coefficienti allargata del sistema** $\mathcal{S}$ la matrice $B := A \,⫼\, \mathsf{b}$.

Un sistema $\mathsf{SLE}(A, \mathsf{b})$ che possiede una sola soluzione si dice LEsys **determinato**, uno privo di soluzioni si chiama LEsys **impossibile** e uno con più soluzioni si dice LEsys **indeterminato**. In un sistema indeterminato le soluzioni sono caratterizzate da un numero f di incognite che possono assumere valori arbitrari e sono dette **indeterminate libere**; in tal caso si dice che il sistema possiede ∞^f soluzioni.

Sia $m = n$, caso di LEsys con tante equazioni quante le incognite.

Se $\mathrm{rnk}(A) = n$, cioè $\det(A) \neq 0$ $\mathcal{S}_0)$ ha una sola soluzione data da $\mathbf{0}_n$; in tal caso anche $\mathrm{rnk}(B) = n$ ed $\mathcal{S}$ possiede una sola soluzione.

Se $\mathrm{rnk}(A) < n$, e quindi $\det(A) = 0$, $\mathcal{S}_0$ possiede $\infty^{n-\mathrm{rnk}(A)}$ soluzioni; per il LEsys disomogeneo si danno due casi: quando $\mathrm{rnk}(A) < \mathrm{rnk}(B)$ non si ha alcuna soluzione; quando $\mathrm{rnk}(A) = \mathrm{rnk}(B) < n$ si hanno $\infty^{n-\mathrm{rnk}(A)}$ soluzioni.

Sia $n < m$, caso di sistema con meno incognite che equazioni.

Se $\mathrm{rnk}(A) = n$, $\mathcal{S}_0)$ ha una sola soluzione, mentre $\mathrm{rnk}(A) < \mathrm{rnk}(B)$ ed $\mathcal{S}$ non possiede alcuna soluzione.

Se $\mathrm{rnk}(A) < n$, $\mathcal{S}_0$ possiede $\infty^{n-\mathrm{rnk}(A)}$ soluzioni; per il sistema disomogeneo si danno due casi: quando $rnk(A) < \mathrm{rnk}(B) = n$ si ha una sola soluzione; quando $\mathrm{rnk}(A) = \mathrm{rnk}(B) < n$ si hanno $\infty^{n-\mathrm{rnk}(A)}$ soluzioni.

Sia $n < m$, caso di LEsys con più incognite che equazioni.

Se $\mathrm{rnk}(A) = n$, $\mathcal{S}_0)$ ha infinite soluzioni; per il sistema disomogeneo si danno due casi:

quando $\mathrm{rnk}(A) < \mathrm{rnk}(B)$, $\mathcal{S}$ non possiede alcuna soluzione;

quando $\text{rnk}(A) = \text{rnk}(B) < n$ si hanno $\infty^{n-\text{rnk}(A)}$ soluzioni.

W25b.02 soluzione dei LEsys mediante eliminazione di Gauss

Si può ricercare la soluzione di un sistema $\mathsf{SLE}(A, \mathbf{b})$ procedendo a effettuare modifiche delle equazioni che lo compongono seguendo da vicino il procedimento di trasformazione di un matrice ad una equivalente a scaglioni. Alle equazioni del sistema si possono applicare le operazioni elementari (1) scambio delle equazioni, (2) moltiplicazione di tutti gli addendi di una equazione per uno scalare diverso da 0, (3) aggiunta membro a membro ad una equazione di un'altra. Queste sono in stretta corrispondenza con le trasformazioni elementari -rnkconsrow (1), (2) e (3) viste in ea.06 per una generica matrice; ora questa matrice svolge il ruolo di matrice dei coefficienti del sistema.

Con queste trasformazioni e attribuendo opportuni nuovi indici alle incognite con una permutazione che corrisponde alla stessa permutazione delle colonne della matrice dei coefficienti modificata si giunge a un sistema che, posto $r := \text{rnk}(A)$, ha la forma

$$\begin{cases} c_{1,1}\,\xi_1 + c_{1,2}\,\xi_2 + \cdots + c_{1,r}\,\xi_r + \sum_{j=r+1}^n c_{1,j}\,\xi_j & = \beta_1 \\ \qquad\quad c_{2,2}\,\xi_2 + \cdots + c_{2,r}\,\xi_r + \sum_{j=r+1}^n c_{2,j}\,\xi_j & = \beta_2 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \qquad\qquad\qquad c_{r,r}\,\xi_r + \sum_{j=r+1}^n c_{r,j}\,\xi_j & = \beta_r \end{cases}$$

In questo sistema si distinguono chiaramente le incognite basiche ξ_1, ξ_2,...,ξ_r che corrispondono ai pivots e le incognite libere che possono assumere valori qualsiasi e in particolare il valore 0. La determinazione dei valori delle incognite basiche si effettua con facilità procedendo a ritroso da ξ_r a ξ_1. È questo il metodo della eliminazione delle variabili di Gauss.

W25b.03 soluzione dei LEsys quadrati

Vediamo come calcolare la soluzione, esistente e unica, di un sistema $\mathsf{SLE}(A, \mathbf{b})$ con $\det(A) \neq 0$.

Chiaramente la soluzione si può ottenere mediante la matrice inversa con l'espressione $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Più operativamente si possono prendere in considerazione le espressioni sulle quali si basa la **regola di Cramer**.

Scriviamo $\Delta := \det(A)$ e per $j = 1, 2, ..., n$ denotiamo con D_j il determinante della matrice ottenuta dalla A sostituendo la sua colonna j con il vettore colonna dei termini noti $\mathbf{B}$.

Allora per $j = 1, 2, ..., n$ si ottengono le componenti delle incognite x_j mediante le espressioni $x_j = \dfrac{D_j}{\Delta}$.

W25**b.04** approssimazione dei minimi quadrati

Consideriamo uno $\mathsf{SLE}(A,\mathbf{b})$ di profilo $m\times n$ privo di soluzioni esatte; può essere utile trovare una sua soluzione approssimata.
Introduciamo il corrispondente errore vettoriale $\mathbf{E} = \langle E_1, E_2, ..., E_m\rangle \ := \ A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_m$ le cui componenti sono $E_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, x_j\right) - b_i$ per $i=1,2,...,m$. Si tratta di individuare un vettore $\mathbf{x}$ che rende minimo il cosiddetto errore quadratico medio

$$\sigma \ := \ \frac{1}{\sqrt{m}}\,|A\cdot\mathbf{x}-\mathbf{b}| = \frac{1}{\sqrt{m}}\,|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{1}{m}\,\left({E_1}^2+{E_2}^2+\cdots {E_n}^2\right)}\ .$$

Un tale $\mathbf{x}$ si può considerare una soluzione mediamente migliore di $\mathsf{SLE}(A,\mathbf{b})$ e si dice soluzione in media del sistema in esame.

Ogni soluzione di un LEsys di profilo $n\times n$ della forma $A^{\mathsf{T}}\cdot A\cdot\mathbf{x} \ = \ A^{\mathsf{T}}\cdot\mathbf{b}$ rende minimo σ ; Di questo sistema, chiamato sistema delle equazioni normali di Gauss, esiste sempre almeno una soluzione, soluzione in media.

W25**b.05** disuguaglianze

Consideriamo a e b numeri reali.

$$|a\,b| \leq \frac{1}{2}\,\left(a^2+b^2\right) \qquad , \qquad \forall\rho\in\mathbb{R}_+ \ \vdots\ \ |a\,b| \leq \frac{1}{2}\left(\rho\,a^2+\frac{1}{\rho}b^2\right)$$

W25 c. geometria piana

W25c.01 triangoli

Denotiamo con $\triangle(A,B,C,\alpha,\beta,\gamma,a,b,c)$ il triangolo i cui vertici, procedendo nel verso antiorario, sono A, B e C, i cui angoli interni relativi ai suddetti vertici sono $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$ e $\hat{C}=\gamma$ e i cui lati sono, risp., a (opposto ad A), b opposto a B e c opposto a C). Denotiamo inoltre con A la sua area, con R il suo circumraggio e con r il suo inraggio. Preferenzialmente presenteremo $a \leq b \leq c$.

Prime proprietà: qq $\alpha+\beta+\gamma=180°$, $\alpha<\beta<\gamma \Longrightarrow a<b<c$

Sono membri notevoli di un triangolo:
- **altezze di un triangolo** h_a, h_b e h_c; inoltre poniamo $H_a := h_a \cap \overline{BC}$ ecc.
- **bisettrici di un triangolo** per gli angoli interni b_α, b_β e b_γ
- punti medi dei lati M_a, M_b ed M_c;
- **assi dei lati di un triangolo**, perpendicolari dei lati nei loro punti medi;
- **mediane di un triangolo** m_a, m_b e m_c.

Concorrono in un punto
- le altezze (il punto viene detto **ortocentro**),
- le bisettrici (il punto viene detto **incentro**),
- le perpendicolari ai punti medi dei lati (il punto viene detto **circocentro**),
- le mediane (il punto viene detto **centroide**).

Due triangoli si dicono congruenti sse vale una delle seguenti (equivalenti) uguaglianze tra terne di rispettivi membri:
- tre lati (**uguaglianza SSS**),
- un angolo e i due lati che lo includono (**uguaglianza SAS**),
- un lato e i due angoli che lo includono (**uguaglianza ASA**).

Consideriamo due triangoli $\Delta(A,B,C,\alpha,\beta,\gamma,a,b,c)$ e $\Delta(A',B',C',\alpha',\beta',\gamma',a',b',c')$; essi sono detti **triangoli simili** sse

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \text{ e } \alpha=\alpha',\ \beta=\beta'\ \gamma=\gamma' .$$

Essi risultano simili sse hanno i lati proporzionali, $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$;

– ovvero sse $\alpha=\alpha'$ e $\frac{b}{c}=\frac{b'}{c'}$;

– ovvero sse ($\alpha=\alpha'$ e $\beta=\beta'$.

Se due triangoli Δ e Δ' sono simili, allora per le rispettive aree

$$\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{A}'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{h_a}{h'_{a'}}\right)^2 = \cdots\cdots$$

triangoli rettangoli

teorema di Pitagora $a^2+c^2=c^2$

$\mathsf{A} = \frac{a\,b}{2} = \frac{c\,h_c}{2}$, $\frac{b}{c_A}=\frac{a}{c_B}$, $h_c=\sqrt{c_A\,c_B}$, $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a+b-c}{2}$

Se il triangolo rettangolo è isoscele, $a=b$, allora $\alpha=\beta$, $c=a\sqrt{2}$ e $h\,c=\frac{a}{\sqrt{2}}$

Se $\alpha=60°$, allora $c=2\,b$ ed $a=b\sqrt{3}$

triangoli equilateri $a = b = c$ e $\alpha = \beta = \gamma = 60°$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a \ , \ \mathsf{A} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2}{\sqrt{3}} \ , \ r = \frac{1}{3}h = \frac{a}{2\sqrt{3}} \ , \ R = 2r = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}h$$

triangoli isosceli che caratterizziamo con $a = b$, equivalente a $\alpha = \beta$ (**pons asinorum**)

$$\gamma = 180° - 2\alpha \text{ e quindi } \gamma < 90° \iff c < a = b \ , \ h_c = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}} \ , \ h_b = h_c\frac{c}{b}$$

se $\gamma = 36°$, allora , $\alpha = \beta = 72°$, $a = b = c\,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \dfrac{1}{\phi} \approx 0.61803\,c$

[v. numero di Fidia in W25ebb e G34c03].

se $\gamma = 72°$, allora , $\alpha = \beta = 54°$, $a = b = c\,\dfrac{1}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$

se $\gamma = 108°$, allora , $\alpha = \beta = 36°$, $a = b = c\,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi \approx 1.61803\ c$

triangoli in generale

$\mathsf{A} = \dfrac{a\,h_a}{2} = \dfrac{b\,c\sin\alpha}{2}$ e permutate ; $\mathsf{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ **formula di Erone**

$h_a = c\sin\beta = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$ e simili

$h_a = \dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$ e permutate ; $s_a = \sqrt{b\,c\left(1-\left(\dfrac{a}{b+c}\right)^2\right)}$ e permutate

$R = \dfrac{a\,b\,c}{4\mathsf{A}}$; $r = \dfrac{2\mathsf{A}}{a+b+c} = \dfrac{A}{p}$

$\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b} = \dfrac{\sin\gamma}{c} = \dfrac{1}{2R}$ **legge dei seni**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$ e permutate **legge dei coseni**

$\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$ e permutate **legge delle tangenti**

e permutate **formula SAS dell'area**

soluzioni dei triangoli

Dati i tre lati (SSS), si utilizzano due leggi dei coseni e la $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Dati due lati e l'angolo compreso (SAS), a es. b, α e c, si ottiene a dalla legge dei coseni; quindi se $b < c$ β dalla legge dei seni e $\gamma = 180° - \alpha - \beta$

Dati due lati e un angolo non compreso (SSA), a es. b, c e β, si ottiene γ dalla legge dei seni, α come $180° - \beta - \gamma$ ed a dalla legge dei coseni; sono possibili due soluzioni

dati un lato e due angoli adiacenti (ASA), a es. a, β e γ, si ottiene $\gamma = 180° - \alpha - \beta$; quindi e b e c dalla legge dei seni.

