Capitolo T72:
Algebre di Kleene

Contenuti delle sezioni

T72:0.01 Le algebre di Kleene sono specie di strutture algebriche che consentono di stabilire dei formalismi con i quali si trattano vantaggiosamente varie questioni riguardanti linguaggi e sistemi di relazioni. Il contenuto del capitolo costituisce una rielaborazione di alcune parti del piccolo denso libro di J. H. Conway (1971): *Regular languages and regular machines*, Chapman & Hall.

T72:a. Algebre di Kleene classiche

T72:a.01 Diciamo **algebra di Kleene classica**, in sigla CKA, ogni sistema $\langle S, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ nel quale S è un insieme, $+$ e $\cdot$ sono operazioni binarie su S, * è un'operazione unaria su S, mentre $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ sono elementi di S. Questo sistema deve soddisfare i seguenti assiomi:
$\forall E, E_1, E_2, E_3 \in S$:
[CKA1] $E_1+E_2 = E_2+E_1$ (proprietà commutativa di $+$)
[CKA2] $E+\mathbf{0} = E$ (neutralità di $\mathbf{0}$ rispetto a $+$)
[CKA3] $(E_1+E_2)+E_3 = E_1+(E_2+E_3)$ (associatività di $+$)
[CKA4] $(E_1\cdot E_2)\cdot E_3 = E_1\cdot(E_2\cdot E_3)$ (associatività di $\cdot$)
[CKA5] $\mathbf{1}\cdot E = E$ (neutralità di $\mathbf{1}$ rispetto a $\cdot$)
[CKA6] $E\cdot\mathbf{1} = E$ (neutralità di $\mathbf{1}$ rispetto a $\cdot$)
[CKA7] $\mathbf{0}\cdot E = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ è elemento zero rispetto a $\cdot$)
[CKA8] $E\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ è elemento zero rispetto a $\cdot$)
[CKA9] $E_1\cdot(E_2+E_3) = E_1\cdot E_2+E_1\cdot E_3$ (distributività di $+$ rispetto a $\cdot$)
[CKA10] $(E_1+E_2)\cdot E_3 = E_1\cdot E_3+E_2\cdot E_3$ (distributività di $+$ rispetto a $\cdot$)
[CKA11] $(E_1+E_2)^* = (E_1{}^*\cdot E_2)^*\cdot E_1{}^*$ (azione di * rispetto a $+$)
[CKA12] $(E_1\cdot E_2)^* = \mathbf{1}+E_1(E_2+E_1)^*\cdot E_2$ (azione di * rispetto a $\cdot$)
[CKA13] $(E^*)^* = E^*$ (idempotenza di *)
[CKA14] $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ E^* = (E^n)^* E^{[n)}$

È opportuno sottolineare che l'ultima relazione costituisce uno schema di assioma.

T72:a.02 Indichiamo con **CKA** la classe delle algebre di Kleene classiche.

Le CKA's si possono definire mediante altri vari sistemi di assiomi: oltre al precedente, dovuto a Conway, ricordiamo quelli di Salomaa e di Yanov.

Per questi sistemi di assiomi si sono affrontati vari problemi di consistenza, di completezza e di equivalenza. È notevole il fatto che in ogni sistema di assiomi per le CKA's deve comparire uno schema di assiomi oppure una regola di inferenza; in altre parole non esiste alcun sistema finito di uguaglianze in grado di costituire un fondamento assiomatico per le CKA's.

T72:a.03 Osserviamo che [CKA1], [CKA2] e [CKA3] equivalgono a dire che $\langle S,+,\mathbf{0}\rangle$ è un monoide abeliano; che [CKA4], [CKA5] e [CKA6] equivalgono ad affermare che $\langle S,\cdot,\mathbf{1}\rangle$ è un monoide; che [CKA1], ...,[CKA10] equivalgono a dire che $\langle S,+,\cdot,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$ è un semianello unitale.

Vedremo che [T72:1.4(h)], escluso il caso degenere della CKA costituita da un solo elemento, l'operazione $+$ non possiede inverso, l'operazione $\cdot$ non è commutativa e non possiede inverso e che i semianelli $\langle S,+,\cdot,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle$ sono privi di divisori dell'unità e non sono anelli.

T72:a.04 Prop. Sia $A \subset_f \mathbf{A}$, e con i segni "+", "·" e "*" denotiamo esplicitamente unione, giustapposizione e star-chiusura di linguaggi. $\langle \mathbf{L}_A,+,\cdot,^*,\emptyset,\{\mu\}\rangle \in \mathbf{CKA}$.

Dim.: [CKA1],..., [CKA10] sono proprietà evidenti di $\mathbf{L}_A$.

[CKA11]:
$(E_1{+}E_2)^* = \mu{+}E_1{+}E_2{+}{E_1}^2{+}E_1E_2{+}E_2E_1{+}{E_2}^2{+}{E_1}^3{+}{E_1}^2E_2{+}E_1E_2E_1{+}E_1{E_2}^2{+}E_2{E_1}^2{+}$
${+}E_2E_1E_2{+}{E_2}^2E_1{+}{E_2}^3{+}....$ = sommatoria di tutti i prodotti costituiti dai fattori E_1 ed E_2;
$({E_1}^*{\cdot}E_2)^*{\cdot}E_1 = \sum_{m\in\mathbb{N}_0}\sum_{h_1,...,h_{m+1}\in\mathbb{N}_0}({E_1}^{h_1}{+}E_2)\cdots({E_1}^{h_m}{+}E_2){E_1}^{h_{m+1}} =$
sommatoria di tutti i prodotti costituiti dai fattori E_1 ed E_2.

[CKA12]:
$(E_1{\cdot}E_2)^* = \mu{+}E_1E_2{+}E_1(E_2E_1)E_2{+}E_1(E_2E_1)^2E_2{+}\cdots{+}E_1(E_2E_1)^nE_2{+}\cdots = \mu{+}E_1(E_2E_1)^*E_2$.

[CKA13]:
$\forall E\in\mathbf{L}_A \quad E{+}E = E$ e $\forall n\in\mathbb{N}_0 \quad E^n{+}\cdots{+}E^n = E^n$.
Quindi $E^{*2} = (\mu{+}E{+}E^2{+}\cdots)(\mu{+}E{+}E^2{+}\cdots) =$
$=\mu{+}(E{+}E){+}(E^2{+}E^2{+}E^2){+}(E^3{+}E^3{+}E^3{+}E^3){+}\cdots = \mu{+}E{+}E^2{+}E^3{+}\cdots = E^*$;
$E^{*3} = E^{*2}E^* = E^*E^* = E^*$;
$\forall n\in\mathbb{N} \quad E^{*n} = E^*$; $(E^*)^* = \mu{+}E^*{+}E^{*2}{+}\cdots = \mu{+}E^*{+}E^*{+}\cdots = \mu{+}E^* = E^*$.

[CKA14]:
$E^* = \mu{+}E{+}\cdots{+}E^p{+}\cdots$; fissato $n\in\mathbb{N}$ $\forall p\in\mathbb{N}_0$, $h\in\mathbb{N}_0$ e $k\in\{0,...,n-1\}$ tale che $p = nh+k$; $(E^n)^*E^{[n)} = (\sum_{h\in\mathbb{N}_0}E^{nh})(\sum_{0\le k<n}E^k) = \sum_{h\in\mathbb{N}_0 0\le k<n}E^{nh+k} = \sum_{p\in\mathbb{N}_0}E^p = E^*$ ▮

T72:a.05 Come per ogni altra specie di struttura algebrica si può parlare di **sottoalgebra di Kleene classica** e di **morfismi tra algebre di Kleene classiche** e si possono scrivere enunciati come i seguenti:
$$\langle S',+',\cdot',^{*\prime},\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle \le_{CKA} \langle S,+,\cdot,^*,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle \quad , \quad S'' <_{CKA} S \quad , \quad S \longmapsto_{CKA} S''' \ .$$

T72:a.06 Prop. Sia $A \subset_f \mathbf{A}$. $\langle \mathbf{R}_A,\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ \rangle <_{CKA} \langle \mathbf{L}_A,\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\rangle$.

Dim.: Dato che $\mathbf{R}_A \subset \mathbf{L}_A$ e che le operazioni su $\mathbf{R}_A$ sono le restrizioni di quelle su $\mathbf{L}_A$, basta stabilire che $\mathbf{R}_A \in \mathbf{CKA}$. Questo equivale a stabilire $\mathbf{R}_A \in [\![+,\ \cdot,\ ^*]\!]$, fatto garantito da [23e.03(b)] ▮

T72:a.07 Prop. Sia $A \subset_f \mathbf{A}$ ed $L \subseteq \mathbf{L}_A$; $\langle L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu)\!),\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\rangle \in \mathbf{CKA}$.

Dim.: $L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ )\!) \subseteq \mathbf{L}_A$ e, dato che questa collezione di linguaggi è chiusa rispetto a $+$, $\cdot$ e * e contiene $\emptyset$ e μ, $L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ )\!) \le_{CKA} \mathbf{L}_A$ ▮

T72:a.08 $\mathbf{R}_A$ costituisce un caso particolare di $L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ )\!)$ relativo ad $L = \{(a_i)|a_i \in A\}$. $\mathbf{R}_A$ risulta essere la CKA libera finitamente generata da $\{(a_i)|a_i \in A\}$.
Il suo carattere di struttura libera dipende dal fatto che i suoi elementi sono forniti da espressioni razionali su A, cioè da espressioni costituite con lettere di A composte con gli operatori $+$, $\cdot$ e * ed opportunamente parentizzate e che due espressioni forniscono lo stesso elemento di $\mathbf{R}_A$ sse sono riconducibili l'una all'altra sulla base degli assiomi [CKA1], ... ,[CKA14].

T72:a.09 La precedente affermazione traduce la proprietà di completezza del suddetto sistema di assiomi.

Nel caso in cui L sia finito, $L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ )\!)$ risulta essere una CKA finitamente generata; una tale CKA può essere libera o meno, in quanto due espressioni razionali sui linguaggi di L non equivalenti per $\{$[CKA1],...[CKA14]$\}$ ($\Longleftrightarrow$) possono dare lo stesso linguaggio, cioè lo stesso elemento della CKA, a causa di particolari legami intercorrenti fra i linguaggi in L.

