

1

## Capitolo W10 prontuario: insiemi e funzioni numeriche

### Contenuti delle sezioni

- a. costanti p. 2
- b. insiemi numerici p. 5
- c. funzioni sui reali [1] p. 6
- d. funzioni sugli interi [1] p. 7
- e. sequenze combinatorie [1] p. 9
- f. numeri interi [1] p. 10
- g. somme di potenze di interi p. 11

11 pagine

---

W10 a. costanti

W10a.01 potenze di 10 e di 2

Potenze di 10	prefisso	sigla
1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 = $10^{24}$	yotta	Y
1 000 000 000 000 000 000 000 000 = $10^{21}$	zetta	Z
1 000 000 000 000 000 000 000 = $10^{18}$	exa	E
1 000 000 000 000 000 000 = $10^{15}$	peta	P
1 000 000 000 000 = $10^{12}$	tera	T
1 000 000 000 = $10^9$	giga	M
1 000 000 = $10^6$	mega	M
10 000 = $10^4$	miria	
1 000 = $10^3$	kilo	G
100 = $10^2$	hecto	h
10 = $10^1$	deca	da o D
0.1 = $10^{-1}$	deci	d
0.01 = $10^{-2}$	centi	c
0.001 = $10^{-3}$	milli	m
0.001 = $10^{-6}$	micro	$\mu$
0.000 001 = $10^{-9}$	nano	n
0.000 000 001 = $10^{-12}$	pico	p
0.000 000 000 001 = $10^{-15}$	femto	f
0.000 000 000 000 001 = $10^{-18}$	atto	a
0.000 000 000 000 000 001 = $10^{-21}$	zepto	y
0.000 000 000 000 000 000 001 = $10^{-24}$	yocto	z

W10a.02 potenze di 2

$1 = 2^0$			
$2 = 2^1$	$2\ 048 = 2^{11}$	$2\ 097\ 152 = 2^{21}$	$2\ 147\ 483\ 648 = 2^{31}$
$4 = 2^2$	$4\ 096 = 2^{12}$	$4\ 194\ 304 = 2^{22}$	$4\ 294\ 967\ 296 = 2^{32}$
$8 = 2^3$	$8\ 192 = 2^{13}$	$8\ 388\ 608 = 2^{23}$	$8\ 589\ 934\ 592 = 2^{33}$
$16 = 2^4$	$16\ 384 = 2^{14}$	$16\ 777\ 216 = 2^{24}$	$17\ 179\ 869\ 184 = 2^{34}$
$32 = 2^5$	$32\ 768 = 2^{15}$	$33\ 554\ 432 = 2^{25}$	$34\ 359\ 738\ 768 = 2^{35}$
$64 = 2^6$	$65\ 536 = 2^{16}$	$67\ 108\ 864 = 2^{26}$	$68\ 719\ 476\ 736 = 2^{36}$
$128 = 2^7$	$131\ 072 = 2^{17}$	$134\ 217\ 728 = 2^{27}$	$68\ 719\ 476\ 736 = 2^{37}$
$256 = 2^8$	$261\ 144 = 2^{18}$	$268\ 435\ 456 = 2^{28}$	$274\ 877\ 976\ 944 = 2^{38}$
$512 = 2^9$	$524\ 288 = 2^{19}$	$536\ 870\ 912 = 2^{29}$	$549\ 755\ 813\ 888 = 2^{39}$
$1\ 024 = 2^{10}$	$1\ 048\ 576 = 2^{20}$	$1\ 073\ 741\ 824 = 2^{30}$	$1\ 099\ 511\ 627\ 776 = 2^{40}$
		$1\ 024 = 2^{10}$	kibibyte
		$1\ 048\ 576 = 2^{20} = 1\ 024^2$	mibibyte
		$1\ 073\ 741\ 824 = 2^{30} = 1\ 024^3$	gibibyte

1 099 511 627 776	= 2 <sup>40</sup>	= 1 024 <sup>4</sup>	tebibyte
1 125 899 906 842 624	= 2 <sup>50</sup>	= 1 024 <sup>5</sup>	pebibyte
1 152 921 504 606 846 976	= 2 <sup>60</sup>	= 1 024 <sup>6</sup>	exbibyte
9 223 372 036 854 875 808	= 2 <sup>63</sup>		
18 446 744 073 709 551 616	= 2 <sup>64</sup>		
1 180 591 620 717 411 303 424	= 2 <sup>70</sup>	= 1 024 <sup>7</sup>	zebibyte
208 925 819 614 629 174 706 176	= 2 <sup>80</sup>	= 1 024 <sup>8</sup>	yobibyte
340 282 366 920 938 463 463 374 607 431 768 211 456	= 2 <sup>128</sup>		

