1

Capitolo T30
topologia generale

Contenuti delle sezioni

a. definizioni di spazi topologici p. 2
b. funzioni continue p. 7
c. sottospazi topologici, spazi topologici quoziente p. 9
d. prodotto di spazi topologici p. 10
e. filtri p. 11
f. limiti p. 12

12 pagine

T30 0.01 In questo capitolo si introducono le prime nozioni della topologia generale, cioè della parte della matematica che studia, in forma generale e astratta, le entità e i procedimenti che permettono di esaminare e utilizzare le proprietà delle figure geometriche che sono invarianti per deformazioni continue.

Tra i primi passi di questa disciplina viene affrontata anche la definizione generale e rigorosa, cioè che non fa ricorso a concezioni intuitive, della stessa nozione di continuità.

T30 a. definizioni di spazi topologici

T30 a.01 La **topologia generale** riguarda la nozione del cosiddetto spazio topologico, una entità che può essere definita in vari modi equivalenti come coppia costituita da un insieme terreno (o ambiente) e da una collezione di sottoinsiemi del terreno alla quale si fanno richieste di natura puramente insiemistica.

Il terreno viene a costituire l'ambiente entro il quale potranno essere individuate numerose entità dotate di proprietà interpretabili in termini geometrici, ma anche in grado di costituire gli oggetti di svariate elaborazioni esprimibili in puri termini insiemistici e quindi di portata generale.
La collezione dei sottoinsiemi costituisce una strumentazione per la definizione di entità e configurazioni di grande interesse per molti problemi che afferiscono soprattutto alla geometria e all'analisi, ma che riguardano anche entità meno classiche e più discrete, ad esempio le serie formali di potenze [I35].
L'accennata strumentazione e le definizioni che consente in partenza sono astratte e generali, ma posseggono una gerarchia di particolarizzazioni che conducono a risultati anche molto concreti.
In tal modo la topologia generale riesce a fornire un rilevante contributo all'assetto complessivo logicamente robusto e con caratteristiche di unificazione ad una ampia varietà di costruzioni matematiche con forti ricadute computazionali.

Qui partiamo dalla definizione che si serve dalla collezione degli insiemi aperti di un insieme ambiente. Successivamente presentiamo le definizioni alternative che si servono degli insiemi chiusi, degli intorni e delle collezioni di basi e dimostreremo le loro equivalenze. Evidentemente questa possibilità di definizioni equivalenti fornisce dall'inizio elevata versatilità alla strumentazione topologica.

T30 a.02 Si dice **spazio topologico sugli aperti** ogni coppia $\langle S, \mathsf{O}\rangle$, dove S è un insieme nonvuoto e O è una collezione di sottoinsiemi di S che gode delle seguenti proprietà:

[TopO 1] L'unione di una qualsiasi famiglia di insiemi di O appartiene ad O.
[TopO 2] L'intersezione di una collezione finita di insiemi in O appartiene ad O.

Una collezione di insiemi che gode delle proprietà [TopO 1,2] si dice **topologia sugli aperti**.

Abbrevieremo il termine "spazio topologico sugli aperti" con **spazio topologico-O** e il termine "topologia sugli aperti" con **topologia-O**.
Con le notazioni precedenti si dice che O è una topologia-O per l'ambiente S, mentre S si dice **terreno della topologia** $\langle S, \mathsf{O}\rangle$.
In genere gli elementi del terreno di una topologia si chiamano **punti**.

T30 a.03 Applicando [TopO 1] all'unione della collezione vuota di insiemi si ottiene che $\emptyset$ appartiene a O.
Applicando [TopO 2] all'intersezione della collezione vuota di insiemi di S si ottiene che lo stesso S appartiene a O.

Talora conviene servirsi, invece che del conciso assioma [TopO 2], della equivalente coppia costituita dai due assiomi che seguono.

[TopO 2a] L'intersezione di due insiemi in O appartiene ad O.

[TopO 2b] S appartiene ad O.

T30 a.04 Un primo esempio di spazio topologico-O è costituito dall'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ovvero dalla retta reale, e dalla collezione comprendente $\emptyset$, $\mathbb{R}$, gli intervalli reali aperti limitati della forma **(**a,b **)** o illimitati, e tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ ottenibili come unioni di famiglie di intervalli aperti.

Infatti l'intersezione di due intervalli aperti è $\emptyset$ o un intervallo aperto e l'assioma [TopO 2] è evidentemente soddisfatto.

