Capitolo W10:
prontuario: insiemi e funzioni numeriche

Contenuti delle sezioni

11 pagine

W10:a. costanti

W10:a.01 potenze di 10 e di 2

Potenze di 10			prefisso	sigla
1 000 000 000 000 000 000 000 000	=	10^{24}	yotta	Y
1 000 000 000 000 000 000 000	=	10^{21}	zetta	Z
1 000 000 000 000 000 000	=	10^{18}	exa	E
1 000 000 000 000 000	=	10^{15}	peta	P
1 000 000 000 000	=	10^{12}	tera	T
1 000 000 000	=	10^{9}	giga	M
1 000 000	=	10^{6}	mega	M
10 000	=	10^{4}	miria	
1 000	=	10^{3}	kilo	G
100	=	10^{2}	hecto	h
10	=	10^{1}	deca	da o D
0.1	=	10^{-1}	deci	d
0.01	=	10^{-2}	centi	c
0.001	=	10^{-3}	milli	m
0.001	=	10^{-6}	micro	μ
0.000 001	=	10^{-9}	nano	n
0.000 000 001	=	10^{-12}	pico	p
0.000 000 000 001	=	10^{-15}	femto	f
0.000 000 000 000 001	=	10^{-18}	atto	a
0.000 000 000 000 000 001	=	10^{-21}	zepto	y
0.000 000 000 000 000 000 001	=	10^{-24}	yocto	z

W10:a.02 potenze di 2

$1 = 2^{0}$			
$2 = 2^{1}$	$2\,048 = 2^{11}$	$2\,097\,152 = 2^{21}$	$2\,147\,483\,648 = 2^{31}$
$4 = 2^{2}$	$4\,096 = 2^{12}$	$4\,194\,304 = 2^{22}$	$4\,294\,967\,296 = 2^{32}$
$8 = 2^{3}$	$8\,192 = 2^{13}$	$8\,388\,608 = 2^{23}$	$8\,589\,934\,592 = 2^{33}$
$16 = 2^{4}$	$16\,384 = 2^{14}$	$16\,777\,216 = 2^{24}$	$17\,179\,869\,184 = 2^{34}$
$32 = 2^{5}$	$32\,768 = 2^{15}$	$33\,554\,432 = 2^{25}$	$34\,359\,738\,768 = 2^{35}$
$64 = 2^{6}$	$65\,536 = 2^{16}$	$67\,108\,864 = 2^{26}$	$68\,719\,476\,736 = 2^{36}$
$128 = 2^{7}$	$131\,072 = 2^{17}$	$134\,217\,728 = 2^{27}$	$68\,719\,476\,736 = 2^{37}$
$256 = 2^{8}$	$261\,144 = 2^{18}$	$268\,435\,456 = 2^{28}$	$274\,877\,976\,944 = 2^{38}$
$512 = 2^{9}$	$524\,288 = 2^{19}$	$536\,870\,912 = 2^{29}$	$549\,755\,813\,888 = 2^{39}$
$1\,024 = 2^{10}$	$1\,048\,576 = 2^{20}$	$1\,073\,741\,824 = 2^{30}$	$1\,099\,511\,627\,776 = 2^{40}$

$1\,024 = 2^{10}$		kibibyte
$1\,048\,576 = 2^{20}$	$= 1\,024^{2}$	mibibyte
$1\,073\,741\,824 = 2^{30}$	$= 1\,024^{3}$	gibibyte

$$
\begin{aligned}
1\,099\,511\,627\,776 = 2^{40} &= 1\,024^4 \quad \text{tebibyte}\\
1\,125\,899\,906\,842\,624 = 2^{50} &= 1\,024^5 \quad \text{pebibyte}\\
1\,152\,921\,504\,606\,846\,976 = 2^{60} &= 1\,024^6 \quad \text{exbibyte}\\
9\,223\,372\,036\,854\,875\,808 = 2^{63} &\\
18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 = 2^{64} &\\
1\,180\,591\,620\,717\,411\,303\,424 = 2^{70} &= 1\,024^7 \quad \text{zebibyte}\\
208\,925\,819\,614\,629\,174\,706\,176 = 2^{80} &= 1\,024^8 \quad \text{yobibyte}\\
340\,282\,366\,920\,938\,463\,463\,374\,607\,431\,768\,211\,456 = 2^{128} &
\end{aligned}
$$

