Capitolo T34:
spazi di Hilbert

Contenuti delle sezioni

14 pagine

T34:**0.01** Questo capitolo contiene i primi elementi della teoria degli spazi di Hilbert trattati.

Anche la presentazione di queste nozioni cerca di essere del tutto autonoma e per questo non si preoccupa di riprendere elementi esposti anche in altri capitoli.

T34:a. spazi di Hilbert [1]

T34:**a.01** Uno **spazio di Hilbert** $\boldsymbol{H}$ si ottiene arricchendo uno spazio vettoriale sui campo dei numeri complessi $\langle H, +, \mathbf{0}_H, \cdot, \mathbb{C}_{Fld} \rangle$ con un **prodotto scalare**, cioè con una funzione che a due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \boldsymbol{H}$ associa un numero complesso che qui denotiamo con $\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle$, funzione-CCtC alla quale si chiedono tre proprietà.

La prima è la **linearità del prodotto scalare nel suo secondo argomento**:

$$\langle \mathbf{v} \,|\, c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 \rangle \;=\; c_1\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w}_1 \rangle + c_2\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w}_2 \rangle \;. \tag{1}$$

La seconda è l'**hermiticità del prodotto scalare**: scambiando i suoi argomenti si ottiene il numero complesso coniugato

$$\langle \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle^* \;. \tag{2}$$

Da queste segue la cosiddetta **antilinearità del prodotto scalare nel suo primo argomento**, cioè:

$$\langle d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{w} \rangle \;=\; {d_1}^*\langle \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{w} \rangle + {d_2}^*\langle \mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{w} \rangle \;, \tag{3}$$

e segue che il prodotto scalare di un vettore per se stesso è un numero reale:

$$\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle^* \;. \tag{4}$$

La terza proprietà è la **definitezza positiva del prodotto scalare** e richiede che per ogni vettore $\mathbf{v} \in H$ sia

$$\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle \;\geq\; 0 \qquad \text{e} \qquad \langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle \;=\; 0 \iff \mathbf{v} \;=\; \mathbf{0}_H \quad . \tag{5}$$

T34:**a.02** La radice quadrata del prodotto scalare di un vettore $\mathbf{v}$ per se stesso si dice **norma del vettore** e si scrive

$$||\mathbf{v}|| \;:=\; \sqrt{\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle} \;.$$

Evidentemente la norma di ogni vettore di uno spazio di Hilbert è un numero positivo, a eccezione della norma del vettore nullo per la quale $||\mathbf{0}_H|| = 0$. Dunque uno spazio di Hilbert è uno spazio normato [G41a10].

Ricordiamo che se si ha $\mathbf{w} = c\,\mathbf{v}$ con c numero complesso, si dice i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori proporzionali.

Si verifica subito che il vettore $\mathbf{v}$ ed il vettore ottenuto moltiplicandolo per un numero complesso di modulo 1, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathbf{v}$ con ϕ reale, hanno la stessa norma.

Interessano in particolare i vettori di norma 1, detti **vettori normalizzati** o **versori**.
Si può trasformare facilmente ogni vettore $\mathbf{v}$ diverso da $\mathbf{0}$ in un vettore proporzionale di norma 1: basta trasformarlo nel vettore $\dfrac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{v} \rangle}}\,\mathbf{v}$, vettore che evidentemente ha norma 1.

T34:**a.03** Due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di uno spazio di Hilbert si dicono **vettori ortogonali** sse il loro prodotto scalare è nullo:

$$\langle \mathbf{v} \,|\, \mathbf{w} \rangle = 0 \;.$$

Per affermare che due elementi di H $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori ortogonali si scrive $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. In questa notazione $\perp$ esprime una relazione entro H che risulta simmetrica e antiriflessiva.

T34:**a.04** Si verifica che costituisce spazio di Hilbert l'insieme $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ delle coppie di numeri complessi $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ con il prodotto scalare definito da

$$(1) \qquad \left\langle \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\rangle := [\,c_1 \quad c_2\,]^* \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \;=\; {c_1}^* \, d_1 + {c_2}^* \, d_2$$

e con il quadrato della norma dato dalla espressione pitagorica

$$(2) \qquad \left\| \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \right\|^2 \;=\; |c_1|^2 + |c_2|^2 \;.$$

Analogamente si verifica anche che costituisce spazio di Hilbert l'insieme $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ delle terne di numeri complessi $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ con il prodotto scalare definito da

$$(3) \qquad \left\langle \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \right\rangle \;:=\; [\,c_1 \quad c_2 \quad c_3\,]^* \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \;=\; {c_1}^* \, d_1 + {c_2}^* \, d_2 + {c_3}^* \, d_3$$

e con il quadrato della norma dato dalla espressione pitagorica

$$(5) \qquad \left\| \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \right\|^2 \;=\; |c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 \;.$$

T34:**a.05** Si trova che in linea di massima le basi più convenienti di uno spazio di Hilbert sono le cosiddette **basi ortonormali**, basi costituite da versori mutuamente ortogonali; queste vengono collegate da particolari matrici non singolari, le matrici ortogonali, matrici le cui inverse coincidono con le proprie trasposte.