Vediamo una variante bidimensionale dell'esempio precedente e per questo conveniamo di chiamare rettangoli-hd aperti i rettangoli aperti in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esprimibili come prodotti cartesiani di intervalli reali aperti (limitati o meno).
L'esempio ha come terreno il piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e come topologia la collezione comprendente i rettangoli-hd aperti, nonché tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ottenibili come unioni di famiglie di rettangoli-hd aperti.
In effetti l'intersezione di due rettangoli aperti xy, se non è $\emptyset$, è un rettangolo aperto xy.

Più in generale la collezione degli aperti di un qualsiasi spazio metrico soddisfa [TopO 1] e [TopO 2] e quindi costituisce una topologia-O.

La nozione di spazio topologico, tuttavia, è molto più comprensiva e non richiede che sia definita una distanza.

T30 a.05 Si possono definire anche topologie aventi come insieme ambiente un insieme finito o un insieme numerabile.

(1) Eserc. Considerare le seguenti collezioni di insiemi espressi come stringhe di lettere.

$$\alpha := \{\emptyset, a, b, ab, abc\} \quad , \quad \beta := \{\emptyset, ab, cd, abcd\} \quad , \quad \gamma := \{\emptyset, a, ab, abc, abcd, abcde\} \quad ,$$

$$\delta := \{\emptyset, c, d, ab, cd, abc, abd, abcd\} \quad , \quad \eta := \{\emptyset, a, b, abc\} \quad , \quad \epsilon := \{\emptyset, ab, bc, abc\} \ .$$

Verificare che si possono considerare collezioni di aperti α,β, γ e δ, ma non η ed ϵ.

(2) Eserc. Verificare che l'ambiente $\mathbb{R}$ e la collezione che comprende tutti gli intervalli razionali aperti limitati $\{q, r \in \mathbb{Q} :| [q : r]\}$ e tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{Q}$ ottenibili come unioni di arbitrarie famiglie dei suddetti intervalli costituisce uno spazio topologico-O.

T30 a.06 Si constata facilmente che sopra un insieme arbitrario S con almeno 2 elementi si possono definire due topologie-O: la cosiddetta la **topologia minimamente fine** $\langle S, \{\emptyset, S\}\rangle$ e la cosiddetta **topologia discreta** $\langle S, \mathfrak{P}(S)\rangle$.

In generale date due topologie-O sullo stesso terreno S, O_1 e O_2, si dice che la O_1 è **topologia meno fine** ovvero **topologia più grossolana** della O_2 sse $\mathsf{O}_1 \subseteq \mathsf{O}_2$.
Ovviamente $\{\emptyset, S\}$ è la più grossolana delle topologie-O su S, mentre $\mathfrak{P}(S)$ è la più fine.

Osserviamo che abbiamo appena effettuate alcune semplificazioni consistenti nell'identificare una topologia-O $\langle S, \mathsf{O}\rangle$ fornendo soltanto la collezione O di sottoinsiemi dell'ambiente S.
Questo tipo di semplificazione si adotta spesso quando dalla collezione O risulta facile risalire all'ambiente S. Sempificazioni di questo tipo si adottano anche per altri gneri di strutture, in particolare per le varianti degli spazi topologici-O.

T30 a.07 Denotiamo con **Tsp** la classe degli spazi topologici-O.

In uno spazio topologico-O $\langle S, \mathsf{O}\rangle$ si dice **insieme chiuso** ogni insieme complementare di un insieme aperto.

Denotiamo con K la collezione degli insiemi chiusi dello spazio $\langle S, \mathsf{O}\rangle$, cioè poniamo $\mathsf{K} := \{O \in \mathsf{O} :| S \setminus O\}$.

Evidentemente la conoscenza astratta degli insiemi chiusi equivale alla conoscenza astratta degli insiemi aperti. Qui per **conoscenza astratta** intendiamo il possesso in linea di principio di informazioni dalle

quali potrebbe essere posibile dedurne molte altre, ma senza preoccuparsi delle possibilità si eseguire effettivamente le deduzioni richieste.

Più dettagliatamente [TopO 1] e [TopO 2] implicano e sono implicate dalle proprietà seguenti.

[TopK 1] L'intersezione di una qualsiasi famiglia di insiemi di K appartiene a K.

[TopK 2] L'unione di una collezione finita di insiemi in K appartiene a K.

