1

Capitolo T34
spazi di Hilbert

Contenuti delle sezioni

16 pagine

T340.01 Questo capitolo è dedicato alla introduzione degli spazi di Hilbert con una presentazione che cerca di essere autonoma e per questo non si preoccupa di riprendere nozioni esaminate in altri contesti.

Nell'inquadramento generale delle specie di strutture gli spazi di Hilbert vanno considerati particolari spazi vettoriali topologici, particolari spazi di Banach, particolari spazi metrici, arricchimenti degli spazi normati e particolari spazi a prodotto interno, mentre questi sono arricchimenti degli spazi vettoriali.
Qui non entreremo nei dettagli di queste gerarchie, indubbiamente importanti per l'analisi funzionale, ma ci limitiamo a riprendere le molte nozioni sugli spazi con prodotto interno, sui prodotti scalari e sulle e norme che servono agli sviluppi successivi.

T34 a. spazi con prodotto interno e spazi di Hilbert

T34a.01 Gli spazi di Hilbert sono qui introdotti come spazi con prodotto interno sul campo dei numeri complessi dotati di un prodotto interno dal quale si ricava una distanza che lo rende uno spazio metrico completo.

Iniziamo la trattazione degli spazi di Hilbert ricordando varie proprietà e notazioni degli spazi con prodotto interno in quanto essenziali anche per gli spazi di Hilbert e preparando la richiesta di natura metrica che caratterizza e distingue gli spazi di Hilbert al fine di renderli ambienti in grado di sostenere importanti sviluppi computazionali e costituire i modelli per rilevanti applicazioni.

Nel seguito abbrevieremo con **spazio-ip** il termine "spazio con prodotto interno" e denoteremo con **SpIP** la classe degli spazi con prodotto interno.
Inoltre abbrevieremo con **spazio-H** il termine "spazio di Hilbert" e denoteremo con **SpH** la classe degli spazi di Hilbert.

T34a.02 Chiediamo innanzi tutto che uno **spazio di Hilbert** H sia un arricchimento di uno spazio vettoriale sui campo dei complessi $\mathsf{V} = \langle H, +, \mathbf{0}_H, \cdot_H, \mathbb{C}_{Fld} \rangle$ con una funzione con il ruolo di **prodotto interno**, o **prodotto scalare** cioè con una funzione che a due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w} \in H$ associa un numero complesso e che possiede specifiche proprietà metriche.

Qui denotiamo la funzione prodotto scalare con $\langle * \mid * \rangle$, in modo che la sua applicazione alla coppia dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ dia $\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle$.
Al prodotto scalare si chiedono le seguenti tre proprietà.

(1) **linearità del prodotto scalare nel suo secondo argomento**:

$$\langle \mathbf{v} \mid c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 \rangle \;=\; c_1\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w}_1 \rangle + c_2\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w}_2 \rangle \;. \tag{1}$$

(2) **hermitianità del prodotto scalare**: scambiando i suoi argomenti si ottiene il numero complesso coniugato

$$\langle \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{w} \rangle^* \;. \tag{2}$$

(3) **definitezza positiva del prodotto scalare**, per ogni vettore $\mathbf{v} \in H$

$$\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle \;\geq\; 0 \qquad \text{e} \qquad \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle \;=\; 0 \iff \mathbf{v} \;=\; \mathbf{0}_H \quad . \tag{5}$$

Da (1) e (2) segue la cosiddetta **antilinearità del prodotto scalare nel suo primo argomento**, cioè:

$$\langle d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 \mid \mathbf{w} \rangle \;=\; {d_1}^*\langle \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{w} \rangle + {d_2}^*\langle \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{w} \rangle \;, \tag{3}$$

e segue che il prodotto scalare di un vettore per se stesso è un numero reale:

$$\langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \rangle^* \;. \tag{4}$$

Nel seguito facciamo riferimento a un generico spazio-H che scriviamo

$$\mathsf{H} \;=\; \Big\langle H, +, \mathbf{0}_H, \cdot_H, \mathbb{C}_{Fld}, \langle * \mid * \rangle \Big\rangle \;.$$

Per i suoi vettori useremo notazioni della forma $|\mathbf{v}\rangle$ e $\mathbf{w}$ da considerare equivalenti.
Ricordiamo che in uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{F}$ se si ha $\mathbf{w} = c\,\mathbf{v}$ con c elemento del campo, si dice che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori proporzionali, relazione che si esprime scrivendo $\mathbf{w} \in \mathbb{F}\,\mathbf{v}$.

T34a.03 Il prodotto scalare fa degli spazi di Hilbert dei particolari spazi-ip sui complessi.

Come per ogni spazio-ip si definisce come **norma di un vettore** $\mathsf{v} \in \mathsf{H}$ la radice quadrata del suo prodotto scalare per se stesso e si scrive

$$||\mathsf{v}|| \ := \ \sqrt{\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle} \ .$$

Evidentemente la norma di ogni vettore è un numero positivo, con la eccezione della norma del vettore nullo per la quale $||\mathbf{0}_H|| = 0$.

Ricordiamo che si dice **spazio normato** ogni spazio vettoriale $\mathsf{V} = \langle V, ...\rangle$ sul campo dei reali o dei complessi dotato di una funzione $|| * ||$ del genere $\lceil V \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che possiede le seguenti proprietà:

(1) $\mathsf{v} \in V \implies ||\mathsf{v}|| \geq 0$ e $||\mathsf{v}|| = 0 \iff \mathsf{v} = \mathbf{0}$.

(2) $\mathsf{v} \in V \ , \ \alpha \in CMb \implies ||\alpha\,\mathsf{v}|| = |\alpha|\,||\mathsf{v}||$

(3) $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in V \implies ||\mathsf{v} + \mathsf{w}|| \leq ||\mathsf{v}|| + ||\mathsf{w}||$ con $||\mathsf{v} + \mathsf{w}|| = ||\mathsf{v}|| + ||\mathsf{w}|| \iff \mathsf{W} \in \mathbb{C}\,\mathsf{v}$ **disuguaglianza triangolare**,

Dunque ogni spazio di Hilbert è uno spazio normato.

Ricordiamo anche che la norma in ogni spazio-H H, come in ogni spazio-ip sui complessi, soddisfa anche le proprietà che seguono.

