Capitolo T92:
inquadramento pragmatistico della matematica

Contenuti delle sezioni

11 pagine

T92:**0.01** In queste pagine si descrive il punto di vista della matematica al quale fanno riferimento le scelte di questa esposizione.

Il presente capitolo non pretende di essere approfondito in effetti esso si basa su letture di testi divulgativi, non su letture di contributi originali. Esso in particolare riprende temi contenuti nelle pagine di Wikipedia sopra la filosofia della matematica (`Filosofia della matematica (wi)`, `Philosophy of Mathematics (we)` e pagine connesse) e contenute nelle pagine di testi sui fondamenti e sulle caratteristiche generali della matematica: per esempio i testi citati in Xpu di Gabriele Lolli e Willard Van Orman Quine.

Il presente discorso non pretende minimamente di essere completo. Esso cerca di dare giustificazione al punto di vista visione della matematica che la considera innanzi tutto come scienza delle attività di calcolo. Sotto le argomentazioni presentate si percepisce un atteggiamento assai vicino al pragmatismo.

Questa posizione porta a iniziare con le stringhe come mezzi di comunicazione e oggetti da elaborare, con conseguenti nozioni dalla matematica del finito, e con la presentazione di algoritmi; questi inducono anche a introdurre precocemente un semplice linguaggio di programmazione.
Una fase successiva vede l'introduzione dell'infinito potenziale in collegamento con alcune macchine formali, in particolare con le macchine di Turing.

Successivamente emergere la necessità di attività volte ad organizzare i risultati ottenuti dalle indagini e dalle osservazioni sugli algoritmi nelle forme della matematica, giudicate le più adatte alla circolazione affidabile, estesa e versatile delle conoscenze che consentono di allargare la dotazione degli algoritmi richiesta dalla esigenza di risolvere i problemi che continuamente ci dobbiamo fronteggiare e che riguardano sempre più estesi campi applicativi.

Si procede quindi alla definizione del linguaggio (matematico) per la circolazione delle conoscenze di interesse potenzialmente generale concernenti gli algoritmi.
Per questo si tiene ben presente la ricchezza dei successi riscontrabili nella storia della matematica e delle sue applicazioni, osservando che essi portano a dare importanza, in primis pratica, alle generalizzazioni, alle conseguenti astrazioni, al metodo assiomatico e, conseguentemente, agli strumenti della logica (matematica).

Questi argomenti di sapore teorico sono presentati come essenzialmente indispensabili per la pratica della organizzazione dei risultati della matematica e della loro messa a disposizione dei ricercatori delle sue molteplici aree e dei cultori delle applicazioni.

Queste considerazioni ci si sforza di renderle condivisibili anche a chi si manifesta scettico nei confronti della opportunità delle astrazioni, oggi assai spinte, e sulla conseguente difficile comprensibilità del linguaggio e delle notazioni delle pubblicazioni avanzate.

Nel far questo pensiamo opportuno insistere sulla necessità di raggiungere un compromesso tra rigore e unitarietà delle presentazioni da un lato e utilizzo di linguaggi settoriali e specificamente semplificati rispetto a quelli delle formalizzazioni onnivalenti della logica. Si ritiene che ogni esposizione che rinunciasse a queste semplificazioni risulterebbe prolissa, pochissimo leggibile, non attraente e complessivamente inefficace.

T92:a. attività algoritmiche e loro comunicazione

T92:**a.01** Cominciamo con una prima assegnazione di compiti alla matematica allo scopo di fornire una prima orientazione per le prossime pagine; ci proponiamo tuttavia di ritornare più volte sulle finalità e sulle caratteristiche della nostra disciplina per puntualizzarle meglio dopo aver definiti alcuni suoi elementi (entità componenti, scopi, applicazioni).