Chiamiamo **spazio topologico sui chiusi** o **spazio topologico-K** ogni $\langle S, \mathsf{K}\rangle$ con S insieme qualsiasi e K collezione di sottoinsiemi di S che soddisfano [TopK 1] e [TopK 2].
Chiaramente la specie degli spazi topologici-O e la specie degli spazi topologici-K sono criptomorfe. Abbiamo dunque una formulazione equivalente degli spazi topologici.

T30 a.08 Osserviamo che in ogni spazio topologico sopra un insieme terreno S, sia $\emptyset$ che S sono insiemi sia aperti che chiusi. Inoltre in ogni topologia discreta tutti i sottoinsiemi dell'insieme terreno sono sia aperti che chiusi.

Se $\mathcal{T} = \langle S, \mathsf{O}\rangle$ è una scrittura atta a individuare uno spazio topologico-O, uno spazio topologico-K sopra S o un'altra entità equivalente, denotiamo con $\mathbf{SetOpen}_{\mathcal{T}}$ l'insieme dei sottoinsiemi di S aperti per $\mathcal{T}$, cioè O; Denotiamo con $\mathbf{SetClsd}_{\mathcal{T}}$ l'insieme dei sottoinsiemi di S chiusi per $\mathcal{T}$ e con $\mathbf{Grnd}_{\mathcal{T}}$ il terreno di $\mathcal{T}$, cioè S.

Per trattare qualche sottoinsieme di uno spazio topologico spesso è opportuno fare riferimento a una sua copertura si serve solo di insiemi aperti o di insiemi chiusi. Queste coperture sono dette, risp., **coperture di aperti** e **coperture di chiusi**.

T30 a.09 Si definisce **omeomorfismo** di un $\boldsymbol{T}_1 = \langle S_1, \mathsf{O}_1\rangle \in \mathbf{Tsp}$ sopra un $\boldsymbol{T}_2 = \langle S_2, \mathsf{O}_2\rangle \in \mathbf{Tsp}$ una biiezione di S_1 su S_2 che trasforma O_1 in O_2.
In altre parole $\beta \in \lceil S_1 \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd S_2 \rceil$ si dice omeomorfismo di $\boldsymbol{T}_1$ sopra $\boldsymbol{T}_2$ sse $\forall O \in \mathsf{O}_1 : \beta(O) \in \mathsf{O}_2$ e $\forall \overline{O} \in \mathsf{O}_2 : (\beta^{-\mathbf{1}})(\overline{O}) \in \mathsf{O}_1$.

In particolare se $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ sono spazi topologici-O discreti ogni biiezione tra S_1 ed S_2 è un omeomorfismo. Inoltre ogni biiezione tra S_1 ed S_2 è un omeomorfismo di $\langle S_1, \{\emptyset, S_1\}\rangle$ sopra $\langle S_2, \{\emptyset, S_2\}\rangle$.

Conviene rilevare esplicitamente che si può avere omeonmorfismo solo tra spazi topologici aventi terreni con lo stesso cardinale.
Si osserva inoltre che un omeomorfismo di $\boldsymbol{T}_1$ sopra $\boldsymbol{T}_2$ trasforma gli insiemi chiusi di $\boldsymbol{T}_1$ in insiemi chiusi di $\boldsymbol{T}_2$.

T30 a.10 Consideriamo $\boldsymbol{T} = \langle S, \mathsf{O}\rangle \in \mathbf{Tsp}$ e un sottoinsieme $A \subseteq S$.
Si dice **intorno dell'insieme** A ogni sottoinsieme di S che contiene un insieme aperto che contiene A. Un intorno di un singoletto $\{a\}$ per ogni $a \in S$ viene detto **intorno del punto** a.
Denotiamo con $\mathsf{Ngbr}(A)$ la collezione degli intorni di $A \subseteq S$ e abbreviamo $\mathsf{Ngbr}(\{a\})$ con $\mathsf{Ngbr}(a)$.

Chiaramente $B \subseteq A \subseteq \Longrightarrow \mathsf{Ngbr}(B) \supseteq \mathsf{Ngbr}(A)$, ovvero ogni intorno di un insieme A di ponti di uno spazio topologico è anche intorno di ciascuno dei sottoinsiemi di A.
Vale anche il viceversa: se V è intorno di tutti i punti appartenenti a un insieme A è anche intorno di A.

In particolare ogni insieme aperto è intorno di ciascuno dei suoi punti e ogni insieme che è intorno di tutti i propri punti è un insieme aperto.

