Capitolo W20:
prontuario: funzioni trascendenti elementari e numeri complessi

Contenuti delle sezioni

10 pagine

W20:a. esponenziali e logaritmi

$$a^0 \ := \ 1 \quad , \quad a^1 \ := \ a \quad , \quad a^n \ := \ a^{n-1}\,a \quad , \quad a^{1/k} = \sqrt[k]{a} \quad , \quad a^{h/k} = \sqrt[k]{a^h}$$

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1}\,a^{x_2} \quad , \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad , \quad (a\,b)^x = a^x\,b^x$$

$$\text{sia } \ b \in \mathbb{R} \quad , \quad y = \log_b x \Longleftrightarrow x = b^y$$

$$\mathsf{e} \ := \ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\,18285\,59045$$

$$\ln x \ := \ \log_e x \quad , \quad y = \ln x \ \Longleftrightarrow \ x = \mathsf{e}^y \quad , \quad x = b^y = \mathsf{e}^{y\ \ln b}$$

$$\log_b\ x_1\,x_2 \ = \ \log_b\ x_1 + \log_b\ x_2 \quad , \quad \log_b\ \frac{1}{x} \ = \ -\log_b\ x \quad , \quad \log_b\ \frac{x_1}{x_2} \ = \ \log_b\ x_1 - \log_b\ x_2$$

$$\log_b\ x^p \ = \ p\ \log_b\ x \quad , \quad \log_b\ \sqrt[p]{x} = = \ \frac{1}{p}\ \log_b\ x$$

$$\ln_b\ x_1\,x_2 \ = \ \ln\ x_1 + \ln\ x_2 \quad , \quad \ln\ \frac{1}{x} \ = \ -\ln\ x \quad , \quad \ln\ \frac{x_1}{x_2} \ = \ \ln\ x_1 - \ln\ x_2 \quad , \quad \log_b\ x^p \ = \ p\ \log_b\ x$$

$$\log_b\ x \ = \ \frac{\log_c\ x}{\log_c\ b} \ = \ \frac{\ln\ x}{\ln\ b} \qquad , \qquad y = \log_b\ x \ \Longrightarrow \ b = x^{\frac{1}{y}}$$

W20:b. numeri complessi

W20:**b.01** **unità immaginaria** $\mathrm{i} :=$ numero tale che $\mathrm{i}^2 = -1$

è rappresentabile con la matrice $\boldsymbol{matc}(i) := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ che sui vettori 2 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ effettua una rotazione intorno all'origine $\mathbf{0}_2$ di 90° nel verso antiorario; il suo quadrato $\boldsymbol{matc}(\mathrm{i}^2) := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ effettua il mezzogiro in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

numero complesso

numero rappresentabile nella sua forma rettangolare come $z = x + \mathrm{i}\, y$ o equivalentemente come coppia $\langle x, y\rangle$; oppure con la matrice $\boldsymbol{matc}(z) := \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$

insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} := \mathbb{R} + \mathrm{i} \cdot \mathbb{R}$

a partire da $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ si ottengono la sua parte reale $\Re(z) := x$ e la sua parte immaginaria $\Im(z) := y$

ogni $z \in \mathbb{C}$ si può esprimere come $z = \Re(z) + \mathrm{i}\, \Im(z)$; l'unità immaginaria corrisponde alla coppia a $\langle 0, 1\rangle$

numeri immaginari puri sono i numeri complessi $= \mathrm{i} \cdot y$ con y reale, ossia i numeri dati dalle coppie $\langle 0, y\rangle$, oppure dai vettori colonna $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$, oppure dalle matrici $\boldsymbol{matc}(\mathrm{i} \cdot y) := \begin{bmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{bmatrix}$

ogni numero reale x si identifica con il particolare complesso con $\Im(x) = 0$ ossia con $x = x^*$, ossia con il vettore colonna $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, ossia con la matrici $\boldsymbol{matc}(x) := \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ la matrice $\boldsymbol{matc}(x)$ agisce su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come omotetia di fattore x;