Cominciamo dunque ad assegnare alla matematica il ruolo di disciplina che organizza sistematicamente le attività volte a dare soluzioni di buon livello a una ampia gamma di problemi, soluzioni alle quali chiediamo di tendere ad essere altamente affidabili, precise ed efficienti.
Questa richiesta di avvio esige subito qualche chiarimento di termini. Il primo é "problemi" e per questo ricorriamo a qualche considerazione storica.
Problemi di rilievo hanno innescati i primi sviluppi della matematica: enumerazione di beni (scorte alimentari, oggetti di scambi commerciali, denari riguardanti prodotti, prestazioni lavorative, tasse, ...), calcoli finanziari ed amministrativi, misurazioni di terreni, costruzioni di edifici e ponti, controllo delle acque, padronanza della navigazione e del succedersi delle stagioni, previsioni astronomiche ed astrologiche.
Si tratta di problemi che nel passato sono risultati assai impegnativi e che quindi sono stati affrontati limitandosi a cercare soluzioni specifiche tendenzialmente semplici, spesso poco precise, poco efficienti e poco affidabili; inoltre in genere non erano chiaramente giustificate. Di molte soluzioni del passato si sono perse le tracce, sia per stravolgimenti politici e per catastrofi naturali, sia per la mancanza di adegute documentazioni e giustificazioni. Il continuo pericolo della scomparsa e del degrado delle conoscenze ha costretto a riscoprire faticosamente alcune soluzioni, anche più volte ed anche in versioni più deboli.

T92:**a.02** Con il tempo negli ambienti di studio più impegnati (osservatori astronomici dai Maya, del Kerala, ..., grandi lavori pubblici, scuole greco-ellenistiche, ...) ci si resi conto che la risoluzione di buon livello di molti problemi richiedeva un forte impegno conoscitivo. In particolare ci si rese conto della opportunità di considerare i problemi e le relative soluzioni sforzandosi di giungere a procedimenti risolutivi di portata il più possibile ampia.
Occorreva passare da soluzioni ad hoc a metodi risolutivi applicabili ed intere classi di problemi, più versatili.
Serviva maggiore precisione nella formulazione dei procedimenti e nei risultati ottenuti, cioè nei calcoli.
In relazione a questo le soluzioni richiedevano più solide giustificazioni; e di conseguenza si sentiva la necessità di fornire "dimostrazioni rigorose" degli enunciati su cui basare i procedimenti risolutivi.
Si dovevano chiarire i rapporti tra le situazioni reali che ponevano problemi, le loro schematizzazioni preliminari per le soluzioni e le interpretazioni dei risultati.

Tutte queste esigenze hanno portato alla nascita e agli sviluppi dei vari settori della matematica e dovrebbero rendere ben comprensibili le molteplici caratteristiche dei detti settori.

T92:**a.03** La presente introduzione graduale inizierà tenendo conto che le esigenze sopra espresse comportano che le attività matematiche solo in situazioni particolari possono essere affrontate da singoli operatori, ma che in generale, al di à delle esigenze contingenti, devono essere affrontate da collettivi di operatori che facciano tesoro di tante acquisizioni precedenti e che agiscano congiuntamente e coerentemente.
Nei tempi più recenti, diciamo a partire dalla metà del secolo XX, la soluzione di gran parte dei problemi di ampia portata ha coinvolto sempre più l'uso degli strumenti per il calcolo automatico, per la gestione

di grandi archivi e per le comunicazioni a distanza. L'esame delle prestazioni di questi strumenti, meglio di questi sistemi di strumenti, e della loro perdurante rapida evoluzione porta molte argomentazioni a favore della opportunità di considerare che le attività di soluzione di problemi matematici siano svolte da collettivi di operatori in parte umani ed in parte artificiali.

Esaminiamo le questioni poste dalle attività della comunicazione tra gli quanti eseguono procedimenti di natura scientifica e tecnologica.

Le considerazioni precedenti portano a proporre uno scenario nel quale si vedono diversi esecutori di procedure risolutive che devono cooperare. Questi esecutori umani ed artificiali, che chiameremo agenti matematico informatici (in sigla AMI) innanzi tutto devono potersi scambiare informazioni che possono interpretare in modi coerenti, cioè utilizzabili per operazioni condivisibili ed orientate a fini comuni.

A questo proposito si possono prospettare moltissime situazioni; accenniamo solo ad alcuni gruppi di agenti che si mettono in comunicazione. Due telegrafisti al lavoro a partire dalla metà del XIX secolo; un contabile che utilizza una calcolatrice elettromeccanica; una operatore di laboratorio che si serve di una calcolatrice elettronica; i controllori di un evento collocati in diversi punti di osservazione; l'addetto responsabile di un monitoraggio e i relativi sensori; gli operatori di una torre di controllo ed i sistemi radar a loro disposizione.