T30 a.11 ( ) Prop.: Le collezioni $\mathsf{Ngbr}(x)$ riguardanti i punti dello spazio topologico $\langle S, \mathsf{O}\rangle$ godono delle proprietà che seguono.

[TopN 1] $W \supseteq V \in \mathsf{Ngbr}(x) \implies W \in \mathsf{Ngbr}(x)$ ∎

[TopN 2] Ogni intersezione finita di insiemi di $\mathsf{Ngbr}(x)$ appartiene a $\mathsf{Ngbr}(x)$ ∎

[TopN 3] Il punto x appartiene a $\mathsf{Ngbr}(x)$ ∎

[TopN 4] Se $V \in \mathsf{Ngbr}(x)$ esiste un $W \in \mathsf{Ngbr}(x)$ tale che $\forall y \in W \,:\, V \in \mathsf{Ngbr}(y)$.

Dim.: Basta prendere per il ruolo W un qualsiasi insieme aperto contenuto in V e contenente x ∎

T30 a.12 Le quattro proprietà [TopN 1,2,3,4] sono in grado di caratterizzare completamente le collezioni di intorni di una topologia-O.

(1) Prop.: Se per ogni elemento x di un insieme S si dispone di una collezione $\mathsf{N}(x)$ di sottoinsiemi di S che soddisfano [TopV1,2,3,4], esiste una unica topologia-O sopra S, O, tale che
$\forall x \in S \,:\, \mathsf{N}(x) = \mathsf{Ngbr}(x)$.

Dim.: Come collezione degli aperti O si assume la collezione dei sottoinsiemi di $O \subseteq S$ tali che $\forall x \in O \,:\, O \in \mathsf{N}(x)$. Questa scelta garantisce che O se si dimostra essere una topologia-O, è unica.
La proprietà [TopN 1] delle collezioni $\mathsf{N}(x)$ implica che O soddisfa [TopO 1], mentre la proprietà [TopN 2] $\mathsf{N}(x)$ implica la [TopO 2] per O.

Resta solo da dimostrare che per la topologia-O O per gli intorni si trova $\mathsf{Ngbr}(x) = \mathsf{N}(x)$. ∎

T30 a.13 A questo punto si può definire **spazio topologico degli intorni** o **spazio topologico-N** una coppia $\langle S, \mathsf{V}\rangle$ dove VSs rappresenta una famiglia di collezioni di sottoinsiemi di S della forma $\lceil x \in S \mapsto \mathsf{N}(x) \rceil$ dove ogni $\mathsf{N}(x)$ soddisfa le proprietà [TopN 1,2,3,4]. La N richiama *neighborhood*; in francese si parla di *voisinage*).

Possiamo dunque sintetizzare affermamdo che la specie di strutture degli spazi topologici-N è criptomorfa alla specie degli spazi topologici-O e alla specie degli spazi topologici-K.

T30 a.14 La collezione degli intorni dei sottoinsiemi di uno spazio topologico è assai vasta, ben più ampia della collezione degli insiemi aperti. In effetti gli intorni consentono di effettuare manovre più flessibili di quelle che si servono solo di insiemi aperti.
Si può quindi affermare che la assiomatizzazione degli intorni si serve di un terreno molto più esteso della assiomatizzazione degli aperti (e di quella dei chiusi), ma risulta sensibilmente più versatile.

Dall'altra parte si possono individuare collezioni più ristrette della collezione degli intorni che consentono di effettuare sostanzialmente tutte le manovre ottenibili con gli intorni generici.

Relativamente a un $\boldsymbol{T} = \langle S, \mathsf{O}\rangle \in \mathbf{Tsp}$ e a un $A \subseteq S$, si dice **sistema fondamentale di intorni** di A ogni collezione W di intorni di A tale che ogni intorno V di A si trova in W un W tale che $A \subseteq W \subseteq V$.

T30 a.15 Si dice **punto interiore** di un $A \subseteq S$ ogni punto $a \in S$ per il quale A è intorno, cioè tale che $A \in \mathsf{Ngbr}(a)$.
L'insieme dei punti interiori di A si dice **interiore** di A e si denota con $\mathsf{Intrn}(A)$.

Dalle definizioni seguono subito i seguenti enunciati.