per ogni immaginario puro $\mathrm{i} \cdot y$ la matrice $\boldsymbol{matc}(\mathrm{i}\, y)$ agisce su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ come l'omotetia di fattore y seguita (o preceduta) dalla rotazione oraria di 90° intorno all'origine

per ogni $z = x + \mathrm{i}\ y \in \mathbb{C}$ la matrice $\boldsymbol{matc}(z)$ trasforma un vettore di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nella somma del vettore ottenuto con l'omotetia $\boldsymbol{matc}(x)$ con il vettore ottenuto con l'omotetia $\boldsymbol{matc}(y)$ composta con la rotazione oraria di 90° intorno all'origine

i numeri complessi $z = x + \mathrm{i}\, y$ sono in biiezione con le matrici 2×2 della forma $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$,

W20:**b.02** **operazioni sui numeri complessi**

coniugato di un numero complesso z è $z^* := x - \mathrm{i}\, y = \Re(z) + \mathrm{i}\, \Im(z)$; talora lo si denota con $\overline{z}$; si tratta di una involuzione

modulo di un numero complesso è il modulo del corrispondente vettore:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

somma di due numeri complessi $z_1 + z_2 := (x_1 + \mathrm{i}\, y_1) + (x_2 + \mathrm{i}\, y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2)$; si tratta di somma vettoriale commutativa e associativa

$$\boldsymbol{matc}(z_1 + z_2) = \boldsymbol{matc}(z_1) + \boldsymbol{matc}(z_2)$$

opposto di un numero complesso $-z := -x + (-y) = -\Re(z) - \Im(z)$

differenza di due complessi $z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (x_1 + \mathrm{i}\, y_1) + (-x_2 - \mathrm{i}\, y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2)$

prodotto di due numeri complessi $z_1 \cdot z_2 := (x_1 + \mathrm{i}\, y_1) \cdot (-x_2 - \mathrm{i}\, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + \mathrm{i}\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$

$$\boldsymbol{matc}(z_1 \cdot z_2) = \boldsymbol{matc}(z_1) \cdot \boldsymbol{matc}(z_2)$$

modulo come prodotto $z \cdot z^* = x^2 + y^2 = |z|^2 = (x + \mathrm{i}\, y) \cdot (x - \mathrm{i}\, y)$

passaggio al **reciproco di un numero complesso** nonnullo $\quad z^{-1} := \dfrac{x_2 - \mathrm{i}\,y_2}{(x_2+\mathrm{i}\,y_2)\,(x_2-\mathrm{i}\,y_2)} = \dfrac{x_2-\mathrm{i}\,y_2}{{x_2}^2+{y_2}^2}$

divisione tra due numeri complessi

$$\frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1+\mathrm{i}\,y_1}{x_2+\mathrm{i}\,y_2} = \frac{(x_1+\mathrm{i}\,y_1)(x_2-\mathrm{i}\,y_2)}{(x_2+\mathrm{i}\,y_2)(x_2-\mathrm{i}\,y_2)} = \frac{(x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2)+\mathrm{i}\,(x_2\cdot y_1-x_1\cdot y_2)}{{x_2}^2+{y_2}^2}$$

$$(z_1 \pm z_2)^* = {z_1}^* \pm {z_2}^* \qquad z_1\cdot {z_2}^* = {z_1}^*\cdot{z_2}^* \qquad \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}$$

$$\Big||z_1|-|z_2|\Big| \le |z_1\pm z_2| \le |z_1|+|z_2| \qquad |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

campo dei numeri complessi $\quad \mathbb{C}_{fld} := \Big\langle \mathbb{C}\ ,\ +\ ,\ -\ ,\ \langle 0,0\rangle\ ,\ \cdot\ ,\ \langle 1,0\rangle\ ,\ ^{-1}\Big\rangle$

