1

Capitolo T40
sistemi di Coxeter e Tits, gruppi da riflessioni, radici

Contenuti delle sezioni

T400.01 Questo capitolo è dedicato allo studio delle nozioni di teoria dei gruppi e di geometria affine che consentono di stabilire la classificazione delle configurazioni geometriche chiamate “sistemi di radici” e di precisare i procedimenti per la loro manipolazione.

L’importanza dei sistemi di radici è dovuta al fatto che essi permettono di tenere sotto controllo le algebre di Lie semplici e semisemplici, strutture algebriche che a loro volta costituiscono gli strumenti essenziali per il controllo dei gruppi di Lie, cioè dei gruppi di trasformazioni continue e quindi per il controllo delle simmetrie delle figure continue.

T40 a. gruppi di Coxeter

T40a.01 Si dice **sistema preCoxeter** una coppia $\langle\, \boldsymbol{W}, S \rangle$ con $\boldsymbol{W} = \langle W, \cdot, ^{-1}, e \rangle \in$ **Grp** ed $S \subset W$ tale che $S = S^{-1}$, $e \notin S$, tutti i suoi elementi hanno periodo 2 e $\langle_G\, S \rangle = \boldsymbol{W}$.
Si dice **matrice di Coxeter** di un sistema preCoxeter $\mathsf{W} = \langle\, \boldsymbol{W}, S \rangle$ la matrice

$$(1) \qquad \mathsf{Cox}_{\mathsf{W}} := \lceil\, \langle s, s' \rangle \in S \times S \;\not\vdash\; \mathrm{prd}(s\, s')\, \rceil \in \lceil\, S \times S \longmapsto \mathbb{P} \dot\cup \{+\infty\} \,\rceil\ .$$

(2) Prop.: Una matrice di Coxeter è simmetrica.

Dim.: Sia $(s\, s')^p = e$; questa implica $s'^2\, (s\, s')^p = s'\, (s'\, s)^p\, s' = s'\, e\, s' = e$, ossia $\mathrm{prd}(s\, s') < +\infty \Longrightarrow \mathrm{prd}(s'\, s) = \mathrm{prd}(s\, s')$.
Se invece $\mathrm{prd}(s\, s') = +\infty$, allora deve essere $\mathrm{prd}(s'\, s) \notin \mathbb{P}$ ∎

Si dice **sistema di Coxeter** un sistema preCoxeter per il quale vale la condizione seguente

[Cxtr] Se per ogni $\langle s, s' \rangle \in S \times S$ scriviamo $\mathsf{Cox}(s, s') := \mathrm{prd}(s\, s')$ e denotiamo con $Cgen_S$ l'insieme di tali coppie concernenti periodi finiti, allora $\langle W, \{\langle s, s' \rangle \in Cgen_S :|\ (s\, s')^{\mathsf{Cox}_{\mathsf{W}}(s,s')=e}\rangle$ costituisce una presentazione finita di $\boldsymbol{W}$.

Le matrici di Coxeter di maggior interesse sono associate a un presistema di Coxeter che ha la qualifica di sistema di Coxeter.

T40a.02 Un esempio di sistema di Coxeter è costituito dal gruppo simmetrico Sym_n dell'insieme $\{1, 2, ..., n\}$ da considerare ordinato e dall'insieme delle trasposizioni $\{i = 1, 2, ..., n-1 :|\ \langle i \leftrightarrow i+1 \rangle\}$, dove $\langle x \leftrightarrow y \rangle$ denota lo scambio degli oggetti x e y.

Un altro sistema di Coxeter si ottiene aggiungendo allo stesso Sym_n come insieme dei generatori l'insieme delle $n-1$ trasposizioni $\{j = 2, ..., n :|\ \langle 1 \leftrightarrow j \rangle\}$.

Un gruppo $\boldsymbol{W}$ che possa costituire un sistema di Coxeter $\langle \boldsymbol{W}, S \rangle$ viene detto **gruppo di Coxeter**.
In molti contesti si tratta un sistema di Coxeter $\langle \boldsymbol{W}, S \rangle$ per il quale l'insieme dei generatori può considerarsi implicito; in genere in questi casi si fa riferimento sbrigativamente solo al gruppo di Coxeter $\boldsymbol{W}$. Inoltre, come accade per molti gruppi, $\boldsymbol{W}$ viene individuato con il suo solo terreno W.

T40a.03 Altri esempi di sistemi di Coxeter sono costituiti dai gruppi diedrali.

T40a.04 Dato un qualsiasi sistema di Coxeter $\mathsf{W} = \langle \boldsymbol{W}, S \rangle$, esiste un epimorfismo $\mathrm{sign}_{\mathsf{W}}$ di W sul gruppo moltiplicativo $\{1, -1\}_{mg}$ ricavabile dai valori che assume sui geeratori $\lceil s \in S \;\not\vdash\; -1 \rceil$ e conseguentemente utilizzando la proprietà dell'epimorfismo

$$\forall w = s_{j_1}\, s_{j_2}\, \cdots\, s_{j_\ell}\ :\ \mathrm{sign}_{\mathsf{W}}(w) = (-1)^\ell\ .$$

Questo epimorfismo si dice **segnatura del sistema di Coxeter** W.

Per manipolarlo conviene aver presente che

$$\forall w, w' \in \mathsf{W}\ :\ \mathrm{sign}_{\mathsf{W}}(w\, w') =_2 \mathrm{sign}_{\mathsf{W}}(w) +_2 \mathrm{sign}_{\mathsf{W}}(w')\ .$$