W25c.02 circonferenze

centro Z , raggio r, diametro d, circonferenza c

$$c = 2\pi r = \pi d \ , \ \mathsf{A} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

settore circolare relativo all'angolo al centro θ arco $s = \theta\, r$, area $\dfrac{s\,r}{2} = \dfrac{\alpha\, r^2}{2}$

lunetta corrispondente al suddetto settore corda k e sagitta h

$$k = 2\,r \sin\frac{\theta}{2} \ , \ h = r\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \frac{1}{2\,r-h} \ , \ \text{area } \frac{r^2}{2}(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(r\,k-(r-h)k)$$

W25c.03 quadrilateri

Seguendo il verso antiorario denotiamo i suoi successivi lati con a, b, c e d , i suoi vertici con $A = d \cap a$, B, C e D e i suoi angoli $\alpha := \hat{A}$, $\beta := \hat{B}$, $\gamma := \hat{C}$ e $\delta := \hat{D}$; le sue diagonali siano $e := AC$ ed $f := BD$; denotiamo con θ e $180° - \theta$ le due ampiezze dei 4 angoli formati dalle diagonali.

quadrato quadrilatero regolare lati a e angoli a 90°

$$\boldsymbol{Area} = a^2 = \frac{\mathsf{e}^2}{2} \ , \ r = \frac{a}{2} \ , \ e = a\sqrt{2} \ , \ R = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

rettangolo quadrilatero caratterizzato da 4 angoli retti, da due lati a e b.

$$\boldsymbol{Area} = a\,b \ , \ e = \sqrt{a^2+b^2} \ , \ R = \frac{e}{2}$$

parallelogramma quadrilatero con due coppie di lati opposti paralleli

caratterizzato dai lati a e b, dagli angoli angoli α e $\beta = 180° - \alpha$, dalle altezze h_a e h_b, dalle diagonali e ed f

$$h_a = b \sin\alpha \ , \ \mathsf{A} = a\,h_a = a\,b\sin\alpha \ , \ \mathsf{e}^2 + f^2 = 2(a^2+b^2) \ , \ e = \sqrt{a^2+b^2+2\,a\,b\cos\alpha} \ ,$$
$$f = \sqrt{a^2+b^2-2\,a\,b\cos\alpha}$$

rombo parallelogramma con i 4 lati uguali

$$\boldsymbol{Area} = a\,h_a = a^2\sin\alpha = \frac{e\,f}{2} \ , \ \mathsf{e}^2 + f^2 = 4\,a^2 \ , \ e = 2\,a\cos\frac{\alpha}{2} \ , \ f = 2\,a\sin\frac{\alpha}{2}$$

aquilone o **deltoide** quadrilatero simmetrico rispetto a una diagonale

angoli bisecati dall'asse di simmetria α adiacente a due lati a e β adiacente a due lati b; angoli simmetrici γ

$$\gamma = 180° - \tfrac{\alpha+\beta}{2}$$

trapezio quadrilatero con due lati paralleli (basi)

i lati siano a, b, c e d con $a /\!/ c$; gli angoli $\alpha = da$, $\beta = ab$, $\gamma = bc$ e $\delta = cd$;

$$\mathsf{A} = \frac{(a+c)h_a}{2} \ , \ h_a = d\sin\alpha = b\sin\beta \ , \ e = \sqrt{a^2+b^2-2\,a\,b\cos\beta}$$
$$f = \sqrt{a^2+b^2-2\,a\,d\cos\alpha}$$

se $\alpha = \beta$ si parla di trapezio isoscele il quale è un quadrilatero secante

potrebbe essere $\alpha > 90°$ oppure $\beta > 90°$;
se invece $0 < \alpha < 90°$ ma $90° < \beta < 180°$ si ha un trapezio intrecciato

quadrilatero in generale

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360° \ , \ \theta = 90° \iff a^2+c^2 = b^2+d^2$$
$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}e\,f\sin\theta = \frac{1}{4}(b^2+d^2-a^2-c^2)\tan\theta = \frac{1}{4}\sqrt{4\,\mathsf{e}^2 f^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)}$$

quadrilatero tangente

$$a+c = b+d \ , \ \mathsf{A} = p\,r \text{ dove } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d) \ , \text{ se } \alpha+\gamma = \beta+\delta, \text{ allora } \mathsf{A} = \sqrt{a\,b\,c\,d}$$

quadrilatero secante

$\alpha + \gamma \; = \; \beta + \delta \; = \; 180° \;\; , \;\; \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$R \; = \; \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{\mathsf{A}}} \;\; , \;\; e \; = \; \sqrt{\frac{(ad+bc)((ac+bd)}{ab+cd}} \;\; , \;\; e\,f = a\,c + b\,d$

pentagono regolare e pentagramma

lunghezza lati a , ampiezza angoli interni $108°$ centro Z , inraggio o apotema r , circumraggio R , lunghezza delle 5 diagonali g ; esse costituiscono il pentagramma

si può decomporre in 5 triangoli isosceli come ABZ aventi base a, altri due lati R, altezza r, un angolo di $72°$ e due angoli di $54°$

$r \; = \;\; , \; R \; = \; \frac{a}{2\sqrt{10-\sqrt{5}}} \; , \; \mathsf{A} \; = \;\; , \; g \; =$

W25c.04 poligoni regolari

numero dei lati n ciascuno di lunghezza a

angoli interni di ampiezza $\alpha \; = \; \frac{n-2}{n}\,180°$; numero delle diagonali $\frac{n(n-3)}{2}$

$\mathsf{A} \; = \; \frac{1}{4}\,n\,a^2 \cot\frac{180°}{n} \; , \; r \; = \; \frac{a}{2}\cot\frac{180°}{n} \; , \; R \; = \; \frac{a}{2\,\sin(\pi/n)}$

W25 d. geometria dei solidi

W25d.01 poliedri convessi

Definiamo **poliedro convesso** ogni solido convesso, cioè tale che ogni segmento delimitato da due suoi punti interni o di confine appartiene completamente al solido

per ogni poliedro denotiamo con V il suo volume e con $\mathcal{S}$ la sua superficie totale ; spesso sono caratterizzati da tre lati in direzioni diverse a, b e c, diagonale maggiore d, area di base $\mathcal{B}$ e da una distanza tra un vertice privilegiato e la base $h_{\mathcal{B}}$

ogni poliedro P è caratterizzato dal numero dei vertici $v(\mathsf{P})$, dal numero delle facce $f(\mathsf{P})$ e dal numero degli spigoli $e(\mathsf{P})$; vale la

$$v(\mathsf{P}) + f(\mathsf{P}) \;=\; e(\mathsf{P}) - 2 \qquad\qquad \textbf{relazione di Eulero}$$

parallelepipedo solido definito da 3 vettori (spigoli) applicati nello stesso punto (vertice) non complanari le cui lunghezze denotiamo con $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$; i tre parallelogrammi $Prlgrm(\vec{a},\vec{b})$, $Prlgrm(\vec{b},\vec{c})$ e $Prlgrm(\vec{c},\vec{a})$ definiti dai duetti di vettori spigoli $\{a,b\}$, $\{b,c\}$ e $\{c,a\}$ sono 3 delle sei facce del solido ; le altre 3 si ottengono, risp., traslando $Prlgrm(\vec{a},\vec{b})$ di $\vec{c}$, $Prlgrm(\vec{b},\vec{c})$ di $\vec{a}$ e $Prlgrm(\vec{c},\vec{a})$ di $\vec{b}$; servono gli angoli $\alpha := \widehat{\vec{b},\vec{c}}$, $\beta := \widehat{\vec{c},\vec{a}}$ e $\gamma := \widehat{\vec{a},\vec{b}}$

$\mathsf{V} \;=\; a\,b\,\sin\gamma\, c\,\sin\alpha\,\sin\beta \quad , \quad \mathcal{S} \;=\; 2\,(a\,b\,\sin\gamma + b\,c\,\sin\alpha + c\,a\,\sin\beta)$

parallelepipedo rettangolo o **cuboide** parallelepipedo con le facce rettangolari

$d \;=\; \sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad , \quad \mathcal{S} \;-\; 2(ab+bc+ca) \quad , \quad \mathsf{V} \;=\; a\,b\,c$

prisma solido definito da un poligono nonintrecciato $\mathcal{B}$ rettangolari (una delle due basi) e da un vettore $\vec{v}$ applicato a un punto della base ; costituito dai punti dei vettori applicati ai vari punti della base e paralleli a $\vec{v}$

$\mathsf{V} \;=\; B\,h_{\mathcal{B}} \quad , \quad h_{\mathcal{B}} \;=\; v\,\sin(\widehat{\mathcal{B},\vec{v}})$

piramide caratterizzata da base $\mathcal{B}$ e vertice V rettangolari

denotiamo questo solido con $Pyr(\mathcal{B},V)$, con $h_{\mathcal{B}}$ la distanza tra V e $\mathcal{B}$ scriviamo

$\mathsf{V} \;=\; \dfrac{1}{3}\,\mathcal{B}\,h_{\mathcal{B}}$

tronco di piramide caratterizzato dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ su piani paralleli e aventi distanza del vertice V , risp., $h_{\mathcal{B}}$ e $h_{\mathcal{B}'}$; può ottenersi eliminando da $Pyr(\mathcal{B},V)$ la piramide $Pyr(\mathcal{B}',V)$; denotiamo co $h_{\mathcal{B}}$ la distanza dal V di $\mathcal{B}$ e con $h_{\mathcal{B}'}$ la distanza da V di $\mathcal{B}'$ e supponiamo $h_{\mathcal{B}'} < h_{\mathcal{B}}$

$\mathsf{V} \;=\; \dfrac{h_{\mathcal{B}'}}{3}\left(\mathcal{B} + \sqrt{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} + \mathcal{B}'\right) \quad , \quad \dfrac{\mathsf{V}(\mathcal{B}',V)}{\mathsf{V}} \;=\; \left(\dfrac{\mathcal{B}'}{\mathcal{B}}\right)^{3/2} \;=\; \left(\dfrac{h_{\mathcal{B}'}}{h_{\mathcal{B}}}\right)^{3}$

poliedri regolari o **solidi platonici** caratterizzati solo dalla lunghezza a di ciascuno degli spigoli

tetraedro regolare

$\mathsf{V} \;=\; a^3\,\dfrac{\sqrt{2}}{12} \;,\; \mathcal{S} \;=\; a^3\,\sqrt{3} \;,\; R \;=\; a\,\dfrac{\sqrt{6}}{4} \;,\; r \;=\; a\,\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

esaedro regolare o **cubo**

$\mathsf{V} \;=\; a^3 \;,\; \mathcal{S} \;=\; 6\,a^2 \;,\; R \;=\; a\,\dfrac{\sqrt{3}}{2} \;,\; r \;=\; \dfrac{a}{2}$

ottaedro regolare

$\mathsf{V} \;=\; a^3\,\dfrac{\sqrt{2}}{3}\;,\; \mathcal{S} \;=\; a^2\,\sqrt{3}\;,\; R \;=\; \dfrac{a}{\sqrt{2}}\;,\; r \;=\; \dfrac{a}{\sqrt{6}}$

dodecaedro regolare

$\mathsf{V} \;=\; a^3\,\dfrac{15+7\,\sqrt{5}}{4}\;,\; \mathcal{S} \;=\; 3\,a^2\,\sqrt{5(5+2\,\sqrt{5})}\;,\; R \;=\; a\,\dfrac{(1+\sqrt{5})+\sqrt{3}}{4}\;,\; r \;=\; \dfrac{a}{4}\sqrt{\dfrac{50+22\,\sqrt{5}}{5}}$

icosaedro regolare

$\mathsf{V} \;=\; a^3\,\dfrac{5\,(3+\sqrt{5}}{12}\;,\; \mathcal{S} \;=\; a^2\,5\,\sqrt{3}\;,\; R \;=\; a\sqrt{\dfrac{2(5+\sqrt{5})}{4}}\;,\; r \;=\; a\,\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7+3\,\sqrt{5}}{6}}$

relazione di Eulero per i poliedri regolari

poliedro P	v(P)	e(P)	f(P)
tetraedro	4	6	4
cubo	8	12	6
ottaedro	6	12	8
dodecaedro	20	30	12
icosaedro	12	30	20

Il tetraedro, meglio sarebbe la classe di similitudine del tetraedro regolare, è autoduale; il cubo e l'ottaedro sono mutuamente duali; il dodecaedro e l'icosaedro sono duali.

