Capitolo T80: inquadramento pragmatistico della matematica

Contenuti delle sezioni

- a. osservazione delle attività concernenti la matematica p.2
- b. introduzione dell'infinito discreto p.3
- c. metodo assiomatico p.6

7 pagine

T80:0.01 In queste pagine si descrive l'inquadramento della matematica al quale fanno riferimento le scelte di questa esposizione.

Il presente capitolo non pretende di essere approfondito in effetti esso si basa su letture di testi divulgativi, non su letture di contributi originali. Esso in particolare riprende temi contenuti nelle pagine di Wikipedia sopra la filosofia della matematica (*Filosofia della matematica* (*wi*), *Philosophy of Mathematics* (*we*) e pagine connesse) e contenute nelle pagine di testi sui fondamenti e sulle caratteristiche generali della matematica: per esempio i testi citati in Xpu di Gabriele Lolli e Willard Van Orman Quine.

Il presente discorso non cerca neppure di essere completo. Esso cerca di dare giustificazione a una visione della matematica considerata innanzi tutto come scienza delle attività di calcolo. Sotto le argomentazioni presentate si percepisce un atteggiamento favorevole al pragmatismo.

Questa posizione porta a iniziare dalla matematica del finito e dagli algoritmi, quindi a introdurre un semplice linguaggio di programmazione, poi a trattare l'infinito potenziale insieme alle macchine di Turing e similari. Successivamente l'emergere dell'opportunità che emerge dalle attività di organizzazione dei risultati ottenuti con l'indagine matematica, insieme alla ricchezza dei successi riscontrabili nella tradizione, portano a dare importanza, anche pratica, alle generalizzazioni, alle conseguenti astrazioni, al metodo assiomatico e conseguentemente agli strumenti della logica (matematica).

Questi argomenti di sapore teorico sono presentati come essenzialmente indispensabili per la pratica della organizzazione dei risultati della matematica e della loro messa a disposizione dei ricercatori delle sue molteplici aree e dei cultori delle applicazioni. Queste considerazioni ci si sforza di renderle condivisibili anche ai non pochi scettici sulla opportunità delle astrazioni, oggi assai spinte, e sulla conseguente "incomprensibilità" del linguaggio e delle notazioni delle pubblicazioni avanzate.

Nel far questo pensiamo serva insistere sulla necessità di raggiungere un compromesso tra rigore e unitarietà delle presentazioni da un lato e necessità dell'uso di linguaggi settoriali e semplificati rispetto a quelli delle formalizzazioni onnivalenti della logica; se non si derogasse da queste si sarebbe costretti a esposizioni prolisse e pochissimo leggibili.

T80:a. osservazione delle attività concernenti la matematica

T80:a.01 Le attività della matematica che si possono osservare riguardano processi che si svolgono nel finito.

La cosa è ben evidente per le attività di calcolo specifiche, siano esse richieste da particolari esigenze applicative oppure riguardanti sperimentazioni finalizzate al chiarimento di fenomeni matematici come il comportamento delle soluzioni di un'equazione o la ricerca di un ulteriore numero speciale sia per quelle effettuate manualmente, sia per quelle che si servono di dispositivi di calcolo automatico.

Si utilizzano registrazioni di dati finite (fogli di carta o dispositivi elettromagnetici); si utilizzano rappresentazioni finite delle entità in gioco (numeri approssimati, grafi, configurazioni discrete, figure digitalizzate,...); si effettua una sequenza di manovre finite (eseguite manualmente o mentalmente, oppure eseguite da una apparecchiatura elettronica), si fa riferimento ad algoritmi definiti finitamente o costituiti dalle linee di un programma per il computer).

T80:a.02 Altre attività della matematica che si svolgono nel finito sono quelle della didattica.

I temi della didattica della matematica sono molto sfaccettati e si esprimono con argomenti che riguardano questioni psicologiche dell'apprendimento e l'insegnamento, i processi cognitivi, gli studi di etnomatematica, il linguaggio matematico con le sue semplificazioni e la comunicazione, le strategie educative, le valutazioni di studenti e docenti e molto altro.

Qui rinunciamo a toccare queste tematiche tanto complesse e ci limitiamo a osservare che le comunicazioni riguardanti l'insegnamento della matematica sono rappresentabili con testi (scritti o sonori) evidentemente finiti (anche se in continua espansione).

T80:a.03 Attività matematiche più difficili da osservare sono quelle che riguardano la ricerca matematica. Sono disponibili vari testi che toccano questo tema e alcuni di essi giungono anche a toccare temi di psicologia della scoperta.