### W10a.03 radici e logaritmi di numeri

$n =$	2	3	4
$\sqrt{n} \approx$	1.41421 35623 73095	1.73205 08075 68877	2
$\sqrt[3]{n} \approx$	1.25992 10498 94873	1.44224 95703 07408	1.58740 10519 68199
$\ln n \approx$	0.69315 71805 59945	1.09861 22886 68110	1.38629 43611 19891
$\log_{10} n \approx$	0.30102 99956 63981	0.47712 12547 19662	0.60205 99913 27962
$n =$	5	6	7
$\sqrt{n} \approx$	2.23606 79774 99789	2.44948 97427 83178	2.64575 13110 64591
$\sqrt[3]{n} \approx$	1.70997 59466 76697	1.81712 05928 32140	1.91293 11827 72389
$\ln n \approx$	1,60943 79124 34100	1.79175 94692 28055	1.94591 01490 553133
$\log_{10} n \approx$	0.69897 00043 36019	0.77815 12503 83643	0.84509 80400 14256
$n =$	8	9	10
$\sqrt{n} \approx$	2.82842 71247 46190	3	3.16227 76601 68379
$\sqrt[3]{n} \approx$	2	2.08008 38239 51904	2.15443 46900 31884
$\ln n \approx$	2.07944 15416 79835	2.19722 45773 36219	2.30258 50929 94046
$\log_{10} n \approx$	0.90308 99869 91944	0.95424 25094 39324	1

$$\sqrt[12]{2} \approx 1.05946 30343 59296$$

### W10a.04

numero di Fidia = sezione aurea =  $\varphi := \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 1.61803 39887 49894 84820 \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$\Phi := \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi} \approx 0.61803 39887 59894$$

$$\frac{\phi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\Phi \sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0.72360 67977 49979 \quad , \quad \frac{\sqrt{5}}{\phi} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = 1.38196 60112 50105$$

costante di Napier  $e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \approx 2.71828 18284 59045 23536$

approssimazioni razionali di e:  $\frac{193}{61} \approx 2.71830 98592 \quad \frac{1264}{465} \approx 2.71827 95699$

$$\frac{1}{e} = 0.56418\ 36787\ 94411\ 71442 \quad , \quad e^2 = 7.38905\ 60989\ 30650$$

$$\log_{10} e = 0.43429\ 44819\ 03251 \quad , \quad \log_e 10 = \ln 10 = 2.30258\ 50929\ 94045$$

### W10a.05

**pi greca**  $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793 \quad , \quad 2\pi = 6.28318\ 53071\ 79586 \quad , \quad \frac{\pi}{2} = 1.57079\ 63267\ 94897$

approssimazioni razionali di  $\pi$ :  $\frac{22}{7} \approx 3.14285\ 714293 \quad \frac{355}{113} \approx 3.14159\ 29204$

$$\frac{1}{\pi} = 0.31830\ 98861\ 83790 \quad , \quad \pi^2 = 9.86960\ 44010\ 89358$$

$$\sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509\ 05516 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.56418\ 95835\ 47756$$

$$\log_{10} \pi = 0.49714\ 98726\ 94133 \quad , \quad \log_e \pi = \ln \pi = 1.14472\ 98858\ 49400$$

**costante di Eulero-Mascheroni**  $\gamma_{em} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n -\ln n \right) = 0.57721\ 56649\ 01532 \quad [113:d.03]$

**radiante**  $1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 8'' = 57.29577\ 95130\ 82321^\circ$

$$1^\circ = 0.01745 \text{ rad} \quad , \quad 1' = 0.00029 \text{ rad} \quad , \quad 1'' = 0.00000\ 48481 \text{ rad}$$