Nel seguito denoteremo **SpH** la classe degli spazi di Hilbert, e SpH_n la classe degli spazi di Hilbert con un numero finito n di dimensioni.

Segnaliamo anche che si incontrano anche importanti spazi di Hilbert ai quali si attribuiscono dimensioni non finite.

Consideriamo uno spazio di Hilbert $\boldsymbol{H}_n$ ad n dimensioni e consideriamo una sua base ortonormale $\mathfrak{B} = \{\mathsf{u}_1, ..., \mathsf{u}_n\}$. I suoi vettori (versori) sono in corrispondenza biunivoca con gli interi da 1 ad n; quindi quando è chiara la scelta di una tale base, o quando non interessa in qual modo i suoi elementi sono stati costruiti, questi vettori si possono individuare con le notazioni $|1\rangle$, $|2\rangle$, ..., $|n\rangle$ e si può scrivere $\mathfrak{B} = \{|i\rangle \mid i = 1, ..., n\}$.
La loro ortonormalità si esprime con l'uguaglianza $\langle i \,|\, j \rangle = \delta_{i,j}$ nella quale compare la delta di Kronecker.

T34:**a.06** Facciamo dunque riferimento a una base ortonormale. Un vettore v viene rappresentato dalla matrice $n \times 1$ (vettore colonna):

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} \langle 1 \,|\, \mathsf{v} \rangle \\ \langle 2 \,|\, \mathsf{v} \rangle \\ \dots \\ \langle n \,|\, \mathsf{v} \rangle \end{bmatrix} \;.$$

Ricordiamo che si dice **coniugata hermitiana di una matrice** di numeri complessi M, e si scrive $M^\dagger$, la matrice ottenuta trasponendo la M e trasformando ogni componente nella sua complessa coniugata (o equivalentemente passando alla complessa coniugata della M e poi alla trasposta di questa).

Il vettore v può essere rappresentato equivalentemente dalla matrice coniugata hermitiana del suo vettore colonna, cioè dalla matrice $1 \times n$ (vettore riga):

(2) $$[\,\langle \mathsf{v} \,|\, 1\rangle \quad \langle \mathsf{v} \,|\, 2\rangle \quad \ldots \quad \langle \mathsf{v} \,|\, n\rangle\,] \ .$$

Il prodotto scalare di due vettori v e w si esprime come

(3) $$\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w}\rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} \langle \mathsf{v} \,|\, i\rangle \cdot \langle i \,|\, \mathsf{w}\rangle \ .$$

T34:**a.07** Come in tutti gli spazi vettoriali anche negli spazi di Hilbert rivestono primaria importanza gli operatori lineari; in queste pagine li rappresenteremo con lettere maiuscole incappucciate.

Vediamo come si può rappresentare un operatore lineare $\hat{A}$ su $\boldsymbol{H}_n$, cioè una trasformazione lineare di $\boldsymbol{H}_n$ in se.
Una tale funzione è definita quando si conoscono i risultati delle sue azioni sopra i vettori di una base $\mathfrak{B} = \{\,|i\rangle \ \ |: \ i = 1, 2, ..., n\}$, cioè quando si conoscono i vettori trasformati di quelli di base $\hat{A}|i\rangle$ per $i = 1, 2, \ldots$. Infatti il trasformato di un generico vettore $\mathsf{v} \ = \ \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\, \langle i \,|\, \mathsf{v}\rangle$ si può ottenere come

(1) $$\hat{A}\mathsf{v} \ = \ \sum_{i=1}^{n} \hat{A}|i\rangle\, \langle i \,|\, \mathsf{v}\rangle \ .$$

Assumiamo che si sappiano esprimere gli $\hat{A}|i\rangle$ nella base $\mathfrak{B}$ come

(2) $$\hat{A}|i\rangle \ = \ \sum_{k=1}^{n} |k\rangle\langle k|\hat{A}|i\rangle \ ,$$

dove abbiamo semplificato la scrittura $\langle k \,|\, (\hat{A}|i\rangle)\rangle$ nella più concisa e simmetrica $\langle k|\hat{A}|i\rangle$.
Per l'azione di $\hat{A}$ sul generico v si trova allora:

(3) $$\langle j|\hat{A}|\mathsf{v}\rangle \ = \ \sum_{i=1}^{n} \langle j|\hat{A}|i\rangle\, \langle i \,|\, \mathsf{v}\rangle \ .$$

Dunque la trasformazione $\hat{A}$ è completamente determinata dalla matrice $n \times n$ le cui componenti sono i numeri $\langle j|\hat{A}|i\rangle$.

T34:**a.08** Il risultato della applicazione di $\hat{A}$ si può utilmente esprimere in $\boldsymbol{H}_n$ come prodotto di una matrice $n \times n$ per un vettore colonna, $n \times 1$.