W25**d.02** cilindri, coni

cilindro generale definito da figura piana di base $\mathcal{B}$, avente il contorno $\mathcal{K} := \partial\mathcal{B}$ semplice e rettificabile e da **retta generatrice**, retta orientata $\mathcal{G}$ passante per un punto di $\mathcal{K}$; sia inoltre $\phi := \widehat{\mathcal{R},\mathcal{B}}$;

definito vettore $\mathbf{v}(P) := v \cdot vers(\mathcal{R})$ applicato in $P := \mathcal{R} \cap \mathcal{B}$ di lunghezza $|v|$ e direzione $vers(\mathcal{R})$, si introduce la seconda base $\mathcal{B}'$ ottenuta traslando $\mathcal{B}$ di $\mathbf{v}$ e si ottiene il **cilindro finito** delimitato dalle basi e dalla superficie laterale $\mathcal{L} := \{P \in \mathcal{K} :| \mathbf{v}(P)\}$; la sua altezza scriviamo $h := |v| \sin\phi$;

$\mathsf{V} \;=\; \mathsf{B}\,h \quad , \quad \mathsf{L} \;=\; 2\,\mathsf{B} + |v|\,KSs$

cilindro circolare retto le basi sono cerchi di raggio ρ e $\phi = 90°$

$\mathsf{B} = \pi\,r^2\;,\; \mathsf{L} \;=\; 2\,\pi\,r\,h\;,\; \mathsf{S} \;=\; 2\,\pi\,(r+h)\;,\; \mathsf{V} \;=\; \pi\,r^2\,h$

cono illimitato figura solida definita da una base $\mathcal{B}$ e da un vertice V che individuiamo come $Kone_{\pm\infty}(V,\mathcal{B})$; $\mathcal{B}$ è una figura piana avente semplice il contorno $\mathcal{K} := \partial\mathcal{B}$; V è un punto che non giace sul piano di $\mathcal{B}$;

la superficie laterale di questa figura è costituita dalle sue generatrici, rette passanti per V e per P punto variabile su $\mathcal{K}$; l'insieme dei suoi punti è costituito dai punti delle rette $\overline{VQ}$ con Q punto variabile in $\mathcal{B}$

se ci si limita alle semirette $\overline{V,Q}$ si ha il **cono illimitato unilatero** che scriviamo $Kone_{\infty}(V,\mathcal{B})$

si dice **cono limitato** la figura delimitata da $\mathcal{B}$ e dalla superficie laterale $\mathcal{L} := \{P \in \mathcal{K} :| PV\}$; la sua altezza sia $h := \mathrm{dist}(V,\mathcal{B})$; tale figura si denota con $Kone(V,\mathcal{B})$

$\mathsf{V} \;=\; \dfrac{1}{3}\,\mathsf{B}\,h$

tronco di cono si ottiene delimitando il suddetto cono limitato con una seconda base $\mathcal{B}'$ ottenuta intersecando il cono con un piano parallelo al piano di $\mathcal{B}$ e distante dal vertice h' con $h' < h$; siano $\mathsf{V}' := \boldsymbol{V}(Kone(V, \mathcal{B}')$ e $\mathsf{V}_{tr} := \mathsf{V} \setminus \mathsf{V}'$

$\mathsf{V}_{tr} := \frac{h-h'}{3}\left(\mathsf{B} + \sqrt{\mathsf{B}\,\mathsf{B}'} + \mathsf{B}'\right)$, $\frac{\mathsf{V}'}{\mathsf{V}} = \left(\frac{\mathsf{B}'}{\mathsf{B}}\right)^{3/2} = \left(\frac{h'}{h}\right)^3$

cono circolare retto la base è un cerchio di raggio ρ e centro Z e il vertice si trova sulla normale alla base per Z; quindi $h = ZV$

distanza tra vertice e circonferenza $s = \sqrt{\rho^2 + h^2}$, $\mathsf{A} = \pi\,\rho\,s$, $\mathsf{L} = \pi\,\rho\,(s+\rho)$, $\mathsf{V} = \frac{\pi}{3}\,\rho^2\,h$

tronco di cono circolare retto delimitato da una seconda base circolare $\mathcal{B}'$ tagliata su $Kone(V, \mathcal{B}$ da piano parallelo a quello di $\mathcal{B}$ con centro $Z\prime$ con $VZ\prime = h'$ ove $h' < h$ e raggio $\rho' = \rho\,\frac{h'}{h}$

distanza su una generatrice delle due circonferenze $s = \sqrt{(\rho-\rho')^2 + (h-h')}$, $\mathsf{L} = \pi$

W25**d.03** **sfera**

caratterizzata solo dal raggio r e dal centro Z; in effetti tutte le sfere sono simili

$\mathsf{S} = 4\,\pi\,r^2$, $\mathsf{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3$

angolo solido o **sterangolo**

si prenda un punto Z nello spazio, un piano che non lo tocca e su questo una curva chiusa semplice γ e la superficie conica $\mathcal{K}$ formata dalle semirette che escono dal vertice Z e toccano i punti di γ; ciascuno dei due coni solidi delimitati da $\mathcal{K}$ può considerarsi un angolo solido; scelto uno dei due angoli solidi, lo si misura con la superficie della sfera di raggio 1 e centro Z che è sezione dell'angolo; si misura in **steradianti** e assume valori compresi tra 0 e $4\,\pi$; preferenzialmente lo denotiamo con ω

calotta sferica figura delimitata da parte della superficie sferica e da una base ottenuta sezionando la sfera con un piano che dista dal centro $r\,\cos\,\phi$

raggio del cerchio di base $\rho = r\,\sin\,\phi$, altezza del solido $h = r\,(1-\cos\,\phi)$, $h\,(2\,r-h) = \rho^2$

$\mathsf{S} = 2\,\pi\,r\,h$, $\mathsf{V} = \frac{\pi}{3}\,h^2\,(3\,r-h) = \frac{\pi}{6}\,h\,(3\rho^2+h^2)$, $\omega = 4\,\pi\,\sin^2\,\frac{\phi}{2}$

segmento sferico figura delimitata da due cerchi ottenuti sezionando la sfera con due piani paralleli che distano dal centro, risp., $r\,\cos\,\phi$ ed $r\,\cos\,psi$, ove si chiede $-90° \leq \phi leq \psi \leq 90°$; le due basi presentano, risp., i raggi $\rho = r\,\sin\,\phi$ e $\sigma = r\,\sin\,\psi$ e sono distanti $h = r\,(\cos\,\psi - \cos\,\phi)$

$\mathsf{S} = 2\,\pi\,r\,h$, $\mathsf{V} = \frac{\pi}{6}\,h\,(3\,\rho^2 + 3\,\sigma^2 + h^2$, $\omega = 4\,\pi\,(\sin^2\,\frac{\phi}{2} - \sin^2\,\frac{\psi}{2}$

settore sferico figura ottenuta considerando la circonferenza γ sezione della superficie sferica con un piano che dista $r\,\cos\,\phi$ da Z e delimitandola con il cono avente il vertice in Z e come base il cerchio delimitato da γ e con la parte della superficie sferica delimitata da γ ; si ammette sia $-90° \leq \phi \leq 90°$

$\mathsf{V} = \frac{2\,\pi\,r^2\,h}{3}$

toro circolare si considerino ρ_c e ρ_s con $0 < \rho_s < \rho_c$, circonferenza γ di centro Z e raggio ρ_c in un piano Π e circonferenza σ con centro in un $P \in \gamma$ e raggio ρ_s nel piano ortogonale a Π; toro circolare è la superficie tracciata da σ quando P percorre γ

$\mathsf{S} = 4\,\pi^2\,\rho_c\,\rho_s$, $\mathsf{V} = 2\,\pi^2\,\rho_c\,{\rho_s}^2$

sfera in n **dimensioni** con $n = 3, 4, 5, ...$

$$\mathsf{V} \;=\; r^n\,\frac{\pi^k}{k!} \quad \text{se} \quad n = 2\,k\ ,\ \mathsf{V} \;=\; r^n\,\frac{2^k\,\pi^{k-1}}{(2\,k-1)!!} \quad \text{se} \quad n = 2\,k-1 \quad ,\quad \mathsf{S} \;=\; \frac{n\,\mathsf{V}}{r}$$

W25d.04 trigonometria sferica

triangoli sferici lati archi di circonferenze massimali a, b e c, misurati da angoli al centro, angoli α, β e γ ; tutte le misure angolari siano minori di 180°

introduciamo i semiperimetri $\sigma \;:=\; \frac{1}{2}(a+b+c)$ e $\tau \;:=\; \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$

$0° < a+b+c < 360°$, $180° < \alpha+\beta+\gamma < 540°$, $\alpha < \beta < \gamma \iff a < b < c$ e form.cicl.

$a+b > c$ e form.cicl. , $\alpha+\beta > \gamma+180°$ e form.cicl. ,

$$\frac{\sin\,\alpha}{\sin\,a} \;=\; \frac{\sin\,\beta}{\sin\,b} \;=\; \frac{\sin\,\gamma}{\sin\,c}$$ **legge dei seni**

$\cos\,a \;=\; \cos\,b\,\cos\,c + \sin\,b\,\sin\,c\,\cos\,\alpha$, $\cos\,\alpha \;=\; -\cos\,\beta\,\cos\,\gamma + \sin\,\beta\,\sin\,\gamma\,\cos\,a$ e form.cicl.

legge dei coseni

$$\sin\,\frac{\alpha}{2}\,\sin\,\frac{b+c}{2} \;=\; \sin\,\frac{a}{2}\,\sin\,\frac{\beta-\gamma}{2} \quad , \quad \sin\,\frac{\alpha}{2}\,\cos\,\frac{b+c}{2} \;=\; \cos\,\frac{\alpha}{2}\,\cos\,\frac{\beta+\gamma}{2}$$

$$\cos\,\frac{\alpha}{2}\,\sin\,\frac{b-c}{2} \;=\; \sin\,\frac{a}{2}\,\sin\,\frac{\beta-\gamma}{2} \quad , \quad \cos\,\frac{\alpha}{2}\,\cos\,\frac{b-c}{2} \;=\; \cos\,\frac{a}{2}\,\sin\,\frac{\beta+\gamma}{2}$$

e form.cicl. **equazioni di Delambre**

$$\tan\,\frac{b+c}{2}\,\cos\,\frac{\beta+\gamma}{2} \;=\; \tan\,\frac{a}{2}\,\cos\,\frac{\beta-\gamma}{2} \quad , \quad \tan\,\frac{b-c}{2}\,\sin\,\frac{\beta+\gamma}{2} \;=\; \tan\,\frac{a}{2}\,\sin\,\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\tan\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,\cos\,\frac{b+c}{2} \;=\; \cot\,\frac{\alpha}{2}\,\cos\,\frac{b-c}{2} \quad , \quad \tan\,\frac{\beta-\gamma}{2}\,\sin\,\frac{b+c}{2} \;=\; \cot\,\frac{\alpha}{2}\,\sin\,\frac{b-c}{2}$$

e form.cicl. **equazioni di Napier**

$$\sin^2\,\frac{\alpha}{2} \;=\; \frac{\sin\,(\sigma-b)\,\sin\,(\sigma-c)}{\sin\,b\,\sin,c} \quad , \quad \cos^2\,\frac{\alpha}{2} \;=\; \frac{\sin\,\sigma\,\sin\,(\sigma-a)}{\sin\,b\,\sin,c}$$

$$\sin^2\,\frac{\alpha}{2} \;=\; \frac{\cos\,\tau\,\cos\,(\tau-\alpha)}{\sin\,\beta\,\sin\,\gamma} \quad , \quad \cos^2\,\frac{\alpha}{2} \;=\; \frac{\cos\,(\tau-\beta)\,\cos\,(\tau-\gamma)}{\sin\,\beta\,\sin\,\gamma}$$

e form.cicl.

eccesso di un triangolo sferico

$$E \;:=\; \alpha+\beta+\gamma-180°(\geq 0) \quad , \quad \tan\,\frac{E}{4} \;=\; \sqrt{\tan\,\frac{\sigma}{2}\,\tan\,\frac{\sigma-a}{2}\,\tan\,\frac{\sigma-b}{2}\,\tan\,\frac{\sigma-c}{2}}$$

area di un triangolo sferico $\mathsf{A} \;=\; \frac{\pi\,R^2\,E}{180}$

soluzioni dei triangoli sferici

dati tre lati (SSS) si ricavano gli angoli da (7) o (11)

dati tre angoli (AAA) si ricavano i tre lati da (8) o (11)

dati due lati e l'angolo incluso (SAS), a es. b, c, α si ricavano $\frac{\beta\pm\gamma}{2}$ da (10) e quindi β e γ; poi a da (8) o (11)

dati due angoli e il lato incluso (ASA), a es. β, γ e a si ricavano $\frac{b\pm c}{2}$ da (10) e quindi b e c; poi α da (7) o (11)

dati due lati e un angolo non incluso (SSA), a es. b, c e β si ricavano γ da (6) ed α ed a da (10); due possibili soluzioni dati due angoli e un lato non incluso (AAS), a es. β, γ e b si ricavano c da (6) ed α ed a da (10); due possibili soluzioni

regole di Napier per triangoli sferici con angolo retto

sia $\gamma = 90°$ e si consideri il ciclo $\boldsymbol{C}$ $\langle_{cy} a, b, 90° - \alpha, 90° - c, (90° - \beta\rangle$;
il seno di ogni angolo è dato:
dal prodotto delle tangenti dei due angoli che gli sono adiacenti in $\boldsymbol{C}$;
dal prodotto dei coseni dei due angoli che non gli sono adiacenti in $\boldsymbol{C}$;