### W10a.06

**costante di Catalan**  $G_C := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots = 0.91596\ 55941\ 77219$

**costante di Conway**  $= 1.30357\ 72690\ 34296\ 39215$

## W10 b. insiemi numerici

### W10b.01

insieme dei **numeri naturali**  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

insieme dei **numeri interi positivi**  $\mathbb{P} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

insieme dei **numeri interi**  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Z}_- \dot{\cup} \mathbb{N} = \mathbb{Z}_- \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \mathbb{P}$

insieme dei **numeri interi negativi**  $\mathbb{Z}_- = \{-1, -2, -3, \dots\} = \{n \in \mathbb{P} : | -n\}$

insieme dei **numeri interi diversi da 0**  $\mathbb{Z}_{nz} := \mathbb{Z} \setminus \{0\} = \mathbb{Z}_- \dot{\cup} \mathbb{P} = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$

insieme dei **numeri pari**  $\mathbb{E}ven := \{n \in \mathbb{Z} : | 2n\}$

insieme dei **numeri dispari**  $\mathbb{O}dd := \{n \in \mathbb{Z} : | 2n + 1\}$

insieme dei **numeri razionali**  $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{h}{k} : h \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}_{nz} \right\}$

insieme dei **numeri algebrici**

$\mathbb{R}_a$  insieme dei reali soluzioni di equazioni polinomiali con coefficienti interi

### W10b.02

insieme dei **numeri reali**  $\mathbb{R}$  insieme introdotto assiomaticamente [B42]

insieme dei **numeri reali positivi**  $\mathbb{R}_+$ , insieme dei **numeri reali negativi**  $\mathbb{R}_-$

insieme dei **numeri reali nonnegativi**  $\mathbb{R}_{0+}$ , insieme dei **numeri reali nonpositivi**  $\mathbb{R}_{-0}$

insieme dei **numeri reali diversi da zero**  $\mathbb{R}_{nz}$

insieme dei **numeri reali costruibili**  $\mathbb{R}_c :=$  insieme dei reali approssimabili illimitatamente da procedure

insieme dei **numeri complessi**  $\mathbb{C} := \{a, b \in \mathbb{R} : | a + ib\}$  con  $i^2 = -1$  [B50]

insieme dei **numeri complessi diversi da zero**  $\mathbb{C}_{nz} := \mathbb{C} \setminus \{0\}$

insieme dei **numeri complessi costruibili**  $\mathbb{C}_c := \mathbb{R}_c \times \mathbb{R}_c$

### W10b.03

**intervalli di interi**  $[h : k] := \begin{cases} \emptyset & \text{sse } k < h \\ \{h, h + 1, \dots, k\} & \text{sse } h \leq k \end{cases}$   $(h : k] := [h + 1, k]$

$[h : k) := [h, k - 1]$   $(h : k) := ]Jh + 1, k - 1]$

**intervalli di razionali**  $(r :: s) := \{x \in \mathbb{Q} \upharpoonright r < \alpha < s\}$   $[r :: s) := \{x \in \mathbb{Q} \upharpoonright r \leq x < s\}$

$(r :: s] := \{x \in \mathbb{Q} \upharpoonright r < x \leq s\}$   $[r :: s] := \{x \in \mathbb{Q} \upharpoonright r \leq x \leq s\}$

$(r :: +\infty) := \{x \in \mathbb{Q} \upharpoonright r < x\}$   $[-\infty :: s) := \{x \in \mathbb{Q} \upharpoonright x \leq s\}$

**intervalli di reali**  $(r, s) := \{x \in \mathbb{R} \upharpoonright r < \alpha < s\}$   $[r, s) := \{x \in \mathbb{R} \upharpoonright r \leq x < s\}$

$(r, s] := \{x \in \mathbb{R} \upharpoonright r < x \leq s\}$   $[r, s] := \{x \in \mathbb{R} \upharpoonright r \leq x \leq s\}$

$(r, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} \upharpoonright r < x\}$   $[-\infty, s] := \{x \in \mathbb{R} \upharpoonright x \leq s\}$

## W10 c. funzioni sui reali [1]

### W10c.01

**valore assoluto**  $|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

**funzione segno**  $\text{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{sse } x < 0 \\ 0 & \text{sse } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

**scalino di Heavyside**  $\text{Hvsd}(x) := \frac{\text{sign}(x) + 1}{2} = \begin{cases} 0 & \text{sse } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{sse } x = 0 \\ 1 & \text{sse } x > 0 \end{cases}$