Se L non è finito $L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ )\!)$, in genere , non è generabile finitamente. Questo è il caso di $\mathbf{L}_A$.

T72:a.10 Deduciamo dagli assiomi [CKA1],...,[CKA14] alcune importanti relazioni; valendo esse per ogni CKA, in particolare costituiscono proprietà di $\mathbf{L}_A$, $\mathbf{R}_A$ e delle $L(\!(\ +,\ \cdot,\ ^*,\ \emptyset,\ \mu\ )\!)$. In questi ultimi casi alcune delle relazioni che seguono sono piuttosto evidenti.

Consideriamo dunque $\langle S, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \in \mathbf{CKA}$ ed E_i, P, Q denotino generici elementi di S.

T72:a.11 Prop. $E^* = 1{+}EE^* = 1 + E^*E$.

Dim.: Da [CKA12] con $E_1 = E$ ed $E_2 = 1$ oppure $E_1 = 1$ ed $E_2 = E$ segue la tesi ▮

T72:a.12 Prop. $\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad E^* = E^{[n)}{+}E^nE^*$.

Dim.: Per $n = 0$ si riduce a $E^* = \mu E^*$ e per $n = 1$ ad (a); supponiamo vera $E^* = E^{[n)}{+}E^nE^*$; da essa e da (a) $E^* = E^{[n)}{+}E^n(1{+}EE^*) = E^{[n)}{+}E^n{+}E^{n+1}E^* = E^{[n+1)}{+}E^{n+1}E^*$ e la relazione è provata per induzione ▮

T72:a.13 Prop. $(E_1E_2)^*E_1 = E_1(E_2E_1)^*$.

Dim.: Utilizzando in questa dimostrazione [CKA12] ed T72:1.11, si ha che:
$(E_1E_2)^*E_1 = E_1{+}E_1(E_2E_1)^*E_2E_1 = E_1(E_2E_1)^*$ ▮

T72:a.14 Prop. $EE^* = E^*E$.

Dim.: Da T72:1.13 con $E_1 = E$ ed $E_2 = 1 \Longrightarrow (E{\cdot}1)^*E = E(1{\cdot}E)^*$ e sfruttando [CKA5] e [CKA6] $\Longrightarrow E^*E = EE^*$ ▮

T72:a.15 Prop. $0^* = 1$.

Dim.: Da (a) con $E = 0$ e utilizzando [CKA7] segue che $0^* = 1{+}00^* = 1$ ▮

T72:a.16 Prop. $1^* = 1$.

Dim.: Sfruttando [CKA13] e T72:1.15 e ponendo $E = 0$ si ha che $(0^*)^* = 0^* \Longrightarrow 1^* = 1$ ▮

T72:a.17 Prop. $1{+}1 = 1$.

Dim.: Da (a), (f), [CKA6] e dalla scelta $E = 1$ segue che $1^* = 1{+}1^*{\cdot}1 \Longrightarrow 1 = 1{+}1$ ▮

T72:a.18 Prop. $E{+}E = E$ ed $\langle S, +\rangle$ è una banda abeliana.

Dim.: Da 1.17 segue che $(1{+}1){\cdot}E = 1{\cdot}E$. Utilizzando [CKA10] e [CKA5] si ha che $E{+}E = E$.

Invece valgono [CKA1] e [CKA3] $\Longleftrightarrow$ $\langle S,+\rangle$ è un sottogruppo abeliano e la proprietà di idempotenza rispetto a + di tutti gli elementi di S garantisce che $\langle S,+\rangle$ sia una banda abeliana ▮

T72:a.19 Prop. $(1+E)^* = E^*$.

Dim.: Da [CKA11] e da (f), con $E_1 = 1$ ed $E_2 = E$ segue che $(1+E)^* = (1^*E)^*1^* = E^*$ ▮

Prop. [CKA1],...[CKA12], (f) $\Longrightarrow$ [CKA13].

Dim.: [CKA1],...[CKA12], (f) $\Longrightarrow$ (i). Utilizzando (i),[CKA1], [CKA11], [CKA5] e ponendo $E_1 = E$ ed $E_2 = 1$ si ha che $E^* = (1+E)^* = (E+1)^* = (E^*\cdot 1)^*E^* = (E^*)^*E^*$.

Da [CKA1],...[CKA12], (f) $\Longrightarrow$ (a) ed (g) e quindi $E^* = 1+E^*E = 1+1+E^*E = 1+E^* = 1+(E^*)^*E^* = (E^*)^*$ ▮

T72:a.21 Prop. [CKA1],...[CKA13] $\Longleftrightarrow$ [CKA1],...[CKA12], (f).

Dim.: Basta osservare che nelle precedenti deduzioni non si è mai fatto ricorso a [CKA14] e che (f) richiede [CKA13] ▮

T72:a.22 Prop. $E^*E^* = E^*$.

Dim.: Tenendo presenti (i), [CKA11], [CKA6], [CKA13], segue che $E^* = (1+E)^* = (E^*)^*E^* = E^*E^*$ ▮

T72:a.23 Prop. $({E_1}^*E_2)^* = 1+(E_1+E_2)^*E_2$.

Dim.: Utilizzando (a) e [CKA11] si ha che $({E_1}^*E_2)^* = 1+({E_1}^*E_2)^*{E_1}^*E_2 = 1+(E_1+E_2)^*E_2$ ▮

T72:a.24 Prop. $(E_1{E_2}^*)^* = 1+E_1(E_1+E_2)^*$.

Dim.: Utilizzando (a) e [CKA11] segue che $(E_1{E_2}^*)^* = 1+E_1{E_2}^*(E_1{E_2}^*)^* = 1+E_1(E_1+E_2)^*$ ▮

T72:a.25 Prop. $E = P^*Q \Longrightarrow E = PE+Q$.

Dim.: Tenendo presenti (a), [CKA1], [CKA10] e [CKA4], si ha che $E = P^*Q = (PP^*+1)Q = PP^*Q+Q = PE+Q$ ▮

T72:a.26 Prop. $E = QP^* \Longrightarrow E = EP+Q$.

Dim.: Utilizzando (a) , [CKA1], [CKA9] e [CKA4] si ha che $E = QP^* = Q(P^*P+1) = QP^*P+Q = EP+Q$ ▮

T72:a.27 Consideriamo $\langle S,+,\cdot,^*,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle \in \mathbf{CKA}$, la relazione entro $S \leq := \{\langle E,F\rangle \in S\times S | E+F = F\}$ ed E, F, G, E_i, $F_i \in S$.

T72:a.28 Prop. $\leq$ è una relazione d'ordine su S.

Dim.: Essendo $\langle S,+\rangle$ una banda abeliana [.72:1.5(h)] per $E,F,G \in S$, $E+E = E \Longrightarrow E \leq E$; $E \leq F$ e $F \leq E \Longrightarrow E+F = F = F+E = E$; $E \leq F$ e $F \leq G \Longrightarrow E+F = F$, $F+G = G \Longrightarrow E+G = E+(F+G) = (E+F)+G = F+G = G \Longrightarrow E \leq G$, cioè $\leq$ è riflessiva, simmetrica e transitiva ▮

T72:a.29 Prop. $E \leq E+F$.

Dim.: Utilizzando [.72:1.4(h)], segue che $E+(E+F) = E+F$ ▮

T72:a.30 Prop. $\mathbf{0}$ è il minimo per $\leq$.

Dim.: Usando [CKA1] e [CKA2] si ha che $0+E = E$ ▮

T72:a.31 Prop. $E_1 \leq F_1$, $E_2 \leq F_2 \Longrightarrow E_1+E_2 \leq F_1+F_2$.

Dim.: Ricordando [CKA3] e considerando $E_i \leq F_i$, si ha che $E_1+E_2+F_1+F_2 = (E_1+F_1)+(E_2+F_2) = F_1+F_2$ ▮

T72:a.32 Coroll.: $E \leq F \implies E{+}G \leq F{+}G$.
Si noti che queste proprietà valgono per ogni banda abeliana.

T72:a.33 Prop. $E_1 \leq F_1, \quad E_2 \leq F_2 \implies E_1E_2 \leq F_1F_2$.
Dim.: Utilizzando [CKA9], [CKA10] e (a), segue che $E_1{+}F_1 = F_1, \quad E_2{+}F_2 = F_2 \implies F_1F_2 = (E_1{+}F_1)(E_2{+}F_2) = E_1E_2{+}(E_1F_2{+}F_1E_2){+}F_1F_2 \implies F_1F_2 \geq E_1E_2{+}(E_1F_2{+}F_1E_2) \implies E_1E_2 \leq F_1F_2$ ▮

T72:a.34 Coroll.: $E \leq F \implies EG \leq FG, \quad GE \leq GF$ ▮

T72:a.35 Prop. $m \leq n \in \mathbb{N}_0 \implies E^{[m)} \leq E^{[n)}$.
Dim.: Questo risultato segue da (b) ▮

T72:a.36 Prop. $n \in \mathbb{N}_0 \implies E^{[n)} \leq E^*$.
Dim.: Ciò segue da :a.04(b) e da (b) ▮

T72:a.37 Coroll.: $1 \leq E^*$ ▮

T72:a.38 Prop. $E \leq F \implies E^* \leq F^*$.
Dim.: Utilizzando (j), (f), [CKA11] e supponendo $E \leq F$, si ha che $E^* = 1{\cdot}E^* \leq (E^*F)^*E^* = (E{+}F)^* = F^*$ ▮

T72:a.39 Si noti che (c),...,(h) discendono dai soli assiomi [CKA1],...,[CKA12], mentre la riflessività di $\leq$ e quindi (a), (b), (i), (j), (k), richiedono [.72:1.4(h)], cioè anche [CKA13].

T72:a.40 Consideriamo $\langle S, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \in$ **CKA** ed $a_1, ..., a_n \in S$.
Si dice **espressione razionale** relativa ad S negli argomenti $a_1, ..., a_n$ ogni espressione negli operandi $a_1, ..., a_n$, negli operatori binari + e $\cdot$ e nell'operatore unario *.