W25 **f. geometria analitica**

W25**f.01** geometria piana lineare

nel piano cartesiano consideriamo punti $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ per $i = \mu, 1, 2, ...$ ed i vettori $\mathbf{v}_j = \langle v_{j,x}, v_{j,y} \rangle$ per $j = \mu, 1, 2, ...$

distanza tra P_1 e P_2 $\quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ $\quad$, $\quad$ punto medio di $P_1\,P_2$ $\quad \left\langle \dfrac{x_1 + x_2}{2} \,,\, \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right\rangle$

punto $P_{\rho,\sigma} \in P_1\,P_2$ tale che $\dfrac{P_1\,P_{\rho,\sigma}}{P_{\rho,\sigma}\,P_2} = \dfrac{\rho}{\sigma}$ $\quad \left\langle \dfrac{\rho\,x_1 + \sigma\,x_2}{\rho + \sigma} \,,\, \dfrac{\rho\,y_1 + \sigma\,y_2}{\rho + \sigma} \right\rangle$

centroide del triangolo con vertici P_i per $i = 1, 2, 3$ $\quad \left\langle \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \,,\, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right\rangle$

area del triangolo orientato $\Delta(P_1, P_2, P_3)$

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} (P_2 - P_1)_x & (P_2 - P_1)_y \\ (P_1 - P_3)_x & (P_1 - P_3)_y \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,(x_1\,y_2 + x_3\,y_3 + x_3\,y_1 - x_2\,y_2 - x_3\,y_2 - x_1\,y_3)$$

area del poligono orientato non necessariamente semplice delimitato dalla poligonale $\langle_{cy} P_1, P_2, ..., P_n \rangle$

$$\frac{1}{2}\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_3 + \cdots + x_{n-1}\,y_n + x_n\,y_1 - x_2\,y_1 - x_3\,y_2 - \cdots - x_n\,y_{n-1} - x_1\,y_n)$$

sia θ l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati nello stesso punto

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} = \frac{v_x\,w_x + v_y\,w_y}{\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} \cdot \sqrt{{w_x}^2 + {w_y}^2}}$$

rette del piano

equazione generale $\quad a\,x + b\,y + c = 0$

se $a = 0$ la retta è verticale ; se $b = 0$ la retta è orizzontale ; se $c = 0$ la retta passa per l'origine

vettore orientazione della retta $\mathbf{v} = \langle b, -a \rangle$, normale alla retta in un suo punto $\mathbf{n} = \langle a, b \rangle$

angolo di inclinazione $\quad \theta = \arctan\left(-\dfrac{a}{b}\right)$

equazione della retta nonverticale passante per $P_1 = \langle x_1, x_2 \rangle$ e per $P_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{a}{b}$$

equazione della retta nonverticale passante per $\overline{P} = \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$ ed avente inclinazione $m \in \mathbb{R}$

$$y - \overline{y} = m\,(x - \overline{x}) \qquad m = -\frac{a}{b}$$

equazione in forma normale $\quad \dfrac{a\,x + b\,y + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$

equazione delle intercette $\quad \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 0 \quad$ dove $p = \dfrac{c}{a}$ e $q = \dfrac{c}{b}$

equazione in forma parametrica $\quad \mathbf{r} = \overline{\mathbf{r}} + t\,\mathbf{v}$ $\quad$ ossia $\begin{cases} x = & \overline{x} + b\,t \\ y = & \overline{y} - a\,t \end{cases}$

angoli tra due rette aventi inclinazioni m_1 ed m_2 $\quad \arctan\left(\pm\,\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1\,m_2}\right)$

consideriamo due rette aventi inclinazioni m_1 ed m_2 $\quad$ le rette sono ortogonali sse $m_1\,m_2 = -1$

distanza tra $P' = \langle x', y' \rangle$ e la retta $a\,x + b\,y + c = 0$ $\quad \pm\dfrac{a\,x' + b\,y' + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

W25f.02 curve di secondo grado

forma generale $a_{1,1}\,x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 + 2a_{1,3}x + 2a_{2,3}y + f \ = \ 0$ con $|a_{1,1}| + |a_{1,2}| + |a_{2,2}| > 0$

casistica dipendente dal **discriminante** $\Delta := a_{1,1}\,a_{2,2} - {a_{1,2}}^2$

$\Delta > 0 \implies$ la curva è una ellisse; in particolare può essere una circonferenza, può ridursi a un punto o può non rappresentare alcun punto del piano

$\Delta = 0 \implies$ la curva è una parabola; in particolare può ridursi a due rette parallele e anche a una sola retta di molteplicità 2

$\Delta < 0 \implies$ la curva è una iperbole; in particolare può ridursi a due rette che si intersecano

Se $b = 0$ effettuando il completamento dei quadrati l'equazione assume la forma

$$a_{1,1}\left(x + \frac{a_{1,3}}{a_{1,1}}\right)^2 + a_{2,2}\left(y + \frac{a_{2,3}}{a_{2,2}}\right)^2 \ = \ \frac{{a_{1,3}}^2}{a_{1,1}} + \frac{{a_{2,3}}^2}{a_{2,2}} - a_{3,3}$$

equazione di una curva con centro in $\left\langle -\frac{a_{1,3}}{a_{1,1}} \ , \ -\frac{a_{2,3}}{a_{2,2}} \right\rangle$

circonferenza con centro nell'origine $\mathbf{0}_2$ e raggio s $\quad \Gamma \ = \ \boldsymbol{Circl}(\mathbf{0}_2, r)$

equazione cartesiana $\quad x^2 + y^2 \ = \ r^2 \qquad$ equazioni parametriche $\begin{cases} x = & r\,\cos t \\ y = & r\,\sin t \end{cases}$ per $\ 0 \le t \le 2\,\pi$

circonferenza con centro $C \ = \langle x_C, y_C \rangle$ e raggio $r \quad Circle(C, r)$

equazione cartesiana $\quad (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 \ = \ r^2$

equazioni parametriche $\begin{cases} x = & x_C + r\,\cos t \\ y = & y_C + r\,\sin t \end{cases}$ per $\ 0 \le t \le 2\,\pi$

lunghezza della circonferenza $\ 2\,\pi\,r \quad , \qquad$ area del cerchio $\mathsf{A} \ = \ \pi\,r^2$

circonferenza passante per i punti $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ per $i = 1, 2, 3$ $\qquad \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2 + {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 + {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 + {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \ = \ 0$

ellisse

consideriamo a e b reali con $0 < b < a$; si dice ellissi con asse maggiore $2\,a$ lungo Ox, con asse minore $2\,b$ e con centro nell'origine la curva avente equazione cartesiana $\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \ = \ 1$

equazioni parametriche $\begin{cases} x = & a\,\cos t \\ y = & b\,\sin t \end{cases}$ per $\ 0 \le t \le 2\,\pi$

equazioni in forma polare $\quad r^2 \ = \ \dfrac{a^2\,b^2}{a^2\,\sin^2\,\theta + b^2\,\cos^2\,\theta}$

fuochi nei punti $\ \langle \pm c, 0 \rangle\ $ ove $c \ := \ \sqrt{a^2 - b^2} \qquad , \qquad$ eccentricità $\ e \ := \ \dfrac{c}{a}$ tale che $0 \le c < 1$

rette direttrici $\quad x \ = \ \pm\dfrac{a}{e} \ = \ \pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

quando b tende ad a, e tende a 0 e l'ellisse tende alla circonferenza di raggio a

area della regione interna alla curva $\ \pi\,a\,b \ = \ \pi\,a^2\,\sqrt{1 - \mathsf{e}^2}$

lunghezza della curva $\ 4\,a\,E(k)$, con $\ k \ := \ \dfrac{c}{a} \ = \ \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}\ $ e con $E(k)$ integrale ellittico di seconda specie completo approssimazione di Ramanujan con errore relativo pari circa a $\dfrac{3\,\mathrm{e}^{20}}{2^{36}}$

$$\pi\,(a+b)\left(1+\frac{3\,\lambda^2}{10+\sqrt{4-3\,\lambda^2}}\right)\ ,\ \text{ove}\ \lambda\ :=\ \frac{a-b}{a+b}$$

l'ellisse con centro in $C = \langle x_C, y_C \rangle$ soddisfa le equazioni

$$\frac{x-x_C)^2}{a^2}+\frac{y-y_C)^2}{b^2}\ =\ 1 \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x\ =\ x_C+a\,\cos t \\ y\ =\ y_C+b\,\sin t \end{cases} \quad \text{per}\quad 0\le t\le 2\,\pi$$

parabola

sia p reale positivo; si dice parabola con vertice nell'origine O, asse orizzontale e fuoco in $F = \langle p, 0\rangle$ la curva di equazione cartesiana $\quad y^2\ =\ 4\,p\,x$

retta direttrice $\quad x\ =\ -p \qquad$ è il luogo dei punti aventi uguale distanza dal fuoco e dalla direttrice

equazione in forma polare $\quad r\ =\ \dfrac{4\,p\,\cos\theta}{\sin^2\theta}\quad$ per $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta<0$ e $0<\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

quando l'eccentricità di una ellisse tende ad 1, cioè quando $\dfrac{b}{a}$ tende a 0, questa curva tende a diventare una parabola

consideriamo la tangente **t** alla parabola nel suo punto $\overline{P} = \langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ con $\overline{y}\ =\ \sqrt{4\,p\,\overline{x}}$; sono uguali gli angoli $\widehat{\mathbf{t}\,\overline{P}\,\overline{P}\,F}$ e $\langle+\infty,\overline{y}\rangle\,\overline{P}\,\mathbf{t}$

segmento di parabola regione piana determinato dai suoi due punti $\overline{P} = \langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ e $\overline{Q} = \langle\overline{x},-\overline{y}\rangle$ e delimitata a sinistra dall'arco di parabola $\overline{P}\frown\overline{Q}$ ed a destra dal segmento $\overline{P}\,\overline{Q}$

area $\quad \dfrac{2}{3}\,\overline{x}\,\overline{y} \qquad , \qquad$ lunghezza dell'arco $\quad \dfrac{\sqrt{\overline{y}^2+16\,\overline{x}^2}}{2}+\dfrac{\overline{y}^2}{8\,\overline{x}}\ln\left(4\,\overline{x}+\dfrac{\sqrt{\overline{y}^2+16\,\overline{x}^2}}{\overline{y}}\right)$

si consideri il solido ottenuto ruotando di $2\,\pi$ il segmento intorno ad Ox

volume $\quad \dfrac{\pi}{8}\,\overline{y}^2\,\overline{x} \qquad , \qquad$ area della superficie $\quad \dfrac{\pi}{96}\,\dfrac{(\overline{y}^2+16\,\overline{x}^2)^{3/2}}{\overline{x}^2}$

iperbole

consideriamo a e b reali positivi; si dice iperbole con asse trasverso $2\,a$ lungo Ox, con asse coniugato $2\,b$ e con centro nell'origine la curva avente equazione cartesiana $\quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}\ =\ 1$

equazioni parametriche del ramo per $x>0$ $\quad \begin{cases} x =\ a\,\cosh t \\ y =\ b\,\sinh t \end{cases} \quad$ per $\quad 0-\infty<t<+\infty$

equazione polare $\quad r^2\ =\ \dfrac{a^2\,b^2}{b^2\,\cos^2\theta-a^2\,\sin^2\theta}$

fuochi nei punti $\langle\pm,0\rangle$ ove $c\ :=\ \sqrt{a^2+b^2} \qquad , \qquad$ eccentricità $\quad e\ =\ \dfrac{c}{a}$, valore superiore ad 1

asintoti $\quad y\ =\ \pm\dfrac{b}{a}\,x$

rette direttrici $\quad x\ =\ \pm\dfrac{a}{e}\ =\ \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

W25f.03 geometria analitica tridimensionale lineare

nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ consideriamo punti $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ per $i = \mu, 1, 2, ...$ ed i vettori $\mathbf{v}_j = \langle v_{j,x}, v_{j,y} \rangle$ per $j = \mu, 1, 2, ...$

distanza tra P_1 e P_2 $\quad \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

punto medio di $P_1 P_2$ $\quad \left\langle \dfrac{x_1 + x_2}{2} , \dfrac{y_1 + y_2}{2} , \dfrac{z_1 + z_2}{2} \right\rangle$

punto $P_{\rho,\sigma} \in P_1 P_2$ tale che $\dfrac{P_1 P_{\rho,\sigma}}{P_{\rho,\sigma} P_2} = \dfrac{\rho}{\sigma}$ $\quad \left\langle \dfrac{\rho x_1 + \sigma x_2}{\rho + \sigma} , \dfrac{\rho y_1 + \sigma y_2}{\rho + \sigma} , \dfrac{\rho z_1 + \sigma z_2}{\rho + \sigma} \right\rangle$

area orientata del triangolo $\Delta(P_1, P_2, P_3)$ $\quad \dfrac{1}{2} (\vec{P_1 P_2} \wedge \vec{P_1 P_3})$

centroide del tetraedro con vertici P_i per $i = 1, 2, 3, 4$

$$\left\langle \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} , \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} , \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4} \right\rangle$$

volume orientato del suddetto tetraedro $\quad \dfrac{1}{6} \begin{vmatrix} (P_2 - P_1)_x & (P_2 - P_1)_y & (P_2 - P_1)_z \\ (P_3 - P_1)_x & (P_3 - P_1)_y & (P_3 - P_1)_z \\ (P_4 - P_1)_x & (P_4 - P_1)_y & (P_4 - P_1)_z \end{vmatrix}$

sia θ l'angolo compreso tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati nello stesso punto