**funzione caratteristica dei reali nonnegativi**  $\chi_{\mathbb{R}_{0+}} := \begin{cases} 0 & \text{sse } x < 0 \\ 1 & \text{sse } x \geq 0 \end{cases}$

**funzione pavimento**  $\lfloor x \rfloor := \cup \{n \in \mathbb{Z} : \lfloor x \rfloor n \leq x < n + 1 \}$

**funzione soffitto**  $\lceil x \rceil := \cup \{n \in \mathbb{Z} : \lceil x \rceil n - 1 < x \leq n \}$

**mantissa**  $\text{mant}(x) := x - \lfloor x \rfloor$

**arrotondamento del valore**  $\text{round}(x) := \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2}$

### W10c.02 medie

Consideriamo  $n \in [2, 3, 4, \dots]$  e la sequenza di numeri reali  $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ .

**media aritmetica** di  $\mathbf{x}$ :  $M_{\mathbf{x}} := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

**media geometrica** di  $\mathbf{x}$  con  $\forall i = 1, 2, \dots, n : x_i > 0$ :  $G_{\mathbf{x}} := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$

**media armonica** di  $\mathbf{x}$  con  $\forall i = 1, 2, \dots, n : x_i > 0$ :  $H_{\mathbf{x}} := \left( \frac{1}{n} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \right)^{-1}$

consideriamo anche  $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$  con  $\forall i = 1, 2, \dots, n : x_i > 0, w_i > 0$  e  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$

**media aritmetica pesata** di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{w}$ :  $M_{\mathbf{x}, \mathbf{w}} := w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$

**media geometrica pesata** di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{w}$ :  $G_{\mathbf{x}, \mathbf{w}} := x_1^{w_1} x_2^{w_2} \dots x_n^{w_n}$

relazioni:  $H_{\mathbf{x}} \leq G_{\mathbf{x}} \leq M_{\mathbf{x}}$  con  $H_{\mathbf{x}} = G_{\mathbf{x}} = M_{\mathbf{x}} \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n$  ;  $G_{\mathbf{x}, \mathbf{w}} \leq M_{\mathbf{x}, \mathbf{w}}$

### W10c.03 progressioni

progressione aritmetica con inizio  $a$ , passo  $p$  e lunghezza  $s$ :  $\langle a, a + p, a + 2p, \dots, a + (s - 1)p \rangle$

somma:  $a \cdot s + p \frac{s(s-1)}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot s$  con  $b := a + (s-1)p$

progressione geometrica con inizio  $a$ , ragione  $q$  e lunghezza  $s$ :  $\langle a, a \cdot q, a \cdot q^2, \dots, a \cdot q^{s-1} \rangle$

somma:  $a \cdot \frac{q^s - 1}{q - 1} = \frac{bq - a}{q - 1}$  con  $b := a \cdot q^{s-1}$

W10 d. funzioni sugli interi [1]

W10d.01

delta di Kronecker  $\delta_K(i, j) := \delta_{h, k} := \begin{cases} 0 & \text{sse } h \neq k \\ 1 & \text{sse } h = k \end{cases}$   
 successore del naturale  $n \succ (n) := n + 1$

W10d.02 fattoriale e dintorni

fattoriale di  $n \in \mathbb{N}$   $0! := 1$ ,  $1! := 1$ ,  $n! := (n-1)! \cdot n$   $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

formule di approssimazione alla Stirling  $n! \approx \frac{n^n}{e} \sqrt{2\pi n}$

$\ln(n!) \approx (n+1/2) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi)$  ove  $\ln(2\pi) \approx 1.83787\ 70664\ 09345$

semifattoriale  $(2h)!! := 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2h$ ,  $(2h+1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2h$

$(2h)! = h! 2^h (2h-1)!!$ ,  $(2h+1)! = (2h+1)!! (2h)!!$

Consideriamo  $s \in \mathbb{P}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

fattoriale crescente  $x^{\overline{0}} := 1$ ,  $x^{\overline{s}} := x \cdot (x+1) \cdots (x+s-1)$

fattoriale decrescente  $x^{\underline{0}} := 1$ ,  $x^{\underline{s}} := x \cdot (x-1) \cdots (x-s+1)$

funzione Gamma [v.a. W60:d.01]

$\forall x \in \mathbb{R}_+$  :  $\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} dt e^{-t} t^{x-1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{0,-}$  :  $\Gamma(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^{x-1}}{x^n}$

$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ ,  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\forall n \in \mathbb{P}$  :  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ,  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)!!} \sqrt{\pi}$

Risulta utile convenire che  $\forall -n \in \mathbb{Z}_-$  :  $\frac{1}{(-n)!} := 0$

W10d.03 coefficienti binomiali e sviluppo del binomio

Consideriamo  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $a \in \mathbb{R}$ .