Chiaramente (v. :a.03(a)] si tratta della generalizzazione delle espressioni razionali introdotte in [2A]. Per esse valgono tutte le conseguenze derivabili dagli assiomi e quindi anche le proprietà ricavate in :a.04] e :a.05].

Nel caso di linguaggi, evidentemente, $\leq$ si riduce alla relazione di inclusione e molte proprietà di :a[T72:1.4] e [T72:1.5] sono abbastanza evidenti.

Una utile forma canonica per le espressioni razionali è indicata dalla seguente:

T72:a.41 Prop. Ogni espressione razionale relativa ad una CKA può trasformarsi in una equivalente costituita da una somma (finita) di espressioni nei soli $\cdot$ e +.
Dim.: Si procede per induzione sulla lunghezza delle espressioni razionali. L'asserto è ovvio per ogni espressione di lunghezza non superiore a 5, cioè di una delle forme a_i, $(a_i{}^*)$, $(a_i{+}a_j)$ ed (a_ia_j). Supponiamolo vero per tutte le espressioni di lunghezza non superiore ad un $n > 5$ della forma $E = \sum_{i=1}^h E_i$ ed $F = \sum_{j=1}^k F_j$ con $E_i, F_j \in \{a_1, ..., a_n\}$ $(\!(\cdot, ^*)\!)$. L' asserto chiaramente è vero per $(E{+}F)$ e per $(EF) = \sum_{i=1,...,h;j=1,...,k} E_iF_j$. Rimane da dimostrarlo per le $(E)^* = (\sum_{i=1}^h E_i)^*$ e per questo si procede per induzione su h. L'asserto è ovvio per $h = 1$ e per $h = 2$ discende da [CKA11]; supposto vero per $h \geq 2$ si ha, utilizzando appunto [CKA11], $(\sum_{i=1}^{h+1} E_i)^* = \left[E_{h+1}{}^*(\sum_{i=1}^h E_i)^*\right]^* E_{h+1}{}^* = (\sum_{i=1}^h E_{h+1}{}^*E_i)^* E_{h+1}{}^* = \left[(\sum_{i=1}^h E_{h+1}{}^*E_i)^* := \sum_{l=1}^m E_l^{'}\right] = \sum_{l=1}^m E_l^{'} E_{h+1}{}^*$ ▮

T72:a.42 Si possono avere anche CKA's finite.

È evidente che si ha una CKA con un solo elemento, $\mathbf{0} = \mathbf{1}$, ed una CKA con due elementi, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$, le cui tavole di operazioni, per [CKA1], [CKA2], [T72:1.4(g)], [CKA5], [CKA6], [CKA7], [CKA8], [T72:1.4(e)], [T72:1.4(f)], sono :

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c|c} & {}^* \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{array}$$

T72:a.43 Prop. Se $\langle S, +, \cdot, {}^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \in_f \mathsf{CKA}$ e $\wedge := \ulcorner \langle E, F\rangle \in S \times S \not\Vdash \sum\{G \mid G \leq E, F\} \urcorner$.
$\langle S, +, \wedge\rangle \in \mathbf{Latt}$.

La tavola di addizione delle CKA's finite è determinata dalla struttura di reticolo e si ricava abbastanza agevolmente dal relativo digrafo.

La tavola per l'operazione *, per l'idempotenza di tale operazione [CKA13], per il suo rispetto della $\leq$ [T72:1.5(k)] e per la $E \leq E^*$ [.11.1.5(i)], si ricava dalla indicazione su di quali elementi sono della forma E^* e dalla formula $A^* = \{E^* \geq A\}^{min}$.
Le distribuzioni degli E^* sono vincolate dalle richieste $S^{max} = E^*$ [.11.1.5(i)], $\mathbf{1} = \mathbf{1}^*$ [.11.1.4(f)], $\mathbf{0}^* \neq \mathbf{0}$ [$\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$ e [.11.1.4(e)]], $\mathbf{1} \leq E^*$ [.11.1.4(i)]. La tavola per la moltiplicazione è vincolata tra l'altro da [CKA5], [CKA6], [CKA7] e [CKA8] che rendono interessanti solo le operazioni relative ad EF con $E, F \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$, da $E^*E^* = E^*$ e da $E \leq F \Longrightarrow EG \leq FG, \quad GE \leq GF$ [.11.1.5(g)].

T72:a.44 Le precedenti considerazioni consentono di individuare le CKA's di cardinalità 3 e 4.

$$\begin{array}{cc} 2 & \bullet \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \qquad 2{\cdot}2 = 2 \qquad\qquad \begin{array}{cc} 1 & \bullet \\ & | \\ 2 & \diamond \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array}$$

$2{\cdot}2 = 0$ e $2{\cdot}2 = 2$

($2{\cdot}2 = 1$ è in contrasto con $1{\cdot}2 = 2$ e con $2 < 1 \Longrightarrow 2{\cdot}2 \leq 1{\cdot}2$).

$$\begin{array}{cc} 3 & \bullet \\ & | \\ 2 & \diamond \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} 3 & \bullet \\ & | \\ 2 & \bullet \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & \bullet \\ & | \\ 1 & \bullet \\ & | \\ 2 & \diamond \\ & | \\ 0 & \diamond \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
1 & \bullet \\
 & | \\
3 & \diamond \\
 & | \\
2 & \diamond \\
 & | \\
0 & \diamond
\end{array}$$

	2	3
2	0	0
3	0	0

	2	3
2	0	0
3	0	2

	2	3
2	0	0
3	0	3

	2	3
2	0	2
3	0	3

	2	3
2	0	0
3	2	3

	2	3
2	0	2
3	2	3

	2	3
2	2	2
3	2	2

	2	3
2	2	2
3	2	3

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & & \bullet & & \\
 & / & & \backslash & \\
2\ \diamond & & & & \diamond\ 3 \\
 & \backslash & & / & \\
 & & \diamond & & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

	2	3
2	2	0
3	0	3

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 3 & & \\
 & & \bullet & & \\
 & / & & \backslash & \\
2\ \bullet & & & & \diamond\ 3 \\
 & \backslash & & / & \\
 & & \diamond & & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

	2	3
2	0	2
3	2	3

	2	3
2	2	2
3	2	3

	2	3
2	1	3
3	3	3

	2	3
2	3	3
3	3	3

T72:a.46 Abbiamo visto che $\mathbf{L}_{\{a_1,...,a_n\}}, \mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}} \in \mathsf{CKA}$.
$\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}}$, essendo ottenibile come $\{a_1,...,a_n\}[+\cdot^*]$, viene detta **CKA libera finitamente generata** da $a_1,...,a_n$. I suoi elementi infatti sono forniti dalle espressioni costituite con gli elementi a_i collegati con gli operatori $+, \cdot,$ e * ed opportunamente parentizzate (espressioni regolari).

Due espressioni forniscono lo stesso elemento dell' algebra sse si può ricondurre l'una all'altra mediante gli assiomi [CKA1],...,[CKA14].

T72:a.47 Prop. Consideriamo $\{L_1,...,L_n\} \in \mathbf{L_A}$. $\{L_1,...,L_n\}[+\cdot^*] \in \mathbf{L_A}$.
Dim.: Infatti $\{L_1,...,L_n\}[+\cdot^*] \subseteq \mathbf{L_A}$ ed essendo chiusa rispetto a $+, \cdot,$ e * $\{L_1,...,L_n\}[+\cdot^*] \leq_{cka} \mathbf{L_A}$
▮

Queste CKA's, in generale, non sono libere, nel senso che due espressioni regolari in $L_1,...,L_n$ non riconducibili l'una all'altra attraverso gli assiomi a causa di particolari legami tra gli L_i possono dare lo stesso linguaggio, cioè lo stesso elemento di CKA.

T72:a.48 Consideriamo $\mathbf{f} = \langle \{0,1,2,3\}, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ove

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	1	2	3
2	2	2	2	3
3	3	3	3	3

,

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	3
3	0	3	3	3

e

	*
0	1
1	1
2	3
3	3

f è una CKA finita.

T72:b. Algebre di Kleene standard

T72:b.01 Si dice **algebra di Kleene standard**, in sigla SKA, un sistema $\langle S, \sum, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ nel quale S è un insieme, $\sum \in \{S^{\mathfrak{P}} \longmapsto S\}$, $\cdot \in \{S \times S \longmapsto S\}$ e $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in S$, il quale soddisfa gli assiomi che seguono e per i quali, in luogo di $\{E_t | t \in T\} \sum$, scriviamo $\sum_{t \in T} E_t \quad \forall E_t \in S$

[SKA1] $\emptyset \sum = 0$ cioè $\sum_{t\in\emptyset} E_t = 0$

[SKA2] $\{E_a\} \sum = E_a$ cioè $\sum_{t\in\{a\}} E_t = E_a$

[SKA3] $\big\{\{E_u | u \in U_t\} \sum | t \in T\big\} \sum = \big\{E_u | u \in U\{U_t | t \in T\}\big\} \sum$ cioè $\sum_{t\in T}(\sum_{u\in U_t} E_u) = \sum_{u\in(\cup_{t\in T} U_t)} E_u$

[SKA4] $(E_t \cdot E_u) \cdot E_v = E_t \cdot (E_u \cdot E_v)$

[SKA5] $\mathbf{1} \cdot E_t = E_t$

[SKA6] $E_t \cdot \mathbf{1} = E_t$

[SKA7] $\big(\{E_t | t \in T\} \sum\big) \cdot \big(\{E_u | u \in U\} \sum\big) = \{E_t \cdot E_u | \langle t, u\rangle \in T \times U\} \sum$ cioè $(\sum_{t\in T} E_t) \cdot (\sum_{u\in U} E_u) = \sum_{\langle t,u\rangle \in T\times U} E_t \cdot E_u$.

Indichiamo con **SKA** la classe delle SKA's.

T72:b.02 In luogo di $\{E_{t_1}, E_{t_2}\} \sum = \sum_{t\in\{t_1,t_2\}} E_t$ si scrive $E_{t_1} + E_{t_2}$. In tal modo si è individuata un'operazione binaria su S: $+ \in \{S \times S \longmapsto S\}$:

T72:b.03 Prop. $E_t + E_u = E_u + E_t$.

Dim.: Infatti $\{t, u\} = \{u, t\}$ ▮

T72:b.04 Prop. $E_t + \emptyset = E_t$.