forma polare dei numeri complessi o **forma trigonometrica dei numeri complessi**

$$z = x+\mathrm{i}\,y = r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta) \quad \text{ove} \quad r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|\ ,\ \theta = \arg z = \arctan\frac{y}{x}$$

formula di De Moivre $\quad \forall n\in\mathbb{Z}\ :\ (\cos,\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \cos n\,\theta+\mathrm{i}\,\sin n\,\theta$

formule di Eulero $\quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}}{2}$

forma esponenziale dei numeri complessi

$$z = x+\mathrm{i}\,y = r\,(\cos\theta+\mathrm{i}\,\sin\theta) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$$

Consideriamo $z_1 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ e $z_2 = r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$

$$z_1\cdot z_2 = r_1\,r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \qquad \arg(z_1\cdot z_2) = \arg z_1+\arg z_2$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta_2)} \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1-\arg z_2$$

$$\forall n\in\mathbb{Z}\ :\ z^n = \left(r\,e_{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\,\theta} \qquad \arg(z^n) = n\arg(z)$$

W20:c. funzioni trigonometriche

W20:**c.01** Nel piano cartesiano Oxy consideriamo circonferenze *Circf*(A, r) e in particolare quelle con centro in $A = \mathbf{0}_2 = \langle 0, 0\rangle$.
Si definisce il numero π come rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il suo diametro e si trova

$$\pi \approx 3.14159\,26535 \ .$$

Unità di misura proporzionali: $1^\circ := \dfrac{\pi}{180}\,\text{rad} \approx 0.017543\,\text{rad} \quad , \quad 1\,\text{rad} := \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57.295\,780$.

Consideriamo $C := \langle b, a\rangle$ con $a, b > 0$, punto del primo quadrante (Iqdr), la circonferenza *Circf*$(\mathbf{0}_2, c)$ con $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, la proiezione di C su Ox $B = \langle b, 0\rangle$ e il triangolo $\Delta(A, B, C)$ avente come angoli α in A, β in B e γ in C. definiamo le funzioni :

$$\textbf{seno} \qquad \sin\,\alpha := \frac{a}{c} \quad , \quad \textbf{coseno} \qquad \cos\,\alpha := \frac{b}{c}$$

Le definizioni si estendono a ogni angolo $\alpha \in \mathbb{R}$ (in attesa di estenderle ad argomenti complessi).

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ , \ \sin(-x) = -\sin\,x \ , \ \cos(-x) = \cos\,x \ .$$

$\sin\,\alpha = 0 \iff \alpha \in \{n \in \mathbb{Z} :|\ n\,\pi\} =: I_{sz} \quad , \quad \cos\,\alpha = 0 \iff \alpha \in \{n \in \mathbb{Z} :|\ n - 1/2\,\pi\} =: I_{cz}$

Definiamo per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_{cz}$ **tangente** $\tan\,\alpha := \dfrac{\sin\,\alpha}{\cos\,\alpha} = (\text{Iqdr})\ \dfrac{a}{b}$.

Definiamo per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_{sz}$ **cotangente** $\cot\,\alpha := \dfrac{\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} = \dfrac{1}{\tan\,\alpha} = (\text{Iqdr})\ \dfrac{b}{a}$

Definiamo per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_{sz}$ **secante** $\sec\alpha := \dfrac{1}{\sin\,\alpha} = (\text{Iqdr})\ \dfrac{c}{a}$

Definiamo per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus I_{sz}$ **cosecante** $\csc\,\alpha := \dfrac{1}{\cos\,\alpha} = (\text{Iqdr})\ \dfrac{c}{b}$

W20:**c.02**

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad , \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \ .$$

$$\tan(-x) = -\tan\,x \ , \ \cot(-x) = -\cot\,x \ , \ \sec(-x) = -\sec x \ , \ \csc\,(-x) = \csc\,x \ .$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\,x = -\cos(\pi - x) \quad , \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\,x = \sin(\pi - x)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot\,x = -\cot(\pi - x) \quad , \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\,x = -\tan(\pi - x)$$