(1) $$\begin{bmatrix} \langle 1|\hat{A}|1\rangle & \langle 1|\hat{A}|2\rangle & \cdots & \langle 1|\hat{A}|n\rangle \\ \langle 2|\hat{A}|1\rangle & \langle 2|\hat{A}|2\rangle & \cdots & \langle 2|\hat{A}|n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle n|\hat{A}|1\rangle & \langle n|\hat{A}|2\rangle & \cdots & \langle n|\hat{A}|n\rangle \end{bmatrix} \ast \begin{bmatrix} \langle 1 \,|\, \mathsf{v}\rangle \\ \langle 2 \,|\, \mathsf{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle n \,|\, \mathsf{v}\rangle \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} \langle 1|\hat{A}|\mathsf{v}\rangle \\ \langle 2|\hat{A}|\mathsf{v}\rangle \\ \vdots \\ \langle n|\hat{A}|\mathsf{v}\rangle \end{bmatrix} \ ,$$

rappresentabile schematicamente come

(2) $$\begin{bmatrix} & & \\ & \hat{A} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathsf{v} \\ \\ \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} \\ \hat{A}\mathsf{v} \\ \\ \end{bmatrix} \ .$$

T34:**a.09** Definiamo ora relativamente a una base $\mathfrak{B} = \{|i\rangle \mid i = 1, 2, ...\}$ alcuni operatori che rendono più facili e naturali molti calcoli con le notazioni di Dirac.

In $\boldsymbol{H}_n$ introduciamo gli **operatori diadi** $|i\rangle\langle j|$ per $i, j = 1, ..., n$ chiedendo

(1) $$|i\rangle\langle j|\, \mathsf{v} \;:=\; |i\rangle\, \langle j \,|\, \mathsf{v}\rangle \quad \text{per ogni } \mathsf{v} \in \boldsymbol{H}_n\ .$$

Per $i = 1, ..., n$ $|i\rangle\langle i|$ viene detto **proiettore sul versore di base** $|i\rangle$.

Per $i, j = 1, ..., n$ con $i \neq j$ $|i\rangle\langle j|$ viene detto **proiet-rotatore** da $|j\rangle$ a $|i\rangle$.

Il primo termine è giustificato dal fatto che $|i\rangle\langle i|$ trasforma un generico vettore v nella sua proiezione sopra $\mathbb{C}\,|i\rangle$, quello che possiamo chiamare l'asse di $|i\rangle$: $(|i\rangle\langle i|)\ |\mathsf{v}\rangle = |i\rangle\ \langle i \,|\, \mathsf{v}\rangle$.

Il termine proiet-rotatore è dovuto al fatto che $|i\rangle\langle j|$ trasforma un v nella sua proiezione lungo $|j\rangle$ successivamente ruotata nella direzione di $|i\rangle$:

$$\Big(|i\rangle\langle j|\Big)\ |\mathsf{v}\rangle \;=\; |i\rangle\ \langle j \,|\, \mathsf{v}\rangle\ .$$

T34:**a.10** Le matrici che rappresentano questi operatori nella base $\{|i\rangle \ |:\ i = 1, ..., n\}$ sono quelle che presentano tutte le componenti nulle a eccezione di una:

$$\langle h|\big(|i\rangle\langle j|\big)|k\rangle \;=\; \delta_{i,h}\,\delta_{j,k}\ .$$

Osserviamo che ogni matrice si può esprimere come combinazione lineare di queste matrici. Per esempio in $\boldsymbol{H}_2$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;=\; a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;+\; b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;+\; c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;+\; d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Ogni operatore su $\boldsymbol{H}_2$ si può esprimere come

$$h_{1,1}\ |1\rangle\langle 1| \;+\; h_{1,2}\ |1\rangle\langle 2| \;+\; h_{2,1}\ |2\rangle\langle 1| \;+\; h_{2,2}\ |2\rangle\langle 2|\ .$$

T34:**a.11** Inoltre, se definiamo come norma di una matrice la somma dei quadrati delle sue componenti, le matrici delle diadi hanno norma 1. Quindi le matrici degli operatori diadi in $\boldsymbol{H}_n$ costituiscono delle basi ortonormali per le matrici $n \times n$ considerate come vettori di uno spazio ad n^2 dimensioni.

T34:**a.12** Particolarmente significative sono le combinazioni lineari dei proiettori $\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\ d_i$; evidentemente le loro matrici nella base $\mathfrak{B}$ sono matrici diagonali

(1) $$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}\ .$$

Casi particolari sono quelli dell'operatore e della matrice identità $n \times n$

(2) $$\hat{\mathbb{I}}_n = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| \qquad\qquad \hat{\mathbb{I}}_{n;\mathfrak{B}} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\ .$$

Un altro operatore da segnalare è $\hat{\mathbb{O}}$, operatore che applicato a ogni vettore porta al vettore zero $\mathbf{0}$ e che viene rappresentato dalla matrice di profilo $n \times n$ le cui entrate sono tutte uguali a 0 da considerare elemento di $\mathbb{C}$.