Dim.: Infatti $\{t\} \cup \emptyset = \{t\}$ ▮

T72:b.05 Prop. $(E_t + E_u) + E_v = E_t + (E_u + E_v)$.

Dim.: Infatti $\{t, u\} \cup \{v\} = \{t\} \cup \{u, v\}$ ▮

T72:b.06 In luogo di $\sum_{t\in\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}} E_t$ si può scrivere $E_{t_1} + E_{t_2} + \ldots + E_{t_n}$.

Come al solito si pone $\forall E \in S \;\; \forall n \in \mathbb{N} \quad E \cdot E = E^2, \quad E^{n+1} = E^n \cdot E \quad E^1 = E, \quad E^0 = 1$.

Si pone inoltre $E^+ = \sum_{n\in\mathbb{N}} E^n, \quad E^* = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} E^n$ individuando due operazioni unarie su S.

T72:b.07 Prop. Consideriamo un insieme I, $I^{\mathfrak{P}}$, $\mathbf{1}_{\odot} \in I^{\mathfrak{P}}$, un'operazione $\cdot \in \{I \times I \longmapsto I^{\mathfrak{P}}\}$ e la sua estensione booleana $\odot = \ulcorner \langle I_1, I_2\rangle \nrightarrow \cup \{i_1 \cdot i_2 | i_1 \in I_1, i_2 \in I_2\} \urcorner \in \{I^{\mathfrak{P}} \times I^{\mathfrak{P}} \longmapsto I^{\mathfrak{P}}\}$.
$\langle I^{\mathfrak{P}}, \odot, \mathbf{1}_{\odot}\rangle \in \mathbf{Mnd} \implies \langle I^{\mathfrak{P}}, \cup, \odot, \emptyset, \mathbf{1}_{\odot}\rangle \in$ **SKA**.

Dim.: Infatti l'insieme soddisfa [SKA1], [SKA2] ed [SKA3], l'ipotesi implica [SKA4], [SKA5] ed [SKA6] e per $\odot$, essendo estensione booleana, si ha che $\forall \{I_t | t \in T\}, \{I_u | u \in U\} \subseteq I^{\mathfrak{P}} \quad (\cup_{t\in T} I_t) \odot (\cup_{u\in U} I_u) = \cup_{t\in T, u\in U}(I_t \odot I_u)$ che non è altro che [SKA7] ▮

T72:b.08 Prop. Consideriamo $\langle M, \cdot, \mathbf{1}\rangle \in \mathbf{Mnd}$ e $\odot = \cdot^{bool}$.

$\langle M^{\mathfrak{P}}, \cup, \odot, \emptyset, \{\mathbf{1}\}\rangle \in \mathsf{SKA}$.

Dim.: Infatti si ha una situazione più particolare di quella esposta in (a) ▮

T72:b.09 Prop. Consideriamo $A \subset_F \mathbf{A}$, $\langle \mathbf{L}_A, \sum, \cdot, \emptyset, \{\mu\}\rangle \in \mathsf{SKA}$.

Dim.: Infatti $\mathbf{L}_A = A^{*\mathfrak{P}}$, $\sum$ indica l'unione di linguaggi e $\cdot$ l'estensione booleana dell'operazione indicata con lo stesso segno per la quale $\langle A^*, \cdot, \mu\rangle \in \mathbf{Mnd}$ ▮

$\langle \mathbf{L}_A, \sum, \cdot, \emptyset, \mu\rangle$ è la **SKA libera generata finitamente** da A; essa in breve si dice a**SKA dei linguaggi** su A.

T72:b.10 Prop. Consideriamo un insieme I. $\langle (I\times I)^{\mathfrak{P}}, \cup, \circ, \emptyset, I^{id}\rangle \in \mathsf{SKA}$.

Dim.: Infatti $\circ_{I\times I} = \lceil \langle ef\rangle\langle fh\rangle \mapsto \langle eh\rangle \rceil \,\dot\cup\, \lceil \langle ef\rangle\langle gh\rangle \mapsto \emptyset | f \neq g \rceil \in \{(I\times I)\times(I\times I) \longmapsto (I\times I)\cup\{\emptyset\}\}$ e $\langle (I\times I)^{\mathfrak{P}}, \circ, I^{id}\rangle \in \mathbf{Mnd}$ ▮

T72:b.11 Consideriamo $\langle M, \mathbf{1}\rangle \in \mathbf{Mnd}$, l'estensione cartesiana $::$ di $\cdot$ a $M\times M$
$:: \;=\; \lceil \langle\langle st\rangle\langle uv\rangle\rangle \mapsto \langle s\cdot u, t\cdot v\rangle | s,t,u,v \in M \rceil$ e l'estensione booleana di $::$ a $\boxed{:}$, l'operazione per la quale $\forall M_1, M_2 \subseteq M\times M \;:\; M_1 \boxed{:}\, M_2 := \{\langle s,t\rangle \in M_1, \langle u,v\rangle \in M_2 \;:|\; \langle s\cdot u, t\cdot v\rangle\}$.
Allora $\langle (M\times M)^{\mathfrak{P}}, \cup, \boxed{:}\,, \emptyset, \langle 1,1\rangle\rangle \in \mathsf{SKA}$.

Dim.: Infatti $\langle M\times M, ::\,, \langle 1,1\rangle\rangle \in \mathbf{Mnd}$ ▮

T72:b.12 Prop. Consideriamo $\langle M_i, \cdot_i, \mathbf{1}_i\rangle \in \mathbf{Mnd}$ per $i = 1,...,n$; $M = M_1\times ...\times M_n$, $1 = \langle 1_1,...,1_n\rangle$, $::$ estensione cartesiana di $\cdot_1,...,\cdot_n$ ad M, $\boxed{:} \;=\; ::^{bool}$. $\langle \mathbf{M}, \cup, \boxed{:}\,, \emptyset, \mathbf{1}\rangle \in \mathsf{SKA}$.
Si tratta della ovvia generalizzazione di (e) ▮

T72:b.13 Prop. Consideriamo un insieme I. $\langle I^{\mathfrak{P}}, \cup, \cap, \emptyset, I\rangle \in \mathsf{SKA}$.

T72:b.14 Consideriamo un reticolo completo completamente distributivo e siano L^{min} ed L^{max} i suoi estremi.
Allora $\langle L, \vee, \wedge, L^{min}, L^{max}\rangle \in \mathsf{SKA}$.

T72:b.15 Teorema Consideriamo $\langle S, \sum, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \in \mathsf{SKA}$ e le operazioni $+$ (binaria) e * (unaria) introdotte come in [.11.2.2]. $\langle S, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \in \mathsf{CKA}$.

Dim.: Si tratta di verificare [CKA1],...,[CKA14] per questa CKA; indichiamo con $E_1, ..., E_i$ arbitrari elementi di S.
[CKA1], [CKA2] e [CKA3] si sono visti in [.11.2.2 (a),(b),(c)].
[CKA4], [CKA5] e [CKA6] sono [SKA4], [SKA5] e [SKA6].
[CKA7]: Utilizzando [SKA1], [SKA2] e [SKA7], si ha che

$$0\cdot E_i = \sum_{t\in\emptyset} E_t \cdot \sum_{u\in\{i\}} E_u \;=\; \sum_{\langle t,u\rangle\in\emptyset\times\{i\}} E_t E_u = \sum_{\langle t,u\rangle\in\emptyset} E_t E_u = 0\ .$$

[CKA8]: come [CKA7].
[CKA9]: Utilizzando [SKA7] si ha che

$$E_1\cdot(E_2+E_3) = \sum_{t\in\{1\}} E_t \cdot \sum_{u\in\{2,3\}} E_u = \sum_{\langle t,u\rangle\in\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}} E_t E_u = E_1E_2 + E_1E_3\ .$$

[CKA10]: come [CKA9].
[CKA11]: Utilizzando [.11.2.2], [SKA7], [CKA9], [CKA10], [SKA3], segue che:

$$(E_1+E_2)^* = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (E_1+E_2)^n =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \sum_{k=0,...,n} \sum_{n_0,...,n_k\geq 0, \sum_{i=0}^{k} n_i = n-k} E_1^{n_0} E_2 E_1^{n_1} E_2 ... E_1^{n_{k-1}} E_2 E_1^{n_k} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \sum_{n_0,...,n_k\geq 0} (E_1^{n_0}E_2)(E_1^{n_1}E_2)...(E_1^{n_{k-1}}E_2)E_1^{n_k} =$$
$$= \sum_{k\in\mathbb{N}_0} (E_1{}^*E_2)(E_1{}^*E_2)...(E_1{}^*E_2)E_1{}^* = (E_1{}^*E_2)^*E_1{}^*\ .$$

[CKA12]: Utilizzando [SKA7], si ha che:

$$(E_1E_2)^* = 1+\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(E_1E_2)^{n+1} = 1+\sum_{n\in\mathbb{N}_0} E_1(E_1E_2)^n E_2 =$$
$$= 1+E_1\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}_0}(E_2E_1)^n E_2 = 1+E_1(E_2E_1)^*E_2 \ .$$

Prima di considerare [CKA13] e [CKA14], dimostriamo alcune proprietà delle SKA's.

T72:b.16 Prop. Sia T un insieme qualsiasi: $\sum_{t\in T} E_i = E_i$.

Dim.: Posto $U_t = \{i\}$, ed utilizzando [SKA3], segue che

$$\forall t \in T \ : \ \sum_{t\in T} E_i = \sum_{t\in T}\sum_{u\in U_t} E_u = \sum_{u\in(\cup_{t\in T}U_t)} E_u = \sum_{u\in\{i\}} E_u = E_i \ \blacksquare$$

Questa relazione si può chiamare **idempotenza generalizzata**.
In particolare $E_i{+}E_i = E_i$, $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} E_i = E_i$.

T72:b.17 Prop. ${E_i}^*{E_i}^* = {E_i}^*$.