Valori per angoli particolari

x	0	$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$	$\frac{\pi}{10} = 18^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$
$\sin\,x$	0	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\,x$	1	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$	$\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\,x$	0	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$	1
$\cot\,x$	$\pm\infty$	$2 + \sqrt{3}$	$\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	1

W20:**c.03**

$$\sin\,x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\tan\,x}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x} = \frac{1}{\csc\,x}$$

$$\cos\,x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\cot\,x}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\,x}} = \frac{1}{\csc\,x} = \frac{\pm\sqrt{\csc^2 x - 1}}{\sec x}$$

$$\tan\,x = \frac{\sin\,x}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos\,x} = \frac{1}{\cot\,x} = \pm\sqrt{\sec^2 - 1} = \frac{1}{\pm\sqrt{\csc^2 x - 1}}$$

$$\cot x = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}} = \pm\sqrt{\csc^2 x-1}$$

$$\sec x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\cos x} = \pm\sqrt{1+\tan^2 x} = \frac{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x} = \frac{\csc x}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\pm\sqrt{1+\tan^2 x}}{\tan x} = \pm\sqrt{1+\cot^2 x} = \frac{\sec x}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad , \quad \tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

$$\sin\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos x \quad , \quad \cos\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin x \quad , \quad \tan\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right) = -\cot x \quad , \quad \cot\left(x\pm\frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$$

$$\sin(x\pm\pi) = -\sin x \quad , \quad \cos(x\pm\pi) = -\cos x \quad , \quad \tan(x\pm\pi) = \tan x \quad , \quad \cot(x\pm\pi) = \cot x$$

$$\sin(x\pm 2\pi) = \sin x \quad , \quad \cos(x\pm 2\pi) = \cos x \quad , \quad \tan(x\pm 2\pi) = \tan x \quad , \quad \cot(x\pm 2\pi) = \cot x$$

$$\sin(\pi-x) = \sin x \quad , \quad \cos(\pi-x) = -\cos x \quad , \quad \tan(\pi-x) = -\tan x \quad , \quad \cot(\pi-x) = -\cot x$$

$$\sin(2\pi-x) = -\sin x \quad , \quad \cos(2\pi-x) = \cos x \quad , \quad \tan(2\pi-x) = -\tan x \quad , \quad \cot(2\pi-x) = -\cot x$$

$$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y \quad , \quad \cos(x\pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x\pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1\mp\tan x\tan y} \quad , \quad \cot(x\pm y) = \pm\frac{\cot x\cot y\mp 1}{\cot x\pm\cot y}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad , \quad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad , \quad \tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

W20:c.04 funzioni trigonometriche di angoli multipli e potenze

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x \quad , \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x \quad , \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad , \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \quad , \quad \tan 3x = \frac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$$

$$\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x \ , \ \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \ , \ \tan 4x = \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}$$

$$\sin nx = n\sin x\cos^{n-1} x - \binom{n}{3}\sin^3 x\cos^{n-3} x + \binom{n}{5}\sin^5 x\cos^{n-5} x - \cdots$$

$$\cos nx = \cos^n x - \binom{n}{2}\sin^2 x\cos^{n-2} x + \binom{n}{4}\sin^4 x\cos^{n-4} x - \cdots$$

$$\sin^{2m} x = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\binom{2m}{m-j}\cos 2jx$$

$$\sin^{2m-1} x = \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\binom{2m-1}{m-j}\sin(2j-1)x$$

$$\cos^{2m} x = \binom{2m}{m}\frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{j=1}^{m}\binom{2m}{m-j}\cos 2jx$$

$$\cos^{2m-1} x = \frac{1}{2^{2m-2}}\sum_{j=1}^{m}\binom{2m-1}{m-j}\cos(2j-1)x$$

W20:c.05 formule di prostaferesi

$$\sin x\pm\sin y = 2\sin\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x\mp y}{2}\right) \quad , \quad \cos x\pm\cos y = \pm 2\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\tan x\pm\tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y} \quad , \quad \cot x\pm\cot y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$$

combinazioni lineari di seno e coseno

$$a\cos x + b\sin x \;=\; r\cos(x-\phi) \quad , \quad a\sin x + b\cos x \;=\; r\sin(x+\phi) \quad \text{dove}$$

