

Capitolo T40: sistemi di Coxeter e Tits, gruppi da riflessioni, radici

Contenuti delle sezioni

- a. gruppi di Coxeter p.2
- b. sistemi di Tits p.3
- c. iperpiani, camere e faccette p.3
- d. riflessioni p.3
- e. rappresentazione geometrica di un gruppo di Coxeter p.3
- f. trasformazione di Coxeter p.3
- g. sistemi di radici p.4
- h. gruppo di Weyl affine p.4
- i. classificazione di sistemi di radici p.4

4 pagine

T40:0.01 Questo capitolo è dedicato allo studio delle nozioni di teoria dei gruppi e di geometria affine che consentono di stabilire la classificazione delle configurazioni geometriche chiamate “sistemi di radici” e di precisare i procedimenti per la loro manipolazione.

L'importanza dei sistemi di radici è dovuta al fatto che essi permettono di tenere sotto controllo le algebre di Lie semplici e semisemplici, strutture algebriche che a loro volta costituiscono gli strumenti essenziali per il controllo dei gruppi di Lie, cioè dei gruppi di trasformazioni continue e quindi per il controllo delle simmetrie delle figure continue.

T40:a. gruppi di Coxeter

T40:a.01 Si dice **sistema preCoxeter** una coppia $\langle \mathbf{W}, S \rangle$ con $\mathbf{W} = \langle W, \cdot, {}^{-1}, e \rangle \in \mathbf{Grp}$ ed $S \subset W$ tale che $S = S^{-1}$, $e \notin S$, tutti i suoi elementi hanno periodo 2 e $\langle_G S \rangle = \mathbf{W}$.

Si dice **matrice di Coxeter** di un sistema preCoxeter $\mathbf{W} = \langle \mathbf{W}, S \rangle$ la matrice

$$(1) \quad \text{Cox}_{\mathbf{W}} := \left[\langle s, s' \rangle \in S \times S \mapsto \text{prd}(s s') \right] \in \left[S \times S \mapsto \mathbb{P} \dot{\cup} \{+\infty\} \right].$$

(2) Prop.: Una matrice di Coxeter è simmetrica.

Dim.: Sia $(s s')^p = e$; questa implica $s'^2 (s s')^p = s' (s' s)^p s' = s' e s' = e$, ossia $\text{prd}(s s') < +\infty \implies \text{prd}(s' s) = \text{prd}(s s')$.

Se invece $\text{prd}(s s') = +\infty$, allora deve essere $\text{prd}(s' s) \notin \mathbb{P}$ ■

Si dice **sistema di Coxeter** un sistema preCoxeter per il quale vale la condizione seguente

[Cxtr] Se per ogni $\langle s, s' \rangle \in S \times S$ scriviamo $\text{Cox}(s, s') := \text{prd}(s s')$ e denotiamo con Cgen_S l'insieme di tali coppie concernenti periodi finiti, allora $\langle W, \{ \langle s, s' \rangle \in \text{Cgen}_S : (s s')^{\text{Cox}_{\mathbf{W}}(s, s')} = e \} \rangle$ costituisce una presentazione finita di \mathbf{W} .

Le matrici di Coxeter di maggior interesse sono associate a un presistema di Coxeter che ha la qualifica di sistema di Coxeter.

T40:a.02 Un esempio di sistema di Coxeter è costituito dal gruppo simmetrico Sym_n dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$ da considerare ordinato e dall'insieme delle trasposizioni $\{i = 1, 2, \dots, n-1 : \langle i \leftrightarrow i+1 \rangle\}$, dove $\langle x \leftrightarrow y \rangle$ denota lo scambio degli oggetti x e y .

Un altro sistema di Coxeter si ottiene aggiungendo allo stesso Sym_n come insieme dei generatori l'insieme delle $n-1$ trasposizioni $\{j = 2, \dots, n : \langle 1 \leftrightarrow j \rangle\}$.

Un gruppo \mathbf{W} che possa costituire un sistema di Coxeter $\langle \mathbf{W}, S \rangle$ viene detto **gruppo di Coxeter**.

In molti contesti si tratta un sistema di Coxeter $\langle \mathbf{W}, S \rangle$ per il quale l'insieme dei generatori può considerarsi implicito; in genere in questi casi si fa riferimento sbrigativamente solo al gruppo di Coxeter \mathbf{W} . Inoltre, come accade per molti gruppi, \mathbf{W} viene individuato con il suo solo terreno W .

T40:a.03 Altri esempi di sistemi di Coxeter sono costituiti dai gruppi diedrali.

T40:a.04 Dato un qualsiasi sistema di Coxeter $\mathbf{W} = \langle \mathbf{W}, S \rangle$, esiste un epimorfismo $\text{sign}_{\mathbf{W}}$ di W sul gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}_{mg}$ ricavabile dai valori che assume sui generatori $\{s \in S \mapsto -1\}$ e conseguentemente utilizzando la proprietà dell'epimorfismo

$$\forall w = s_{j_1} s_{j_2} \cdots s_{j_\ell} : \text{sign}_{\mathbf{W}}(w) = (-1)^\ell.$$

Questo epimorfismo si dice **segnatura del sistema di Coxeter** \mathbf{W} .

Per manipolarlo conviene aver presente che

$$\forall w, w' \in W : \text{sign}_{\mathbf{W}}(w w') =_2 \text{sign}_{\mathbf{W}}(w) +_2 \text{sign}_{\mathbf{W}}(w').$$

T40:b. sistemi di Tits

T40:b.01

T40:b.02

T40:c. iperpiani, camere e faccette

T40:c.01

T40:c.02

T40:d. riflessioni

T40:d.01

T40:d.02

T40:e. rappresentazione geometrica di un gruppo di Coxeter

T40:e.01

T40:e.02

T40:f. trasformazione di Coxeter

T40:f.01

T40:f.02

T40:g. sistemi di radici

T40:g.01

T40:g.02

T40:h. gruppo di Weyl affine

T40:h.01

T40:h.02

T40:i. classificazione dei sistemi di radici

T40:i.01

T40:i.02

Testi dell'esposizione in <http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/> e in <http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/>