Si tratta comunque di testi contenenti vari elementi ipotetici

T80:a.04

T80:b. introduzione dell'infinito discreto

T80:b.01 Una prima comparsa dell'infinito si ha quando si enunciano fatti riguardanti entità singolarmente esprimibili nel finito, (come numeri interi, numeri razionali, stringhe, o digrafi) ma presentati come validi per tutti gli elementi di questi tipi.

Vari esempi si trovano tra i fatti concernenti le coppie di numeri interi; un esempio riguardante le stringhe sopra un alfabeto finito è l'affermazione che due stringhe non mute commutano sse sono entrambe esprimibili come potenze di una loro sottostringa.

Per tali risultati si chiede la validità per tutte le coppie di interi o per tutte le coppie di stringhe.

Ciascuno di questi enunciati sottintende una **esigenza di illimitatezza**. Questa esigenza la si può ricondurre alla opportunità di formulare concisamente risultati di una certa generalità

T80:b.02 Si presenta poi l'opportunità di consentire anche la illimitatezza delle risorse utilizzabile nelle procedure. Risulta assai vantaggioso permettere di parlare di procedimenti che possono servirsi di rappresentazioni illimitatamente precisabili di entità singolarmente definibili nel finito come scritture decimali di numeri algebrici non razionali. È anche vantaggioso presentare macchine che possono procedere nei calcoli attraverso un illimitato di passi, ovvero servendosi illimitatamente della risorsa tempo (discreto). Infine è vantaggioso presentare macchine che possono basarsi su programmi illimitatamente articolati.

T80:b.03 Anche grazie alle considerazioni presentate nella prossima sezione risulta decisamente opportuno introdurre qualche forma di infinito.

Il primo passo lo vediamo consolidarsi con una congettura di illimitatezza per la estensione delle stringhe finite e in particolare per le scritture dei numeri interi in qualche base B . Questo equivale alla illimitatezza di tutte le entità definibili con costruzioni dirette; questa comporta la possibilità di operare con le rappresentazioni specifiche e generiche di queste entità e di giungere a enunciati delle loro proprietà a un qualche livello di generalità. In effetti ciascuna di queste entità (accettata la congettura "tutte le entità direttamente costruibili") si possono rappresentare con stringhe, oppure anche con interi naturali (grazie alle possibili Gödelizzazioni).

Per segnalare una successione di interi naturali che cresce illimitatamente risulta conveniente disporre di una entità che denotiamo con la scrittura $+\infty$. Molti enunciati evidentemente si semplificano. Ad essa si affiancano l'entità opposta che si denota con $-\infty$ e la più generica scritta ∞ e per queste entità risulta utile estendere parzialmente le operazioni aritmetiche.

T80:b.04 Un passo ulteriore sta nella congettura della possibilità di descrivere e trattare processi che sono in grado di evolversi illimitatamente servendosi, oltre che della risorsa consentita illimitata "numero di passi eseguibili", di risorse illimitate di memorie (in modo da potere trattare moltitudini illimitate di stringhe che codificano entità discrete definite da costruzioni dirette come numeri interi, digrafi e funzioni su interi e/o stringhe).

Nella realtà non siamo in grado, né lo saremo mai, di osservare un processo che produce interi, stringhe o altre entità simili in numero illimitatamente alto.

A questo proposito conviene osservare che gli elaboratori di procedure vivono nel tempo: una osservazione di un processo illimitato dovrebbe avere durata illimitata e solo successivamente se ne potrebbero utilizzare i risultati, cosa mai vista.

T80:b.05 Per segnalare valori di funzione sugli interi progressivamente crescente in senso stretto, in accordo con quanto verificato fino al superamento di un certo valore e che, se le risorse richieste fossero

illimitatamente disponibili non si avrebbero comportamenti diversi per le fasi elaborative più elevate in quanto le condizioni operative non cambiano.

Per l'ipotesi della illimitatezza delle risorse operative conviene riferirsi a macchine finitamente costruibili. Per questa risultano vantaggiose le macchine di Turing.

Il modello iniziale, volendo favorire la semplicità di presentazione dei dettagli, si chiede sia finalizzato solo all'ampliamento di un nastro di uscita contenente codifiche unadiche di interi positivi.

Per avere esposizioni più leggibili e memorizzabili occorre passare alla richiesta di una macchina in grado di generare stringhe via via crescenti, per esempio secondo un ordine lessicografico, per esempio in una notazione binaria. L'equivalenza delle portate di questa macchina e del modello iniziale non presenta difficoltà. Questa equivalenza si ottiene anche dimostrando la possibilità di simulare con la macchina iniziale la seconda macchina.

Equivalenti anche le macchine in grado di trattare interi in una codifica in una base $B = 2, 3, 4, \dots$.