W10:a.03 **radici e logaritmi di numeri**

$n\ =$	2	3	4
$\sqrt{n}\ \approx$	1.41421 35623 73095	1.73205 08075 68877	2
$\sqrt[3]{n}\ \approx$	1.25992 10498 94873	1.44224 95703 07408	1.58740 10519 68199
$\ln\,n\ \approx$	0.69315 71805 59945	1.09861 22886 68110	1.38629 43611 19891
$\log_{10}\,n\ \approx$	0.30102 99956 63981	0.47712 12547 19662	0.60205 99913 27962

$n\ =$	5	6	7
$\sqrt{n}\ \approx$	2.23606 79774 99789	2.44948 97427 83178	2.64575 13110 64591
$\sqrt[3]{n}\ \approx$	1.70997 59466 76697	1.81712 05928 32140	1.91293 11827 72389
$\ln\,n\ \approx$	1, 60943 79124 34100	1.79175 94692 28055	1.94591 01490 553133
$\log_{10}\,n\ \approx$	0.69897 00043 36019	0.77815 12503 83643	0.84509 80400 14256

$n\ =$	8	9	10
$\sqrt{n}\ \approx$	2.82842 71247 46190	3	3.16227 76601 68379
$\sqrt[3]{n}\ \approx$	2	2.08008 38239 51904	2.15443 46900 31884
$\ln\,n\ \approx$	2.07944 15416 79835	2.19722 45773 36219	2.30258 50929 94046
$\log_{10}\,n\ \approx$	0.90308 99869 91944	0.95424 25094 39324	1

$$\sqrt[12]{2}\ \approx\ 1.05946\,30343\,59296$$

W10:a.04

numero di Fidia = **sezione aurea** = $\varphi\ :=\ \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\ \approx\ 1.61803\,39887\,49894\,84820$

$\Phi\ :=\ \dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi - 14\ \approx\ 0.61803\,39887\,59894$

$$\frac{\phi}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\Phi\,\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = 0.72360\,67977\,49979 \quad , \quad \frac{\sqrt{5}}{\phi} = \frac{5-\sqrt{5}}{2} = 1.38196\,60112\,50105$$

costante di Napier $\mathsf{e}\ :=\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\ =\ \sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}\ \approx\ 2.71828\,18284\,59045\,23536$

approssimazioni razionali di e: $\dfrac{193}{61}\ \approx\ 2.71830\,98592 \qquad \dfrac{1264}{465}\ \approx\ 2.71827\,95699$

$$\frac{1}{\mathsf{e}} = 0.56418\,36787\,94411\,71442 \quad , \quad \mathsf{e}^2 = 7.38905\,60989\,30650$$
$$\log_{10}\,\mathsf{e} = 0.43429\,44819\,03251 \quad , \quad \log_{\mathsf{e}}\,10 = \ln\,10 = 2.30258\,50929\,94045$$

W10:**a.05**

pi greca $\pi = 3.14159\,26535\,89793 \quad , \quad 2\,\pi = 6.28318\,53071\,79586 \quad , \quad \frac{\pi}{2} = 1.57079\,63267\,94897$

$$\text{approssimazioni razionali di } \pi: \quad \frac{22}{7} \approx 3.14285\,714293 \qquad \frac{355}{113} \approx 3.14159\,29204$$
$$\frac{1}{\pi} = 0.31830\,98861\,83790 \quad , \quad \pi^2 = 9.86960\,44010\,89358$$
$$\sqrt{\pi} = 1.77245\,38509\,05516 \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0.56418\,95835\,47756$$
$$\log_{10}\,\pi = 0.49714\,98726\,94133 \quad , \quad \log_e\,\pi = \ln\,\pi = 1.14472\,98858\,49400$$

costante di Eulero-Mascheroni $\gamma_{em} := \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} - \ln\,n\right) = 0.57721\,56649\,01532$ [I13:d.03]

radiante $1\,\mathrm{rad} \;=\; 57°\,17'\,8'' \;=\; 57.29577\,95130\,82321°$

$$1° \;=\; 0.01745\,\mathrm{rad} \quad , \quad 1' = 0.00029\,\mathrm{rad} \quad , \quad 1'' = 0.00000\,48481\,\mathrm{rad}$$