$r \;:=\; \sqrt{a^2+b^2}$ e per l'ampiezza di fase $\phi \;:=\; \arctan\dfrac{b}{a}$ se $a>0$ $\quad \phi \;:=\; \pi + \arctan\dfrac{b}{a}$ se $a<0$.

W20:d. funzioni trigonometriche inverse

arcoseno $y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \text{dove} \quad -1 \le x \le 1 \ , \ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

arcocoseno $y = \arccos x \iff x = \cos y \quad \text{dove} \quad -1 \le x \le 1 \ , \ 0 \le y \le \pi$

arcotangente $y = \arctan x \iff x = \tan y \quad \text{dove} \quad -\infty \le x \le +\infty \ , \ -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

arcocotangente $y = \operatorname{arccot} x \iff x = \cot y \quad \text{dove} \quad -\infty \le x \le +\infty \ , \ 0 \le y \le \pi$

arcosecante $\arcsin x \ := \ \arccos \sqrt{1-x^2} \ = \ \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

arcocosecante $\arccos x \ := \ \arcsin \sqrt{1-x^2} \ = \ \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ \operatorname{arccot} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\arctan x \ = \ \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ \arccos \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ \operatorname{arccot} \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{arccot} x \ = \ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ = \ \arctan \frac{1}{x}$$

W20:e. funzioni iperboliche e loro inverse

W20:**e.01**

seno iperbolico $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}-1}{2\,e^x} = \dfrac{1-e^{-2x}}{2\,e^{-x}}$

coseno iperbolico $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{e^{2x}+1}{2\,e^x} = \dfrac{1+e^{-2x}}{2\,e^{-x}}$

tangente iperbolica $\tanh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

cotangente iperbolica $\coth x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{1}{\tanh x}$

secante iperbolica $\operatorname{sech} x := \dfrac{2}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{2\,e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{1}{\cosh x}$

cosecante iperbolica $\operatorname{csch} x := \dfrac{2}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2\,e^x}{e^{2x}-1} = \dfrac{1}{\sinh x}$

V.f. `https://Hyperbolic functions#/media/File:Sinh_cosh_tanh.svg`

W20:**e.02** $\sinh(-x) = -\sinh x$, $\cosh(-x) = \cosh x$, $\tanh(-x) = -\tanh x$, $\coth(-x) = \coth x$ ▮

$$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x \quad , \quad \operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{\tanh x}{\sinh x} = \frac{1}{\cosh x} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{\coth x}{\cosh x} = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad , \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad , \quad \operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1 \quad , \quad \coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$$

$$\sinh x = \pm\sqrt{\cosh^2 x - 1} = \frac{\tanh}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\cosh x = \frac{\sinh}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2 x}} = \frac{|\coth x|}{\sqrt{\coth^2 x - 1}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\sqrt{1+\sinh^2 x}} = \pm\frac{\sqrt{\cosh^2 x - 1}}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x}$$

$$\coth x = \frac{\sqrt{1+\sinh^2 x}}{\sinh x} = \pm\frac{\cosh x}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\tanh x}$$

W20:**e.03**

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \quad , \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y} \quad , \quad \coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$$