T34:**a.13** In varie circostanze è utile associare a una matrice M la sua trasposta $M^\top$, matrice ottenuta scambiando le sue righe con le sue colonne.
Con questa operazione si passa dalla matrice di $|i\rangle\langle j|$ nella base $\{|i\rangle\}$ a quella di $|j\rangle\langle i|$ nella stessa base.
Per trasposizione le matrici diagonali non cambiano e più in generale rimangono invariate le matrici simmetriche, matrici per le cui entrate vale la proprietà $M_{i,j} = M_{j,i}$.
Si scambiano invece nelle opposte le matrici antisimmetriche, quelle per le quali $E_{i,j} = -E_{j,i}$.

Si dicono infine hermitiane le matrici per le quali $H_{i,j} = H^*_{j,i}$.
Per esempio la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è simmetrica ed hermitiana (e reale), mentre $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice hermitiana ma non simmetrica (e non reale).

T34:b. composizioni di operatori, operatori invertibili

T34:**b.01** Consideriamo ora il prodotto di composizione di due operatori lineari $\hat{A}$ e $\hat{B}$ su uno spazio di Hilbert, cioè la applicazione successiva delle due trasformazioni, per il quale scriviamo

$$(\hat{A} \circ_{rl} \hat{B})\mathbf{v} \ := \ \hat{A}(\hat{B}\mathbf{v}) \ .$$

Per esempio $(|3\rangle\langle 2|) \circ (|2\rangle\langle 1|) = |3\rangle\langle 1|$ e in generale $(|i\rangle\langle j|) \circ (|h\rangle\langle k|) = \delta_{j,h}|i\rangle\langle k|$.

Bisogna segnalare subito che in genere l'ordine dei fattori è determinante, cioè $\hat{A} \circ \hat{B} \neq \hat{B} \circ \hat{A}$. In questo caso si dice che i due operatori non commutano.

Per esempio $(|2\rangle\langle 3|) \circ (|3\rangle\langle 2|) = |2\rangle\langle 2| \neq (|3\rangle\langle 2|) \circ (|2\rangle\langle 3|) = |3\rangle\langle 3|$.

T34:**b.02**
Si trova che la matrice che rappresenta un operatore prodotto in una data base si ottiene come prodotto righe per colonne delle matrici che rappresentano i fattori.

T34:**b.03** Si definiscono quindi le potenze positive degli operatori, a cominciare dal quadrato e dal cubo:

$$\hat{A}^2 \ := \ \hat{A} \circ \hat{A} \qquad \hat{A}^2 \ := \ \hat{A} \circ \hat{A} \circ \hat{A} \qquad \hat{A}^k \ := \ \hat{A}^{k-1} \circ \hat{A} \ .$$

Si definisce anche come potenza zero di un operatore diverso da $\hat{\mathbb{O}}$ come l'operatore identità $\hat{\mathbb{I}}$.

Degli operatori su $\boldsymbol{H}_n$ si possono poi definire le combinazioni lineari con coefficienti complessi ed i polinomi.

Passando alle rappresentazioni matriciali si hanno la matrice unità $n \times n$, le potenze, le combinazioni lineari e i polinomi di matrici.

In tal modo si giunge all'algebra degli operatori su uno spazio di Hilbert e alla sua rappresentazione mediante matrici di numeri complessi.

T34:**b.04** Si definisce **commutatore di due operatori** $\hat{A}$ e $\hat{B}$ il particolare polinomio

$$[\hat{A}, \hat{B}] \ := \ \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \ .$$

Dire che due operatori non commutano equivale a dire che il loro commutatore è diverso dall'operatore $\hat{\mathbb{O}}$.

Dalla definizione si ricava che per i commutatori valgono le seguenti relazioni:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}] \qquad \text{(anticommutatività)} \ ;$$

$$\begin{matrix} [c_1\hat{A}_1 + c_2\hat{A}_2, \hat{B}] = c_1[\hat{A}_1, \hat{B}] + c_2[\hat{A}_2, \hat{B}] \\ [\hat{A}, d_1\hat{B}_1 + d_2\hat{B}_2] = d_1[\hat{A}, \hat{B}_1] + d_2[\hat{A}, \hat{B}_2] \end{matrix} \qquad \text{(bilinearità)} \ ;$$

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = \hat{\mathbb{O}} \qquad \text{(identità di Jacobi)} \ .$$

T34:**b.05** Risulta molto utile la possibilità di definire un inverso di un operatore lineare $\hat{A}$ come l'operatore denotato con $\hat{A}^{\mathbf{-1}}$ tale che sia

$$\hat{A} \circ \hat{A}^{\mathbf{-1}} = \hat{A}^{\mathbf{-1}} = \hat{\mathbb{I}} \ .$$

Non tutti gli operatori possiedono inverso, cioè non tutti sono invertibili. Dalla definizione segue subito che un operatore deve trasformare lo spazio nell'intero spazio, cioè deve essere biiettivo. In particolare i proiettori su sottospazi propri non posseggono inverso.