W10:**a.06**

costante di Catalan $G_C \;:= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2\,k+1)^2} \;=\; \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots \;=\; 0.91596\,55941\,77219$

costante di Conway $=\; 1.30357\,72690\,34296\,39215$

W10:b. insiemi numerici

W10:**b.01**

insieme dei **numeri naturali** $\mathbb{N} \;=\; \{0,1,2,3,...\}$

insieme dei **numeri interi positivi** $\mathbb{P} \;=\; \{1,2,3,...\} \;=\; \mathbb{N} \setminus \{0\}$

insieme dei **numeri interi** $\mathbb{Z} \;=\; \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\} \;=\; \mathbb{Z}_- \dot\cup \mathbb{N} \;=\; \mathbb{Z}_- \dot\cup \{0\} \dot\cup \mathbb{P}$

insieme dei **numeri interi negativi** $\mathbb{Z}_- \;=\; \{-1,-2,-3,...\} \;=\; \{n \in \mathbb{P} :| \; -n\}$

insieme dei **numeri interi diversi da 0** $\mathbb{Z}_{nz} \;:=\; \mathbb{Z} \setminus \{0\} \;=\; \mathbb{Z}_- \dot\cup \mathbb{P} \;=\; \{...,-3,-2,-1,1,2,3,...\}$

insieme dei **numeri pari** $\mathbb{E}\mathsf{ven} \;:=\; \{n \in \mathbb{Z} :| \; 2\,n\}$

insieme dei **numeri dispari** $\mathbb{O}\mathsf{dd} \;:=\; \{n \in \mathbb{Z} :| \; 2\,n+1\}$

insieme dei **numeri razionali** $\mathbb{Q} \;:=\; \left\{h \in \mathbb{Z} \;, k \in \mathbb{Z}_{nz} :| \; \frac{h}{k}\right\}$

insieme dei **numeri algebrici**

$\mathbb{R}_{\mathsf{A}}$ insieme dei reali soluzioni di equazioni polinomiali
con coefficienti interi

W10:**b.02**

insieme dei **numeri reali** $\mathbb{R}$ insieme introdotto assiomaticamente [B42]

insieme dei **numeri reali positivi** $\mathbb{R}_+$, insieme dei **numeri reali negativi** $\mathbb{R}_-$

insieme dei **numeri reali nonnegativi** $\mathbb{R}_{0+}$, insieme dei **numeri reali nonpositivi** $\mathbb{R}_{-0}$

insieme dei **numeri reali diversi da zero** $\mathbb{R}_{nz}$

insieme dei **numeri reali costruibili** $\mathbb{R}_{\mathsf{C}}$:= insieme dei reali approssimabili illimitatamente da procedure

insieme dei **numeri complessi** $\mathbb{C} \;:=\; \{a,b \in \mathbb{R} :| \; a+i\,b\}$ con $i^2=-1$ [B50]

insieme dei **numeri complessi diversi da zero** $\mathbb{C}_{nz} \;:=\; \mathbb{C} \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$

insieme dei **numeri complessi costruibili** $\mathbb{C}_{\mathsf{C}} \;:=\; \mathbb{R}_{\mathsf{C}} \times \mathbb{R}_{\mathsf{C}}$