In particolare può essere inteessante fermare l'attenzione su agenti che raccolgono i dati forniti dalle osservazioni di un fenomeno fisico, per esempio il comportamento termico di uno nuovo materiale artificiale. Queste osservazioni sono motivate dalla necessità di precisare le caratteristiche termiche del materiale in modo da prevedere il suo comportamento quando fosse utilizzato in apparecchiature utilizzabili in una gamma abbastanza ampia di condizioni ambientali.
Le osservazioni sperimentali, ragionevolmente, sono organizzate in modo da riguardare condizioni semplificate rispetto a quelle prospettate per l'utilizzo delle apparecchiature che si vorrebbero produrre industrialmente. Organizzazione delle osservazioni e prospettive di utilizzo applicativo fanno riferimento a un modello teorico del comportamento termico dei materiali del genere al quale appartiene il nuovo; questo modello teorico non viene considerato definitivo, ma soggetto a miglioramenti, ovvero soggetto al fallibilismo.

Tutte queste considerazioni dicono che si sta effettuando un processo conoscitivo secondo i principi del metodo scientifico e che rispetta tutte le caratteristiche di sviluppo della conoscenza richieste dal pragmatismo di base (v. per esempio `Encyclopedia of Philosophy - Pragmatism (we)`).

Altro tipo di processo conoscitivo che conviene tenere presente lo cerchiamo nella linguistica computazionale e riguarda l'analisi di un corpus di testi volto a individuare statistiche di termini e loro correlazioni.
Due agenti che si occupano di un processo conoscitivo di questo genere devono potersi scambiare informazioni condivisibili, ossia tali da presentare significati coerenti.
Questa esigenza è anche a maggior ragione sentita quando si scambiano informazioni due o più squadre di opertori che si occupano di fenomeni complessi e multiformi che richiedono risorse mentali e sperimentali impegnative; si pensi alle previsioni meteorologiche o a studi di medicina che richiedono calcoli statistici su grandi quantità di dati che a loro volta provengono da osservazioni effettuate su larga scala.

T92:**a.04** Le esperienze fenomenologiche dicono che gli operatori di molti processi conoscitivi devono potersi servire di più tipi di canali. In altre parole l'esperienza dice che le informazioni riguardanti i processi conoscitivi razionalizzabili devono potersi veicolare attraverso oggetti concreti, segni, di diversa natura e devono poter assumere forme diverse.

Le informazioni nella fisica vanno rappresentate da grandezze, ovvero da numeri razionali esprimenti rapporti tra risultati di misurazioni e corrispondenti unità di misura. Nella linguistica computazionale le informazioni riguardano soprattutto parole e locuzioni associate a numeri (in origine interi naturali) aventi valenze statistiche.
In altri campi di indagine razionalizzabili conviene che le informazioni siano espresse mediante complessi numerici (tabelle, serie storiche, ...), figure, suoni, formule, grafi, ... Queste informazioni è opportuno possano essere veicolate attraverso svariati generi di mezzi di comunicazione.
Come mezzo di comunicazione basilare scegliamo la comunicazione di scritture, di sequenze di segni.

T92:**a.05** Due agenti per comunicare scritture devono servirsi di più tipi di segni caratterizzati da forme diverse mutuamente distinguibili che chiamiamo caratteri.

Le comunicazioni tra agenti sono costituite da processi elementari di trasmissione di messaggi per ciascuno dei quali si distingue un mittente e un ricevente. Processi più compositi possono consistere in scambi di messaggi bidirezionali o possono riguardare più agenti intercomunicanti.

Ogni messaggio consiste nella trasmissione di una sequenza di segni elementari da un mittente a un ricevente.
I segni trasmessi, che chiamiamo preferibilmente **caratteri**, devono essere stati preliminarmente certificati attraverso la assegnazione di ciascuno di essi a un tipo distinguibile fisicamente da tutti gli agenti che possono farne uso per comunicare tra di loro.
Più operativamente si chiede che questi agenti siano in grado di decidere se due istanze di carattere appartengono allo stesso tipo o a tipi diversi.
Gli agenti di ciascun tipo di carattere certificato e comunicabile possono disporre di più istanze, ossia di più repliche materiali.
Queste repliche nell'ambito del mittente sono completamente distinguibili, ma che nell'ambito del ricevente sono distinguibili solo come occorrenze diverse entro un messaggio o entro messaggi ricevuti in momenti diversi.