(4) $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in H \implies |\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w} \rangle| \leq ||\mathsf{v}|| \cdot ||\mathsf{w}||$ **disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**,
con $\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w} \rangle| = ||\mathsf{v}|| \cdot ||\mathsf{w}||$ sse $\mathsf{w} \in \mathbb{C}\,\mathsf{v}$.

(5) $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in H \implies ||\mathsf{v} + \mathsf{w}||^2 + ||\mathsf{v} - \mathsf{w}||^2 \ = \ 2||\mathsf{v}|| + 2||\mathsf{w}||$ (**legge del parallelogramma**)

Osserviamo anche che il vettore ottenuto moltiplicando v per un numero complesso di modulo 1, $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\phi}\mathsf{v}$ con ϕ reale, ha la stessa norma di V.

Interessano in particolare i vettori di norma 1, che chiamiamo **vettori normalizzati** o **versori**.
Si può trasformare facilmente ogni vettore v diverso da $\mathbf{0}$ in un vettore proporzionale di norma 1: basta trasformarlo nel vettore $\dfrac{1}{\sqrt{\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle}}\,\mathsf{v}$, vettore che evidentemente ha norma 1.

T34a.04 In uno spazio-H e in uno spazio-ip, ovviamente, la conoscenza dei prodotti interni dei vettori consente la conoscenza delle norme dei vettori.
Conviene ricordare che vale anche il viceversa: conoscendo le norme dei vettori si possono conoscere anche i loro prodotti interni.
In effetti per i vettori v e w di uno spazio-ip sui reali si trova

$$\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w} \rangle \ = \ \frac{1}{4}\Big(||\mathsf{v} + \mathsf{w}||^2 - ||\mathsf{v} - \mathsf{w}||^2 \Big) \ ,$$

mentre per uno spazio-ip sui complessi (e per uno spazio-H si ha

$$\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w} \rangle \ = \ \frac{1}{4}\Big(||\mathsf{v} + \mathsf{w}|| - ||\mathsf{v} - \mathsf{w}|| \Big) + \frac{1}{4}\,\mathsf{i}\Big(||\mathsf{v} + \mathsf{i}\mathsf{w}||/2 - ||\mathsf{v} - \mathsf{i}\,\mathsf{w}||^2 \Big) \ .$$

Queste formule sono chiamate **identità di polarizzazione**

Il prodotto interno consente anche di definire una distanza tra i vettori

$$\mathrm{dist}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) \ := \ ||\mathsf{v} - \mathsf{w}|| \ .$$

Quindi ogni spazio-ip e ogni spazio-H sono spazi metrici.

Ricodiamo le proprietà che caretterizzano ogni distanza che fa di un generico insieme S uno spazio metrico

(1) $\mathsf{v}, \mathsf{W} \in S \implies \mathrm{dist}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) \geq 0$ e $\mathrm{dist}(\mathsf{v}, \mathsf{w}) = 0 \iff \mathsf{w} = \mathsf{v}$.

(2) $\mathsf{v},\mathsf{W} \in S \implies \mathsf{W} = \mathsf{v}$ (simmatria della distanza

(3) disuguaglianza triangolare.

Due vettori v e w di uno spazio-ip e di un spazio-H si dicono **vettori ortogonali** sse il loro prodotto scalare è nullo:

$$\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w} \rangle = 0 \ .$$

Per affermare che due elementi di H v e w sono vettori ortogonali si scrive $\mathsf{v} \perp \mathsf{w}$. In questa notazione $\perp$ esprime una relazione entro H che evidentemente è simmetrica e antiriflessiva.

T34a.05 Si verifica che costituisce spazio di Hilbert l'insieme $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ delle coppie di numeri complessi $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ con il prodotto scalare definito da

$$(1) \qquad \left\langle \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\rangle := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = {c_1}^* \, b_1 + {c_2}^* \, b_2$$

e con il quadrato della norma dato dalla espressione pitagorica

$$(2) \qquad \left\| \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right\|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2 \ .$$

Analogamente si verifica che costituisce spazio di Hilbert l'insieme $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ delle terne di numeri complessi $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ con il prodotto scalare definito da

$$(3) \qquad \left\langle \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\rangle := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = {c_1}^* \, b_1 + {c_2}^* \, b_2 + {c_3}^* \, b_3$$

e con il quadrato della norma dato dalla espressione pitagorica

$$(4) \qquad \left\| \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right\|^2 = |b_1|^2 + |b_2|^2 + |b_3|^2 \ .$$

Più in generale costituisce spazio di Hilbert per ogni $d \in \mathbb{P}$ la potenza cartesiana d $\mathbb{C}^{\times d}$ delle d-uple di numeri complessi $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$ con il prodotto scalare definito da

$$(5) \qquad \left\langle \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} \right\rangle := \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_3 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix} = {c_1}^* \, b_1 + \cdots + {c_d}^* \, b_d$$

e con il quadrato della norma dato dalla espressione pitagorica

$$(6) \qquad \left\| \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix} \right\|^2 = |b_1|^2 + \cdots + |b_d|^2 \ .$$

T34a.06 Si trova che le basi complessivamente più convenienti di uno spazio di Hilbert sono le cosiddette **basi ortonormali**, basi costituite da versori mutuamente ortogonali; queste vengono trasformate le une nelle altre da particolari matrici nonsingolari, le **matrici ortogonali**, matrici le cui inverse coincidono con le proprie trasposte.

Nel seguito denoteremo con **SpH** la classe degli spazi di Hilbert, e con SpH_d la classe degli spazi di Hilbert con un numero d finito di dimensioni.

Occorre tuttavia segnalare che si incontrano anche importanti spazi di Hilbert ai quali si attribuiscono dimensioni non finite.

Consideriamo uno spazio di Hilbert H a d dimensioni e una sua base ortonormale $\mathfrak{B} = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_d\}$ per la quale si può dare il ruolo di base canonica.
I suoi vettori normalizzati sono in corrispondenza biunivoca con gli interi da 1 a d; quindi quando è chiara la scelta di una tale base, o quando non interessa in qual modo i suoi singoli vettori vengono individuati, per questi elementi si possono utilizzare le notazioni $\big|1\big\rangle$, $\big|2\big\rangle$, ..., $\big|n\big\rangle$ e si può scrivere $\mathfrak{B} = \big\{\big|i\big\rangle \mid i = 1, ..., n\big\}$.

La loro ortonormalità si esprime con l'uguaglianza $\big\langle i\,\big|\,j\big\rangle = \delta_{i,j}$ nella quale compare la delta di Kronecker.