(1) $\mathsf{Intrn}(A) = \bigcup\{O \in \mathsf{O} \wedge O \subseteq A :| O\}$ ∎

(2) $\mathsf{Intrn}(A)$ è il più esteso insieme aperto contenuto in A ∎

(3) $\forall A, B \subseteq S \,:\, A \subset B \Longrightarrow \mathsf{Intrn}(A) \subseteq \mathsf{Intrn}(B)$ ∎

(4) $\forall A, B \subseteq S \,:\, B \in \mathsf{Ngbr}(A) \iff A \subseteq \mathsf{Intrn}(B)$ ∎

(5) $A \in \mathsf{O} \iff A = \mathsf{Intrn}(A)$ ∎

(6) $\forall A, B \subseteq S \ : \ \mathsf{Intrn}(A \cap B)\mathsf{Intrn}(A) \cap \mathsf{Intrn}(B)$ ∎

T30 a.16 Si dice **punto esteriore** di un $A \subseteq S$ ogni punto $b \in S$ che appartiene ad $\mathsf{Intrn}(S \setminus A$. per il quale $S \setminus A$ è intorno, cioè tale che $S \setminus A \in \mathsf{Ngbr}(a)$.

L'insieme dei punti esteriori di A si dice **esteriore** di A e si denota con $\mathsf{Extrn}(A)$.

Un punto $b \in S$ è esteriore di $A \subset S$ sse possiede un intorno che non interseca A ∎

T30 a.17 Consideriamo la topologia-O $\mathsf{T} = \langle S, \mathsf{O}\rangle$. Si dice **chiusura secondo la topologia-O** T dell'insieme $A \subseteq S$ l'insieme dei punti di S tali che ciascuno dei loro intorni interseca A.
Tale insieme si denota con $\mathsf{Clsr}_{\mathsf{T}}(A)$ o anche con $\mathsf{Clsr}_{\mathsf{O}}(A)$. Nei contesti nei quali la topologia T si può sottintendere la scrittura precedente si abbrevia con la $\mathsf{Clsr}(A)$ o anche con $\overline{A}$.

Si dimostrano facilmente gli enunciati che seguono.

(1) $\forall A \subseteq S \ , \ b \in S \ \ : \ \ b \in S \setminus \mathsf{Clsr}(A) \iff b \in \mathsf{Extrn}(A)$ ∎

(2) $\complement\,(\mathsf{Clsr}(A)) \ = \ \mathsf{Intrn}\left(\complement(A)\right) \quad , \quad \complement(\mathsf{Intrn}(A)) \ = \ \mathsf{Clsr}(\complement(A))$ ∎

(3) Un insieme $C \subset S$ è chiuso sse $C = \mathsf{Clsr}(C)$ ∎

(4) $\mathsf{Clsr}(A \cup B) = \mathsf{Clsr}(A) \cup \mathsf{Clsr}(B)$ ∎

(5) $\forall O \in \mathsf{O} \ , \ B \subseteq S \ : \ O \cap \mathsf{Clsr}(B) \ \subseteq \ \mathsf{Clsr}(O \cap B)$.

Dim.: Consideriamo un arbitrario $x \in O \cap \mathsf{Clsr}(B)$. Per ogni $V \in \mathsf{Ngbr}(x)$, anche $V \cap O \in \mathsf{Ngbr}(x)$, grazie al fatto che $O \in \mathsf{O}$. Dunque $O \cap B \cap V \neq \emptyset$ e per l'arbitrarietà di $V \in \mathsf{Ngbr}(x)$ deve essere $x \in \mathsf{Clsr}(O \cap B)$ ∎

T30 a.18 Un punto a si dice **punto isolato** di $A \subseteq S$ sse possiede un intorno V tale che $A \cap V = \{a\}$, cioè non contiene punti di A diversi da a.

In particolare un punto x è isolato nell'intero S sse $\{x\}$ è un insieme aperto.

Un insieme chiuso privo di punti isolati viene detto **insieme perfetto**.

T30 a.19 Un punto f si dice **punto di frontiera** di un insieme $A \subset S$ sse appartiene sia a $\mathsf{Clsr}(A)$ che a $\mathsf{Clsr}(S \setminus A)$.
L'insieme dei punti di frontiera di A si dice **frontiera** di A e si denota con $\mathsf{Frntr}(A)$.
Si può quindi affermare

(1) $$\forall A \subset S \ : \ \mathsf{Frntr}(A) = \mathsf{Clsr}(A) \cap \mathsf{Clsr}(S \setminus A) \in \mathsf{K}$$ ∎

Si dimostrano facilmente anche i seguenti enunciati.