W10:**b.03**

intervalli di interi

$$[h:k] \;:=\; \begin{cases} \emptyset & \text{sse } k<h \\ \{h,h+1,...,k\} & \text{sse } h \le k \end{cases} \qquad (h:k] \;:=\; [h+1,k]$$

$$[h:k) \;:=\; [h,k-1] \qquad (h:k) \;:=\; lJh+1,k-1]$$

intervalli di razionali

$$(r::s) \;:=\; \{x \in \mathbb{Q} \P\; r<\alpha<s\} \qquad [r::s) \;:=\; \{x \in \mathbb{Q} \P\; r \le x < s\}$$

$$(r::s] \;:=\; \{x \in \mathbb{Q} \P\; r < x \le s\} \qquad [r::s] \;:=\; \{x \in \mathbb{Q} \P\; r \le x \le s\}$$

$$(r::+\infty] \;:=\; \{x \in \mathbb{Q} \P\; r<x\} \qquad [-\infty::s] \;:=\; \{x \in \mathbb{Q} \P\; x \le s\}$$

intervalli di reali

$$(r,s) \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \P\; r<\alpha<s\} \qquad [r,s) \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \P\; r \le x < s\}$$

$$(r,s] \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \P\; r < x \le s\} \qquad [r,s] \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \P\; r \le x \le s\}$$

$$(r,+\infty] \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \P\; r<x\} \qquad [-\infty,s] \;:=\; \{x \in \mathbb{R} \P\; x \le s\}$$

W10:c. funzioni sui reali [1]

W10:**c.01**

valore assoluto $|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

funzione segno $\text{sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{sse } x < 0 \\ 0 & \text{sse } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

scalino di Heavyside $\mathsf{Hvsd}(x) := \dfrac{\text{sign}(x)+1}{2} = \begin{cases} 0 & \text{sse } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{sse } x = 0 \\ 1 & \text{sse } x > 0 \end{cases}$

funzione caratteristica dei reali nonnegativi $\chi_{\mathbb{R}_{0+}} := \begin{cases} 0 & \text{sse } x < 0 \\ 1 & \text{sse } x \geq 0 \end{cases}$

funzione pavimento $\lfloor x \rfloor := \dot\cup\{n \in \mathbb{Z} :| \ulcorner x \,]\!]\, n \leq x < n+1 \Vdash n \urcorner\}$

funzione soffitto $\lceil x \rceil := \dot\cup\{n \in \mathbb{Z} :| \ulcorner x \,]\!]\, n-1 < x \leq n \Vdash n \urcorner\}$

mantissa $\text{mant}(x) := x - \lfloor x \rfloor$

arrotondamento del valore $\text{round}(x) := \left\lfloor x - \dfrac{1}{2} \right\rfloor + \dfrac{1}{2}$

W10:**c.02 medie**

Consideriamo $n \in [2,3,4,...)$ e la sequenza di numeri reali $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$.

media aritmetica di x: $M_{\mathsf{X}} := \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_x}{n}$

media geometrica di x con $\forall i = 1,2,...,n \,\vdots\, x_i > 0$: $G_{\mathsf{X}} := \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$

media armonica di x con $\forall i = 1,2,...,n \,\vdots\, x_i > 0$: $H_{\mathsf{X}} := \left(\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} \cdots + \dfrac{1}{x_n}\right)\right)^{-1}$

consideriamo anche $\mathsf{w} = \langle w_1, w_2, ..., w_n \rangle$ con $\forall i = 1,2,...,n \,\vdots\, x_i > 0, w_i > 0$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$

media aritmetica pesata di x e w: $M_{\mathsf{X},wSd} := w_1\,x_1 + w_2\,x_2 + \cdots w_n\,x_n$

media geometrica pesata di x e w: $G_{\mathsf{X},\mathsf{W}} := x_1^{w_1}\,x_2^{w_2}\,\cdots x_n^{w_n}$

relazioni: $H_{\mathsf{X}} \leq G_{\mathsf{X}} \leq M_{\mathsf{X}}$ con $H_{\mathsf{X}} = G_{\mathsf{X}} = M_{\mathsf{X}} \Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$; $G_{\mathsf{X},\mathsf{W}} \leq M_{\mathsf{X},\mathsf{W}}$