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|} = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} \cdot \sqrt{{w_x}^2 + {w_y}^2 + {w_z}^2}}$$

rette e piani in 3D

retta passante per $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ con la direzione data dal vettore $\mathbf{d} = \langle d_x, d_y, d_z \rangle$

equazioni parametriche $\begin{cases} x &= x_0 + d_x t \\ y &= y_0 + d_y t \\ z &= z_0 + d_z t \end{cases}$ equivalenti alle $\dfrac{x - x_0}{d_x} = \dfrac{y - y_0}{d_y} = \dfrac{z - z_0}{d_x}$

retta passante per $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ con $i = 1, 2$ $\quad \begin{cases} x &= x_1 + (x_2 - x_1)\, t \\ y &= y_1 + (y_2 - y_1)\, t \\ z &= z_1 + (z_2 - z_1)\, t \end{cases}$

equazione generale $\quad a\,x + b\,y + c\,z + d = 0 \quad$ ove $\langle a, b, c \rangle$ è un vettore ortogonale al piano

piano passante per $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ e con vettore normale $\mathbf{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle$

$$n_x (x - x_0) + n_y (y - y_0) + n_z (z - z_0) = 0$$

piano passante per $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ e sotteso dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ applicati in P_0

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{o dal sistema equivalente} \qquad \begin{cases} x = & x_0 + v_x t + w_x u \\ y = & y_0 + v_y t + w_y u \\ z = & z_0 + v_z t + w_z u \end{cases}$$

piano passante per i tre punti P_i per $i = 1, 2, 3$

piano che interseca Ox in $s_x \mathbf{e}_x$, Oy in $s_y \mathbf{e}_y$ e Oz in $s_z \mathbf{e}_z$ (forma delle intercette)

$$\frac{x}{s_x} + \frac{y}{s_y} + \frac{z}{s_z} = 1$$

angolo θ tra una retta avente $\mathbf{d}$ come vettore direzione e il piano avente $\mathbf{n}$ come vettore normale

$$\sin\theta = \frac{|\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{n}|}$$

angolo θ tra due piani relativi ai vettori normali $\mathbf{n}_1$ ed $\mathbf{n}_2$ $\qquad \cos\theta \;=\; \dfrac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$

distanza tra un punto P e una retta passante per il punto Q ed avente $\mathbf{d}$ come vettore direzione

$$\frac{\left|\mathsf{d} \wedge \overrightarrow{PQ}\right|}{|\mathbf{d}|}$$

distanza tra un punto P e un piano passante per Q ed avente $\mathbf{n}$ come vettore normale

$$\frac{\left|\mathsf{n} \wedge \overrightarrow{PQ}\right|}{|\mathbf{n}|}$$

distanza tra due rette non parallele, la prima passante per P_1 ed avente $\mathbf{d}_1$ come vettore direzione, la seconda passante per P_2 ed avente $\mathbf{d}_2$ come vettore direzione

$$\frac{\left|(\mathsf{d}_1 \wedge \mathsf{d}_2) \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}\right|}{|\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2|}$$

W25f.04 **superfici di secondo grado**

forma generale $\qquad$ supposto sia $|a_{1,1}| + |a_{2,2}| + |a_{3,3}| > 0$

$$a_{1,1}\,x^2 + a_{2,2}\,x^2 + a_{3,3}\,x^2 + 2\,a_{1,2}\,x\,y + 2\,a_{2,3}\,y\,z + 2\,a_{3,1}\,z\,x + 2\,a_{1,4}\,x + 2\,a_{2,4}\,y + 2\,a_{3,4}\,z + a_{4,4} \;=\; 0$$

se $a_{1,2} \;=\; a_{2,3} \;=\; a_{3,1} \;=\; 0$ si può effettuare il completamento dei quadrati e giungere a una equazione in forma standard come per i casi che seguono

se $|a_{1,2}| + |a_{2,3}| + |a_{3,1}| > 0$ si deve ricorrere a metodi spettrali

sfera di raggio r $\quad x^2 + y^2 + z^2 \;=\; r^2 \qquad \mathsf{V} \;=\; \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3$

ellissoide con assi $2\,a$, $2\,b$ e $2\,c$ $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \qquad \mathsf{V} \;=\; \dfrac{4}{3}\,\pi\,a\,b\,c$

se vale la $a = b$ o una permutata si ha un ellissoide di rotazione; se inoltre vale la $c < a$ o una permutata si ha un **ellissoide oblato**; se vale $c > a$ o una permutata si ha un **ellissoide prolato**

cilindro ellittico con asse di simmetria traslazionale Oz ed assi $2\,a$ e $2\,b$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \;=\; 1$

cilindro iperbolico con asse di simmetria traslazionale Oz ed assi delle sezioni $2\,a$ e $2\,b$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} \;=\; 1$

cilindro parabolico con asse di simmetria traslazionale Oz, con piano di simmetria di riflessione Oxz, passante per O e con parametro p $\qquad x \;=\; \dfrac{y^2}{2\,p}$

paraboloide ellittico con piani di simmetria di riflessione Oxz e Oyz $\qquad z \;=\; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

se $a = b$, allora Oz è asse di simmetria cilindrica e quindi si ha un solido di rotazione

paraboloide iperbolico con sezioni $z = k$ iperboli (o copia di rette $\qquad z \;=\; \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

è una superficie rigata

cono ellittico le cui sezioni orizzontali sono ellissi con assi $k\,2\,a$ e $k\,2\,b$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} \;=\; 0$

iperboloide ellittico a una falda le cui sezioni orizzontali sono ellissi con assi $k\,2\,a$ e $k\,2\,b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \;=\; 1$$

se $a = b$, allora Oz è asse di simmetria cilindrica; è una superficie rigata

iperboloide ellittico a due falde le cui sezioni orizzontali sono ellissi con assi $k\,2\,a$ e $k\,2\,b$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \;=\; -1$$

se $a = b$ allora Oz è asse di simmetria cilindrica;

W25 g. spazi vettoriali e spazi euclidei

W25g.01 spazi vettoriali

Ricordiamo che si dice **spazio vettoriale** $\boldsymbol{V}$ sopra un campo $\mathbb{F}$ (i cui elementi sono detti scalari) un insieme (detto terreno dello spazio ed i cui elementi chiamiamo vettori) munito di un'operazione binaria di somma che rende il terreno un gruppo abeliano e una moltiplicazione per uno scalare che trasforma ogni vettore in un vettore. Formalmente spazio vettoriale è una struttura della forma $\langle \boldsymbol{V}, \mathbb{F}, +, \mathbf{0}, -, \cdot \rangle$ ove:

$$\mathbb{F} \in \mathsf{Fld} \ , \ \exists + \in \lceil \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \longmapsto \boldsymbol{V} \rceil \ , \ \exists \cdot \in \lceil \mathbb{F} \times \boldsymbol{V} \longmapsto \boldsymbol{V} \rceil \ ¶ \ \forall \mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \boldsymbol{V} \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{F} \ :$$

$\mathsf{x} + \mathsf{y} = \mathsf{y} + \mathsf{x}$, $(\mathsf{x} + \mathsf{y}) + \mathsf{z} = \mathsf{x} + (\mathsf{y} + \mathsf{z})$, $\boldsymbol{V} \ni \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}$ ¶ $\mathsf{x} + \mathbf{0} = \mathsf{x}$, $-\mathsf{x} \in \boldsymbol{V}$ ¶ $\mathsf{x} + (-\mathsf{x}) = \mathbf{0}$

$\alpha \cdot (\beta \cdot \mathsf{x}) = (\alpha\,\beta) \cdot \mathsf{x}$, $(\alpha + \beta) \cdot \mathsf{x} = \alpha \cdot \mathsf{x} + \beta \cdot \mathsf{x}$, $\alpha \cdot (\mathsf{x} + \mathsf{y}) = \alpha \cdot \mathsf{x} + \beta \cdot \mathsf{y}$, $1\,\mathsf{x} = \mathsf{x}$, $0\,\mathsf{x} = \mathbf{0}$, $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

questa struttura di spazio vettoriale la denotiamo con $\boldsymbol{V}_{Vsp}$

un $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{V}$ si dice **sottospazio** di $\boldsymbol{V}$ sse $\forall \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \boldsymbol{S}$, $\alpha \in \boldsymbol{F}$: $\mathsf{x} + \mathsf{y} \in \mathsf{S}$, $\alpha \cdot \mathsf{x} \in \mathsf{S}$, cioè sse è terreno di uno spazio vettoriale

un $\mathsf{w} \in \boldsymbol{V}$ si dice **combinazione lineare** dei vettori v_1, ... v_h sse $\mathbb{F} \ni \alpha_1, ..., \alpha_h$ tali che sia $\mathsf{w} = \alpha_1\,\mathsf{v}_1 + \cdots + \alpha_h\,\mathsf{v}_h$; in tal caso si dice che w dipende linearmente dai v_i per $i = 1, ..., h$

l'insieme di tutte le combinazioni lineari di un insieme di vettori di $\boldsymbol{V}$ costituisce un sottospazio di questo spazio;

l'insieme delle combinazioni lineari di un insieme finito $E = \{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_h\}$ si denota con $span(\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_h)$; tale sottospazio si dice anche chiusura lineare di E (*linear hull*)

I vettori di un insieme, finito o meno, si dice insieme di **vettori linearmente indipendenti** sse nessuno di essi dipende linearmente dai restanti;

i vettori di un insieme finito $\{\mathsf{v}_1, ..., \mathsf{v}_h\}$ sono linearmente indipendenti sse

$\alpha_1\,\mathsf{v}_1 + \cdots + \alpha_h\,\mathsf{v}_h = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_h = 0$

una famiglia di vettori linearmente indipendenti si dice base dello spazio sse ogni altro vettore dipende linearmente dai suoi elementi
se uno spazio vettoriale che possiede una base finita si dice finitodimensionale
due basi di uno spazio finitodimensionale $\boldsymbol{V}$ hanno lo stesso cardinale; essa si dice dimensione dello spazio e si denota con $\dim(\boldsymbol{V})$

consideriamo un intero positivo d e l'insieme $\mathbb{F}^{\times d}$ delle d-uple di elementi del campo; la somma componente per componente di tutte le componenti per un elemento del campo rendono $\mathbb{F}^{\times d}$ uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$; la sequenza dei vettori $\mathsf{u}_i = \langle j = 1, ..., d :| \ \delta_{i,j} \rangle$ costituisce una la base ordinata dello spazio che quindi è d-dimensionale.

Dato uno spazio d-dimensionale $\boldsymbol{V}$ ed una sua base ordinata $\langle \mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d \rangle$, dato che ogni suo vettore v si può esprimere come $\mathsf{v} = v_1\,\mathsf{e}_1 + v_2\,\mathsf{e}_2 + \cdots + v_d\,\mathsf{e}_d$, si ha una biiezione tra $\boldsymbol{V}$ e lo spazio vettoriale delle d-uple di elementi del campo $\mathbb{F}$; questi due spazi risultano isomorfi.
Cambiando la base cambia l'isomorfismo; comunque tutti gli spazi d-dimensionali su $\mathbb{F}$ sono isomorfi e lo studio degli spazi finitodimensionali equivale allo studio degli spazi di sequenze su $\mathbb{F}$.

W25g.02 spazi euclidei

Sullo spazio $\mathbb{R}^{\times d}{}_{Vsp}$ si definisce **prodotto scalare** o **prodotto interno** la funzione del genere $\lceil \mathbb{F}^{\times d} \times \mathbb{F}^{\times d} \longmapsto \mathbb{F} \rceil$ che ai vettori $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{d} v_j\, \mathbf{e}_j$ e $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{d} w_j\, \mathbf{e}_j$ associa il valore

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \;:=\; \sum_{j=1}^{d} v_j\, w_j \;.$$

Il prodotto scalare è una funzione

simmetrica : $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\times d} \;:\; \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

bilineare $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\times d} \;:\; (\alpha_1\, \mathbf{v}_1 + \alpha_2\, \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} \;=\; \alpha_1\, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \alpha_2\, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}$

e quindi $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathbb{R}^{\times d} \;:\; \mathbf{v} \cdot (\alpha_1\, \mathbf{w}_1 + \alpha_2\, \mathbf{w}_2) \;=\; \alpha_1\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 + \alpha_2\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2$

e definita positiva $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Per il prodotto scalare si usano anche notazioni come $\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle$, $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $(\mathbf{v}|\mathbf{w})$, $\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$; inoltre identificando i vettori argomento con matrici di profilo $d \times 1$, cioè con vettori colonna, si può esprimere anche come $\mathbf{v}^\top \cdot \mathbf{w}$.

Ogni spazio vettoriale finitodimensionale $\boldsymbol{V}$ munito di una base privilegiata $\mathcal{B}$ costituisce uno spazio con prodotto interno che si può denotare con $\boldsymbol{V}_{vsp,\mathcal{B}}$, con $\boldsymbol{V}vsp, \cdot$ o con $\boldsymbol{V}vsp, \langle\rangle$. Un tale spazio con prodotto interno, ovvero con prodotto scalare, viene detto **spazio euclideo**.