T34a.07 Facciamo riferimento a una base ortonormale di H. Un vettore $\mathbf{v}$ viene rappresentato dalla matrice $n \times 1$, ossia da vettore colonna:

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} \big\langle 1\,\big|\,\mathbf{v}\big\rangle \\ \big\langle 2\,\big|\,\mathbf{v}\big\rangle \\ \dots \\ \big\langle n\,\big|\,\mathbf{v}\big\rangle \end{bmatrix} .$$

Ricordiamo che si dice **matrice coniugata hermitiana** di una matrice M di numeri complessi, e si scrive $M^\dagger$, la matrice ottenuta trasponendo la M e trasformando ogni componente nella sua complessa coniugata (o equivalentemente passando alla complessa coniugata della M e poi alla trasposta di questa).

Il vettore $\mathbf{v}$ può essere rappresentato equivalentemente dalla matrice coniugata hermitiana del suo vettore colonna, cioè dalla matrice $1 \times n$ (vettore riga):

$$(2) \qquad [\,\big\langle \mathbf{v}\,\big|\,1\big\rangle \quad \big\langle \mathbf{v}\,\big|\,2\big\rangle \quad \dots \quad \big\langle \mathbf{v}\,\big|\,n\big\rangle\,] .$$

Il prodotto scalare di due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si esprime come

$$(3) \qquad \big\langle \mathbf{v}\,\big|\,\mathbf{w}\big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \big\langle \mathbf{v}\,\big|\,i\big\rangle \cdot \big\langle i\,\big|\,\mathbf{w}\big\rangle .$$

T34a.08 Come in tutti gli spazi vettoriali, anche negli spazi di Hilbert rivestono primaria importanza gli operatori lineari, ossia le trasformazioni lineari, o anche gli omomorfismi della specie degli spazi vettorili.

In relazione ad uno spazio vettoriale V denotiamo con $\mathsf{OprL}_{\mathsf{V}}$ l'insieme degli operatori lineari su V; più specificamente denotiamo con $\mathsf{OprL}_{\mathsf{H}}$ l'insieme degli operatori lineari su uno spazio di Hilbert H. In queste pagine spesso useremo l'abbreviazione "opratore" il termine "operatore lineare su uno spazio di Hilbert". Inoltre rappresenteremo preferenzialmente tali operatori con lettere maiuscole incappucciate.

Vediamo come si può rappresentare un operatore lineare $\hat{A}$ su $\mathsf{H} \in \mathsf{SpH}_d$, cioè una trasformazione lineare di H in sè.
Una tale funzione è definita in particolare se si conoscono i risultati delle sue azioni sopra i vettori di una base $\mathfrak{B} = \{\big|i\big\rangle \;\; |: \;\; i = 1, 2, ..., n\}$, cioè quando si conoscono i vettori trasformati di quelli di base

$\hat{A}\big|i\big\rangle$ per $i = 1, 2, \ldots$. Infatti il trasformato di un generico vettore $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{n} \big|i\big\rangle \big\langle i \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle$ si può ottenere come

(1) $$\hat{A}\,\mathsf{v} \;=\; \sum_{i=1}^{n} \hat{A}\big|i\big\rangle \big\langle i \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle \;.$$

Assumiamo che si sappiano esprimere i vari $\hat{A}\big|i\big\rangle$ nella base $\mathfrak{B}$ come

(2) $$\hat{A}\big|i\big\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{n} \big|k\big\rangle\big\langle k|\hat{A}|i\big\rangle \;,$$

dove abbiamo semplificato la scrittura $\big\langle k \,\big|\, (\hat{A}\big|i\big\rangle)\big\rangle$ nella più concisa e simmetrica $\big\langle k|\hat{A}|i\big\rangle$.
Per l'azione di $\hat{A}$ sul generico v si trova allora:

(3) $$\big\langle j|\hat{A}|\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \big\langle j|\hat{A}|i\big\rangle \big\langle i \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle \quad \text{per} \quad j = 1, \ldots, d.$$

Dunque la trasformazione $\hat{A}$ è completamente determinata dalla matrice $d \times d$ le cui componenti sono i numeri complessi $\big\langle j|\hat{A}|i\big\rangle$.

T34a.09 Il risultato della applicazione di $\hat{A}$ si può utilmente esprimere in H come prodotto di una matrice $d \times d$ per un vettore colonna, $d \times 1$.

(1) $$\begin{bmatrix} \big\langle 1|\hat{A}|1\big\rangle & \big\langle 1|\hat{A}|2\big\rangle & \ldots & \big\langle 1|\hat{A}|d\big\rangle \\ \big\langle 2|\hat{A}|1\big\rangle & \big\langle 2|\hat{A}|2\big\rangle & \ldots & \big\langle 2|\hat{A}|d\big\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \big\langle d|\hat{A}|1\big\rangle & \big\langle d|\hat{A}|2\big\rangle & \ldots & \big\langle d|\hat{A}|d\big\rangle \end{bmatrix} \dagger \begin{bmatrix} \big\langle 1 \,|\, \mathsf{v}\big\rangle \\ \big\langle 2 \,|\, \mathsf{v}\big\rangle \\ \vdots \\ \big\langle d \,|\, \mathsf{v}\big\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \big\langle 1|\hat{A}|\mathsf{v}\big\rangle \\ \big\langle 2|\hat{A}|\mathsf{v}\big\rangle \\ \vdots \\ \big\langle d|\hat{A}|\mathsf{v}\big\rangle \end{bmatrix} ,$$

rappresentabile schematicamente come

(2) $$\begin{bmatrix} & & \\ & \hat{A} & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \mathsf{v} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \hat{A}\,\mathsf{v} \\ \\ \end{bmatrix} .$$

T34a.10 Facciamo ancora riferimento a una base $\mathfrak{B} = \big\{\big|i\big\rangle \mid i = 1, 2, \ldots\big\}$ di H e definiamo alcuni operatori servendoci delle notazioni di Dirac riuscendo a rendono più facili e naturali molti calcoli.