W10:**c.03 progressioni**

progressione aritmetica con inizio a, passo p e lunghezza s : $\langle a, a+p, a+2\,p, ..., a+(s-1)\,p \rangle$

somma: $a \cdot s + p\,\dfrac{s(s-1)}{2} = \dfrac{a+b}{2} \cdot s$ con $b := a + (s-1)\,p$

progressione geometrica con inizio a, ragione q e lunghezza s : $\langle a\,,\, a \cdot q\,,\, a \cdot q^2\,,\, ...\,,\, a \cdot q^{s-1} \rangle$

somma: $a \cdot \dfrac{q^{s-1}}{q-1} = \dfrac{b\,q - a}{q-1}$ con $b := a \cdot q^{s-1}$

W10:d. funzioni sugli interi [1]

W10:**d.01**

delta di Kronecker $\delta_{h,k} := \begin{cases} 0 & \text{sse } h \neq k \\ 1 & \text{sse } h = k \end{cases}$

successore del naturale n $\succ(n) := n+1$

W10:**d.02 fattoriale e dintorni**

fattoriale di $n \in \mathbb{N}$ $\quad 0! := 1\ ,\ 1! := 1\ ,\ n! := (n-1)! \cdot n \qquad n! = 1\,2\,3 \cdots n$

formule di approssimazione alla Stirling $\quad n! \approx \dfrac{n}{\mathsf{e}}^n \sqrt{2\pi n}$

$$\ln(n!) \approx (n+1/2)\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln(2\pi) \quad \text{ove} \quad \ln(2\pi) \approx 1.83787\,70664\,09345$$

semifattoriale $\quad (2h)!! := 2\cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot 2h \quad , \quad (2h+1)!! := 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 2h$

$$(2h)! = h!\,2^h\,(2h-1)!! \quad , \quad (2h+1)! = (2h+1)!!\,(2h)!!$$

Consideriamo $s \in \mathbb{P}\ ,\ x \in \mathbb{R}$.

fattoriale crescente $\quad x^{\overline{0}} := 1 \quad , \quad x^{\overline{s}} := x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+s-1)$

fattoriale decrescente $\quad x^{\underline{0}} := 1 \quad , \quad x^{\underline{s}} := x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-s+1)$

funzione Gamma [v.a. W60:d.01]

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ :\ \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} dt\ \mathsf{e}^{-t}\, t^{x-1} \qquad , \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{0,-} \ :\ \Gamma(x) := \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\,n^{x-1}}{x^{\overline{n}}}$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad , \quad \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\forall n \in \mathbb{P} \ :\ \Gamma(n) = (n-1)! \quad , \quad \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(-n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(-1)^n\,2^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}$

Risulta utile convenire che $\forall -n \in \mathbb{Z}_- \ :\ \dfrac{1}{(-n)!} := 0$

W10:**d.03 coefficienti binomiali e sviluppo del binomio**

Consideriamo $n, k \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.

$\dbinom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{sse } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sse } 0 \le n < k \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ ,\ a \in \mathbb{R} \ :\ \dbinom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{sse } k \in \mathbb{P} \\ 1 & \text{sse } k = 0 \end{cases}$

$\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k} \quad , \quad \dbinom{a}{k} + \dbinom{a}{k+1} = \dbinom{a+1}{k+1}$

sviluppo del binomio $\quad (a+b)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\,b + \cdots + \binom{n}{n-1} a\,b^{n-1} + b^n$

casi particolari $\quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\,a\,b + b^2 \quad , \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 \pm b^3$

fattorizzazioni nel campo reale $\quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad , \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp a\,b + b^2)$

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2+b^2) \quad , \quad a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2}\,a\,b + b^2)(a^2 - \sqrt{2}\,a\,b + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b^{n-2} + b^n)$$

W10:**d.04 coefficienti multinomiali e sviluppo del multinomio**

Consideriamo $s \in \mathbb{P}$, la s-upla di reali $\langle a_1, a_2, ..., a_s \rangle$ l'intero $n \in \mathbb{N}$ e l'insieme K_n delle s-uple di interi naturali $\langle k_1, k_2, ..., k_s \rangle$ la cui somma vale n.