Lo spazio $\mathbb{R}^{\times d}{}_{vsp,\cdot}$ risulta essere uno spazio normato definendo

norma (o lunghezza) di $\mathbf{v}$ $\quad |\mathbf{v}| \;:=\; \sqrt{\sum_{j=1}^{d} {v_j}^2}$

e risulta essere uno spazio metrico definendo

distanza pitagorica tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ $\quad \mathrm{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \;:=\; |\mathbf{v} - \mathbf{w}| \;=\; \sqrt{\sum_{j=1}^{d} (v_j - w_j)^2}$

In uno spazio euclideo $\boldsymbol{V}$ valgono le seguenti disuguaglianze

disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\quad |\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| \le |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|$

disuguaglianza triangolare $\quad ||\mathbf{v}| - |\mathbf{w}|| \le |\mathbf{v} + \mathbf{w}| \le ||\mathbf{v}| + |\mathbf{w}||$

In uno spazio euclideo $\mathbb{R}^{\times d}{}_{Vsp}$ si possono collocare tutte le nozioni geometriche classiche.
Dopo aver identificato i vettori con i punti e aver definito la lunghezza di un vettore e la distanza tra due punti, si hanno i passi che seguono.

angolo θ compreso tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

$$\theta \;:=\; \widehat{\mathbf{v}, \mathbf{w})} \qquad , \qquad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \;=\; |\mathbf{v}|\, |\mathbf{w}| \cos\theta \qquad , \qquad \theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\, |\mathbf{w}|} \right)$$

Due elementi di uno spazio euclideo $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono **vettori ortogonali** e si scrive $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ sse $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, ossia sse i due vettori comprendono un angolo di $90°$.

Vale il **teorema di Pitagora** $\quad \mathbf{v} \perp \mathbf{w} = 0 \iff |\mathbf{v} + \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{w}|^2$

Si dice **base ortonormale** di uno spazio euclideo d-dimensionale un insieme di d vettori $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_d\}$ tale che

$$\forall i, j \in (\mathrm{d}\,] \;:\; \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \;=\; \delta_{i,j} \;.$$

Il **complemento ortogonale** di un sottospazio $\boldsymbol{T}$ di $\boldsymbol{V}$ è l'insieme $\boldsymbol{T}^\perp \;:=\; \{\mathbf{w} \in \boldsymbol{V} \;\rrbracket\; \forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{T} \;:\; \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\}$. Esso è un sottospazio e il passaggio al complemento ortogonale è una involuzione tra i sottospazi dello spazio ambiente.

Sia $\boldsymbol{Prj}_{\boldsymbol{T}}$ la proiezione ortogonale di v sul sottospazio $\boldsymbol{T}$ del quale $\{\mathsf{u}_1, ..., \mathsf{u}_t\}$ è base ortogonale

$$\boldsymbol{Prj}_{\boldsymbol{T}}(\mathsf{v}) \;=\; \sum_{i=1}^{t} \langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{u}_i \rangle\, \mathsf{u} \qquad \text{con} \qquad \mathsf{v} - \sum_{i=1}^{t} \langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{u}_i \rangle\, \mathsf{u} \in \boldsymbol{T}^{\perp} \;.$$

Le basi ortonormali presentano notevoli vantaggi e si costruisce in $\boldsymbol{V}$ una base ortonormale $\langle \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ a partire da una base generica $\langle \mathsf{b}_1, ..., \mathsf{v}_d \rangle$ con la procedura di **ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**.

$$\mathsf{e}_1 \;:=\; \frac{\mathsf{b}_1}{|\mathsf{b}_1|}$$

$$\mathsf{d}_2 \;:=\; \mathsf{b}_2 - \langle \mathsf{b}_2 \,|\, \mathsf{e}_1 \rangle\, \mathsf{e}_1 \quad , \quad \mathsf{e}_2 \;:=\; \frac{\mathsf{d}_2}{|\mathsf{d}_2|}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathsf{d}_i \;:=\; \mathsf{b}_i - \langle \mathsf{b}_i \,|\, \mathsf{e}_1 \rangle - \cdots - \langle \mathsf{b}_i \,|\, \mathsf{e}_{i-1} \rangle\, \mathsf{e}_i \quad , \quad \mathsf{e}_i \;:=\; \frac{\mathsf{d}_i}{|\mathsf{d}_i|} \qquad \text{per} \qquad i = 2, 3, ..., d \;.$$

W25g.03 trasformazioni lineari

Consideriamo due spazi vettoriali $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ sul campo $\mathbb{F}$ e la funzione $L \in \lceil \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W} \rceil$; L si dice **omomorfismo lineare** o **trasformazione lineare** sse

$$\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \,,\; \alpha, \beta \in \mathbb{F} \quad : \quad L(\alpha\, \mathsf{v} + \beta\, \mathsf{w}) \;=\; \alpha\, L(\mathsf{v}) + \beta\, L(\mathsf{w})$$

Una $L \in \lceil \boldsymbol{V} \longmapsto\!\!\triangleright \boldsymbol{W} \rceil$, se $d := \dim(\boldsymbol{V})$ ed $e := \dim(\boldsymbol{W})$, relativamente a una $\mathcal{B} = \langle \mathsf{e}_1, ..., \mathsf{e}_d \rangle$ base ordinata di $\boldsymbol{V}$, e a una $\mathcal{C} = \langle \mathsf{f}_1, ..., \mathsf{f}_e \rangle$ base ordinata di $\boldsymbol{W}$ viene rappresentata da una matrice $e \times d$.

$${}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}} \;:=\; L(\mathsf{e}_1) \,\square\, \cdots \,\square\, L(\mathsf{e}_d) \;=\; \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e,1} & a_{e,2} & \dots & a_{e,d} \end{bmatrix} \qquad \text{ove} \qquad \forall i \in (\mathrm{d}\,] \;:\; L(\mathsf{e}_i) \;=\; \sum_{j=1}^{e} \mathsf{f}_j\, a_{j,i}$$

Infatti se $\mathsf{v} \;=:\; \sum_{i=1}^{d} x_i\, \mathsf{e}_i$ e $\mathsf{w} \;:=\; L(\mathsf{v}) \;=:\; \sum_{j=1}^{e} w_j\, \mathsf{f}_j$, la trasformazione di v in $L(\mathsf{v})$ viene rappresentata da

$$\mathsf{w} \;=\; A \cdot \mathsf{v} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_e \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,a} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,a} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{d,1} & e_{d,2} & \dots & e_{d,a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{bmatrix}$$

Si osservi che le notazioni scelte inducono a visualizzare la trasformazione come modifica di un vettore sulla destra in uno sulla sinistra.

Per una trasformazione L invertibile la inversa $L^{-\mathbf{1}}$ viene rappresentata dalla matrice $A^{-\mathbf{1}}$, ovvero

$${}_{\mathcal{B}}(L^{-\mathbf{1}})_{\mathcal{C}} \;=\; ({}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}})^{-\mathbf{1}} \;.$$

Per quanto riguarda la composizione delle trasformazioni lineari, se $L \in \lceil \boldsymbol{V} \longmapsto\!\!\triangleright \boldsymbol{W} \rceil$ ed $M \in \lceil \boldsymbol{W} \longmapsto\!\!\triangleright \boldsymbol{X} \rceil$ la loro composizione $M \circ_{rl} L$ viene rappresentata dal prodotto delle corrispondenti matrici:

$${}_{\mathcal{D}}(M \circ_{rl} L)_{\mathcal{B}} \;=\; ({}_{\mathcal{D}}M_{\mathcal{C}}) \dotplus ({}_{\mathcal{C}}L_{\mathcal{B}}) \;.$$

Servono in particolare gli endomorfismi lineari, ossia le trasformazioni di $\lceil \boldsymbol{V} \longrightarrow_{Lin} \boldsymbol{V} \rceil$; questi sono rappresentati da matrici quadrate corrispondenti a una unica base; il loro insieme lo denotiamo con $\mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{V}}$ e una matrice rappresentativa con $L_{\mathcal{B}}$.

Una $S \in \textsf{\textbf{Lintr}}_{\boldsymbol{V}}$ si dice **trasformazione simmetrica** sse $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \;:\; \big\langle S\,\mathsf{v} \,\big|\, \mathsf{w} \big\rangle \;=\; \big\langle \mathsf{v} \,\big|\, S\,\mathsf{w} \big\rangle$. Una trasformazioni lineare è simmetrica sse in una base ortonormale è rappresentata da una matrice simmetrica.

Consideriamo una matrice quadrata reale di ordine d

$$P = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,p} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{d,1} & d_{d,2} & \dots & d_{d,p} \end{bmatrix} = \langle P_{1,*} \,\square\, \cdots \,\square\, P_{d,*} \rangle \ .$$

Essa si dice **matrice ortogonale** sse $P^{\mathsf{T}} \mathbin{\pmb{+}} P \;=\; \mathbf{1}_p$. Denotiamo con $\textsf{\textbf{MatOrt}}_d$ l'insieme delle matrici reali ortogonali di ordine d.

$P \in \textsf{\textbf{MatOrt}} \iff \forall i, j = 1, 2, ..., d \;:\; (P^{\mathsf{T}}_{i,*}) \cdot P_{*,j} \;=\; \delta_{i,j} \iff P^{-\mathbf{1}} \;=\; P^{\mathsf{T}}$

$P \in \textsf{\textbf{MatOrt}} \implies P^{\mathsf{T}} \in \textsf{\textbf{MatOrt}} \quad , \quad \det(P) = \pm 1 \quad ,$

$\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \;:\; (P\,\mathsf{v})^{\mathsf{T}} \cdot (P\,\mathsf{w}) \;=\; \mathsf{v}^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{w} \quad , \quad |P\,\mathsf{v}| = |\mathsf{v}| \quad , \quad \mathsf{v} \perp \mathsf{w} \Longleftrightarrow P\,\mathsf{v} \perp P\,\mathsf{w}$

$P, Q \in \textsf{\textbf{MatOrt}}_d \implies P \mathbin{\pmb{+}} Q \in \textsf{\textbf{MatOrt}}$

W25g.04 sistemi di equazioni lineari e spazi vettoriali

W25g.05 autovettori, autovalori, diagonalizzazione

Consideriamo la matrice quadrata di ordine d sui reali $A \;=\; [a_{i,j} \;|\!: i, j = 1, ..., d]$.

Il vettore $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^{\times d}{}_{nz}$ si dice autovettore relativo all'autovalore λ per la matrice A sse $A\,\mathsf{a} \;=\; \lambda\,\mathsf{a}$. Se a e b sono autovettori della A con autovalore λ, è tale anche ogni loro combinazione lineare. Si dice **autospazio** della A relativo all'autovalore λ il sottospazio di $\mathbb{R}^{\times d}$ costituito da tutti gli autovettori della A relativi all'autovalore λ ampliato con $\mathsf{0}_d$.

Il polinomio $\det(A - \lambda\,\mathbf{1}_d)$ si dice polinomio caratteristico della A.

Si dice **equazione caratteristica della matrice** A l'equazione polinomiale

$$\det(A - \lambda\,\mathbf{1}_d) \;=\; \det \begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \cdots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \cdots & a_{d,d} - \lambda \end{bmatrix} \;=\; 0 \ .$$

Le definizioni di autovettore, autovalore, polinomio caratteristico ed equazione caratteristica si adottano anche per le trasformazioni lineari attraverso una matrice che le rappresenta, grazie alla loro invarianza rispetto ai cambiamenti delle basi che modificano le rappresentazioni matriciali delle trasformazioni.

Se il polinomio caratteristico della matrice A possiede d radici reali $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d$, allora $\det A \;=\; \lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_d$ e $\operatorname{Tr} A \;=\; \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d$.

Se A è una matrice simmetrica, allora tutti i suoi autovalori sono reali , gli autovettori (gli autospazi) relativi ad autovalori diversi sono ortogonali e $\forall \mathsf{v}, \mathsf{w} \in \boldsymbol{V} \;:\; \mathsf{v}^{\mathsf{T}} \cdot (a\,\mathsf{w}) = (A\,\mathsf{v})^{\mathsf{T}} \cdot \mathsf{w}$.

teorema spettrale

Sia A è una matrice simmetrica e scriviamo $\langle \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d \rangle$ la sequenza nondecrescente dei suoi autovalori con ripetizioni che rispettano le molteplicità, $\langle \mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2, ..., \mathsf{u}_d \rangle$ la sequenza dei corrispondenti autovettori e $P \;:=\; \mathsf{u}_1 \,\square\, \mathsf{u}_2 \,\square\, \cdots \,\square\, \mathsf{u}_d$. Si hanno le seguenti proprietà:

(a) $\forall i, j \in (d\,]\ \colon\ \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{i,j}$;

(b) questa matrice è ortogonale, $P^\top\ maprP = \mathbf{1}_d$;

(c) $P \dagger A\,P\ =\ D\ :=\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d)$ e $A\ =\ P\,D\,P^\top$;

(d) $\forall h = 1, 2, 3, ...\ \colon\ A^h\ =\ P\,D^h\,P^\top\ =\ \mathrm{diag}\left({\lambda_1}^h, {\lambda_2}^h, ..., {\lambda_d}^h\right)$;

(e) $\forall \mathbf{v} \in {\mathbb{R}^{\times d}}_{nz}\ \colon\ \lambda_1 \le \dfrac{\mathbf{v}^\top A\,\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \le \lambda_d$,

con le uguaglianze valendo sse $\mathbf{v}$ è autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_d$.

Se A non è simmetrica ma presenta d autovalori distinti, allora i corrispondenti autovettori sono linearmente indipendenti.