In termini di matrici si trova che una matrice è invertibile se ha il determinante diverso da 0, cioè se è una matrice non singolare. Ricordiamo anche la possibilità di esprimere l'inversa di una matrice mediante il suo determinante e i suoi complementi algebrici.
Il calcolo della inversa di una matrice equivale, in linea di principio, alla soluzione di un sistema lineare non omogeneo. In effetti risolvere un sistema di n equazioni lineari in n incognite corrisponde a trovare quale vettore è stato trasformato in un vettore dato.

T34:**b.06** Si osservi che sono evidentemente invertibili l'operatore identità e gli operatori rappresentati da matrici diagonali non aventi alcun zero sulla diagonale principale.
Un particolare insieme di matrici invertibili è formato dalle matrici involutorie, matrici il cui quadrato è l'identità: infatti chiaramente $\hat{A}^2 = \hat{\mathbb{I}} \iff \hat{A}^{-\mathbf{1}} = \hat{A}$.
Particolari matrici involutorie sono

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

T34:**b.07** Si osserva anche che ogni operatore invertibile, cioè ogni trasformazione lineare biiettiva, trasforma una base in una base e viceversa un operatore che trasforma una base in una base è invertibile.
In particolare sono invertibili gli operatori che trasformano una base ortogonale in una base ortogonale: questi sono rappresentabili da matrici ortogonali, matrici le cui righe e le cui colonne forniscono sistemi di vettori ortogonali.
Ancor più in particolare sono invertibili gli operatori che individuano rotazioni, come il seguente:

(1) $$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} .$$

T34:**b.08** Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono operaori invertibili lo sono anche i loro due prodotti, in quanto sono chiaramente operatori biiettivi.

Prop. Per l'inverso del prodotto di due operatori invertibili

$$(\hat{A} \circ \hat{B})^{-\mathbf{1}} = \hat{B}^{-\mathbf{1}} \circ \hat{A}^{-\mathbf{1}} .$$

Dim.: $(\hat{B}^{-\mathbf{1}} \circ \hat{A}^{-\mathbf{1}}) \circ (\hat{A} \circ \hat{B}) = \hat{B}^{-\mathbf{1}} \circ \hat{B} = \hat{\mathbb{I}}$ ▮

T34:c. operatori hermitiani

T34:**c.01** Vediamo ora le proprietà fondamentali degli operatori hermitiani, entità che rivestono importanza primaria nella meccanica quantistica [P60].

Definiamo **aggiunto di un operatore** $\hat{A}$ l'operatore denotato con $\hat{A}^\dagger$ tale che per arbitrari vettori v e w sia

$$\big\langle \mathsf{w} \,\big|\, \hat{A}\mathsf{v} \big\rangle \;=\; \big\langle \hat{A}^\dagger \mathsf{w} \,\big|\, \mathsf{v} \big\rangle \;.$$

Trascriviamo l'uguaglianza con la quale si definisce l'aggiunto di un operatore per due generici vettori di una base $\{|i\rangle\}$

$$\big\langle i \,\big|\, \hat{A} j \big\rangle = \big\langle \hat{A}^\dagger i \,\big|\, j \big\rangle = \big\langle j \,\big|\, \hat{A}^\dagger i \big\rangle^* \;.$$

Da questa uguaglianza si ricava per le corrispondenti matrici che, detta in termini discorsivi, la matrice che rappresenta un operatore aggiunto si ottiene come trasposta della complessa coniugata, cioè come matrice coniugata hermitiana di quella dell'operatore dato.

T34:**c.02** Per gli operatori diadi si trova

$$(|i\rangle\langle j|)^\dagger \;=\; |j\rangle\langle i| \;.$$

Si vede che l'aggiunto dell'aggiunto di un operatore coincide con l'operatore stesso: $(\hat{A}^\dagger)^\dagger = \hat{A}$.
Inoltre si trova $(\hat{A} \circ_{rl} \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \circ_{rl} \hat{A}^\dagger$; infatti:

$$\big\langle \mathsf{w} \,\big|\, (\hat{A}\hat{B})\mathsf{v} \big\rangle = \big\langle \mathsf{w} \,\big|\, \hat{A}(\hat{B}\mathsf{v}) \big\rangle = \big\langle \hat{A}^\dagger \mathsf{w} \,\big|\, \hat{B}\mathsf{v} \big\rangle = \big\langle \hat{B}^\dagger (\hat{A}^\dagger \mathsf{w}) \,\big|\, \mathsf{v} \big\rangle == \big\langle (\hat{B}^\dagger \circ_{rl} (\hat{A}^\dagger) \mathsf{w}) \,\big|\, \mathsf{v} \big\rangle \;.$$

T34:**c.03** Si dice **operatore hermitiano** o **operatore autoaggiunto** un operatore che coincide con il proprio aggiunto, cioè tale che: $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Si dice **matrice hermitiana** o **matrice autoaggiunta** una matrice quadrata M aventi come entrate dei numeri complessi che coincide con la propria coniugata hermitiana: $M_{ij} = M^*_{j,i}$.