Gli agenti impegnati in una problematica, realisticamente, possono servirsi solo di caratteri assegnati a una gamma finita di tipi.
Tuttavia nel corso di una serie di attività si consente che si possano introdurre nuovi tipi di caratteri che si rendono necessari.

Questi caratteri nell'attuale discorso li denotiamo con a_1, a_2, ...,a_m oppure con a, b, ... g.
Questa gamma di segni la chiamiamo alfabeto della comunicazione tra agenti.
Affiancando questi segni in sequenze nelle quali possono occorrere delle repliche si ottengono quelle che chiamiamo stringhe.
Sono stringhe $abab$, $abbcccdcccbba$ ed $a_1a_2a_1a_3a_1a_4$.

T92:**a.06** Per poter eprimere considerazioni con validità generale risulta necessario trattare con nuovi segni stringhe generiche, cioè servirsi di nuovi segni per denotare stringhe che si lasciano parzialmente indefinite in quanto potrebbero assumere diverse forme particolari.
I nuovi caratteri fanno parte di un alfabeto da certificare che diciamo alfabeto per considerazioni generali.
Gli alfabeti per la comunicazione tra agenti e quelli per considerazioni generali sono definiti in relazione a un problema o a una problematica. Può accadere che si ponga un problema che richiede di trattare

come caratteri di comunicazione dei segni che per un problema precedente più circoscritto avevano il ruolo di caratteri per considerazioni generali.

Gli accennati caratteri per considerazioni generali vengono utilizzati anche per rendere l'esposizione più concisa: molte entità la cui rappresentazione richiede notazioni composite conviene siano identificate da segni semplici, cosa che permette di trattare notazioni meno eleborate.
Due esempi riguardano l'alfabeto della comunicazione e la stringa generica: per esse useremo rispettivamente il segno $\mathfrak{A}$ e il segno w.
Per denotare una stringa generica sull'alfabeto costituito da a_1, a_2, ...,a_m useremo notazioni come $a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_k}$ intendendo che ciascuna delle notazioni i_1, i_2, ...,i_k rappresenti uno degli indici 1, 2 ...,m che distinguono i caratteri dell'alfabeto.

Vediamo dunque due agenti o esecutori, che identifichiamo con E_1 ed E_2, i quali si scambiano attraverso una linea di trasmissione che li pone in collegamento delle stringhe su a.
In ciascuna delle azioni di comunicazione i due esecutori si possono scambiano i ruoli del mittente e del ricevente.
Un processo di comunicazione reale può comportare manovre fisiche piuttosto complesse, atte a rendere il processo efficiente ed affidabile; qui vogliamo essere semplici ed essenziali e quindi immaginiamo che i soli segni a_{i_j} vengano trasferiti da E_1 ad E_2 mantenendosi nell'ordine stabilito all'avvio. Sempre per semplicità, ricordando la tradizionale telegrafia o l'uso di nastri perforati risalente a Jaquart ed agli organetti che diffondevano musica nelle strade, supponiamo che un messaggio da inviare sia disponibile per E_1 su un nastro e dopo la ricezione sia disponibile per E_2 su un uguale nastro.

T92:**a.07** Le procedure che consentono di risolvere istanze di problema si possono ricondurre a trasformazioni di stringhe di caratteri per la comunicazione.
Queste trasformazioni vengono effettuate sulla base di sistemi di regole o di istruzioni che chiamiamo algoritmi.
Anche queste regole sono esprimibili mediante stringhe nelle quali occorrono segni per la intercomunicazione e segni che riguardano manipolazioni dei segni suddetti e scelte riconducibili alla decisione se due di tali segni sono dello stesso tipo o di due tipi diversi. Nelle stringhe delle istruzione devono comparire altri segni esprimenti le manovre per le manipolazioni dei segni per la intercomunicazione.

Con i segni della intercomunicazione si devono poter esprimere i dati delle istanze dei problemi che si intendono risolvere e i conseguenti risultati.
Questi dati sono definiti nell'ambito di un modello che sta alla base di un problema e sono quindi asociati ad oggetti e processi che fanno parte del campo applicativo cui si rivolge il problema.