$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{sse } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sse } 0 \leq n < k \end{cases}$   $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  :  $\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^k}{k!} & \text{sse } k \in \mathbb{P} \\ 1 & \text{sse } k = 0 \end{cases}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,  $\binom{a}{k} + \binom{a}{k+1} = \binom{a+1}{k+1}$

sviluppo del binomio  $(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$

casi particolari  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ,  $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

fattorizzazioni nel campo reale  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ,  $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$ ,  $a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

W10d.04 coefficienti multinomiali e sviluppo del multinomio

Consideriamo  $s \in \mathbb{P}$ , la  $s$ -upla di reali  $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$  l'intero  $n \in \mathbb{N}$  e l'insieme  $K_n$  delle  $s$ -uple di interi naturali  $\langle k_1, k_2, \dots, k_s \rangle$  la cui somma vale  $n$ .

Si dice **coefficiente multinomiale** relativo a una  $\langle k_1, k_2, \dots, k_s \rangle \in K_{s,n}$  il quoziente

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} := \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!}$$

Si dice **sviluppo del multinomio** relativo ad  $n$ ,  $K_{s,n}$  e  $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$  l'espressione

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_s)^n := \sum_{\langle k_1, k_2, \dots, k_s \rangle \in K_{s,n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_s!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_s^{k_s}$$

casi particolari  $(a \pm b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab \pm 2bc + 2ac$

I coefficienti multinomiali si possono introdurre senza fare riferimento a  $K_{s,n}$  per ogni sequenza di interi  $\langle n, k_1, \dots, k_{s-1} \rangle$  con  $n > 0$  ponendo  $\frac{n!}{k_1, k_2, \dots, n - (k_1 + k_2 + \dots + k_{s-1})}$  -

Se  $s = 2$  si ha  $\binom{n}{k_1, k_2} = \binom{n}{k_1}$

### W10 e. sequenze combinatorie [1]

**W10e.01** Denotiamo con  $s$  un intero positivo, con  $A$  un insieme finito e sia  $n := |A|$ ; qui esaminiamo sequenze di lunghezza  $s$  di elementi di  $A$  e per questo serve assegnare ad  $A$  un ordinamento totale  $a_1 < a_2 < \dots < a_s$ .

**disposizioni con ripetizione** di lunghezza  $s$  dell'insieme  $A$ :  $s$ -uple di elementi di  $A$ , senza restrizioni sulle componenti; corrispondono alle funzioni dalla sequenza di interi  $\mathbf{s} = \langle 1, 2, \dots, s \rangle$  nell'insieme  $A$  e il loro insieme è  $\lceil \mathbf{s} \mapsto A \rceil = A^{\times s}$ ; per il suo cardinale

$$\text{DspsrN}(A, s) := |\mathbf{Dspsr}(A, s)| = |A|^s = n^s$$

Entro tale insieme di sequenze si trovano tutte le altre sequenze che seguono.

**W10e.02 disposizioni senza ripetizione** di elementi di  $A$ : sequenze di  $A^{\times s}$  che non presentano componenti ripetute; denotiamo con  $\mathbf{Dsps}(A, s)$  il loro insieme; corrispondono alle funzioni iniettive, ossia invertibili, cioè alle funzioni costituenti  $\lceil \mathbf{s} \rceil \mapsto A \rceil$ . Per il loro numero si ha

$$\mathbf{Dsps}(A, s) = |\mathbf{Dsps}(A, s)| = n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1) = n^{\underline{s}}$$

$$|\mathbf{Dsps}(A, s)| > 0 \iff n \geq s$$

**W10e.03 permutazioni** di  $A$ : sequenze costituite da  $n = |A|$  elementi di  $A$  che non presentano ripetizioni; In queste sequenze compaiono tutti gli elementi di  $A$ , ciascuno in una sola posizione e quindi

$$\text{Perm}(A) = \mathbf{Dsps}(A, n) \quad , \quad \text{PermN}(A) := |\mathbf{Perm}(A)| = |A|! = n!$$