Sono evidentemente autoaggiunte le matrici diagonali con elementi reali (ed in particolare le matrici dei proiettori); non sono invece autoaggiunte le matrici dei proietrotatori.
Sono autoaggiunte matrici come

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & -\mathsf{i} \\ \mathsf{i} & 0 \end{bmatrix} \;.$$

In effetti sono autoaggiunti gli operatori delle seguenti forme:

$$\hat{A} + \hat{A}^\dagger \qquad \text{e} \qquad \mathsf{i}\hat{A} - \mathsf{i}\hat{A}^\dagger$$

e più in generale quelli della forma

$$c \cdot \hat{A} + c^* \cdot \hat{A}^\dagger \quad \text{ per } \hat{A} \text{ qualsiasi.}$$

T34:**c.04** Quando per un operatore $\hat{Q}$ e un vettore v diverso da $\mathbf{0}$ si ha

$$\hat{Q}\, \big|\mathsf{v}\big\rangle = q \cdot \mathsf{v} \qquad \text{con } q \text{ numero complesso ,}$$

si dice che v è **autovettore di uin operatore**di $\hat{Q}$ relativo all'**autovalore** q.
Un autovettore di un operatore è quindi un vettore che esso trasforma in un vettore proporzionale.

Per esempio nello spazio tridimensionale per il quale facciamo riferimento alla base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, l'operatore $\hat{Q} = 2|1\rangle\langle 1| + \pi|2\rangle\langle 2|$ ha tre autovettori relativi ai tre autovalori 2, π e 0:

$$\hat{Q}|1\rangle = 2|1\rangle \qquad \hat{Q}|2\rangle = \pi|2\rangle \qquad \hat{Q}|3\rangle = 0|3\rangle \ .$$

T34:**c.05** Chiaramente se $|\mathbf{v}\rangle$ è autovettore di $\hat{Q}$ è tale e relativo allo stesso autovalore anche ogni vettore proporzionale $c\mathbf{v}$. Potremmo quindi limitarci agli autoversori,cioè agli autovettori di norma 1. Anche questi vettori peraltro non sono definiti in modo univoco ma a meno di un fattore che viene chiamato **fattore di fase**, in quanto:

se $\mathbf{u}$ è autoversore di un operatore lo è anche $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\phi}\,\mathbf{u}$.

Un operatore può avere autovalori ai quali corrisponde un unico autovettore, a meno di costanti moltiplicative; esso può anche avere autovettori linearmente indipendenti ai quali corrisponde lo stesso autovalore. Nel primo caso si parla di **autovalori nondegeneri**, nel secondo di **autovalori degeneri**.

T34:**c.06** Consideriamo il caso di un autovalore q dell'operatore $\hat{A}$ relativo a tre autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_6$ e $\mathbf{v}_7$: $\hat{A}\mathbf{v}_i = q\mathbf{v}_i$ per $i = 5, 6, 7$. Anche tutte le combinazioni lineari di questi autovettori sono autovettori di $\hat{A}$ relativi allo stesso autovalore:

$$\hat{A}\left(\sum_{i=5}^{7} c_1 \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=5}^{7} c_i(\hat{A}\,\mathbf{v}_i) = \sum_{i=5}^{7} c_i\, q\, \mathbf{v}_i = q\left(\sum_{i=5}^{7} c_1\, \mathbf{v}_i\right) \quad .$$

In questi casi si parla di **autospazio dell'operatore** relativo al comune autovalore; nel caso precedente si ha un autospazio di 3 dimensioni.

T34:**c.07** Tra i sistemi di autovettori e gli autovalori sono particolarmente ben definiti e utili quelli riguardanti gli operatori hermitiani.

Prop. Gli autovalori degli operatori hermitiani sono numeri reali. **Dim.**: Se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ e $\hat{A}\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ si ha $\langle \mathbf{v}|\hat{A}|\mathbf{v}\rangle = \langle \hat{A}\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle = a^*\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle = a\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle$; quindi $a = a^*$ ∎

T34:**c.08** **Prop.** Due autovettori di un operatore hermitiano relativi a due diversi autovalori sono ortogonali. **Dim.**: Se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, $\hat{A}\mathbf{v} = v\mathbf{v}$ e $\hat{A}\mathbf{w} = w\mathbf{v}$ con $v \neq w$, si deducono le uguaglianze

$$\langle \mathbf{w}\,|\,\hat{A}\mathbf{v}\rangle = v\langle \mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}\rangle = \langle \hat{A}\mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}\rangle = w^*\langle \mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}\rangle \ ;$$

Da queste segue $(v - w^*)\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{w}\rangle = 0$ e dunque, essendo $v \neq w = w^*$, si conlude che $\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{w}\rangle = 0$ ∎

In termini geometrici possiamo affermare che gli operatori hermitiani esprimono dilatazioni reali nelle diverse direzioni individuate dai propri autovettori.