$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \quad , \quad \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$$

$$\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x} \quad , \quad \coth 2x = \frac{\coth^2 x + 1}{2\coth^2 x}$$

$$\sinh\frac{x}{2} = \operatorname{sign} x\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}} \quad , \quad \cosh\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}}$$

$$\tanh\frac{x}{2} = \operatorname{sign} x\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} = \frac{\sinh x}{\cosh x + 1} \quad , \quad \coth\frac{x}{2} = \operatorname{sign} x\sqrt{\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}} = \frac{\sinh x}{\cosh x - 1}$$

$$\text{se } x \neq 0\text{, allora} \quad \tanh\frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{\sinh x} = \coth x - \operatorname{csch} x$$

$$e^x = \frac{1+\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}$$

$$\sinh x + \sinh y \;=\; 2\,\sinh\frac{x+y}{2}\,\cosh\frac{x-y}{2} \quad , \quad \sinh x - \sinh y \;=\; 2\,\cosh\frac{x+y}{2}\,\sinh\frac{x-y}{2}$$
$$\cosh x + \cosh y \;=\; 2\,\cosh\frac{x+y}{2}\,\cosh\frac{x-y}{2} \quad , \quad \cosh x - \cosh y \;=\; 2\,\sinh\frac{x+y}{2}\,\sinh\frac{x-y}{2}$$
$$\tanh x \pm \tanh y \;=\; \frac{\sinh x \pm y}{\cosh x\,\cosh y} \quad , \quad \coth x \pm \coth y \;=\; \frac{\sinh x \pm y}{\sinh x\,\sinh y}$$
$$\sinh x\,\sinh y \;=\; \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right] \quad , \quad \sinh x\,\cosh y \;=\; \frac{1}{2}\left[\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right]$$
$$\cosh x\,\cosh y \;=\; \frac{1}{2}\left[\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right]$$
$$(\cosh x \pm \sinh x)^n = \cosh n\,x \pm \sinh n\,x$$ **formula di de Moivre**

W20:**e.04** **funzioni iperboliche inverse**

Tutte le funzioni iperboliche sono invertibili, con l'eccezione del coseno iperbolico invertibile limitatamente al subdominio $\mathbb{R}_{0+}$ o al subdominio $\mathbb{R}_{-0}$.

area del seno iperbolico $x = \sinh y \iff y = \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

area del coseno iperbolico $x = \cosh y \iff y = \operatorname{arcosh} x = \begin{cases} \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) & \text{per } x \le 0 \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) & \text{per } x \ge 0 \end{cases}$

area della tangente iperbolica

$$x = \tanh y \iff y = \operatorname{artanh} x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{per} \quad |x| < 1$$

area della cotangente iperbolica

$$x = \coth y \iff y = \operatorname{arcoth} x = \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{y+1}{y-1} \text{ per } |x| > 1$$
$$\operatorname{arsech} x \;=\; \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \operatorname{arcsch} x \;=\; \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad \operatorname{arcoth} x \;=\; \operatorname{artanh}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Queste funzioni vengono chiamate anche argomento di ... invece di area di ... .

$$\sinh \mathrm{i}x \;=\; \mathrm{i}\sin x \quad , \quad \cosh \mathrm{i}x \;=\; \mathrm{i}\cos x \quad , \quad \tanh \mathrm{i}x \;=\; \mathrm{i}\tan x \quad , \quad \coth \mathrm{i}x \;=\; \mathrm{i}\cot x$$
$$\sinh(x+\mathrm{i}y) \;=\; \sinh x\,\cos y + \mathrm{i}\cosh x\,\sin y \quad , \quad \cosh(x+\mathrm{i}y) \;=\; \cosh x\,\cos y + \mathrm{i}\sinh x\,\sin y$$
$$\tanh(x+\mathrm{i}y) \;=\; \frac{\tanh x + \mathrm{i}\tan y}{1 + \mathrm{i}\tanh x\,\tan y} \quad , \quad \coth(x+\mathrm{i}y) \;=\; \frac{1 - \mathrm{i}\coth x\,\cot y}{\coth x - \mathrm{i}\cot y}$$

Testi dell'*esposizione* in `http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/` e in `http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`