Dim.: Utilizzando [SKA7], [SKA3] ed (a), si trova ${E_i}^*{E_i}^* = \sum_{\langle m,n\rangle\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} E_i^{m+n} =$
$= \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{m=0,\ldots,k} E_i^{m+(k-n)} = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{m=0,\ldots,k} E_i^k = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} E_i^k = {E_i}^*$ ∎

T72:b.18 Prop. $({E_i}^*)^n = {E_i}^* \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

T72:b.19 Ritorniamo alla verifica degli assiomi delle CKA.

[CKA13]: Utilizzando (c) ed (a), si ha che: $({E_i}^*)^* = 1+\sum_{n\in\mathbb{N}} {E_i}^{*n} =$
$= 1+\sum_{n\in\mathbb{N}} {E_i}^* = 1+{E_i}^* = {E_i}^*$.

[CKA14]: Sia $n\in\mathbb{N}$; poniamo $T = \{0,1,...,n-1\}$, $U_t = n\mathbb{N}_0{+}t \quad \forall t\in T$, ed utilizzando anche [SKA3] ed [SKA7], segue che: ${E_i}^* = \sum_{k\in\mathbb{N}_0}{E_i}^k = \sum_{k\in(\cup_{t\in T}U_t)}{E_i}^k = \sum_{t\in T}\sum_{k\in U_t}{E_i}^k = \sum_{t\in T}\sum_{m\in\mathbb{N}_0}(E_i^n)^m E_i^t =$
$= \sum_{t\in T}(E_i^n)^*E_i^t == (E_i^n)^*\sum_{t\in T}E_i^t = (E_i^n)^*E_i^{[n)}$.

T72:b.20 Con abuso di linguaggio veniale, si può dire che "ogni **SKA** è una **CKA**" e scrivere **SKA** $\leq$ **CKA** .

Vedremo facilmente che *non vale il viceversa*.
Le SKA's sono in effetti strutture assai privilegiate rispetto alle CKA's, in quanto chiuse rispetto a somme qualsiasi e tra **SKA** e **CKA** si possono considerare tipi di strutture intermedie.

Ad **SKA**, comunque, si possono applicare tutte le considerazioni svolte per **CKA**, anche se talune proprietà di **SKA** si possono trovare più facilmente ed in forma più stringente (come per l'idempotenza).

T72:b.21 Consideriamo $\langle S,\sum,\cdot,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle \in$ **SKA**.
Su S come per ogni CKA la relazione $\leq \ = \ \{\langle E,F\rangle | E{+}F = E\}$ è una relazione d'ordine parziale per la quale valgono le proprietà viste in [T72:1.7].

T72:b.22 Prop. Consideriamo $\mathtt{E}\subseteq S$. $\mathtt{E}^{sup} = \sum_{E\in\mathtt{E}} E = \sum_{G\in(\cup_{E\in\mathtt{E}}E^{\mathbf{min}})} G$.

Dim.: $E_1 \in \mathtt{E} \Longrightarrow E_1{+}\sum_{E\in\mathtt{E}} E = \sum_{E\in\mathtt{E}} E$ e quindi $\sum_{E\in\mathtt{E}} E$ è maggiorante di $\mathtt{E}$; se F è un generico maggiorante di $\mathtt{E}$, $F\geq E$, e utilizzando [.11.2.4(a)], si ha che : $F = \sum_{E\in\mathtt{E}} F = \sum_{E\in\mathtt{E}}(E{+}F) = F{+}\sum_{E\in\mathtt{E}} E \Longrightarrow F \geq \sum_{E\in\mathtt{E}} E$ e quindi $\sum_{E\in\mathtt{E}} E$ è il minimo maggiorante di $\mathtt{E}$. Per l'ultima espressione basta considerare che $E = \sum_{G\in E^{\mathbf{min}}} G$ in quanto $E\in E^{\mathbf{min}}$ ∎

T72:b.23 Prop. Consideriamo l'insieme dei minoranti di $\mathtt{E}$: $\mathtt{E}^{\mathbf{min}} = \{G | G\leq E \ \ \forall E\in\mathtt{E}\} = \cap_{E\in\mathtt{E}} E^{\mathbf{min}}$.

$\mathtt{E}^{inf} = \mathtt{E}^{\mathbf{min}\ sup} = \sum_{G\in\mathtt{E}^{\mathbf{min}}} G = \sum_{G\in(\cap_{E\in\mathtt{E}}\mathtt{E}^{\mathbf{min}})}(E{+}G)$.

Dim.: $E \in \mathtt{E}$ e $G \leq E \Longrightarrow E{+}\mathtt{E}^{\mathbf{min\ sup}} = \sum_{G\in\mathtt{E}^{\mathbf{min}}}(E{+}G) = \sum_{G\in\mathtt{E}^{\mathbf{min}}} E = E \Longrightarrow \mathtt{E}^{\mathbf{min\ sup}} \leq E$ e quindi $\mathtt{E}^{\mathbf{min\ sup}} \in \mathtt{E}^{\mathbf{min}}$ e quindi $\mathtt{E}^{\mathbf{min\ sup}}$ è il massimo di $\mathtt{E}^{\mathbf{min}}$ cioè $\mathtt{E}^{inf}$ ∎

T72:b.24 Teorema $\leq$ è una relazione di reticolo completo per S.
In tale reticolo il minimo è $\mathbf{0}$, il massimo è $\sum_{E\in S} E$, la giunzione binaria è fornita da $E \vee F = E{+}F = \sum_{G\in E^{\mathbf{min}}\cup F^{\mathbf{min}}} G$ e l'incontro binario da $E \wedge F = \sum_{G\leq E,F} G = \sum_{G\in E^{\mathbf{min}}\cap F^{\mathbf{min}}} G$.
Dim.: Ogni $\mathtt{E} \subseteq S$ possiede supremo (a) e infimo (b); accade poi che $\mathbf{0} \leq E \ \ \forall E \in S$; le altre proprietà sono conseguenza della completezza del reticolo ∎

T72:b.25 Teorema $\langle S, \leq\rangle$ è un reticolo booleano, cioè un reticolo complementato e distributivo; il complemento di $E \in S$ è $E' = \sum \big\{F \mid E^{\mathbf{min}} \cap F^{\mathbf{min}} = \{\mathbf{0}\}\big\}$.

T72:b.26 Teorema Consideriamo $S \in \mathbf{SKA}$, $P, Q \in S$ e le equazioni $X = PX{+}Q \quad Y = YP{+}Q$.
Indichiamo con $(X = PX{+}Q)^{\mathbf{sol}}$ e $(Y = YP{+}Q)^{\mathbf{sol}}$ i sottoinsiemi di $\mathfrak{P}(S)$ costituiti dalle rispettive soluzioni.

(i) $(X = PX{+}Q)^{\mathbf{sol}\ min} = P^*Q$
(ii) $(Y = YP{+}Q)^{\mathbf{sol}\ min} = QP^*$.

Dim.: $P^*Q \in (X = PX{+}Q)^{\mathbf{sol}}$ in quanto questo accade [.11.1.5(m)] in ogni CKA e quindi anche in $S \in$ **SKA**. $X' \in (X = PX{+}Q)^{\mathbf{sol}} \iff X' = PX'{+}Q \Longrightarrow Q \leq X' \Longrightarrow PQ \leq PX' \leq PX'{+}Q = X' \Longrightarrow P^2Q \leq PX' \leq PX'{+}Q = X' \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow P^nQ \leq PX' = PX'{+}Q = X' \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow P^*Q = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} P^nQ \leq X'$ e quindi (i) ; similmente (ii) ∎

T72:b.27 Prop. $(X = PX{+}1)^{\mathbf{sol\ min}} = (X = XP{+}1)^{\mathbf{sol\ min}} = P^*$.

T72:c. Algebre di Kleene normali e regolari

T72:c.01 Si dice **algebra di Kleene normale**, abbreviata con NKA, ogni sistema $\langle N, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ ove $N \subseteq S$ con $\langle S, \sum, \cdot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle \in \mathbf{SKA}$; $+$ è la riduzione a $N \times N$ di $\sum$; * è la star-chiusura su S ed $N[+\cdot^*] = N$.

La classe delle NKA's si indica con **NKA**.

T72:c.02 Si dice **algebra di Kleene regolare**, abbreviata con RKA, ogni sistema $\langle N, +, \cdot, ^*, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ il quale soddisfa tutte le proprietà valide universalmente in tutte le SKA's (ovvero in tutte le NKA's) ove, naturalmente, i ruoli sono: $+$:= somma (operazione binaria di monoide abeliano), $\cdot$:= prodotto (operazione binaria di monoide), * := star-chiusura, $\mathbf{0}$:= elemento neutro rispetto alla somma e $\mathbf{1}$:= elemento neutro per il prodotto.

La classe delle RKA's si indica con **RKA**.

T72:c.03 Teorema **SKA** $\subset$ **NKA** $\subset$ **RKA** $\subset$ **CKA** .
Dim.: Nell'ambito di una SKA S, in generale, si possono individuare più NKA's: basta prendere $T \subseteq S$ e quindi $N = T[+\cdot^*]$. In particolare può risultare $N = S$ e quindi **SKA** $\subseteq$ **NKA**. Che sia **SKA** $\subset$ **NKA** discende dal fatto che $\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}} = \{a_1, ..., a_n\}[+\cdot^*] \in \mathbf{NKA}\setminus\mathbf{SKA}$, cosa evidente quando si considera che $\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}} \subseteq \mathbf{L}_{\{a_1,...,a_n\}} \in$ **SKA** e che $\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}} \sum = \mathbf{L}_{\{a_1,...,a_n\}}$.

In ogni NKA valgono tutte le proprietà universalmente valide in tutte le SKA's e quindi $\mathsf{NKA} \subseteq \mathsf{RKA}$. Le considerazioni svolte in [.11.2.4] possono considerarsi come la verifica della validità degli assiomi di **CKA**, [CKA1],...,[CKA14], in una RKA e quindi $\mathsf{RKA} \subseteq \mathsf{CKA}$.
Si può mostrare inoltre [Conway (1971) p.102] per la CKA finita di [.11.1.8(b)] f, che $f \in \mathsf{RKA} \setminus \mathsf{NKA}$ e [Conway (1971) p.118] che dagli assiomi per **CKA** non si possono ricavare gli assiomi per **RKA** in modo che $\mathsf{RKA} \subset \mathsf{CKA}$∎

T72:c.04 Per ogni RKA e per ogni NKA, come per ogni SKA, valgono tutte le proprietà ricavate in [.11.1] per le CKA's. Per le RKA's e le NKA's valgono inoltre le relazioni riguardanti le operazioni $+, \cdot$ e * ottenute nell'ambito delle SKA's come ad ed. [.11.2.6(a)].