T34:**c.09** In un autospazio di dimensione d si possono scegliere d autovettori che sono vettori ortonormali.
Quindi a partire da un operatore hermitiano si possono trovare sistemi di suoi autovettori ortonormali.

Si dimostra di più che si possono trovare basi per l'intero spazio costituite da autovettori di un operatore hermitiano dato $\hat{A}$.
Questi sistemi di vettori si dicono **autobasi di un operatore** $\hat{A}$.

T34:**c.10** La matrice che rappresenta un operatore hermitiano $\hat{A}$ in una sua autobase è particolarmente semplice e significativa: infatti essa è la matrice diagonale che sulla diagonale principale presenta gli autovalori, ciascuno ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità, cioè alle dimensioni del suo autospazio.

Per esempio si potrebbe avere una matrice diagonale come la seguente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} .$$

relativa alla autobase che scriviamo $\{i = 1, ..., 7 :| \,|i\rangle\}$;
a_1 e a_4 sono autovalori nondegeneri relativi risp. agli autovettori $|1\rangle$ e $|4\rangle$;
a_2 è autovalore due volte degenere relativo agli autovettori della forma $c_3|2\rangle + c_3|3\rangle$;
a_5 è autovalore tre volte degenere relativo agli autovettori $c_5|5\rangle + c_6|6\rangle + c_7|7\rangle$.

T34:**c.11** Sia $\hat{B}$ un operatore che commuta con un operatore hermitiano $\hat{A}$, $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, e sia inoltre $\big\{i = i', ..., i'' :| \,|i\rangle\big\}$ l'insieme degli autovettori ortogonali di $\hat{A}$ relativi al solo suo autovalore $\overline{a}$.
Anche ogni $\hat{B}|j\rangle$ per $j = i', ..., i''$ è autovettore di $\hat{A}$ relativo ad $\overline{a}$: infatti:

$$\hat{A}\hat{B}|j\rangle \;=\; \hat{B}\hat{A}|j\rangle \;=\; \overline{a}\hat{B}|j\rangle \;.$$

Quindi $\hat{B}|j\rangle$ è dato da una combinazione lineare della forma $\displaystyle\sum_{i=i'}^{i''} b_{ji}|i\rangle$.

Dunque nella autobase di $\hat{A}$ l'operatore $\hat{B}$ è rappresentato da una matrice diagonale a blocchi. Per esempio se $\hat{A}$ è rappresentato dalla matrice 7×7 precedente, $\hat{B}$ è dato da una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{55} & b_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & b_{66} & b_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{75} & b_{76} & b_{77} \end{bmatrix} .$$

Se anche $\hat{B}$ è un operatore hermitiano ciascuno degli autospazi di $\hat{A}$ è invariante per $\hat{B}$ e le sottomatrici precedenti sono hermitiane (in particolare gli autovalori b_1 e b_4 sono reali).
In ciascuno degli autospazi di $\hat{A}$ si può individuare una base ortonormale di autovettori di $\hat{B}$; quindi si può individuare una base ortonormale per l'intero spazio costituita da autovettori di entrambi gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

T34:**c.12** Da quanto sopra segue il seguente enunciato, di grande importanza pratica.

Prop. Due operatori hermitiani che commutano possiedono una base (ortonormale) comune nella quale entrambi sono rappresentati da matrici diagonali ▮

Benché la conclusione generale precedente sia stata ottenuta con notevole facilità, occorre osservare che la effettiva individuazione di queste basi a partire da operatori specifici può essere onerosa e richiedere approfonditi studi particolari.

Quello che abbiamo trovato per gli operatori hermitiani è molto importante per la meccanica quantistica: con questi operatori si rappresentano le grandezze osservabili, i loro autovettori rappresentano stati nei quali esse sono misurabili esattamente (in linea di principio) e gli autovalori sono i valori ottenibili.

Due operatori hermitiani che commutano riguardano grandezze osservabili che possono essere misurate entrambe esattamente, cioè tali che
Questo invece accade per due osservabili associate a operatori $\hat{A}$ e $\hat{C}$ che non commutano: il commutatore di questi operatori $[\hat{A}, \hat{C}]$, diverso dall'operatore nullo $\hat{\mathbb{O}}$, esprime la mutua incompatibilità rispetto alla misurazione.

T34:d. operatori unitari ed esponenziali

T34:**d.01** Si dice **operatore unitario** un operatore invertibile il cui aggiunto coincide con il suo inverso. Se $\hat{U}$ è un tale operatore accade che:

$$\hat{U}^{-1} = \hat{U}^{\dagger} .$$

(1) Prop.: Un operatore unitario non cambia la norma dei vettori, in quanto:

$$\langle \hat{U}\mathsf{v} \,|\, \hat{U}\mathsf{v} \rangle = \langle \hat{U}^{\dagger}\hat{U}\mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle = \langle \hat{U}^{-1} \,|\, \mathsf{v} \rangle = \langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle .$$

Quindi gli operatori unitari esprimono delle rotazioni dello spazio $\boldsymbol{H}$ (mentre si è visto che gli operatori hermitiani esprimono dilatazioni).