Si dice **coefficiente multinomiale** relativo a una $\langle k_1, k_2, ..., k_s \rangle \in K_{s,n}$ il quoziente

$$\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_s} := \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, \cdots\, k_s!}$$

Si dice **sviluppo del multinomio** relativo ad n, $K_{s,n}$ e $\langle a_1, a_2, ..., a_s \rangle$ l'espressione

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_s)^n := \sum_{\langle k_1, k_2, ..., k_s \rangle \in K_{s,n}} \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, \cdots\, k_s!}\, {a_1}^{k_1}\, {a_2}^{k_2}\, \cdots\, {a_s}^{k_s}$$

casi particolari $\quad (a \pm b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\,a\,b \pm 2\,b\,c + 2\,a\,c$

I coefficienti multonomiali si possono introdurre senza fare riferimento a $K_{s,n}$ per ogni sequenza di interi $\langle n, k_1, ..., k_{s-1} \rangle$ con $n > 0$ ponendo $\dfrac{n!}{k_1, k_2, ..., n - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{ns-1})}$ –

Se $s = 2$ si ha $\dbinom{n}{k_1, k_2} = \dbinom{n}{k_1}$

W10:e. sequenze combinatorie [1]

W10:**e.01** Denotiamo con s un intero positivo, con A un insieme finito e sia $n := |A|$; qui esaminiamo sequenze di lunghezza s di elementi di A e per questo serve assegnare ad A un ordinamento totale $a_1 < a_2 < \cdots < a_s$.

disposizioni con ripetizione di lunghezza s dell'insieme A: s-uple di elementi di A, senza restrizioni sulle componenti; corrispondono alle funzioni dalla sequenza di interi $\mathsf{s} = \langle 1, 2, ..., s\rangle$ nell'insieme A e il loro insieme è $\lceil \mathsf{s} \longmapsto A \rceil \; = \; A^{\times s}$; per il suo cardinale

$$\mathsf{DspsrN} := |\mathbf{Dspsr}(A, s)| \; = \; |A|^s \; = \; n^s$$

Entro tale insieme di sequenze si trovano tutte le altre sequenze che seguono.

W10:**e.02** **disposizioni senza ripetizione** di elementi di A: sequenze di $A^{\times s}$ che non presentano componenti ripetute; denotiamo con $\mathbf{Dsps}(A, s)$ il loro insieme; corrispondono alle funzioni iniettive, ossia invertibili, cioè alle funzioni costituenti $\lceil (s] \longmapsto A \rceil$. Per il loro numero si ha

$$|\mathbf{Dsps}(A, s)| \; = \; n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-s+1) \; = \; n^{\underline{s}}$$

$|\mathbf{Dsps}(A, s)| > 0 \iff n \geq s$

W10:**e.03** **permutazioni** di A: sequenze costituite da $n = |A|$ elementi di A che non presentano ripetizioni; In queste sequenze compaiono tutti gli elementi di A, ciascuno in una sola posizione e quindi

$$\mathbf{Perm}(A) = \mathbf{Dsps}(A, n) \quad , \quad \mathsf{PermN}(A) := |\mathbf{Perm}(A)| = |A|! = n!$$

W10:**e.04** **combinazioni senza ripetizione** di lunghezza s di elementi di A ordinato totalmente da una relazione come $\prec$: sequenze crescenti di s componenti di A. Denotiamo il loro insieme con $\mathbf{Comb}(A, s)$ e osserviamo che permutando le loro s componenti si ottengono tutte le sequenza di $\mathbf{Dsps}(A, n)$.