**W10e.04 combinazioni senza ripetizione** di lunghezza  $s$  di elementi di  $A$  ordinato totalmente da una relazione come  $<$ : sequenze crescenti di  $s$  componenti di  $A$ . Denotiamo il loro insieme con  $\mathbf{Comb}(A, s)$  e osserviamo che permutando le loro  $s$  componenti si ottengono tutte le sequenze di  $\mathbf{Dsps}(A, n)$ .

$$\text{CombN}(A, s) := |\mathbf{Comb}(A, s)| = \frac{|\mathbf{Dsps}(A, s)|}{|\mathbf{Perm}(\mathbf{s})|} = \frac{n^{\underline{s}}}{s!} = \binom{n}{s}$$

**combinazioni con ripetizione** di lunghezza  $s$  di elementi di  $A$  ordinato totalmente: sequenze nondecreasing di  $s$  componenti di  $A$ .

Denotiamo il loro insieme con  $\mathbf{Combr}(A, s)$  e osserviamo che quando  $A = \{1, 2, \dots, n\}$ , si possono porre in biiezione con le sequenze di  $\mathbf{Comb}(\{1, 2, \dots, n, \dots, n+s-1\}, s)$ . Quindi

$$\text{CombrN}(\mathbf{n} \rceil, s) := |\mathbf{Combr}(\mathbf{n} \rceil, s)| = |\mathbf{Comb}(\mathbf{n+s-1} \rceil, s)| = \frac{(n+s-1)^{\underline{s}}}{s!} = \binom{n+s-1}{s}$$

## W10 f. numeri interi [1]

### W10f.01 divisibilità tra interi

Insieme dei **multipli dell'intero**  $k \in \mathbb{Z}_{nz}$ ,  $k\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} : |kn\}$

Relazione di **divisibilità**,  $h \preceq n$  sse  $n \in h\mathbb{P}$ ; si tratta di relazione riflessiva ( $h \preceq h$ ), antisimmetrica ( $j \preceq h \wedge h \preceq j \implies j = h$ ) e transitiva ( $j \preceq h \wedge h \preceq k \implies j \preceq k$ ).

Insieme dei **divisori** di  $n \in \mathbb{Z}_{nz}$ ,  $\text{Dvsr}(n) := \{h \in \mathbb{P} \upharpoonright h \preceq n\}$

**massimo comun divisore**  $\text{MCD}(h, k) = \text{gcd}(h, k) := \max(\text{Dvsr}(h) \cap \text{Dvsr}(k))$

Questa funzione si può estendere a funzione di 3 o più interi. Essa si ottiene effettivamente mediante l'algoritmo di Euclide per i numeri interi.

**minimo comune multiplo**  $\text{mcm}(h, k) := \text{lcm}(h, k) := \frac{hk}{\text{MCD}(h, k)}$

### W10f.02 numeri primi

Un intero positivo si dice primo sse è divisibile solo per se stesso e per l'unità.

I numeri primi costituiscono una successione crescente illimitata (superiormente).

Consideriamo una  $m$ -pla di primi  $\langle p_1, p_2, \dots, p_m \rangle$ ; ogni fattore primo di  $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m + 1$  è diverso dai  $p_j$ .

È utile considerare come successione dei numeri primi

$\text{PRMseq} := \langle j \in \mathbb{P} : |p_{[j]} \rangle$

$:= \langle 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, \dots \rangle$

ed estenderla definendo  $p_{[0]} := 1$ . Per l'insieme dei numeri primi scriviamo  $\text{PRM} := \text{cod}(\text{PRMseq})$ .

A questa successione si riferisce la **fattorizzazione mediante primi** di un intero positivo  $m$

$$\text{ftrprm}(m) := 2^{e_1} 3^{e_2} 5^{e_3} \dots p_{[k]}^{e_k} \quad \text{con } e_h \geq 0 \text{ e } e_k > 0.$$

Questa fattorizzazione consente di valutare il prodotto di due interi positivi mediante la sequenza delle somme dei rispettivi esponenti dei successivi primi. Essa si estende naturalmente ai numeri razionali e può servire per il loro prodotto, per la loro divisione e per le loro potenze; inoltre può servire per valutare le loro radici.