Se A matrice non simmetrica presenta d autovettori $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d$ linearmente indipendenti, con possibili autovalori molteplici, allora, posto $P\ :=\ \mathbf{u}_1 \,\square\, \mathbf{u}_2 \,\square\, \cdots \,\square\, \mathbf{u}_d$, si ha $P^{-1}\,A\,P\ =\ \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$.

problema agli autovalori generalizzato

Sia B una matrice di ordine d invertibile:

trovare l'autovettore $\mathbf{u} \in {\mathbb{R}^{\times d}}_{nz}$ e il corrispondente autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che sia $A\,\mathbf{u}\ =\ \lambda\,B\,\mathbf{u}$.

Il problema si riduce a quello all'inizio della sezione quando $B = \mathbf{1}_d$.
Ogni autovalore λ deve risolvere l'equazione polinomiale $\det(A - \lambda\,B) = 0$.

teorema spettrale generalizzato

Le matrici A e B siano simmetriche, la B sia definita positiva e denotiamo la sequenza nondecrescente degli autovalori dell'equazione polinomiale con $\langle \lambda_1, ..., \lambda_d \rangle$. Allora

(a) tutti i λ_i sono reali;

(b) esiste una base $\{\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_d\}$ di $\mathbb{R}^{\times d}$ costituita da autovettori corrispondenti ai suddetti autovalori

tale che $\forall i, j \in (d\,]\ \colon\ {\mathbf{u}_i}^\top B\,\mathbf{u}_j = \delta_{i,j}$ e ${\mathbf{u}_i}^\top A\,\mathbf{u}_j = \lambda_i \delta_{i,j}$;

(c) posto $P\ :=\ \mathbf{u}_1 \,\square\, \mathbf{u}_2 \,\square\, \cdots \,\square\, \mathbf{u}_d$, si ha $P^\top\,B\,P\ =\ \mathbf{1}_d$ e $P^\top\,A\,P\ =\ \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_d)$

(d) $\forall \mathbf{v} \in \boldsymbol{V}\ \colon\ \lambda_1 \le \dfrac{\mathbf{v}^\top A\,\mathbf{v}}{\mathbf{v}^\top B\,\mathbf{v}} \le \lambda_d$.

W25g.06 forme quadratiche

Una forma quadratica in una d-upla $\mathbf{x} = \langle x_1, ..., x_d \rangle$ di variabili in un campo $\mathbb{F}$ è un polinomio omogeneo di secondo grado in queste variabili della forma

$$Q(\mathbf{x})\ = Q(x_1, ..., x_d)\ =\ \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}\,x_i\,x_j$$

$$=\ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_d \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}\ =\ \mathbf{x}^\top\,A\,\mathbf{x}\ ,$$

ove A è una matrice simmetrica di ordine d.

Una quadrica in 2D nelle variabili x e y ha la forma $a_{x,x}\,x^2 + a_{y,y}\,y^2 + 2\,a_{x,y}\,x\,y$

Una quadrica in 3D nelle variabili x, y e z ha la forma

$$a_{x,x}\,x^2 + a_{y,y}\,y^2 + a_{z,z}\,z^2 + 2\,a_{x,y}\,x\,y + 2\,a_{y,z}\,y\,z + 2\,a_{z,x}\,z\,x$$

Consideriamo la matrice simmetrica sui reali $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \dots & a_{d,d} \end{bmatrix}$ avente come autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_d$ e per $h = 1, 2, ..., d$ le sottomatrici associate $A_h := A|_{(\mathrm{h}\,],(\mathrm{h}\,]} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{h,1} & \dots & a_{h,h} \end{bmatrix}$.

La matrice A e la corrispondente forma quadratica $Q(\mathsf{x}) = \mathsf{x}^\mathsf{T} A\, \mathsf{x}$ sono dette

forme positive definite sse $\forall \mathsf{x} \in \boldsymbol{V}_{nz}$: $Q(\mathsf{x}) > 0$ sse $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d > 0$ ssa $\forall h = 1, 2, ..., d$: $det(A_h) > 0$;

forma positive semidefinite sse $\forall \mathsf{x} \in \boldsymbol{V}_{nz}$: $Q(\mathsf{x}) \geq 0$ sse $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d \geq 0$

forms indefinite sse al variare di x la $Q(\mathsf{x})$ assume valori sia positivi che negativi;

negative definite sse $-A$ e $-Q(\mathsf{x})$ sono definite positive.

Consideriamo inoltre la sequenza degli autovettori $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_d \rangle$ corrispondente alla sequenza nondecrescente degli autovalori $\langle \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d \rangle$ e la matrice $P := \mathbf{u}_1 \,\square\, \mathbf{u}_2 \,\square\, \cdots \,\square\, \mathbf{u}_d$.

Se gli autovettori sono mutuamente ortogonali e di norma 1, ovvero se $P \in$ **MatOrt**, allora :

(a) la trasformazione che porta x in $\overline{\mathsf{x}} := P^\mathsf{T}\, \mathsf{x}$ fa assumere alla forma quadratica Q la **forma canonica**

$$Q = \lambda_1 \,\overline{x}_1{}^2 + \lambda_2 \,\overline{x}_2{}^2 + \cdots + \lambda_d \,\overline{x}_d{}^2 = \overline{\mathsf{x}}^\mathsf{T} \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d)\, \overline{\mathsf{x}};$$

(b) $\lambda_1 \leq \dfrac{Q(\mathsf{x})}{|\mathsf{x}|^2} \leq \lambda_d$, valendo le due uguaglianze sse x è il corrispondente autovettore .

L'uguaglianza a zero della forma quadratica Q

W25 h. vettori tridimensionali

base ortonormale canonica ordinata $\left\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \right\rangle = \left\langle \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z \right\rangle = \left\langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \right\rangle$

per $i, j = 1, 2, 3$ con $i \neq j \Longrightarrow \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta(i, j)$

consideriamo i vettori $\mathbf{a} = \left\langle a_x, a_y, a_z \right\rangle$,

lunghezza di $\mathbf{a}$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

addizione e sottrazione, $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} := \left\langle a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3 \right\rangle$

moltiplicazione per in numero reale α $\alpha\,\mathbf{a} := \left\langle \alpha\, a_1, \alpha\, a_2, \alpha\, a_3 \right\rangle$.

combinazione lineare $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} = \left\langle \alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3 \right\rangle$

Prodotto scalare di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_1$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, $(\alpha \mathbf{a}) \cdot (\beta \mathbf{b}) = (\alpha\beta)\, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

prodotto vettore di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \left\langle a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1 \right\rangle = \det \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

prodotto triplo (scalare) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$

W25 i. rotazioni

W25i.01 Isometrie (entro uno spazio metrico) con almeno un punto fisso, chiamato **centro della rotazione**.

Nell'ambito di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times d}$ sono rapresentate da matrici ortogonali di ordine d e con determinante 1.

W25i.02 rotazioni in 2D

Rotazione di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con centro nell'origine per l'angolo θ $\qquad \mathcal{R}_{\mathbf{0}_2}(\theta) \;=\; \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

W25i.03 rotazioni in 3D

Ogni rotazione in $\mathbb{R}^{\times 3}$ lascia invariata una retta che si chiama **asse di rotazione** e fa ruotare secondo lo stesso angolo, detto angolo di rotazione ogni piano ortogonale all'asse. Una qualsiasi rotazione R viene individuata dal suo asse, che scriviamo L, e dall'angolo di rotazione α; la R si può quindi denotare genericamente con $\mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha)$. Più operativamente una R si può individuare in modi diversi, in quanto anche la L può essere individuata da diversi gruppi di parametri.

La R può essere individuata da un punto C dell'asse L e dal versore $\mathbf{n} = \langle n_x, n_y, n_z\rangle$ che precisa una orientazione della L e da α inteso come angolo con segno collegato ad $\mathbf{n}$ dalla **regola della mano destra**: un osservatore con i piedi sul punto di intersezione della L con un piano ortogonale Π e orientato come $\mathbf{n}$ vede i punti di Π ruotati di un angolo α nel verso antiorario sse la ampiezza è positiva.
Per questa rotazione $\mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha)$ usiamo la più concreta notazione $\mathcal{R}(C;\mathbf{n},\alpha)$ o le equivalenti $\mathcal{R}(C;\mathbf{n}\,\alpha)$ e $\mathcal{R}(C;a,b,c)$, dove $\langle a,b,c\rangle := \mathbf{n}\,\alpha = \langle n_x\,\alpha, n_y\,\alpha, n_z\,\alpha\rangle$.

Le rotazioni più importanti sono quelle con $C = \mathbf{0}_3$, ovvero quelle con l'asse L passante per l'origine; infatti composizioni di queste con traslazioni sono in grado di fornire qualsiasi rotazione. Per le rotazioni con asse passante per l'origine le notazioni sopra introdotte si possono semplificare trascurando l'indicazione del centro per il quale si sottintende l'origine stessa: si usano quindi espressioni come $\mathcal{R}(\mathbf{n},\alpha)$, $\mathcal{R}(\mathbf{n}\,\alpha)$ e $\mathcal{R}(a,b,c)$.

Per le rotazioni con centro nell'origine possono servire anche i parametri
$r := \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\rho := \sqrt{a^2+b^2}$, l'ampiezza angolare θ tale che sia $\cos\theta = \dfrac{c}{r}$ e $\sin\theta = \dfrac{\rho}{r}$
l'angolo ϕ per il quale si hanno $\cos\phi = \dfrac{a}{\rho}$ e $\sin\phi = \dfrac{b}{\rho}$.
In effetti l'asse di simmetria si può esprimere come

$$\mathsf{L} \;=\; \{t \in \mathbb{R} :| \; \langle a\,t, b\,t, c\,t\rangle\} \;=\; \{t \in \mathbb{R} :| \; \langle t\,\sin\theta\,\cos\phi, t\,\sin\theta\,\sin\phi, t\,\cos\theta\rangle\} \;.$$

Le rotazioni $\mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha)$ con centro nell'origine in una base destrorsa $\mathcal{B}$ sono rappresentate da matrici di ordine 3 ortogonali e con determinante 1; per esse potremmo usare la notazione $\mathsf{R}_{\mathcal{B}} = \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\mathsf{L},\alpha)$; se la base si può lasciare implicita confondiamo la rotazione con la matrice rappresentativa.

Tutte le rotazioni con centro nell'origine si possono esprimere come prodotti di rotazioni intorno agli assi coordinati secondo un angolo α per le cui matrici abbiamo:

$$\mathcal{R}_{\mathsf{Ox}}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}_{\mathsf{Oy}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}_{\mathsf{Oz}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per il prodotto di due rotazioni con lo stesso asse abbiamo $\quad \mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha_1) \circ \mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha_2) \;=\; \mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha_1+\alpha_2)$,

mentre per la rotazione inversa $\mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha)^{-1} \;=\; \mathcal{R}(\mathsf{L},-\alpha)$.
La rotazione di un angolo α intorno alla retta generica per l'origine L caratterizzabile con i precedenti parametri $\mathbf{n}$, a, b, c, θ e ϕ, è data dal seguente prodotto di rotazioni intorno ad assi coordinati:

$$\mathcal{R}(\mathsf{L},\alpha) \;=\; \mathcal{R}(Oz)(\phi)\circ\mathcal{R}(Oy)(\theta)\circ\mathcal{R}(Oz)(\alpha)\circ\mathcal{R}(Oy)(-\theta)\circ\mathcal{R}(Oz)(-\phi)\ .$$

La matrice che rappresenta la rotazione $\mathcal{R}(a,b,c)$ nella base $\mathcal{B}=\langle\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z\rangle$ si può ottenere anche con il cambiamento di coordinate che porta a riferirsi alla base $\overline{\mathcal{B}}=\langle\mathbf{e}_{\overline{x}},\mathbf{e}_{\overline{y}},\mathbf{e}_{\overline{z}}\rangle$ con il versore $\mathbf{e}_{\overline{z}}$ coincidente con $\mathbf{n}=\dfrac{1}{r}\,\langle a,b,c\rangle$

La matrice di questo cambiamento di cordinate è $P \;=\; \mathbf{e}_{\overline{x}} \,\|\, \mathbf{e}_{\overline{y}} \,\|\, \mathbf{e}_{\overline{z}} \;=\; \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{bmatrix}$, ove

$$\mathbf{e}_{\overline{z}} \;=\; \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} \;=\; \begin{bmatrix} p_{1,3}\\ p_{2,3}\\ p_{3,3}\end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{r}\begin{bmatrix} a\\ b\\ c\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{e}_{\overline{y}} \;=\; \begin{bmatrix} p_{1,2}\\ p_{2,2}\\ p_{3,2}\end{bmatrix} \;=\; \frac{1}{\rho}\begin{bmatrix} -b\\ a\\ 0\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{e}_{\overline{x}} \;=\; \begin{bmatrix} p_{1,1}\\ p_{2,1}\\ p_{3,1}\end{bmatrix} \;=\; \mathbf{e}_{\overline{y}}\wedge\mathbf{e}_{\overline{z}}$$

Quindi si ha la matrice $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\mathsf{L},\alpha) \;=\; P\,\mathcal{R}_{\mathsf{Oz}}(\alpha)\,P^{\mathsf{T}} \;=\; P\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}P^{\mathsf{T}}$.