Le stringhe che sono manipolate per risolvere i problemi possono essere collegate a una vastissima e in continua espansione gamma di oggetti di natura materiale o mentale.

In effetti si trova che mediante gli algoritmi si possono cercare di risolvere estese gamme di problemi.

T92:b. osservazione delle attività concernenti la matematica

T92:**b.01** Le attività della matematica che si possono osservare riguardano processi che si svolgono nel finito.

La cosa è ben evidente per le attività di calcolo specifiche, siano esse richieste da singole circoscritte esigenze applicative oppure riguardanti sperimentazioni finalizzate al chiarimento di fatti matematici come il comportamento delle soluzioni di un'equazione differenziale o l'individuazione di un ulteriore componente di una successione di numeri speciali, per esempio un nuovo numero di Mersenne.

La gamma delle accennate sperimentazioni va da quelle che sono eseguite manualmente da una persona a quelle che che sono effettuate da complesse apparecchiature di calcolo automatico dotate di sistemi software sviluppati da attività che si misurano in migliaia di anni-uomo.

Per tutte le accennate attività di calcolo vengono utilizzate registrazioni di dati finite (fogli di carta o dispositivi elettromagnetici); si utilizzano rappresentazioni finite delle entità in gioco (numeri approssimati, grafi, configurazioni discrete, figure digitalizzate,...).
Ogni esecuzione di un calcolo consiste in una sequenza finita di manovre che riguardano operazioni eseguite manualmente o mentalmente da persomne, oppure eseguite da dispositivi elettronici descrivibili finitamente. Queste manovre sono governate da algoritmi che possono consistere in sistemi di istruzioni imperative scritte in un linguaggio naturale e trasmesse ad operatori in carne ed ossa, oppure in testi di programma redatti in un linguaggio artificiale leggibili da un computer; in ogni caso gli algoritmi, evidentemente, sono formulati finitamente.

T92:**b.02** Altre attività sistematiche afferenti alla matematica sono quelle della didattica.
I temi della didattica della matematica sono molto sfaccettati e si esprimono con argomentazioni che sono influenzate da studi di natura psicologica sull'apprendimento e sull'insegnamento, analisi dei processi cognitivi, conoscenze di etnomatematica, analisi del linguaggio matematico delle sue semplificazioni e della sua comunicazione, collegamenti con altre discipline (fisica, tecnologia, storia, ...) strategie educative, valutazioni di studenti e docenti e molto altro.

Qui rinunciamo a toccare queste tematiche tanto complesse e ci limitiamo a osservare che le comunicazioni riguardanti l'insegnamento della matematica sono rappresentabili con testi (scritti o sonori) evidentemente finiti (anche se in continua espansione).

T92:**b.03** Attività matematiche più difficoltose da osservare sono quelle che riguardano la ricerca matematica. Sono disponibili vari testi che toccano questo tema e alcuni di essi giungono anche a toccare temi di psicologia della scoperta.
Si tratta comunque di testi contenenti vari elementi ipotetici

T92:c. introduzione dell'infinito discreto

T92:**c.01** Una prima comparsa dell'infinito si ha quando si enunnciano fatti riguardanti entità singolarmente esprimibili nel finito, (come numeri interi, numeri razionali, stringhe, o digrafi) ma presentati come validi per tutti gli elementi di questi tipi.
Vari esempi si trovano tra i fatti concernenti le coppie di numeri interi; un esempio riguardante le stringhe sopra un alfabeto finito è l'affermazione che due stringhe non mute commutano sse sono entrambe esprimibili come potenze di una loro sottostringa.
Per tali risultati si chiede la validità per tutte le coppie di interi o per tutte le coppie di stringhe.
Ciascuno di questi enunciati sottintende una **esigenza di illimitatezza**. Questa esigenza la si può ricondurre alla opportunità di formulare concisamente risultati di una certa generalità

T92:**c.02** Si presenta poi l'opportunità di consentire anche la illimitatezza delle risorse utilizzabile nelle procedure. Risulta assai vantaggioso permettere di parlare di procedimenti che possono servirsi di rappresentazioni illimitatamente precisabili di entità singolarmente definibili nel finito come scritture decimali di numeri algebrici non razionali. È anche vantaggioso presentare macchine che possono procedere nei calcoli attraverso un illimitato di passi, ovvero servedosi illimitatamente della risorsa tempo (discreto). Infine è vantaggioso presentare macchine che possono basarsi su programmi illimitatamente articolati.