In H, servendoci di un generico vettore $\mathsf{v} = \sum_{i=1}^{d} v_i\, \mathsf{e}_i \in \boldsymbol{H}_n$, introduciamo gli **operatori diadi** $|i\big\rangle\big\langle j|$ per $i, j = 1, \ldots, d$ chiedendo

(1) $$|i\big\rangle\big\langle j|\ \mathsf{v} \;:=\; v_j\,\mathsf{e} \;=\; \big|i\big\rangle\ \big\langle j \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle \;.$$

Per $i = 1, \ldots, d$ $|i\big\rangle\big\langle i|$ viene detto **proiettore sul versore di base** $\big|i\big\rangle$.

Per $i, j = 1, \ldots, d$ con $i \neq j$ $|i\big\rangle\big\langle j|$ viene detto **proiettore-rotatore** da $\big|j\big\rangle$ a $\big|i\big\rangle$.

Il termine proiettore è giustificato dal fatto che $|i\big\rangle\big\langle i|$ trasforma un generico vettore v nella sua proiezione sopra $\mathbb{C}\,\big|i\big\rangle$, quello che possiamo chiamare l'asse del versore $\big|i\big\rangle$: $(|i\big\rangle\big\langle i|)\ \big|\mathsf{v}\big\rangle = \big|i\big\rangle\ \big\langle i \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle$.

Il termine proiettore-rotatore è giustificato dal fatto che $|i\big\rangle\big\langle j|$ per trasformare un v prima ottiene la sua proiezione sulla retta di $\big|j\big\rangle$ e successivamente ruota il risultato nella direzione di $\big|i\big\rangle$:

$$\Big(|i\big\rangle\big\langle j|\Big)\ \big|\mathsf{v}\big\rangle \;=\; \big|i\big\rangle \big\langle j \,\big|\, \mathsf{v}\big\rangle \;.$$

T34a.11 Le matrici che rappresentano questi operatori nella base $\{|i\rangle \;\; |: \; i = 1, ..., d\}$ sono quelle che presentano tutte le componenti nulle a eccezione di una:

$$\langle h|\Big(|i\rangle\langle j|\Big)|k\rangle \;=\; \delta_{i,h}\,\delta_{j,k}\;.$$

Osserviamo che ogni matrice si può esprimere come combinazione lineare di queste matrici. Per esempio se $d-2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;=\; a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;+\; b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;+\; c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;+\; d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\;.$$

Ogni operatore su $\boldsymbol{H}_2$ si può esprimere come

$$h_{1,1}\;|1\rangle\langle 1| \;+\; h_{1,2}\;|1\rangle\langle 2| \;+\; h_{2,1}\;|2\rangle\langle 1| \;+\; h_{2,2}\;|2\rangle\langle 2|\;.$$

Da qui si sricava che gli operatori lineari su uno spazio di hilbert di d dimensioni costituiscono uno spazio vettoriale di d^2 dimensioni sui complessi.

T34a.12 Inoltre, se definiamo come norma di una matrice la somma dei quadrati delle sue componenti, le matrici delle diadi hanno norma 1.
Quindi le matrici degli operatori diadi in $\mathsf{H} \in \mathbf{SpH}_d$ costituiscono delle basi ortonormali per le matrici $d \times d$ considerate come vettori dello spazio vettoriale sui complessi a d^2 dimensioni.

T34a.13 Particolarmente significative sono le combinazioni lineari dei proiettori $\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\; d_i$; evidentemente le loro matrici nella base canonica $\mathfrak{B}$ sono matrici diagonali

(1)
$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}\;.$$

Casi particolari sono quelli dell'operatore e della matrice identità $d \times d$

(2)
$$\hat{\mathbb{I}}_d \;:=\; \sum_{i=1}^{d} |i\rangle\langle i| \qquad\qquad \hat{\mathbb{I}}_{d;\mathfrak{B}} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\;.$$

Un altro operatore da segnalare è $\hat{\mathbb{O}}$, operatore che applicato a ogni vettore porta al vettore zero $\mathbf{0}$ e che viene rappresentato dalla matrice di profilo $d \times d$ le cui entrate sono tutte uguali a 0 da considerare elemento di $\mathbb{C}$.

T34a.14 In varie circostanze è utile associare a una matrice M la sua trasposta M^{T}, matrice ottenuta scambiando le sue righe con le sue colonne.
Con questa operazione si passa dalla matrice di $|i\rangle\langle j|$ nella base $\{|i\rangle\}$ a quella di $|j\rangle\langle i|$ nella stessa base.
Per trasposizione le matrici diagonali non cambiano e più in generale rimangono invariate le matrici simmetriche, matrici S per le cui entrate vale la proprietà $\langle j|S|i\rangle \;=\; \langle i|S|j\rangle$.
Si scambiano invece nelle opposte le matrici A antisimmetriche, ossia le matrici per le quali $\langle j|A|i\rangle \;=\; -\langle i|A|j\rangle$.

Si dice **matrice hermitiana** ogni matrice E per la quale $\langle j|E|i\rangle \;=\; -\Big(\langle i|A|j\rangle\Big)^*$.

Per esempio la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è simmetrica ed hermitiana (e reale), mentre $\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice hermitiana antisimmetrica (e non reale).

T34 b. composizioni di operatori, operatori invertibili

T34b.01 Il fatto che il prodotto scalare fa degli spazi-H degli spazi metrici consente di considerarli anche spazi vettoriali topologici e di introdurre nel loro studio le nozioni di convergenza e di limite e i relativi risultati con le loro notevoli conseguenze computazionali.

Osserviamo innanzi tutto che la funzione sesquilineare prodotto interno è una funzione continua nei suoi due argomenti.

Consideriamo poi una successione di elementi di uno spazio metrico M (o di uno spazio-ip, o di uno spazio-H) $\langle iiN \,:\, \mathbf{v}_i \rangle$; si dice che essa converge a $\mathbf{v} \in \mathsf{M}$ sse $\lim_{n\to+\infty} ||\mathbf{v} - \mathbf{v}_n|| \;=\; 0$.

La nozione di convergenza porta ai problemi del carattere chiuso per passaggio al limite dei sottoinsiemi degli spazi delle varie specie, della completezza degli spazi e della continuità degli operatori lineari e dei funzionali lineari.

Nel caso degli spazi-ip (e degli spazi-H) finitodimensionali i suaccennati problemi non sussistono in quanto tutti i sottospazi sono chiusi, tutti gli spazi-ip sono completi e tutti gli operatori lineari e tutti i funzionali lineari sono continui.