T34:**d.02** Abbiamo introdotto senza difficoltà combinazioni lineari, potenze e polinomi di operatori; si possono anche introdurre funzioni analitiche di operatori, cioè trasformazioni lineari di uno spazio di Hilbert esprimibili come serie di potenze, di operatori noti.

Evidentemente ogni operatore commuta con le proprie potenze, con i polinomi e con le serie di potenze di se stesso.
Quindi un operatore hermitiano ha in comune con queste funzioni gli autovettori.
Per i corrispondenti autovalori si trova:

$$\hat{A}|\mathsf{v}\rangle = a|\mathsf{v}\rangle \implies f(\hat{A})|\mathsf{v}\rangle = f(a)|\mathsf{v}\rangle .$$

T34:**d.03** Nel caso di un operatore hermitiano, riferendoci a una sua autobase $\mathfrak{B}$, se questo è

(1)
$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} ,$$

per una sua funzione analitica f si trova la matrice

(2)
$$f(\hat{A})_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f(a_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & f(a_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

T34:**d.04** Particolarmente interessante e utile è la funzione esponenziale $\exp(z)$ esprimibile per ogni valore complesso della variabile z, insieme a funzioni ottenibili direttamente da questa, come le funzioni seno e coseno.

(1)
$$\exp(\hat{L}) = \hat{\mathbb{I}} + \hat{L} + \frac{1}{2!}\hat{L}^2 + \frac{1}{3!}\hat{L}^3 + \cdots ,$$

(2)
$$\cos(\hat{L}) = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\hat{A}} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\hat{A}}}{2} = \hat{\mathbb{I}} - \frac{1}{2!}\hat{L}^2 + \frac{1}{4!}\hat{L}^4 - \cdots ,$$

(3)
$$\sin(\hat{L}) = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\hat{A}} - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\hat{A}}}{2i} = \hat{L} - \frac{1}{3!}\hat{L}^3 + \frac{1}{5!}\hat{L}^5 - \cdots .$$

Osserviamo che $\exp(\hat{\mathbb{I}}) = \mathsf{e} \cdot \hat{\mathbb{I}}$, $\exp(\hat{\mathbb{O}}) = \hat{\mathbb{I}} = \cos(\hat{\mathbb{O}})$, $\sin(\hat{\mathbb{O}}) = \hat{\mathbb{O}}$.

T34:**d.05** Per due operatori che commutano, $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{\mathbb{O}}$ si trova

(1) $$\exp(\hat{A} + \hat{B}) \;=\; \exp(\hat{A})\,\exp(\hat{B}) \;=\; \exp(\hat{B})\,\exp(\hat{A}) \;.$$

Per l'esponenziale della somma di due operatori che non commutano si hanno invece formule molto più complesse.

Dalla uguaglianza precedente segue

(2) $$\exp(\hat{A})\;\exp(\hat{A})^{-\mathbf{1}} = \hat{\mathbb{I}} \qquad \text{ovvero} \qquad \exp(\hat{A})^{-\mathbf{1}} \;=\; \exp(-\hat{A}) \;.$$

Sono molto utili gli esponenziali aventi come argomento un operatore noto moltiplicato per l'unità immaginaria; per essi:

(3) $$\begin{aligned}\exp(\mathsf{i}\hat{A}) \;&=\; \hat{\mathbb{I}} + \mathsf{i}\hat{A} + \frac{\mathsf{i}^2}{2!}\hat{A}^2 + \frac{\mathsf{i}^3}{3!}\hat{A}^3 + \frac{\mathsf{i}^4}{4!}\hat{A}^4 + \cdots \\ &=\; \cos(\hat{A}) + \mathsf{i}\,\sin(\hat{A})\end{aligned} \;.$$

T34:**d.06** **Prop.** Se $\hat{A}$ è un operatore hermitiano, $\exp(\mathsf{i}\hat{A})$ è un operatore unitario:

$$\exp(\mathsf{i}\hat{A})^{-1} \;=\; \exp(-\mathsf{i}\hat{A}) \;=\; \exp(-\mathsf{i}\hat{A}^{\dagger}) \;=\; (\exp(\mathsf{i}\hat{A}))^{\dagger} \;.$$

Un operatore unitario della forma $\hat{U}(t) = \exp(\mathsf{i}\hat{K}(t))$ con $\hat{K}(0) = \hat{\mathbb{O}}$ e $\hat{K}(t)$ funzione continua e regolare della variabile continua t quando viene applicato a un vettore fornisce una famiglia continua di vettori tutti della stessa lunghezza; questi si possono presentare efficacemente come un vettore mobile la cui estremità diversa dall'origine effettua una traiettoria nello spazio di Hilbertdel quale fa parte.

Particolarmente interesanti sono le traiettorie delle estremità dei vettori sulla sfera con centro nell'origine e di raggio 1.