T80:b.06 In effetti le classi di equivalenza rispetto agli effetti delle macchine di Turing sono molto estese e variegate. Per dimostrare che due macchine di Turing T_1 e T_2 sono equivalenti quando una delle due non è evidentemente meno ricca di prestazioni dell'altra, vanno individuati due meccanismi di simulazione: uno che permette a T_1 di simulare T_2 e l'altro che consente che T_2 simuli T_1 .

In tal modo si dimostra che una macchina di Turing con un solo nastro di lavoro equivale a macchine con più nastri; questi possono essere ridotti a una sola casella o all'opposto avere carattere bidimensionale. Si possono quindi avere sottomacchine che rendono la macchina principale estremamente versatile.

Si trova anche che una macchina di Turing può essere dotata di più sottomacchine, eventualmente specializzate e algoritmiche, cioè in grado di risolvere un problema relativamente circoscritto in un numero finito di passi.

Queste macchine si avvicinano quindi ai computers odierni, qualora si ammetta che questi possono operare per tempi illimitati e possano essere dotati di memorie illimitatamente estendibili in relazione delle necessità che si rendono evidenti nel corso di una loro evoluzione.

Questi successi delle macchine di Turing inducono a prospettare la possibilità di individuare una macchina di Turing universale, cioè una macchina in grado di simulare ogni altra macchina. In effetti Turing ha dimostrata questa possibilità.

T80:b.07 L'esame delle prestazioni di queste macchine e dei molti meccanismi che si sono trovati loro equivalenti ha consentito di constatare che ogni elaborazione effettiva (e quindi finitaria) che si era constatato attuabile può essere eseguita da una macchina di Turing. Tra queste elaborazioni vi sono anche quelle finalizzate alle elaborazioni simboliche di ogni genere, purché riguardanti entità definite in modo sufficientemente chiaro.

Questa caratterizzazione espressa in termini di auspicio può essere chiarita servendosi ancora di macchine di Turing o equivalenti. Un genere di entità $\mathcal{E}$ va considerato definito in modo sufficientemente chiaro se è disponibile un alfabeto $\mathcal{A}_{\mathcal{E}}$ tale che ogni entità del genere $\mathcal{E}$ può essere descritta da una stringa sul detto alfabeto e se si dispone di un algoritmo $\mathcal{R}$ in grado di stabilire se una qualsiasi stringa sul nostro alfabeto esprime o meno una entità del genere $\mathcal{E}$.

Segue la possibilità di disporre una macchina in grado di procedere alla generazione progressiva delle entità di $\mathcal{E}$; tale macchina consente un buon controllo delle entità del genere in esame.

Si trova inoltre relativamente facile adattare una macchina finalizzata alla soluzione di un problema in una macchina in grado di risolvere un secondo problema riconducibile al primo.

Queste considerazioni e la conoscenza della macchina di Turing universale hanno indotto a formulare la cosiddetta congettura di Church e Turing: secondo essa ogni elaborazione sufficientemente ben

formulata è eseguibile da una macchina di Turing o da un meccanismo equivalente.

T80:b.08 La macchina di Turing universale ha consentito anche di individuare problemi che risulta impossibile risolvere.

Si è posto il **problema dell'arresto per le macchine di Turing**: esiste un algoritmo in grado di decidere per ciascuna macchina di Turing se con determinati dati iniziali si arresterà o meno?

Per rispondere basta porre il problema dell'arresto alla sola macchina universale in quanto può simulare ogni altra macchina ed anche se stessa. Turing stesso ha dimostrato in modo relativamente evidente che questo è impossibile.

Questo risultato negativo si è aggiunto ai teoremi di incompletezza di Gödel per stabilire dei limiti alla portata della matematica.

La indecidibilità del problema dell'arresto comportato che non è decidibile in generale il problema di stabilire se una procedura è o meno algoritmica. Da questo è seguita la individuazione di molti altri problemi indecidibili, espressi soprattutto come problemi concernenti linguaggi formali.

Emerge quindi la opportunità di compromessi: si tratta di abbassare la generalità di certi problemi per renderli decidibili e di fare riferimento a procedure riguardanti decisioni che effettuano i loro esami fornendo solo indicazioni favorevoli o sfavorevoli ad una soluzione e quindi ispirano scelte empiriche.

Risultano ben distinti i linguaggi ricorsivi dai rimanenti linguaggi ricorsivamente enumerabili.

T80:c. metodo assiomatico

T80:c.01 A partire, all'incirca, dall'inizio del secolo XIX si è riscontrato un progressivo allargamento delle conoscenze matematiche e dell'approfondimento dei suoi temi. Inoltre nulla fa pensare che questo progredire debba venir meno nei prossimi anni; piuttosto il crescere della richiesta di matematica da parte delle applicazioni e gli stimoli che le provengono dall'utilizzo dei computers e anche dalla fisica rafforzano la fiducia in futuri ulteriori avanzamenti.