$\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}} \in \mathsf{NKA} \setminus \mathsf{SKA}$, giustifica la denominazione di NKA libera finitamente generata da $a_1, ..., a_n$ per $\mathbf{R}_{\{a_1,...,a_n\}}$. Si noti che, per $L_1, ..., L_m \in \mathbf{L}_A$, $\{L_1, ..., L_m\}[+\cdot^*] \in \mathsf{NKA}$ e $\{L_1, ..., L_m\}[+\cdot^*] \leq_{nka} \mathbf{L}_A$. Queste considerazioni a causa di (a) precisano alcune cose esposte in [.11.1.8].

T72:d. Matrici su algebre di Kleene standard e regolari

T72:d.01 Consideriamo $S \in \mathbf{SKA}$, due insiemi I e J e l'insieme della matrici rettangolari con le righe indiciate da I, le colonne da J e le entrate da S, $\{I \times J \longmapsto S\} = \mathbf{SMt_{IJ}}$.

In particolare si ha l'insieme delle matrici di tipo $I \times J$ di linguaggi su A: $\mathbf{L_A Mt_{IJ}}$.

Definiamo come **matrice nulla** di $\mathbf{SMt_{IJ}}$: ${}_{(IJ)}\mathbf{0} = [\ \mathbf{0}\ \mid i \in I, j \in J]$ e come sommatoria su $\mathbf{SMt_{IJ}}$, l' operazione: ${}_{(IJ)}\sum \in \{\mathbf{SMt_{IJ}}^{\mathfrak{P}} \longmapsto \mathbf{SMt_{IJ}}\}$ che, se $\{M^{(t)} \mid t \in T\} \in \mathbf{SMt_{IJ}}$ con $M^{(t)} = [M_{ij}{}^{(t)} | i \in I, j \in J]$, ${}_{(IJ)}\sum_{t\in T} M^{(t)} = [\sum_{t\in T} M_{ij}{}^{(t)} \mid i \in I, j \in J]$.

T72:d.02 Prop. ${}_{(IJ)}\sum_{t\in\emptyset} M^{(t)} = {}_{(IJ)}\mathbf{0}$.
Dim.: [SKA1] ∎

T72:d.03 Prop. ${}_{(IJ)}\sum_{t\in\{a\}} M^{(t)} = M^{(a)}$.
Dim.: [SKA2] ∎

T72:d.04 (c) **Prop.** ${}_{(IJ)}\sum_{t\in T}({}_{(IJ)}\sum_{u\in U_t} M^{(u)}) = {}_{(IJ)}\sum_{u\in(\cup_{t\in T}U_t)} M^{(u)} \quad \forall T, \ \{U_t \mid t \in T\}$.
Dim.: [SKA3] ∎

T72:d.05 Prop. Scrivendo $M^{(t_1)}\ {}_{(IJ)}{+}\ M^{(t_2)}$ in luogo di ${}_{(IJ)}\sum_{t\in\{t_1,t_2\}} M^{(t)}$ come in [.11.2.2] si ricava che $\langle \mathbf{SMt_{IJ}}, {}_{(IJ)}{+}, {}_{(IJ)}\mathbf{0}\rangle \in \mathbf{AbMnd}$.

T72:d.06 Definiamo come **prodotto** di due matrici (conformabili) appartenenti rispettivamente a $\mathbf{SMt_{IJ}}$ ed $\mathbf{SMt_{JK}}$ l'operazione ${}_{(IJK)}\cdot \in \{\mathbf{SMt_{IJ}} \times \mathbf{SMt_{JK}} \longmapsto \mathbf{SMt_{IJ}}\}$ che, se $M = [\ M_{ij} \mid i \in I, j \in J] \in \mathbf{SMt_{IJ}}]$ ed $N = [\ N_{jk} \mid j \in J, k \in K]$ fornisce $M \cdot_{(IJK)} N = [\ \sum_{j\in J} M_{ij} \cdot N_{jk} \mid i \in I, k \in K] \in \mathbf{SMt_{IK}}$.

Definiamo come **matrice unità** di $\mathbf{SMt_{IK}}$ la matrice quadrata ${}_{(II)}\mathbf{1} = [u_{ij} | i \in I, j \in J]$ con $u_{ii} = \mathbf{1} \in S$ ed $u_{ij} = \mathbf{0} \in S$ per $i \neq j$.

T72:d.07 Prop. $\forall M \in \mathbf{SMt_{IJ}},\ N \in \mathbf{SMt_{JK}},\ P \in \mathbf{SMt_{KL}}$
$(M \cdot_{(IJK)} N) \cdot_{(JKL)} P = M \cdot_{(IJK)} (N \cdot_{(JKL)} P)$.

Dim.: Utilizzando [SKA7] e [SKA4], si ha che:
$\left[\ \sum_{j\in J} M_{ij}\cdot N_{jk} \mid i\in I, k\in K\right] \cdot_{(JKL)} \left[P_{kl} \mid k\in K, l\in L\right] =$
$= \left[\sum_{k\in K}\left((\sum_{j\in J} M_{ij}\cdot N_{jk})\cdot P_{kl}\right)|i\in I, l\in L\right] =$
$= \left[\sum_{\langle j,k\rangle\in J\times K} M_{ij}\cdot (N_{jk}\cdot P_{kl})|i\in I, l\in L\right] =$
$= \left[M_{ij} \mid i\in I, j\in J\right] \cdot_{(IJK)} \left[\sum_{k\in K} N_{jk}\cdot P_{kl}|j\in J, l\in L\right]$ ∎

T72:d.08 Prop. $\forall M\in \mathbf{SMt_{IJ}}\quad {}_{(II)}\mathbf{1}\cdot_{(IIJ)} M = M$ e $M\cdot_{(IJJ)}\ {}_{(II)}\mathbf{1} = M$.
Dim.: Segue subito da [SKA5], [SKA6], [CKA7] e [CKA8] come visto in [.11.2.4] e [.11.2.2(b)] ∎

T72:d.09 Prop. $\langle \mathbf{SMt}_{II}, \cdot_{(III)}, {}_{(II)}\mathbf{1}\rangle \in \mathbf{Mnd}$.
Dim.: Segue da (a) e (b) ∎

T72:d.10 Prop. $\forall\{M^{(t)}|t\in T\}\subseteq \mathbf{SMt_{IJ}},\quad \forall\{N^{(u)}|u\in U\}\subseteq \mathbf{SMt_{JK}}$
$({}_{(IJ)}\sum_{t\in T} M^{(t)})\cdot_{(IJK)} ({}_{(JK)}\sum_{u\in U} N^{(u)}) = {}_{(IK)}\sum_{\langle t,u\rangle\in T\times U} M^{(t)}\cdot_{(IJK)} N^{(u)}$.
Dim.: Utilizzando [SKA7] e [SKA3], si ha che:
$\left[\sum_{t\in T} {M_{IJ}}^{(t)}|\ i\in Ij\in J\right] \cdot_{(IJK)} \left[\sum_{u\in U} {N_{jk}}^{(u)}|\ j\in J, k\in K\right] =$
$= \left[\sum_{j\in J}\left((\sum_{t\in T} {M_{ij}}^{(t)})\cdot(\sum_{u\in U} {N_{jk}}^{(u)})\right)|i\in I, k\in K\right] =$
$= \left[\sum_{j\in J}(\sum_{\langle t,u\rangle\in T\times U} {M_{ij}}^{(t)}\cdot {N_{jk}}^{(u)})|i\in I, k\in K\right] =$
$= \left[\sum_{\langle t,u\rangle\in T\times U}(\sum_{j\in J} {M_{ij}}^{(t)}\cdot {N_{jk}}^{(u)})|i\in I, k\in K\right] =$
$= {}_{(JK)}\sum_{\langle t,u\rangle\in T\times U}\left[\sum_{j\in J} {M_{ij}}^{(t)}\cdot {N_{jk}}^{(u)}|i\in I, k\in K\right]$ ∎

T72:d.11 $\langle \mathbf{SMt}_{(II)},\ +_{(II)},\ \cdot_{(III)},\ {}_{(II)}\mathbf{0},\ {}_{(II)}\mathbf{1}\rangle \in \mathbf{USring}$.
Dim.: Ciò segue da [.11.4.1(d)], (c) e (d) ∎

T72:d.12 Teorema Consideriamo $S\in \mathbf{SKA}$ e un insieme I. $\mathbf{SMt}_{I,I}\in \mathbf{SKA}$.
Dim.: Che $\mathbf{SMt}_{I,I}$ soddisfi [SKA1], [SKA2],[SKA3],[SKA4],[SKA5],[SKA6], e [SKA7] lo si è dimostrato in [.11.4.1(a),(b),(c)] e [.11.4.2(a),(b),(d)] rispettivamente ∎

T72:d.13 In particolare sono SKA's $\mathbf{SMt}_{nn}$, insieme delle matrici $n\times n$ con entrate in $S\in \mathbf{SKA}$, $\mathbf{L_A Mt}_{II}$, insieme delle matrici quadrate qualsiasi (finite o infinite) di linguaggi.
A queste matrici si applicano tutte le considerazioni generali sulle SKA's. In particolare tale insiemi di matrici costituiscono NKA's, RKA's e CKA's ; per esse si possono definire le operazioni $+$ e * e la relazione $\leq$; per esse valgono le formule dimostrate in [.11.1] e [.11.2.6(a)] che interessa soprattutto nelle seguenti forme.

T72:d.14 Prop. Consideriamo $A\subset_F \mathbf{A}$, $n\in\mathbb{N}$, $P,Q\in \mathbf{L_A Mt}_{nn}$.
Le equazioni matriciali $X = PX{+}Q$ e $Y = YP{+}Q$ ammettono le soluzioni minime P^*Q e QP^*.