Nel caso degli spazi-ip infinitodimensionali invece le cose sono più complesse.
Nei prossimi paragrafi affrontiamo l'esame di particolari tipi di operatori lineari negli spazi-ip finito dimensioali giungendo a risultati abbastanza netti che, tra l'altro, riguardano tutti gli spazi-H finitodimensionali che coincidono con gli spazi-ip sui complessi finitodimensionali.
Questi risultati ci faciliteranno il successivo esame degli spazi-ip a infinite dimensioni e la distinzione tra di essi degli spazi-H.

T34b.02 trasformazioni lineari, $\mathbf{Lintr}(\mathsf{V}, \mathsf{W})$, isometrie, isomorfismi isometrici, conservazione della norma

T34b.03 Consideriamo ora il prodotto di composizione di due operatori lineari $\hat{A}$ e $\hat{B}$ su uno spazio di Hilbert, cioè la applicazione successiva delle due trasformazioni, per il quale scriviamo

$$(\hat{A} \circ_{rl} \hat{B})\mathbf{v} \;:=\; \hat{A}(\hat{B}\mathbf{v}) \;.$$

Per esempio $(|3\rangle\langle 2|) \circ (|2\rangle\langle 1|) = |3\rangle\langle 1|$ e in generale $(|i\rangle\langle j|) \circ (|h\rangle\langle k|) = \delta_{j,h}|i\rangle\langle k|$.

Bisogna segnalare subito che in genere l'ordine dei fattori è determinante, cioè $\hat{A} \circ \hat{B} \neq \hat{B} \circ \hat{A}$. In questo caso si dice che i due operatori non commutano.

Per esempio $(|2\rangle\langle 3|) \circ_{lr} (|3\rangle\langle 2|) = |2\rangle\langle 2| \neq (|3\rangle\langle 2|) \circ_{lr} (|2\rangle\langle 3|) = |3\rangle\langle 3|$.

T34b.04
Si trova che la matrice che rappresenta un operatore prodotto in una qualsiasi base si ottiene come prodotto righe per colonne delle matrici che rappresentano i fattori.

T34b.05 Si definiscono quindi le potenze positive degli operatori, a cominciare dal quadrato e dal cubo:

$$\hat{A}^2 \;:=\; \hat{A} \circ_{lr} \hat{A} \qquad \hat{A}^3 \;:=\; \hat{A} \circ_{lr} \hat{A} \circ_{lr} \hat{A} \qquad \hat{A}^k \;:=\; \hat{A}^{k-1} \circ_{lr} \hat{A} \;.$$

Si definisce anche come potenza zero di un operatore diverso da $\hat{\mathbb{O}}$ come l'operatore identità $\hat{\mathbb{I}}$.
Degli operatori su $\mathsf{H} \in \mathbf{SpH}_d$ si possono poi definire le combinazioni lineari con coefficienti complessi ed i polinomi.

Passando alle rappresentazioni matriciali si ottengono prevedibilmente la matrice unità $d \times d$, le potenze, le combinazioni lineari e i polinomi di matrici.
In tal modo si giunge all'algebra degli operatori su uno spazio di Hilbert e alla sua rappresentazione mediante matrici di numeri complessi.

T34b.06 Si definisce **commutatore di due operatori** $\hat{A}$ e $\hat{B}$ il particolare polinomio

$$[\hat{A}, \hat{B}] \;:=\; \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \;.$$

Dire che due operatori non commutano equivale a dire che il loro commutatore è diverso dall'operatore $\hat{\mathbb{O}}$.
Dalla definizione si ricava che per i commutatori valgono le seguenti relazioni:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \;=\; -[\hat{B}, \hat{A}] \qquad \text{(anticommutatività)} \;;$$

$$\left.\begin{array}{rcl} [c_1\hat{A}_1 + c_2\hat{A}_2, \hat{B}] &=& c_1[\hat{A}_1, \hat{B}] + c_2[\hat{A}_2, \hat{B}] \\ [\hat{A}, d_1\hat{B}_1 + d_2\hat{B}_2] &=& d_1[\hat{A}, \hat{B}_1] + d_2[\hat{A}, \hat{B}_2] \end{array}\right. \qquad \text{(bilinearità)} \;;$$

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] \;=\; \hat{\mathbb{O}} \qquad \text{(identità di Jacobi)} \;.$$

T34b.07 Risulta molto utile la possibilità di definire un inverso di un operatore lineare $\hat{A}$ come l'operatore denotato con $\hat{A}^{-\mathbf{1}}$ tale che sia

$$\hat{A} \circ_{lr} \hat{A}^{-\mathbf{1}} \;=\; \hat{A}^{-\mathbf{1}} \;=\; \hat{\mathbb{I}} \;.$$

Non tutti gli operatori possiedono inverso, cioè non tutti sono invertibili. Dalla definizione segue subito che un operatore deve trasformare lo spazio nell'intero spazio, cioè deve essere biiettivo.
In particolare non sono invertibili le diadi i proiettori-rotatori.

In termini di matrici, si trova che una matrice quadrata è invertibile sse ha il determinante diverso da 0, cioè sse è una matrice nonsingolare. Ricordiamo anche la possibilità di esprimere l'inversa di una matrice mediante il suo determinante e i suoi complementi algebrici.

Il calcolo della inversa di una matrice equivale, in linea di principio, alla soluzione di un sistema lineare non omogeneo. In effetti risolvere un sistema di d equazioni lineari in d incognite corrisponde a trovare quale vettore è stato trasformato in un vettore dato.

T34b.08 Si osservi che sono evidentemente invertibili l'operatore identità e gli operatori rappresentati da matrici diagonali non aventi alcun zero sulla diagonale principale.
Un particolare insieme di matrici invertibili è formato dalle matrici involutorie, matrici il cui quadrato è l'identità: infatti chiaramente $\hat{A}^2 \;=\; \hat{\mathbb{I}} \iff \hat{A}^{-\mathbf{1}} \;=\; \hat{A}$.

Particolari matrici involutorie sono

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \;.$$

T34b.09 Si osserva anche che ogni operatore invertibile, cioè ogni trasformazione lineare biiettiva, trasforma una base in una base e viceversa un operatore che trasforma una base in una base è invertibile.
In particolare sono invertibili gli operatori che trasformano una base ortogonale in una base ortogonale: questi sono rappresentabili da matrici ortogonali, matrici le cui righe e le cui colonne forniscono sistemi di vettori ortogonali.