T92:**c.03** Anche grazie alle considerazioni presentate nella prossima sezione risulta decisamente opportuno introdurre qualche forma di infinito.

Il primo passo lo vediamo consolidarsi con una congettura di illimitatezza per la estensione delle stringhe finite e in particolare per le scritture dei numeri interi in qualche base B. Questo equivale alla illimitatezza di tutte le entità definibili con costruzioni dirette; questa comporta la possibilità di operare con le rappresentazioni specifiche e generiche di queste entità e di giungere a enunciati delle loro proprietà a un qualche livello di generalità. In effetti ciascuna di queste entità (accettata la congettura "tutte le entità direttamente costruibili") si possono rappresentare con stringhe , oppure anche con interi naturali (grazie alle possibili Goedelizzazioni).

Per segnalare una successione di interi naturali che cresce illimitatamente risulta conveniente disporre di una entità che denotiamo con la scrittura $+\infty$. Molti enunciati evidentemente si semplificano. Ad essa si affiancano l'entità opposta che si denota con $-\infty$ e la più generica scritta ∞ e per queste entità risulta utile estendere parzialmente le operazioni aritmetiche.

T92:**c.04** Un passo ulteriore sta nella congettura della possibilità di descrivere e trattare processi che sono in grado di evolversi illimitatamente servendosi, oltre che della risorsa consentita illimitata "numero di passi eseguibili", di risorse illimitate di memorie (in modo da potere trattare moltitudini illimitate di stringhe che codificano entità discrete definite da costruzioni dirette come numeri interi, digrafi e funzioni su interi e/o stringhe).
Nella realtà non siamo in grado, né lo saremo mai, di osservare un processo che produce interi, stringhe o altre entità simili in numero illimitatamente alto.
A questo proposito conviene osservare che gli elaboratori di procedure vivono nel tempo: una osservazione di un processo illimitato dovrebbe avere durata illimitata e solo successivamente se ne potrebbero utilizzare i risultati, cosa mai vista.

T92:**c.05** Per segnalare valori di funzione sugli interi progressivamente crescente in senso stretto, in accordo con quanto verificato fino al superamento di un certo valore e che, se le risorse richieste fossero illimitatamente disponibili non si avrebbero comportamenti diversi per le fasi elaborative più elevate in quanto le condizioni operative non cambiano.

Per l'ipotesi della illimitatezza delle risorse operative conviene riferirsi a macchine finitamente costruibili. Per questa risultano vantaggiose le macchine di Turing.
Il modello iniziale, volendo favorire la semplicità di presentazione dei dettagli, si chiede sia finalizzato solo all'ampliamento di un nastro di uscita contenente codifiche unadiche di interi positivi.
Per avere esposizioni più leggibili e memorizzabili occorre passare alla richiesta di una macchina in grado di generare stringhe via via crescenti, per esempio secondo un ordine lessicografico, per esempio in una notazione binaria. L'equivalenza delle portate di questa macchina e del modello iniziale non presenta difficoltà. Questa equivalenza si ottiene anche dimostrando la possibilità di simulare con la macchina iniziale la seconda macchina.
Equivalenti anche le macchine in grado di trattare interi in una codifica in una base $B = 2, 3, 4, ...$

T92:**c.06** In effetti le classi di equivalenza rispetto agli effetti delle macchine di Turing sono molto estese e variegate. Per dimostrare che due macchine di Turing T_1 e T_2 sono equivalenti quando una delle due non è evidentemente meno ricca di prestazioni dell'altra, vanno individuati due meccanismi di simulazione: uno che permette a T_1 di simulare T_2 e l'altro che consente che T_2 simuli T_1.
In tal modo si dimostra che una macchina di Turing con un solo nastro di lavoro equivale a macchine con più nastri; questi possono essere ridotti a una sola casella o all'opposto avere carattere bidimensionale. Si possono quindi avere sottomacchine che rendono la macchina principale estremamente versatile.

Si trova anche che una macchina di Turing può essere dotata di più sottomacchine, eventualmente specializzate e algoritmiche, cioè in grado di risolvere un problema relativamente circoscritto in un numero finito di passi.
Queste macchine si avvicinano quindi ai computers odierni, qualora si ammetta che questi possono operare per tempi illimitati e possano essere dotati di memorie illimitatamente estendibili in relazione delle necessità che si rendono evidenti nel corso di una loro evoluzione.