La tendenza alla generalizzazione e alla astrazione risultano praticamente indispensabili per realizzare le economie di pensiero e le sintesi dei risultati che rendono possibili il mantenimento e la rapidità degli avanzamenti sopra accennati.

Un altro fenomeno rilevante riguarda l'opportunità pratica di sostituire molti modelli discreti con modelli continui quasi equivalenti al fine di rendere più fattibili i calcoli collegati. In particolare si possono ricordare la sostituzione di distribuzioni statistiche discrete all'origine con distribuzioni continue e le espressioni asintotiche per $n!$ e per simili funzioni discrete: le espressioni sul continuo risultano molto più maneggevoli e conducono a sviluppi più avanzati e approfonditi grazie alla mole di risultati e di tecniche che sono accumulati a partire dal XVIII secolo. Trattando vari modelli continui risulta possibile giungere, oggi anche attraverso elaborazioni simboliche effettuabili mediante sistemi automatici (si parla di CAS, Computer Algebra Systems) ad espressioni che si servono di funzioni continue. Queste spesso costituiscono la base di calcoli approssimati eseguibili facilmente ed efficientemente con procedure automatiche i quali consentono di giungere a soluzioni praticamente soddisfacenti di problemi specifici posti dalle applicazioni.

T80:c.02 Richiamo delle proposte di formalismo, logicismo e intuizionismo

T80:c.03 Convenzionalismo, platonismo e psicologismo.

T80:c.04 Costruttivismo, finitismo, ultrafinitismo, finzionalismo e quasiempirismo.

T80:c.05 Riteniamo opportuno presentare anche alcune considerazioni sul piano pratico riguardanti il ruolo che stanno avendo gli odierni strumenti informativi resi possibili e diffusi dalle tecnologie elettronico-telematiche nei confronti dello sviluppo delle attività matematiche e, di conseguenza, sulla fiducia che le appoggia nonostante la caduta delle certezze.

Un primo settore influenzato è, evidentemente, quello dei calcoli effettivi. Tutti ora hanno accesso a strumenti efficienti per il calcolo numerico, per la produzione di grafici e per il calcolo simbolico. Moltissime apparecchiature, dalle lavatrici alle sonde spaziali, hanno incorporati strumenti di calcolo specializzati via via più raffinati. Infine per affrontare i problemi più impegnativi vengono via via proposti e realizzati strumenti computazionali, i cosiddetti supercomputers, sempre più poderosi; molti di questi sono i gangli di sistemi di portata planetaria per fini quali il controllo della meteorologia e la utilizzazione a distanza degli osservatori astronomici.

Questo ha consentito in particolare lo sviluppo di una matematica sperimentale che consente di esaminare empiricamente equazioni e strutture formali al fine di ampliare la conoscenza di entità o problemi recentemente proposti e di controllare congetture per rafforzarle con esempi parziali o per smentirle con controesempi. I vari strumenti computazionali sono ampiamente usati anche nelle discipline che si servono di modelli matematici ed i loro risultati talora sono dei notevoli stimoli alle indagini dei matematici professionisti.

T80:c.06 Un altro settore influenzato riguarda le attività di pubblicazione: oggi la maggioranza dei cultori primari e secondari della matematica possono produrre personalmente dei documenti contenenti formule e grafici servendosi di prodotti software liberi. In particolare ha grande importanza il sistema di typesetting $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ dovuto a Donald Knuth, insieme al derivato $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ sviluppato da Leslie Lamport. Questi sistemi, ormai standard de facto, hanno ridotto tempi e costi di redazione ed hanno favorito la condivisione di simboli e di notazioni e la loro unificazione, almeno nell'ambito di singole aree.

Forte impulso alla comunicazione tempestiva dei risultati di una disciplina ad alto livello di obiettività e di rigore come la matematica viene dato dalla rete Internet. Molte ricerche vengono svolte con ridotto consumo di risorse da piccoli gruppi di ricercatori che operano in località lontane e che spesso non si sono mai viste di persona. La rete Internet ha inoltre consentito lo sviluppo di riviste elettroniche, di pagine di ricercatori ricche di preprints, di siti divulgativi di alto livello e di banche dati internazionali riguardanti soprattutto recensioni di pubblicazioni scientifiche.

Si è quindi costituita una infrastruttura per la condivisione della matematica in posizione privilegiata nell'ambito della più ampia infrastruttura per il complesso delle discipline scientifiche.

Un ultimo accenno va fatto all'appoggio che possono avere gli strumenti di documentazione per i matematici anziani colpiti da carenze di memoria e di capacità di concentrazione.

Le varie componenti di questo testo sono accessibili in <http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/>