Ancor più in particolare sono invertibili gli operatori che individuano rotazioni, come il seguente:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \tag{1}$$

T34b.10 Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sono operaori invertibili lo sono anche i loro due prodotti, come segue dall'enunciato che segue.

Prop. Per l'inverso del prodotto di due operatori invertibili

$$(\hat{A} \circ \hat{B})^{-\mathbf{1}} = \hat{B}^{-\mathbf{1}} \circ \hat{A}^{-\mathbf{1}} .$$

Dim.: $(\hat{B}^{-\mathbf{1}} \circ \hat{A}^{-\mathbf{1}}) \circ (\hat{A} \circ \hat{B}) = \hat{B}^{-\mathbf{1}} \circ \hat{B} = \mathbb{I}$ ▮

T34 c. operatori hermitiani

T34c.01 Vediamo ora le proprietà fondamentali degli operatori hermitiani, entità che rivestono importanza primaria nella meccanica quantistica [P60].

Definiamo **aggiunto di un operatore** $\hat{A}$ l'operatore che denotiamo con $\hat{A}^\dagger$ tale che per due arbitrari vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sia

(1) $$\langle \mathbf{w} \,|\, \hat{A}\mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \hat{A}^\dagger \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v} \rangle \;.$$

Trascriviamo l'uguaglianza con la quale si definisce l'aggiunto di un operatore relativa a due vettori qualsiasi di una base canonica $\{i = 1, ..., d \,:\, |i\rangle\}$

(2) $$\langle i \,|\, \hat{A} j \rangle = \langle \hat{A}^\dagger i \,|\, j \rangle = \langle j \,|\, \hat{A}^\dagger i \rangle^* \;.$$

Da questa uguaglianza si ricava per le corrispondenti matrici che la matrice che rappresenta un operatore aggiunto si ottiene come trasposta della complessa coniugata, cioè come matrice coniugata hermitiana di quella dell'operatore dato.

T34c.02 Per gli operatori diadi, ricordando l'aspetto delle corrispondenti matrici rispetto alla base canonica, si trova

$$(|h\rangle\langle k|)^\dagger \;=\; |k\rangle\langle h| \;.$$

Inoltre si trova $(\hat{A} \circ_{rl} \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \circ_{rl} \hat{A}^\dagger$; infatti:

$$\langle \mathbf{w} \,|\, (\hat{A}\hat{B})\mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \mathbf{w} \,|\, \hat{A}(\hat{B}\mathbf{v}) \rangle \;=\; \langle \hat{A}^\dagger \mathbf{w} \,|\, \hat{B}\mathbf{v} \rangle \;=\; \langle \hat{B}^\dagger (\hat{A}^\dagger \mathbf{w}) \,|\, \mathbf{v} \rangle \;=\; \langle (\hat{B}^\dagger \circ_{rl} (\hat{A}^\dagger)\mathbf{w}) \,|\, \mathbf{v} \rangle \;.$$

T34c.03 Si dice **operatore hermitiano** o **operatore autoaggiunto** un operatore che coincide con il proprio aggiunto, cioè un operatore $\hat{A}$ tale che sia $\hat{A} \;=\; \hat{A}^\dagger$.

Si dice **matrice hermitiana** o **matrice autoaggiunta** una matrice quadrata M aventi come entrate dei numeri complessi che coincide con la propria coniugata hermitiana: $M_{i,j} = M^*_{j,i}$.

Sono evidentemente autoaggiunte le matrici diagonali con elementi reali (ed in particolare le matrici dei proiettori); non sono invece autoaggiunte le matrici dei proiettori-rotatori.
Sono autoaggiunte matrici come

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \;.$$

Più in generale si constata che sono autoaggiunti gli operatori delle seguenti forme:

$$\hat{A} + \hat{A}^\dagger \qquad \text{e} \qquad \mathrm{i}\hat{A} - \mathrm{i}\hat{A}^\dagger$$

e, ancor più in generale gli operatori della forma

$$c \cdot \hat{A} + c^* \cdot \hat{A}^\dagger \quad \text{per } c \text{complesso qualsiasi e} \hat{A} \text{ operatore lineare qualsiasi.}$$

T34c.04 Quando per un operatore $\hat{Q}$ e un vettore $\mathbf{v}$ diverso da $\mathbf{0}$ si ha

$$\hat{Q}\; |\mathbf{v}\rangle = q \cdot \mathbf{v} \qquad \text{con } q \text{ numero complesso ,}$$

si dice che $\mathbf{v}$ è **autovettore di un operatore** $\hat{Q}$ relativo all'**autovalore** q.
Un autovettore di un operatore è quindi un vettore che esso trasforma in un vettore proporzionale.

Per esempio nello spazio tridimensionale per il quale facciamo riferimento alla base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$, l'operatore $\hat{Q} = 2|1\rangle\langle 1| + \pi|2\rangle\langle 2|$ ha tre autovettori relativi ai tre autovalori 2, π e 0:

$$\hat{Q}|1\rangle = 2|1\rangle \qquad \hat{Q}|2\rangle = \pi|2\rangle \qquad \hat{Q}|3\rangle = 0|3\rangle .$$

T34c.05 Chiaramente se $|\mathbf{v}\rangle$ è autovettore di $\hat{Q}$ è tale e relativo allo stesso autovalore anche ogni vettore proporzionale $c\,\mathbf{v}$. Potremmo quindi limitarci agli autoversori, cioè agli autovettori di norma 1. Anche questi vettori peraltro non sono definiti in modo univoco ma a meno di un fattore che viene chiamato **fattore di fase**, in quanto:

se $\mathbf{u}$ è autoversore di un operatore lo è anche $\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,\phi}\,\mathbf{u}$.

Un operatore può avere autovalori ai quali corrisponde un unico autovettore, a meno di costanti moltiplicative; esso può anche avere autovettori linearmente indipendenti ai quali corrisponde lo stesso autovalore. Nel primo caso si parla di **autovalori nondegeneri**, nel secondo di **autovalori degeneri**.