T72:d.15 Prop. Consideriamo $S\in\mathbf{SKA}$, $n\in\mathbb{N}$, $P\in \mathbf{SMt}_{nn}$, $S\in \mathbf{SMt}_{n1}$, $R\in \mathbf{SMt}_{1n}$ e le equazioni:
$Z = PZ{+}R$ avente incognite in $\mathbf{SMt}_{n1}$,
$W = WP{+}S$ avente incognite in $\mathbf{SMt}_{1n}$.
Tali equazioni ammettono le soluzioni minime $Z = P^*R$ e $W = SP^*$.
Dim.: Ci si riconduce al caso visto in (b) considerando come Q rispettivamente la matrice aventi n colonne coincidenti con R ed n righe coincidenti con S. Le soluzioni minime X e Y presentano rispettivamente n colonne uguali a P^*R ed n righe uguali a SP^*. Queste forniscono la Z e la W richieste ∎

T72:d.16 Prop. Consideriamo $S \in \mathbf{SKA}$, gli insiemi I, J e $K = I \dot\cup J$, $A \in \mathbf{SMt}_{II}, B \in \mathbf{SMt}_{IJ}, C \in \mathbf{SMt}_{JI}, D \in \mathbf{SMt}_{JJ}$ ed $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbf{SMt}_{KK}$.

Allora $M^* = \begin{bmatrix} (A+BD^*C)^* & A^*B(D+CA^*B)^* \\ D^*C(A+BD^*C)^* & (D+CA^*B)^* \end{bmatrix}$.

Dim.: Posto $M^* = {}_{(KK)}\mathbf{1}+M+M^2+... = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$ e utilizzando [.11.1.4(a)] si ha :

$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_{(II)}\mathbf{1} & {}_{(IJ)}\mathbf{0} \\ {}_{(JI)}\mathbf{0} & {}_{(JJ)}\mathbf{1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$

e quindi:

(I) $E = {}_{(II)}\mathbf{1}+AE+BG$

(II) $F = AF+BH$

(III) $G = CE+DG$

(IV) $H = {}_{(JJ)}\mathbf{1}+CF+DH$

(II) $\Longrightarrow$ [.11.4.3(c)] $\Longrightarrow F \geq A^*BH \Longrightarrow$ (IV) $\Longrightarrow H \geq \mathbf{1}+CA^*BH+DH \Longrightarrow H \geq \mathbf{1}+(CA^*B+D)H \geq \mathbf{1}+(CA^*B+D)+(CA^*B+D)^2H \geq \cdots \Longrightarrow M \geq (CA^*B+D)^*$: (V)

(III) $\Longrightarrow$ [.11.4.3(c)] $\Longrightarrow G \geq D^*CE \Longrightarrow$ (I) $\Longrightarrow E \geq \mathbf{1}+AE+BD^*CE \Longrightarrow E \geq \mathbf{1}+(A+BD^*C)E \geq \mathbf{1}+(A+BD^*C)+(A+BD^*C)^2E \geq \cdots \Longrightarrow E \geq (A+BD^*C)^*$: (VI)

(II), (V) $\Longrightarrow F \geq A^*B(CA^*B+D)^*$: (VII)

(III),(VI) $\Longrightarrow G \geq D^*C(A+BD^*C)^*$: (VIII)

Si verifica poi che (I), (II), (III) e (IV) sono soddisfatte dai secondi membri di (VI), (VII), (VIII) e (V), cioè che :

$(A+BD^*C)^* = 1+A(A+BD^*C)^*+BD^*C(A+BD^*C)^*$
$A^*B(CA^*B+D)^* = AA^*B(CA^*B+D)^*+B(CA^*B+D)^*$.
$D^*C(A+BD^*C)^* = C(A+BD^*C)^*+DD^*C(A+BD^*C)^*$.
$(CA^*B+D)^* = \mathbf{1}+CA^*B(CA^*B+D)^*+(CA^*B+D)^*$.

e quindi la formula data per M^* ▮

T72:d.17 Coroll.: Siano A, B, C e D come in (a).

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A^*BD^*C)^*A^* & (A^*BD^*C)^*A^*BD^* \\ (D^*CA^*B)^*D^*CA^* & (D^*CA^*B)^*D^* \end{bmatrix} .$$

Dim.: Segue da (a) e da [CKA11] ed è valido, come ogni altra relazione per le CKA's, per ogni espressione regolare costituita con matrici conformabili su una SKA ▮

T72:d.18 Coroll.: Consideriamo $S \in \mathbf{SKA}$, $n \in \mathbb{N}$ ed $M \in \mathbf{SMt}_{nm}$. Le entrate di M^* sono elementi di S dati da espressioni regolari nelle entrate di M.

Dim.: La cosa è ovvia per $n = 1$ ed (a) applicato al caso in cui I, J e K sono insiemi finiti che fornisce la formula che consente di passare da $\mathbf{SMt}_{mm}$ ed $\mathbf{SMt}_{nn}$ ad $\mathbf{SMt}_{m+n,m+n}$ ▮

T72:d.19 Prop. Consideriamo $N \in \mathsf{NKA}$ ed $n \in \mathsf{NKA}$. $\mathbf{NMt}_{nn} \in \mathsf{NKA}$.

Dim.: Consideriamo $S \in \mathbf{SKA}$ tale che $N \leq_{nka} S$ ed $\mathbf{SMt}_{nn}$. Evidentemente $\mathbf{NMt}_{nn} \subseteq \mathbf{SMt}_{nn} \in \mathbf{CKA}$ ed $\mathbf{NMt}_{nn}[+\cdot] = \mathbf{NMt}_{nn}$; [.11.4.4(c)] $\Longrightarrow \mathbf{NMt}_{nn}{}^*[^*] = \mathbf{NMt}_{nn}$ e quindi segue l'asserto ▮

T72:d.20 Prop. $\forall A \subset_F \mathbf{A}$ ed $n \in \mathbb{N}$: $\mathbf{R}_A\mathbf{Mt}_{nn} \in \mathsf{NKA}$.

Dim.: Consideriamo $\langle C,+,\cdot,^*,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle \in \mathbf{CKA}$, $n \in \mathbb{N}$ ed $\mathbf{CMt}_{nn}$. Su $\mathbf{CMt}_{nn}$ definiamo la somma e il prodotto nel modo usuale: se $M = [M_{ij}|i,j = 1,...,n]$ ed $N = [N_{ij}|i,j = 1,...,n]$ si pone $M+N = [M_{ij}+N_{ij}|i,j = 1,...,n]$ ed $M\cdot N = [\sum_{j=1}^{n} M_{ij}N_{jk}|i,k = 1,...,n]$; definiamo inoltre la * chiusura induttivamente su n servendoci della formula data da [.11.4.4(a)] o equivalentemente da quella data da [.11.4.4(b)] ▮

T72:d.21 Prop. Consideriamo $R \in \mathsf{RKA}$ ed $n \in \mathbb{N}$. $\mathbf{RMt}_{nn} \in \mathbf{RKA}$.

Dim.: Interpretando ogni uguaglianza riguardante elementi di $\mathbf{RMt}_{nn}$ come n^2 uguaglianze tra le loro entrate, si vede che queste uguaglianze sono valide in ogni SKA e che quindi l'uguaglianza di partenza vale per tutte le algebre $\mathbf{R}'\mathbf{Mt}_{nn}$ con $\mathbf{R}' \in \mathbf{RKA}$ ▮

T72:d.22 Consideriamo $C \in \mathsf{CKA}$ ed $n \in \mathbb{N}$. $\mathbf{CMt}_{nn} \in \mathsf{CKA}$.

Dim.: Sviluppata in [Conway (1971) pp. 110-115] ▮

T72:e. Composizioni dettate da linguaggi

T72:e.01 Consideriamo $X \subset_F \mathbf{A}$, con $X^\sharp = k$, $L \in \mathbf{L}_X$ ed $S \in \mathbf{SKA}$.

Diciamo **funzione dedotta** da L e riguardante S:

$$L^{FUN}|_{S^k} := \ulcorner \langle E_1,...,E_k\rangle \mapsto \sum_{x_{\alpha_1},...,x_{\alpha_n}\in L} (E_{\alpha_1},...,E_{\alpha_n})|E_i \in S \urcorner \in \{S^{K}\!\mapsto S\} \ .$$

Diciamo **funzione dedotta** da L il complesso delle funzioni precedenti riguardanti tutte le le SKA's:

$$L^{FUN} := \dot\cup_{S\in\mathbf{SKA}} L^{FUN}|_{S^k} \in \dot\cup_{S\in\mathbf{SKA}} \{S^{k}\!\mapsto S\} \ .$$

T72:e.02 Si noti che dalle diverse espressioni che possono fornire L si ottiene una sola L^{FUN}: infatti queste espressioni si riconducono una all'altra in conseguenza degli assiomi [SKA1],...,[SKA7] validi in ogni SKA.

Si noti che su L^{FUN} non influisce X ma solo $X^\sharp$, cioè se $L' \in \mathbf{L}_Y$, con $Y^\sharp = X^\sharp$ è ottenuto associando biunivocamente i simboli di Y a quelli di X e sostituendoli in L, $L^{FUN} = L'^{FUN}$. Quindi per quanto riguarda L^{FUN} non interessa tanto specificare $L \in \mathbf{L}_X$ quanto $L \in \mathbf{L}_k$.

T72:e.03 Per indicare l'azione di una L^{FUN} su particolari tipi di SKA's conviene usare notazioni più particolari così L^{FUN} indica la **restrizione** di L^{FUN} ai linguaggi, cioè $L^{FUN} = L^{FUN}|_{\mathbf{L}^k} \in \{\mathbf{L}^{k}\!\mapsto \mathbf{L}\}$; useremo poi L^{pfun} ed L^{bfun} per indicare rispettivamente la restrizione di L^{FUN} alle p-algebre ed alle b-algebre di operatori additivi sui linguaggi, cioè $L^{pfun} = L^{FUN}|_{(\mathbf{L}^{PSKA})^k}$ $\quad L^{bfun} = L^{FUN}|_{(\mathbf{L}^{BSKA})^k}$.