$$\mathsf{CombN} := |\mathbf{Comb}(A, s)| \; = \; \frac{|\mathbf{Dsps}(A, s)|}{|\mathbf{Perm}((s])|} \; = \; \frac{n^{\underline{s}}}{s!} \; = \; \binom{n}{s}$$

combinazioni con ripetizione di lunghezza s di elementi di A ordinato totalmente: sequenze nondecrescenti di s componenti di A.
Denotiamo il loro insieme con $\mathbf{Combr}(A, s)$ e osserviamo che quando $A = \{1, 2, ..., n\}$, si possono porre in biiezione con le sequenze di $\mathbf{Comb}(\{1, 2, ..., n, ..., n+s-1\}, s)$. Quindi

$$\mathsf{CombrN} := |\mathbf{Combr}((n], s)| \; = \; |\mathbf{Comb}((n+s-1], s)| \; = \; \frac{(n+s-1)^{\underline{s}}}{s!} \; = \; \binom{n+s-1}{s}$$

W10:f. numeri interi [1]

W10:f.01 divisibilità tra interi

Insieme dei **multipli dell'intero** $k \in \mathbb{Z}_{nz}$, $\quad k\,\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} :| \; k\,n\}$

Relazione di **divisibilità**, $\quad h \preceq_{:} n$ sse $n \in h\,\mathbb{P}$; si tratta di relazione riflessiva $(h \preceq_{:} h)$, antisimmetrica $(j \preceq_{:} h \;\wedge\; h \preceq_{:} j \implies j = h)$ e transitiva $(j \preceq_{:} h \;\wedge\; h \preceq_{:} k \implies j \preceq_{:} k)$.

Insieme dei **divisori** di $n \in \mathbb{Z}_{nz}$, $\quad \mathsf{Dvsr}(n) := \{h \in \mathbb{P} \;\P\; h \preceq_{:} n\}$

massimo comun divisore $\quad \mathrm{MCD}(h,k) = \mathsf{gcd}(h,k) := \max\big(\mathsf{Dvsr}(h) \cap \mathsf{Dvsr}(k)\big)$

Questa funzione si può estendere a funzione di 3 o più interi. Essa si ottiene effettivamente mediante l'algoritmo di Euclide per i numeri interi.

minimo comune multiplo $\quad \mathrm{mcm}(h,k) := \mathsf{lcm}(h,k) := \dfrac{h\,k}{\mathrm{MCD}(h,k)}$

W10:f.02 numeri primi

Un intero positivo si dice primo sse è divisibile solo per se stesso e per l'unità.
I numeri primi costituiscono una successione crescente illimitata (superiormente).

Consideriamo una m-pla di primi $\langle p_1, p_2, ..., p_m\rangle$; ogni fattore primo di $p_1 \cdot p_2 \cdots p_m + 1$ è diverso dai p_j.

È utile considerare come successione dei numeri primi
$\mathsf{PRMseq} := \big\langle j \in \mathbb{P} :| \; p_{[j]}\big\rangle$
$\quad := \langle 2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, ...\rangle$
ed estenderla definendo $p_{[0]} := 1$. Per l'insieme dei numeri primi scriviamo $\mathsf{PRM} := \mathsf{cod}(\mathsf{PRMseq})$.

A questa successione si riferisce la **fattorizzazione mediante primi** di un intero positivo m

$$\mathbf{ftrprm}(m) :=: 2^{e_1}\, 3^{e_2}\, 5^{e_3} \ldots p_{[k]}^{e_k} \quad \text{con } e_h \geq 0 \text{ e } e_k > 0 \; .$$

Questa fattorizzazione consente di valutare il prodotto di due interi positivi mediante la sequenza delle somme dei rispettivi esponenti dei successivi primi. Essa si estende naturalmente ai numeri razionali e può servire per il loro prodotto, per la loro divisione e per le loro potenze; inoltre può servire per valutare le loro radici.