Questi successi delle macchine di Turing inducono a prospettare la possibilità di individuare una macchina di Turing universale, cioè una macchina in grado di simulare ogni altra macchina.
In effetti Turing ha dimostrata questa possibilità.

T92:**c.07** L'esame delle prestazioni di queste macchine e dei molti meccanismi che si sono trovati loro equivalenti ha consentito di constatare che ogni elaborazione effettiva (e quindi finitaria) che si era constatato attuabile può essere eseguita da una macchina di Turing. Tra queste elaborazioni vi sono anche quelle finalizzate alle elaborazioni simboliche di ogni genere, purché riguardanti entità definite in modo sufficientemente chiaro.
Questa caratterizzazione espressa in termini di auspicio può essere chiarita servendosi ancora di macchine di Turing o equivalenti. Un genere di entità $\mathcal{E}$ va considerato definito in modo sufficientemente chiaro se è disponibile un alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ tale che ogni entità del genere $\mathcal{E}$ può essere descritta da una stringa sul detto alfabeto e se si dispone di un algoritmo $\mathcal{R}$ in grado di stabilire se una qualsiasi stringa sul nostro alfabeto esprime o meno una entità del genere $\mathcal{E}$.
Segue la possibilità di disporre una macchina in grado di procedere alla generazione progressiva delle entità di $\mathcal{E}$; tale macchina consente un buon controllo delle entità del genere in esame.

Si trova inoltre relativamente facile adattare una macchina finalizzata alla soluzione di un problema in una macchina in grado di risolvere un secondo problema riconducibile algoritmicamente al primo.

Queste considerazioni e la conoscenza della macchina di Turing universale hanno indotto a formulare la cosiddetta congettura di Church e Turing: secondo essa ogni elaborazione sufficientemente ben formulata è eseguibile da una macchina di Turing o da un meccanismo equivalente.

T92:**c.08** La macchina di Turing universale ha consentito anche di individuare problemi che risulta impossibile risolvere.
Si è posto il **problema dell'arresto per le macchine di Turing**: esiste un algoritmo in grado di decidere per ciascuna macchina di Turing se con determinati dati iniziali si arresterà o meno?
Per rispondere basta porre il problema dell'arresto alla sola macchina universale in quanto può simulare ogni altra macchina ed anche se stessa. Turing stesso ha dimostrato in modo relativamente evidente che questo è impossibile.

Questo risultato negativo si è aggiunto ai teoremi di incompletezza di Goedel per stabilire dei limiti alla portata della matematica.

La indecidibilità del problema dell'arresto comportato che non è decidibile in generale il problema di stabilire se una procedura è o meno algoritmica. Da questo è seguita la individuazione di molti altri problemi indecidibili, espressi soprattutto come problemi concernenti linguaggi formali.

Emerge quindi la opportunità di compromessi: si tratta di abbassare la generalità di certi problemi per renderli decidibili e di fare riferimento a procedure riguardanti decisioni che effettuano i loro esami fornendo solo indicazioni favorevoli o sfavorevoli ad una soluzione e quindi ispirano scelte empiriche.
Risultano ben distinti i linguaggi ricorsivi dai rimanenti linguaggi ricorsivamente enumerabili.

T92:d. metodo assiomatico

T92:**d.01** A partire, all'incirca, dall'inizio del secolo XIX si è riscontrato un progressivo allargamento delle conoscenze matematiche e dell'approfondimento dei suoi temi. Inoltre nulla fa pensare che questo progredire debba venir meno nei prossimi anni; piuttosto il crescere della richiesta di matematica da parte delle applicazioni e gli stimoli che le provengono dall'utilizzo dei computers e anche dalla fisica rafforzano la fiducia in futuri ulteriori avanzamenti.

La tendenza alla generalizzazione e alla astrazione risultano praticamente indispensabili per realizzare le economie di pensiero e le sintesi dei risultati che rendono possibili il mantenimento e la rapidità degli avanzamenti sopra accennati.