Due interi positivi  $m$  ed  $n$  si dicono **coprime** sse non hanno divisori comuni; questa relazione si denota scrivendo  $m \perp n$ .

**funzione totient [di Eulero]**  $\phi_{eu} := \left[ n \in \mathbb{N} \mapsto |\{h \in \{1, 2, \dots, n-1\} \upharpoonright h \perp n\}| \right]$

$$\phi_{eu} = \left\downarrow \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & \dots \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 6 & 4 & 10 & 4 & 12 & 6 & 8 & 8 & 16 & 6 & 18 & 8 & \dots \end{array} \right\downarrow$$

Denotiamo con  $\pi_{pr}(x)$  la funzione che a ogni  $x \in \mathbb{R}_+$  associa il numero di numeri primi minori o uguali ad  $x$ ; si tratta di funzione a scalini che cresce illimitatamente che non si sa esprimere in termini analitici, ma si può valutare asintoticamente e per i singoli  $x$ . Si ha  $\pi_{pr}(x) \sim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\ln x}$  e in particolare

$$\pi_{pr}(x) \supset \left\downarrow \begin{array}{cccccccc} 100 & 1000 & 10000 & 10^5 & 10^6 & 10^7 & 10^8 & 10^9 \\ 25 & 168 & 1229 & 9592 & 78498 & 664579 & 5761455 & 50847534 \end{array} \right\downarrow$$

**W10 g. somme di potenze di interi**

**W10g.01** Denotiamo con  $n$  un numero intero positivo

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = : t \text{ numeri triangolari}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = : t^2$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \sum_{i=1}^n i^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 \dots + n^5 = \sum_{i=1}^n i^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{4t^3 - t^2}{3}$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 \dots + n^6 = \sum_{i=1}^n i^6 = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}$$

$$1^7 + 2^7 + 3^7 \dots + n^7 = \sum_{i=1}^n i^7 = \frac{3n^8 + 12n^7 + 14n^6 - 7n^4 + 2n^2}{24} = \frac{6t^4 - 4t^3 + t^2}{3}$$

$$1^8 + 2^8 + 3^8 \dots + n^8 = \sum_{i=1}^n i^8 = \frac{10n^9 + 45n^8 + 60n^7 - 42n^5 + 20n^3 - 3n}{90}$$

$$1^9 + 2^9 + 3^9 \dots + n^9 = \sum_{i=1}^n i^9 = \frac{2n^{10} + 10n^9 + 15n^8 - 14n^6 + 10n^4 - 3n^2}{20}$$

$$= \frac{16t^5 - 20t^4 + 12t^3 - 3t^2}{5}$$

$$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} \dots + n^{10} = \sum_{i=1}^n i^{10} = \frac{6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n}{66}$$

**W10g.02**

Denotiamo con  $B_j$  il numero di Bernoulli di deponente  $j$

$$\sum_{j=1}^n j^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \frac{B_2}{2} \binom{p}{1} n^{p-1} + \frac{B_4}{4} \binom{p}{3} n^{p-3} \dots = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{n^p}{2} + \sum_{m=1}^{\frac{p+1}{2}} \frac{B_{2m}}{2m} \binom{p}{2m-1} n^{p-2m+1}$$

**formula di Faulhaber-Bernoulli**

**W10g.03**

$n$ -esimo numero armonico  $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$$\lceil n \rceil H_n \rceil \supset \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3/2 & 11/6 & 25/12 & 137/60 & 49/20 & 363/140 & 761/280 \end{array} \right\}$$

$$\bigcup \left\{ \begin{array}{cccccc} 9 & 10 & 11 & 1000 & 10^6 \\ 7129/2520 & 7381/2520 & 83711/27720 & 7.48547 & 14.39272 \end{array} \right\}$$

$$H_n = \int_0^1 dx \frac{1-x^n}{1-x} \quad , \quad H_n = G_n - (n+1) \left[ \frac{G_n}{n+1} \right] \quad \text{dove } G_n := \binom{n+(n+1)!}{n} - \frac{1}{(n+1)!}$$

*Alberto Marini*

L'esposizione in <https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/> e [https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp\\_main.php](https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php)