T34c.06 Consideriamo il caso di un autovalore q dell'operatore $\hat{A}$ relativo a tre autovettori linearmente indipendenti $\mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_6$ e $\mathbf{v}_7$: $\hat{A}\mathbf{v}_i = q\mathbf{v}_i$ per $i = 5, 6, 7$. Anche tutte le combinazioni lineari di questi autovettori sono autovettori di $\hat{A}$ relativi allo stesso autovalore:

$$\hat{A}\left(\sum_{i=5}^{7} c_1 \mathbf{v}_i\right) \;=\; \sum_{i=5}^{7} c_i(\hat{A}\,\mathbf{v}_i) \;=\; \sum_{i=5}^{7} c_i\, q\, \mathbf{v}_i \;=\; q\left(\sum_{i=5}^{7} c_1\,\mathbf{v}_i\right) \quad .$$

In questi casi si parla di **autospazio dell'operatore** relativo al comune autovalore; nel caso precedente si ha un autospazio di 3 dimensioni.

T34c.07 Tra i sistemi di autovettori e gli autovalori sono particolarmente ben definiti e utili quelli riguardanti gli operatori hermitiani.

Prop. Gli autovalori degli operatori hermitiani sono numeri reali.
Dim.: Se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ e $\hat{A}\mathbf{v} = a\mathbf{v}$ si ha $\langle \mathbf{v}|\hat{A}|\mathbf{v}\rangle = \langle \hat{A}\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle = a^*\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle = a\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle$; quindi, essendo $\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\rangle \neq 0$, $a = a^*$ ▮

T34c.08 **Prop.** Due autovettori di un operatore hermitiano relativi a due diversi autovalori sono ortogonali. **Dim.**: Se $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, $\hat{A}\mathbf{v} = v\mathbf{v}$ e $\hat{A}\mathbf{w} = w\mathbf{v}$ con $v \neq w$, si deducono le uguaglianze

$$\langle \mathbf{w}\,|\,\hat{A}\mathbf{v}\rangle \;=\; v\langle \mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}\rangle \;=\; \langle \hat{A}\mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}\rangle \;=\; w^*\langle \mathbf{w}\,|\,\mathbf{v}\rangle \;;$$

Da queste segue $(v - w^*)\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{w}\rangle = 0$ e dunque, essendo $v \neq w = w^*$, si conlude che $\langle \mathbf{v}\,|\,\mathbf{w}\rangle = 0$ ▮

In termini geometrici possiamo affermare che gli operatori hermitiani esprimono dilatazioni reali nelle diverse direzioni individuate dai propri autovettori.

T34c.09 In un autospazio di dimensione d si possono scegliere d autovettori che sono vettori ortonormali.
Quindi a partire da un operatore hermitiano si possono trovare sistemi di suoi autovettori ortonormali.

Si dimostra di più che si possono trovare basi per l'intero spazio costituite da autovettori di un operatore hermitiano dato $\hat{A}$.
Questi sistemi di vettori si dicono **autobasi di un operatore** $\hat{A}$.

T34c.10 La matrice che rappresenta un operatore hermitiano $\hat{A}$ in una sua autobase è particolarmente semplice e significativa: infatti essa è la matrice diagonale che sulla diagonale principale presenta gli autovalori, ciascuno ripetuto un numero di volte pari alla sua molteplicità, cioè alle dimensioni del suo autospazio.

Per esempio si potrebbe avere una matrice diagonale come la seguente:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} .$$

relativa alla autobase che scriviamo $\{i = 1, ..., 7 :| \big|i\big\rangle\}$;
a_1 e a_4 sono autovalori nondegeneri relativi risp. agli autovettori $\big|1\big\rangle$ e $\big|4\big\rangle$;
a_2 è autovalore due volte degenere relativo agli autovettori della forma $c_3\big|2\big\rangle + c_3\big|3\big\rangle$;
a_5 è autovalore tre volte degenere relativo agli autovettori $c_5\big|5\big\rangle + c_6\big|6\big\rangle + c_7\big|7\big\rangle$.

T34c.11 Sia $\hat{B}$ un operatore che commuta con un operatore hermitiano $\hat{A}$, $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, e sia inoltre $\big\{i = i', ..., i'' :| \big|i\big\rangle\big\}$ l'insieme degli autovettori ortogonali di $\hat{A}$ relativi al solo suo autovalore $\overline{a}$.

Anche ogni $\hat{B}\big|j\big\rangle$ per $j = i', ..., i''$ è autovettore di $\hat{A}$ relativo ad $\overline{a}$: infatti:

$$\hat{A}\hat{B}\big|j\big\rangle \;=\; \hat{B}\hat{A}\big|j\big\rangle \;=\; \overline{a}\hat{B}\big|j\big\rangle \;.$$

Quindi $\hat{B}\big|j\big\rangle$ è dato da una combinazione lineare della forma $\displaystyle\sum_{i=i'}^{i''} b_{ji}\big|i\big\rangle$.

Dunque nella autobase di $\hat{A}$ l'operatore $\hat{B}$ è rappresentato da una matrice diagonale a blocchi. Per esempio se $\hat{A}$ è rappresentato dalla matrice 7×7 precedente, $\hat{B}$ è dato da una matrice della forma

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{55} & b_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{65} & b_{66} & b_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{75} & b_{76} & b_{77} \end{bmatrix} .$$

Se anche $\hat{B}$ è un operatore hermitiano ciascuno degli autospazi di $\hat{A}$ è invariante per $\hat{B}$ e le sottomatrici precedenti sono hermitiane (in particolare gli autovalori b_1 e b_4 sono reali).
In ciascuno degli autospazi di $\hat{A}$ si può individuare una base ortonormale di autovettori di $\hat{B}$; quindi si può individuare una base ortonormale per l'intero spazio costituita da autovettori di entrambi gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

T34c.12 Da quanto sopra segue il seguente enunciato, di grande importanza pratica.

Prop. Due operatori hermitiani che commutano possiedono una base (ortonormale) comune nella quale entrambi sono rappresentati da matrici diagonali ▮

Benché la conclusione generale precedente sia stata ottenuta con notevole facilità, occorre osservare che la effettiva individuazione di queste basi a partire da operatori specifici può essere onerosa e richiedere approfonditi studi particolari.

Quello che abbiamo trovato per gli operatori hermitiani è molto importante per la meccanica quantistica: con questi operatori si rappresentano le grandezze osservabili, i loro autovettori rappresentano stati nei quali esse sono misurabili esattamente (in linea di principio) e gli autovalori sono i valori ottenibili dalle osservazioni.

Due operatori hermitiani che commutano riguardano grandezze osservabili che possono essere misurate entrambe esattamente.
Questo invece non accade per due osservabili associate a operatori $\hat{A}$ e $\hat{C}$ che non commutano: il commutatore di questi operatori $[\hat{A}, \hat{C}]$, diverso dall'operatore nullo $\hat{\mathbb{O}}$, esprime la mutua incompatibilità delle corrispondenti grandezze fisiche rispetto alla misurazione.