Un altro fenomeno rilevante riguarda l'opportunità pratica di sostituire molti modelli discreti con modelli continui quasi equivalenti al fine di rendere più fattibili i calcoli collegati. In particolare si possono ricordare la sostituzione di distribuzioni statistiche discrete all'origine con distribuzioni continue e le espressioni asintotiche per $n!$ e per simili funzioni discrete: le espressioni sul continuo risultano molto più maneggevoli e conducono a sviluppi più avanzati e approfonditi grazie alla mole di risultati e di tecniche che sono accumulati a partire dal XVIII secolo.
Trattando vari modelli continui risulta possibile giungere, oggi anche attraverso elaborazioni simboliche effettuabili mediante sistemi automatici (si parla di CAS, Computer Algebra Systems) ad espressioni che si servono di funzioni continue.
Queste spesso costituiscono la base di calcoli approssimati eseguibili facilmente ed efficientemente con procedure automatiche i quali consentono di giungere a soluzioni praticamente soddisfacenti di problemi specifici posti dalle applicazioni.

T92:**d.02** Richiamo delle proposte di formalismo, logicismo e intuizionismo

T92:**d.03** Convenzionalismo, platonismo e psicologismo.

T92:**d.04** Costruttivismo, finitismo, ultrafinitismo, finzionalismo e quasiempirismo.

T92:**d.05** Riteniamo opportuno presentare anche alcune considerazione sul piano pratico riguardanti il ruolo che stanno avendo gli odierni strumenti informativi resi possibili e diffusi dalle tecnologie elettronico-telematiche nei confronti dello sviluppo delle attività matematiche e, di conseguenza, sulla fiducia che le appoggia nonostante la caduta delle certezze.

Un primo settore influenzato è, evidentemente, quello dei calcoli effettivi. Tutti ora hanno accesso a strumenti efficienti per il calcolo numerico, per la produzione di grafici e per il calcolo simbolico. Moltissime apparecchiature, dalle lavatrici alle sonde spaziali, hanno incorporati strumenti di calcolo specializzati via via più raffinati. Infine per affrontare i problemi più impegnativi vengono via via proposti e realizzati strumenti computazionali, i cosiddetti supercomputers, sempre più poderosi; molti di questi sono i gangli di sistemi di portata planetaria per fini quali il controllo della meteorologia e la utilizzazione a distanza degli osservatori astronomici.

Questo ha consentito in particolare lo sviluppo di una matematica sperimentale che consente di esaminare empiricamente equazioni e strutture formali al fine di ampliare la conoscenza di entità o problemi recentemente proposti e di controllare congetture per rafforzarle con esempi parziali o per smentirle con controesempi. I vari strumenti computazionali sono ampiamente usati anche nelle discipline che si servono di modelli matematici ed i loro risultati talora sono dei notevoli stimoli alle indagini dei matematici professionisti.

T92:**d.06** Un altro settore influenzato riguarda le attività di pubblicazione: oggi la maggioranza dei cultori primari e secondari della matematica possono produrre personalmente dei documenti contenenti formule e grafici servendosi di prodotti software liberi.
In particolare ha grande importanza il sistema di typesetting TEX dovuto a Donald Knuth, insieme al derivato LaTeX sviluppato da Leslie Lamport.

Questi sistemi, ormai standard de facto, hanno ridotto tempi e costi di redazione ed hanno favorito la condivisione di simboli e di notazioni e la loro unificazione, almeno nell'ambito di singole aree.

Forte impulso alla comunicazione tempestiva dei risultati di una disciplina ad alto livello di obiettività e di rigore come la matematica viene dato dalla rete Internet. Molte ricerche vengono svolte con ridotto consumo di risorse da piccoli gruppi di ricercatori che operano in località lontane e che spesso non si sono mai viste di persona.
La rete Internet ha inoltre consentito lo sviluppo di riviste elettroniche, di pagine di ricercatori ricche di preprints, di siti divulgativi di alto livello e di banche dati internazionali riguardanti soprattutto recensioni di pubblicazioni scientifiche.

Si è quindi costituita una infrastruttura per la condivisione della matematica in posizione privilegiata nell'ambito della più ampia infrastruttura per il complesso delle discipline scientifiche.

Un ultimo accenno va fatto all'appoggio che possono avere gli strumenti di documentazione per i matematici anziani colpiti da carenze di memoria e di capacità di concentrazione.

`Testi dell'esposizione in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`