Si può ricavare la matrice $R \;=\; \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\alpha\,\mathbf{n})$ anche dalla uguaglianza

$$R\,\mathbf{x} \;=\; (\cos\alpha)\,\mathbf{x} + (1-\cos\alpha)\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{v}|^2} + \frac{\sin\alpha}{|\mathbf{v}|}\,\mathbf{n}\wedge\mathbf{x} \qquad \text{ove} \qquad \mathbf{x} \;=\; \begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\ .$$

Dalla matrice $R \;=\; \mathcal{R}_{\mathcal{B}}(\alpha\,\mathbf{n})$ si ottengono l'angolo di rotazione dalla $\cos\alpha \;=\; \dfrac{\mathrm{Tr}(R)-1}{2}$ e il vettore della orientazione dell'asse di rotazione dal sistema di equazioni lineari omogenee $(R-\mathbf{1}_3)\mathbf{n}=\mathbf{0}_3$.

W25i.04 rotazioni in n dimensioni

Le rotazioni sono individuate dalle matrici ortogonali che rappresentano il collegamento tra due basi ortonormali.

W25 j. trigonometria razionale

W25j.01 trigonometria razionale nel piano

Consideriamo punti nel piano riferito a un sistema cartesiano $P_i = \langle x_i, y_i \rangle$ per $i = \mu, 1, 2, 3, ...$
quadranza di A_1 ed A_2 $\quad \mathcal{Q}(A_1, A_2) := (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
la quadranza quindi à una funzione bivariata simmetrica definita positiva, $\mathcal{Q}(A_1, A_2) = 0$ sse $A_1 = A_2$
consideriamo tre punti del piano P_i con gli indici da trattare ciclicamente (identificando i con$i + 3\,\mathbb{Z}$) e le corrispondenti tre varianze $Q_i := \mathcal{Q}(A_{i+1}, A_{i+2})$
i punti A_1, A_2 ed A_3 sono collineari sse vale la **uguaglianza delle tre quadranze**

$$(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2({Q_1}^2 + {Q_2}^2 + {Q_3}^2) .$$

una espressione equivalente ha la seguente forma $\quad (Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4\, Q_1\, Q_2$ e cycl.
consideriamo quattro punti A_i per $i = 1, 2, 3, 4$ con gli indici da trattare ciclicamente (identificando $i = 5$ con $i = 1$ ecc.) e definiamo le corrispondenti quattro quadranze $Q_{i,i+1} := \mathcal{Q}(A_i, A_{i+1}$
i quattro punti P_i sono collineari sse vale la seguente **uguaglianza delle quattro quadranze**:

$$\left((Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,4} + Q_{4,1})^2 - 2\,({Q_{1,2}}^2 + {Q_{2,3}}^2 + {Q_{3,4}}^2 + {Q_{4,1}}^2\right)^2 = 64\, Q_{1,2}\, Q_{2,3}\, Q_{3,4}\, Q_{4,1}$$

consideriamo due rette R_1 ed R_2 caratterizzate, risp., dalle equazioni $a_i\, x + b_i\, y + c_i = 0$; ricordiamo che esse sono parallele sse $a_1\, a_2 - b_1\, b_2 = 0$ e sono perpendicolari sse $a_1\, a_2 + b_1\, b_2 = 0$;
si dice **spread** delle due rette $\quad \textbf{sprd}(\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2) := \dfrac{(a_1\, a_2 - b_1\, b_2)^2}{({a_1}^2 + {b_1}^2)\,({a_2}^2 + {b_2}^2)}$
detto A l'intersezione delle due rette, θ uno dei due angoli tra le due rette, preso un punto C sulla R_1 e detto B la proiezione di C sulla R_2, per lo spread si ha $\textbf{sprd}(\mathsf{R}_1, \mathsf{R}_2) = \dfrac{\mathcal{Q}(B, C)}{\mathcal{Q}(A, C)} = \sin^2 \theta$
questa misura, evidentemente, è simmetrica nelle due rette, non dipende dalla scelta di C e non cambia scambiando θ con $180° - \theta$, cioè non dipende da una orientazione delle rette.

W25 k. quaternioni e altri numeri ipercomplessi

W25k.01 quaternioni

algebra unifera dei quaternioni spazio vettoriale quadridimensionale sui reali i cui elementi si possono scrivere

$$\mathbf{q} = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k} \;:=\; \left\langle_q a, b, c, d\right\rangle \qquad \text{per} \;\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \;\; ,$$

spazio munito del prodotto bilineare "$\ast$" (chiamato prodotto di Hamilton) che soddisfa le seguenti uguaglianze

(1) $\qquad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{Qtrn} \,:\; \mathbf{1} \ast \mathbf{q} := \mathbf{q} \ast \mathbf{1} = \mathbf{q} \qquad , \qquad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{i} \ast \mathbf{j} \ast \mathbf{k} = -\mathbf{1}$.

qui con **Qtrn** denotiamo l'insieme dei quaternioni;

il prodotto dei quaternioni viene individuato equivalentemente dalla seguente tavola di moltiplicazione, nella quale si evidenzia che **1** ha il ruolo di unità :

(3)
$$\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ & & & & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{i} & \mathbf{i} & -\mathbf{1} & \mathbf{k} & -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} & \mathbf{j} & -\mathbf{k} & -\mathbf{1} & \mathbf{i} \\ \mathbf{k} & \mathbf{k} & \mathbf{j} & -\mathbf{i} & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \; .$$

l'algebra dei quaternioni si denota con $\mathbb{H} \;=\; \left\langle \mathbb{R}^{\times 4}{}_V sp, \cdot \right\rangle$

nel quaternione $\mathbf{q} = a\,\mathbf{1} + b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$ si individuano la componente scalare o temporale $sclr(\mathbf{q}) := a\,\mathbf{1}$ e la componente vettoriale o spaziale o pura $vect(\mathbf{Q}) := b\,\mathbf{i} + c\,\mathbf{j} + d\,\mathbf{k}$

I quaternioni scalari si identificano con i numeri reali e in genere nella scrittura di ogni quaternione si trascura **1**; i quaternioni vettoriali si identificano spesso con i vettori di $\mathbb{R}^{\times 3}$e su di essi si possono calcolare i prodotti scalare e vettoriale; i quaternioni scalari costituiscono il centro di $\mathbb{H}$, i quaternioni vettoriali una sottoalgebra anticommutativa di $\mathbb{H}$

quaternione coniugato di $\mathbf{q}$ si definisce $\mathbf{q}^* \;:=\; a\,\mathbf{1} - b\,\mathbf{i} - c\,\mathbf{j} - d\,\mathbf{k}$

$(\mathbf{q}^*)^* \;=\; \mathbf{q} \;\;,\;\; sclr(\mathbf{q}) \;=\; \dfrac{1}{2}\,(\mathbf{q} + \mathbf{q}^*) \;\;,\;\; vect(\mathbf{q}) \;=\; \dfrac{1}{2}\,(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)$

$\mathbf{q}^* \;=\; \dfrac{1}{2}\,(\mathbf{q} + \mathbf{i}\cdot\mathbf{q}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{q}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{k}\cdot\mathbf{q}\cdot\mathbf{k})$

ogni quaternione si può rappresentare nella forma

$$\mathbf{q} \;=\; \mathbf{Z}_{[1]} + \mathbf{Z}_{[2]}\cdot\mathbf{j} \;\; \text{con} \;\; \mathbf{Z}_{[1]} \;:=\; a + b\,\mathbf{i} \;\; \text{e} \;\; \mathbf{Z}_{[2]} \;:=\; c + d\,\mathbf{i}$$

inoltre si può rappresentare nella forma matriciale $\quad \mathbf{q} \;=\; \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix} \;:=\; \begin{bmatrix} a + \mathrm{i}\,b & c + \mathrm{i}\,d \\ -c + \mathrm{i}\,d & a - \mathrm{i}\,b \end{bmatrix}$

norma al quadrato di $\mathbf{q} \qquad ||\mathbf{q}||^2 \;:=\; \mathbf{q}\cdot(\mathbf{q}^*) \;=\; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \;=\; (\mathbf{q}^*)\cdot\mathbf{q}$

per essa valgono le proprietà delle norme al quadrato; quindi si può definire come distanza tra due quaternioni $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2 \quad \mathrm{dist}_{\mathbb{H}}(\mathbf{q}_1 \text{ e } \mathbf{q}_2) \;:=\; ||\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2||$

Si dice quaternione unitario ogni quaternione di norma 1; denotiamo con $Qtn\mathsf{U}$ il loro insieme.

Si dice reciproco del quaternione $\mathbf{q} \quad \mathbf{q}^{-1} \;=\; \dfrac{1}{\mathbf{q}} \;:=\; \dfrac{\mathbf{q}^*}{||\mathbf{q}||^2}$.

Se $\mathbf{q} \;=\; \mathbf{Z}_{[1]} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}$, si ha: $\quad \dfrac{1}{\mathbf{q}} \;=\; \dfrac{1}{||\mathbf{q}||^2}\,\left((\mathbf{Z}_{[1]})^* - \mathbf{Z}_{[2]}\cdot\mathbf{j}\right)$.

se $\mathsf{q} = \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix}$, si ha $\dfrac{1}{\mathsf{q}} = \dfrac{1}{||\mathsf{q}||^2} \begin{bmatrix} z^* & -w \\ -w^* & z \end{bmatrix}$

radice quadrata, esponenziale e logaritmo . . . .

rotazioni in $\mathbb{R}^{\times 3}$ espresse mediante quaternioni . . . .

W25**k.02** octonioni

per **algebra degli octonioni** si intende lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\times 8}$ la cui base canonica denotiamo con $\langle \mathbf{1}, \mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}, \mathsf{l}, \mathsf{m}, \mathsf{n}, \mathsf{o} \rangle$ munito del prodotto $*$ per il quale $\mathbf{1}$ è unità bilatera e viene completato dalla seguente tavola di moltiplicazione

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 & \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} & \mathsf{l} & \mathsf{m} & \mathsf{n} & o \\
 & & & & & & & \\
\mathsf{i} & -1 & \mathsf{k} & -\mathsf{j} & \mathsf{m} & -\mathsf{l} & -o & \mathsf{n} \\
\mathsf{j} & -\mathsf{k} & -1 & \mathsf{i} & \mathsf{n} & o & -\mathsf{l} & -\mathsf{m} \\
\mathsf{k} & \mathsf{j} & -\mathsf{i} & -1 & o & -\mathsf{n} & \mathsf{m} & -\mathsf{l} \\
\mathsf{l} & -\mathsf{m} & -\mathsf{n} & -o & -1 & \mathsf{i} & \mathsf{j} & \mathsf{k} \\
\mathsf{m} & \mathsf{l} & -o & \mathsf{n} & -\mathsf{i} & -1 & -\mathsf{k} & \mathsf{j} \\
\mathsf{n} & o & \mathsf{l} & -\mathsf{n} & -\mathsf{j} & \mathsf{k} & -1 & -\mathsf{i} \\
o & -\mathsf{n} & \mathsf{m} & \mathsf{l} & -\mathsf{k} & -\mathsf{j} & \mathsf{i} & -1
\end{array}\right] .$$

questo prodotto non è associativo, a es.

W25**k.03** esadecanioni

Detti anche sedenioni, sono gli elementi di un'algebra sul campo di reali di 16 dimensioni il cui prodotto è noncommutativo e nonassociativo. Essi solo in parte sono invertibili.

In genere gli esadecanioni vengono riferiti ad una base denotata con $\{e_0, e_1, ..., e_9, e_a, e_b, e_c, e_d, e_e, e_f\}$ costituita da elementi invertibili e con $e_0 = u$ unità per il prodotto.

La corrispondente tavola di Cayley, sostituendo ogni e_α con α ed e_0 con u, è

	u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
u	u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	a	b	c	d	e	f
1	1	$-u$	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	$-b$	a	$-d$	c	f	$-e$
2	2	-3	$-u$	1	6	7	-4	-5	a	b	-8	-9	$-e$	$-f$	c	d
3	3	2	-1	$-u$	7	-6	5	-4	b	$-a$	9	-8	$-f$	e	$-d$	c
4	4	-5	-6	-7	$-u$	1	2	3	c	d	e	f	-8	-9	$-a$	$-b$
5	5	4	-7	6	-1	$-u$	3	2	d	$-c$	f	$-e$	9	-8	b	$-a$
6	6	7	4	-5	-2	3	$-u$	-1	e	$-f$	$-c$	d	a	$-b$	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	$-u$	f	e	$-d$	$-c$	b	a	-9	-8
8	8	-9	$-a$	$-b$	$-c$	$-d$	$-e$	$-f$	$-u$	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	b	a	$-d$	c	f	$-e$	-1	$-u$	-3	2	-5	4	7	-6
a	a	b	8	-9	$-e$	$-f$	c	d	-2	3	$-u$	-1	-6	-7	4	5
b	b	$-a$	9	8	$-f$	e	-3	c	-3	-2	1	$-u$	-7	6	-5	4
c	c	d	e	f	8	-9	$-a$	$-b$	-4	5	6	7	$-u$	-1	-2	-3
d	d	$-c$	f	$-e$	9	8	b	$-a$	-5	-4	7	-6	1	$-u$	3	-2
e	e	$-f$	$-c$	d	a	$-b$	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	$-u$	1
f	f	e	$-d$	$-c$	b	a	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	$-u$

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`