T72:e.04 Talora interessano le **classi di funzioni** dedotte da classi di linguaggi $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{L}$: scriveremo allora $\mathbf{X}^{FUN} = \{L^{FUN}|L \in \mathbf{X}\}$, $\mathbf{X}^{fun} = \{L^{FUN}|_{\mathbf{L}}\ |L \in \mathbf{X}\}$, $\mathbf{X}^{pfun} = \{L^{FUN}|_{\mathbf{L}^{PSKA}}|L \in \mathbf{X}\}$, e $\mathbf{X}^{bfun} = \{L^{FUN}|_{\mathbf{L}^{BSKA}}|L \in \mathbf{X}\}$.

Ad esempio potrebbero interessare ${\mathbf{L}_x}^{FUN}$, ${\mathbf{P}_x}^{fun}$, ${\mathbf{R}_x}^{pfun}$, ed ${\mathbf{F}_x}^{bfun}$ o meglio ${\mathbf{L}_k}^{FUN}$, ${\mathbf{P}_k}^{fun}$, ${\mathbf{R}_k}^{pfun}$, ed ${\mathbf{F}_k}^{bfun}$.

Mediante l'applicazione ^{fun} a partire da classi di linguaggi se ne individuano di nuove. Se $\mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k \subseteq \mathbf{L}_A$ e $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{L}_k$ $\quad \langle \mathbf{X}_1, ..., \mathbf{X}_k \rangle \mathbf{Y}^{fun} = \{\langle X_1, ..., X_k \rangle Y^{fun} | X_i \in \mathbf{X}_i, Y \in \mathbf{Y}\}$; se $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{L}$ $\langle \mathbf{X} \rangle \mathbf{Y}^{fun} = \{\langle X_1, ..., X_h \rangle Y^{fun} | h \in \mathbb{N}, X_i \in \mathbf{X}_i, Y \in \mathbf{Y}\}$.

T72:e.05 Delle funzioni dedotte da linguaggi $\mathbf{L}^{FUN}$, sono effettivamente utilizzabili solo quelle in cui L è fornito da una espressione maneggevole. Così si possono effettivamente utilizzare $\mathbf{P}^{FUN}$ ed $\mathbf{R}^{FUN}$ e varie funzioni di $\mathbf{F}^{FUN}$ come ad es. $(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n y^n)^{FUN}$ ed alcune altre funzioni come $(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n y^n z^n)^{FUN}$. Ad esempio:

(1) $\langle ab^2, b{+}ba, \mu{+}ab \rangle (\mu{+}x^2y{+}z^2x)^{fun} = \mu{+}ab^2{+}abab^2{+}abababab^2{+}ab^2ab^3{+}ab^2ab^3a$.

(2) $\langle \mu{+}a{+}b^2, b^2{+}b^*ab^* \rangle \big((x{+}y)^*(\mu{+}x^2)\big)^{fun} = (b^2{+}b^*ab^*)^* = (a{+}b)^*{+}b(b^2)^*$.

(3) $\langle a^2, b^3 \rangle (\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n y^n)^{fun} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^{2n} b^{3n}$.

(4) $\langle \sum_{a \in A} a, \sum_{a \in A} a, \sum_{a \in A} a \rangle (\sum x^n y^n z^n)^{fun} = (A^3)^*$.

T72:e.06 Prop. Consideriamo $L, M \in \mathbf{L}_k$, $E_i, F_i \in S$ $\; i = 1, ..., k$, $L \leq M$, $E_i \leq F_i$ $(i = 1, ..., k) \Longrightarrow \langle E_1, ..., E_k \rangle L^{FUN} \leq \langle F_1, ..., F_k \rangle M^{FUN}$.

Dim.: Discende direttamente da $E_i \leq F_i \Longrightarrow E_1{\cdot}E_2 \leq F_1{\cdot}F_2$ e $G_j \leq H_j, j \in J \Longrightarrow \sum_{j \in J} G_j \leq \sum_{j \in J} H_j$, valide in ogni SKA e le generalizza ∎

T72:e.07 Prop. Consideriamo $E_i \in S \in \mathbf{SKA}$ $i = 1, ..., h, L_j \in \mathbf{L}_k$ $j = 1, ..., l$ ed $M \in \mathbf{L}_l$:
$\langle E_1, ..., E_k \rangle \big(\langle L_1, ..., L_l \rangle M^{fun}\big)^{FUN} = \big\langle \langle E_1, ..., E_k \rangle {L_1}^{FUN}, ..., \langle E_1, ..., E_k \rangle {L_l}^{FUN} \big\rangle M^{FUN}$.

Dim.: $\langle E_1, ..., E_k \rangle (\sum_{y_{\beta_1}, ..., y_{\beta_s} \in M} L_{\beta_1} {\cdot} ... {\cdot} L_{\beta_s})^{FUN} =$
$= \sum_{y_{\beta_1}, ..., y_{\beta_s} \in M} (\sum_{x_{\alpha_1}, ..., x_{\alpha_r} \in L_{\beta_1} \cdot ... \cdot L_{\beta_s}} (E_{\alpha_1} {\cdot} ... {\cdot} E_{\alpha_r}) =$
$= \sum_{y_{\beta_1}, ..., y_{\beta_s} \in M} \Big((\sum_{x_{\alpha_{11}}, ..., x_{\alpha_{rt_1}} \in L_{\beta_1}} E_{\alpha_{11}} {\cdot} ... {\cdot} E_{\alpha_{1t_1}}) \cdots (\sum_{x_{\alpha_{r1}}, ..., x_{\alpha_{rt_r}} \in L_{\beta_r}} E_{\alpha_{11}} {\cdot} ... {\cdot} E_{\alpha_{rt_r}}) \Big)$ ∎

T72:e.08 Sia $L \in \mathbf{L}_{\{a_1, ..., a_n\}}.\mathbf{L} = \langle a_1, ..., a_n \rangle \mathbf{L}^{fun}$.

T72:f. Costruzioni guidate da un linguaggio

T72:f.01 Vediamo ora come da un linguaggio sopra un alfabeto si possono ricavare per ogni SKA indicazioni di costruzioni da effettuarsi sopra elementi associati univocamente ai caratteri dell'alfabeto.

In generale si considerano un alfabeto A di k caratteri, il linguaggio $L \in \mathbf{L}_A$ e l'algebra $S \in \mathbf{SKA}$ e si definisce una funzione $L^{fun_S} \in \{S^k \mapsto S\}$.

T72:f.02 Cominciamo con le costruzioni guidate da un linguaggio polinomiale su tre lettere molto semplice, $P := \mu{+}ab{+}ab^2c$.

Nel caso S = **Lng** si definisce $P^{fun_{Lng}}$ come la funzione che alle stringhe μ, a e b associa $\langle \mu, a, b \rangle P^{fun} = \mu{+}ab{+}ab^2c$.
Ai linguaggi L_a, L_b, L_c $P^{fun_{Lng}}$ associa il linguaggio $\langle L_a, L_b, L_c \rangle P^{fun_{Lng}} = \mu{+}L_aL_b{+}L_a{L_b}^2L_c$.

Per una generica $S \in$ **SKA** e per tre suoi elementi $S_a, S_b, S_c \in S$ si chiede la costruzione dell'elemento di S: $\langle S_a, S_b, S_c \rangle P^{fun_S} = \mathbf{1}{+}S_aS_b{+}S_a{S_b}^2S_c$.

T72:f.03 Questo procedimento interessa particolarmente per le algebre di operatori sui linguaggi: si tratta di comporli secondo le indicazioni del linguaggio.
Dato che per le SKA di operatori si possono utilizzare due diversi prodotti, p-prodotto e b-prodotto, occorre distinguere quale di queste operazioni si usa. Di conseguenza si distinguono le due funzioni del tipo ^{funs} denotate, rispettivamente, con ^{pfun} e ^{bfun}.
Nel caso del linguaggio P si hanno i due esempi:
$\big\langle\langle w,z\rangle,\langle E,F\rangle,\langle u,v\rangle{+}\langle L,M\rangle^{**}\big\rangle P^{pfun} = 1{+}\langle w,z\rangle{\cdot}\langle E,F\rangle{+}\langle w,z\rangle{\cdot}\langle E,F\rangle(E\cap F)^{zup}{\cdot}(\langle u,v\rangle{+}\langle L,M\rangle)$.
$\big\langle\langle w,z\rangle,\langle E,F\rangle,\langle u,v\rangle{+}\langle L,M\rangle^{**}\big\rangle P^{bfun} == 1{+}\langle w,z\rangle : \langle E,F\rangle{+}\langle E^2,F^2\rangle : \big(\langle u,v\rangle{+}\langle L,M\rangle^{**}\big)$.

T72:f.04 Le funzioni ^{funs} più usate sono quelle in cui il linguaggio guida è razionale: una espressione razionale che lo genera dà molto chiaramente la modalità di composizione degli elementi di S ed in particolare degli operatori.

T72:f.05 Dato $L\in\mathbf{L}_{\{a_1,...a_k\}}$ $L=\sum_{x_{\alpha_1},...,x_{\alpha_h}\in L} x_{\alpha_1}{\cdot}...{\cdot}x_{\alpha_h}$, data $S=\langle S,\sum,\odot,\mathbf{0},\mathbf{1}\rangle\in\mathbf{SKA}$, definisco $\langle S_1,...,S_n\rangle L^{fun}=\sum_{\alpha_1,...,\alpha_h\in L} S_{\alpha_1}\odot...\odot S_{\alpha_h}$ e questo definisce la funzione associata ad L. Il risultato è un elemento di S. $L^{fun}\in\{S^{k}{\mid}{\longrightarrow\!\!\triangleright}\, S\}$.

T72:f.06 Dato $E=\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n y^n$, data $S\in\mathbf{SKA}$ e $\alpha,\beta\in S$: $\langle\alpha,\beta\rangle E^{fun}=\sum\alpha^n\odot\beta^n$.

Consideriamo la b-algebra degli operatori e due suoi elementi $\langle a,b^2\rangle,\langle ab^2{+}a,a\rangle$; si può definire il nuovo operatore:
$\big\langle\langle a,b^2\rangle,\langle ab^2{+}a,a\rangle\big\rangle E^{bfun}=\sum_n\big(\langle a,b^2\rangle:\langle ab^2{+}a,a\rangle^n\big)=\sum_n\big\langle a^n(ab^2{+}a)^n,b^{2n}a^n\big\rangle$.