Due interi positivi m ed n si dicono **coprimi** sse non hanno divisori comuni; questa relazione si denota scrivendo $m \perp n$.

funzione totient di Eulero $\phi_{eu} := \ulcorner\; n \in \mathbb{N} \;\Vdash\; |\{h \in \{1, 2, ..., n-1\} \;\P\; h \perp n\}| \;\urcorner$

$$\phi_{eu} = \left\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & ... \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 6 & 4 & 6 & 4 & 10 & 4 & 12 & 6 & 8 & 8 & 16 & 6 & 18 & 8 & ... \end{matrix} \right\downarrow$$

Denotiamo con $\pi_{pr}(x)$ la funzione che a ogni $x \in \mathbb{R}_+$ associa il numero di primi minori o uguali ad x; si tratta di funzione a scalini che cresce illimitatamente che non si sa esprimere in termini analitici, ma si può valutare asintoticamente e per i singoli x. Si ha $\pi_{pr}(x) \sim_{x\to\infty} \dfrac{x}{\ln x}$ e in particolare

$$\pi_{pr}(x) \supset \left\downarrow \begin{matrix} 100 & 1000 & 10000 & 10^5 & 10^6 & 10^7 & 10^8 & 10^9 \\ 25 & 168 & 1229 & 9592 & 78498 & 664579 & 5761455 & 50847534 \end{matrix} \right\downarrow$$

W10:g. somme di potenze di interi

W10:**g.01** Denotiamo con n un numero intero positivo

$$1+2+3+\cdots+n \;=\; \sum_{i=1}^{n} i \;=\; \frac{n(n+1)}{2} \;=:\; t \quad \textsf{numeri triangolari}$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^2 \;=\; \frac{n(n+1)(2\,n+1}{6} \;=\; \frac{n^4+2\,n^3+n^2}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^3 \;=\; \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \;=\; \frac{n^4+2\,n^3+n^2}{4} \;=:\; t^2$$

$$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^4 \;=\; \frac{6\,n^5+15\,n^4+10\,n^3-n}{30}$$

$$1^5+2^5+3^5\cdots+n^5 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^5 \;=\; \frac{2\,n^6+6\,n^5+5\,n^4-n^2}{12} \;=\; \frac{4\,t^3-t^2}{3}$$

$$1^6+2^6+3^6\cdots+n^6 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^6 \;=\; \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}$$

$$1^7+2^7+3^7\cdots+n^7 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^7 \;=\; \frac{3n^8+12\,n^7+14n^6-7n^4+2\,n^2}{24} \;=\; \frac{6t^4-4t3+t^2}{3}$$

$$1^8+2^8+3^8\cdots+n^8 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^8 \;=\; \frac{10n^9+45n^8+60n^7-42\,n^5+20n^3-3n}{90}$$

$$1^9+2^9+3^9\cdots+n^9 \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^9 \;=\; \frac{2\,n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20}$$

$$=\; \frac{16t^5-20t^4+12t^3-3t^2}{5}$$

$$1^{10}+2^{10}+3^{10}\cdots+n^{10} \;=\; \sum_{i=1}^{n} i^{10} \;=\; \frac{6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n}{66}$$

W10:**g.02**

Denotiamo con B_j il numero di Bernoulli di deponente j

$$\sum_{j=1}^{n} j^p = \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\frac{B_2}{2}\binom{p}{1}n^{p-1}+\frac{B_4}{4}\binom{p}{3}n^{p-3}\cdots = \frac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{n^p}{2}+\sum_{m=1}^{\frac{p+1}{2}}\frac{B_{2m}}{2m}\binom{p}{2m-1}n^{p-2m+1}$$

formula di Faulhaber-Bernoulli

W10:**g.03**

n-esimo **numero armonico** $H_n := 1+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$

$$\lceil n \mapsto H_n \rceil \supset \left\downarrow \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3/2 & 11/6 & 25/12 & 137/60 & 49/20 & 363/140 & 761/280 \end{array} \right\downarrow$$

$$\overrightarrow{\bigcup} \left\downarrow \begin{array}{ccccc} 9 & 10 & 11 & 1000 & 10^6 \\ 7129/2520 & 7381/2520 & 83711/27720 & 7.48547 & 14.39272 \end{array} \right\downarrow$$

$$H_n = \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1-x^n}{1-x} \qquad , \qquad H_n = G_n-(n+1)\left\lfloor\frac{G_n}{n+1}\right\rfloor \;\; \text{dove } G_n := \binom{n+(n+1)!}{n}-\frac{1}{(n+1)!}$$

Alberto Marini