T34 d. operatori unitari ed operatori esponenziali

5 (((((() **T34d.01** Nell'ambito dell'insieme $\mathsf{OprL}_{\mathsf{H}}$ degli operatori su uno spazio di Hilbert H diciamo **operatore unitario** un operatore invertibile il cui aggiunto coincide con il suo inverso.
Denotiamo con $\mathsf{OprLU}_{\mathsf{H}}$ l'insieme di tali operatori e osserviamo che $\hat{U} \in \mathsf{OprLU}_{\mathsf{H}}$ implica $\hat{U}^{-\mathbf{1}} = \hat{U}^{\dagger}$.

(1) Prop.: Un operatore unitario $\hat{U}$ non cambia la norma dei vettori, in quanto:

$$\langle \hat{U}\mathsf{v} \,|\, \hat{U}\mathsf{v} \rangle = \langle \hat{U}^{\dagger}\hat{U}\mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle = \langle \hat{U}^{-\mathbf{1}} \,|\, \mathsf{v} \rangle = \langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle .$$

Quindi gli operatori unitari esprimono delle rotazioni dello spazio H (mentre si è visto che gli operatori hermitiani esprimono dilatazioni).

T34d.02 Abbiamo introdotto senza difficoltà combinazioni lineari, potenze e polinomi di operatori; si possono anche introdurre funzioni analitiche di operatori, cioè trasformazioni lineari di uno spazio di Hilbert esprimibili come serie di potenze di operatori noti.

Evidentemente ogni operatore commuta con le proprie potenze, con i propri polinomi e con le serie di potenze di se stesso.
Quindi un operatore hermitiano ha in comune con queste funzioni gli autovettori.
Per i corrispondenti autovalori si trova:

$$\hat{A}|\mathsf{v}\rangle = a|\mathsf{v}\rangle \implies f(\hat{A})|\mathsf{v}\rangle = f(a)|\mathsf{v}\rangle .$$

T34d.03 Nel caso di un operatore hermitiano $\hat{A}$, riferendoci a una sua autobase $\mathfrak{B}$, se abbiamo

$$(1) \qquad \hat{A}_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} ,$$

per una funzione analitica $f(\hat{A})$ si trova la matrice

$$(2) \qquad f(\hat{A})_{\mathfrak{B}} = \begin{bmatrix} f(a_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f(a_2) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & f(a_3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

T34d.04 Particolarmente interessante e utile è la funzione esponenziale $\exp(z)$ esprimibile per ogni valore complesso della variabile z, insieme a funzioni ottenibili direttamente da questa, come le funzioni seno e coseno.

$$(1) \qquad \exp(\hat{L}) = \hat{\mathbb{I}} + \hat{L} + \frac{1}{2!}\hat{L}^2 + \frac{1}{3!}\hat{L}^3 + \cdots ,$$

$$(2) \qquad \cos(\hat{L}) = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\hat{A}} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\hat{A}}}{2} = \hat{\mathbb{I}} - \frac{1}{2!}\hat{L}^2 + \frac{1}{4!}\hat{L}^4 - \cdots ,$$

$$(3) \qquad \sin(\hat{L}) = \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\hat{A}} - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\hat{A}}}{2i} = \hat{L} - \frac{1}{3!}\hat{L}^3 + \frac{1}{5!}\hat{L}^5 - \cdots .$$

Osserviamo che $\exp(\hat{\mathbb{I}}) = \mathsf{e} \cdot \hat{\mathbb{I}}$, $\exp(\hat{\mathbb{O}}) = \hat{\mathbb{I}} = \cos(\hat{\mathbb{O}})$, $\sin(\hat{\mathbb{O}}) = \hat{\mathbb{O}}$.

T34d.05 Per due operatori che commutano, $[\hat{A},\hat{B}] = \hat{\mathbb{O}}$ si trova

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) \;=\; \exp(\hat{A})\,\exp(\hat{B}) \;=\; \exp(\hat{B})\,\exp(\hat{A}) \;. \tag{1}$$

Per l'esponenziale della somma di due operatori che non commutano si hanno invece espressioni molto più complesse.

Dalla uguaglianza precedente segue

$$\exp(\hat{A})\;\exp(\hat{A})^{-\mathbf{1}} \;=\; \hat{\mathbb{I}} \qquad \text{ovvero} \qquad \exp(\hat{A})^{-\mathbf{1}} \;=\; \exp(-\hat{A}) \;. \tag{2}$$

Sono molto utili gli esponenziali aventi come argomento un operatore noto moltiplicato per l'unità immaginaria; per essi:

$$\begin{aligned} \exp(\mathsf{i}\hat{A}) \;&=\; \hat{\mathbb{I}} + \mathsf{i}\hat{A} + \frac{\mathsf{i}^2}{2!}\hat{A}^2 + \frac{\mathsf{i}^3}{3!}\hat{A}^3 + \frac{\mathsf{i}^4}{4!}\hat{A}^4 + \cdots \\ &=\; \cos(\hat{A}) + \mathsf{i}\,\sin(\hat{A}) \end{aligned} \;. \tag{3}$$

T34d.06 **Prop.** Se $\hat{A}$ è un operatore hermitiano, $\exp(\mathsf{i}\hat{A})$ è un operatore unitario:

$$\exp(\mathsf{i}\hat{A})^{-1} \;=\; \exp(-\mathsf{i}\hat{A}) \;=\; \exp(-\mathsf{i}\hat{A}^{\dagger}) \;=\; (\exp(\mathsf{i}\hat{A}))^{\dagger} \;\blacksquare$$

Un operatore unitario della forma $\hat{U}(t) = \exp(\mathsf{i}\hat{K}(t))$ con $\hat{K}(0) = \hat{\mathbb{O}}$ e $\hat{K}(t)$ funzione continua e regolare della variabile reale t, quando viene applicato a un vettore fornisce una famiglia continua di vettori tutti della stessa lunghezza; questi si possono presentare efficacemente come un vettore mobile la cui estremità diversa dall'origine effettua una traiettoria nello spazio di Hilbert del quale fa parte.

Particolarmente interesanti sono le traiettorie delle estremità dei vettori sulla sfera con centro nell'origine e di raggio 1.

L'esposizione in `https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/` e `https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`