(2) $\forall A \subseteq S \ : \ \mathsf{Frntr}(A) = \mathsf{Frntr}(S \setminus A)$ ∎

(3) $\forall A \subseteq S$ con $\mathsf{Frntr}(A) \neq \emptyset \ , \ V \in \mathsf{Ngbr}(A) \ : \ V \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ V \cap (S \setminus A) \neq \emptyset$ ∎

(4) $\forall A \subset S \ : \ S = \mathsf{Intrn}(A) \dot\cup \mathsf{Frntr}(A) \dot\cup \mathsf{Extrn}(A)$ ∎

T30 a.20 Un $D \subset S$ si dice **insieme denso** in S sse $\mathsf{Clsr}(D) = S$, cioè sse ogni $O \in \mathsf{O}$ nonvuoto interseca D.

Si trova che l'insieme dei razionali e l'insieme degli irrazionali sono densi in $\mathbb{R}$.

Inoltre per ogni $d = 2, 3, 4, ...$ è denso in $\mathbb{R}$ anche l'insieme dei particolari razionali

$$\left\{ n \in \mathbb{Z} \ , \ p \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{n}{m^p} \right\} .$$

In uno spazio topologico discreto $\left\langle S, \mathfrak{P}(S)\right\rangle$ l'unico insieme denso è S.

In uno spazio topologico minimamente fine $\left\langle S, \{\emptyset, S\}\right\rangle$ risulta denso ogni sottoinsieme nonvuoto di S.

T30 b. funzioni continue

T30 b.01 Consideriamo due spazi topologici-O $\boldsymbol{T}_1 = \langle S_1, \mathsf{O}_1 \rangle$ e $TBi_2 = \langle S_2, \mathsf{O}_2 \rangle$.
Una funzione $f \in \lceil S_1 \longmapsto S_2 \rceil$ si dice **funzione continua** da $\boldsymbol{T}_1$ in $\boldsymbol{T}_2$ nel punto $x_0 \in S_1$ sse per ogni $V_2 \in \mathsf{Ngbr}(f(x_0))$: esiste $V_1 = V_1(V_2) \in \mathsf{Ngbr}(x_0)$ per la cui immagine per f si ha $f(V_1) \subseteq V_2$.

Osserviamo che la condizione $f(V_1) \subseteq V_2$ equivale alla $V_1 \subseteq f^{-\mathbf{1}}(V_2) \ \wedge \ x \in V_1 \Longrightarrow f(x) \in V_2$.

La definizione di funzione continua si può enunciare anche convenendo che $f \in \lceil S_1 \longmapsto S_2 \rceil$ si dice continua in $x_0 \in S_1$ sse $\forall V_2 \in \mathsf{Ngbr}(f(x_0)) : (f^{-\mathbf{1}})(V_2) \in \mathsf{Ngbr}(x_0)$.

La precedente richiesta si può ridurre chiedendo che sia $(f^{-\mathbf{1}})(V_2) \in \mathsf{Ngbr}(x_0)$ per ogni V_2 appartenente a un insieme fondamentale di intorni di $f(x_0)$.

L'insieme delle funzioni in $\lceil S_1 \longmapsto S_2 \rceil$ continue in $x \in S_1$ relativamente a $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ lo denotiamo con $\mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2;\, x}$.
In molti contesti questa notazione si può semplificare nella FunCnt_x.

T30 b.02 (1) Prop.: Consideriamo la funzione $f \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2;\, x}$. Se $A \subseteq S_1$ e $x \in \mathsf{Clsr}(A)$, allora $f(x) \in \mathsf{Clsr}(f(A))$.

Dim.: Consideriamo un arbitrario $V_2 \in \mathsf{Ngbr}(f(x))$; la continuità della f in x implica che $f^{-\mathbf{1}}(V_2) \in \mathsf{Ngbr}(x)$ e quindi che $f^{-\mathbf{1}}(V_2)$ interseca A e di conseguenza che $f(x) \in \mathsf{Clsr}\big(f(A)\big)$ ∎

(2) Prop.: Consideriamo tre spazi topologici $\boldsymbol{T}_i = \langle S_i, \mathsf{O}_i \rangle$ per $i = 1, 2, 3$ e le due funzioni $f \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, TBi_2;\, x}$ e $g \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_2, TBi_3;\, (x),f}$; allora $f \circ_{rl} g \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, TBi_3;\, x}$.
Dim.: consideriamo un arbitrario $V_2 \in \mathsf{Ngbr}((x,f),g)$; la continuità della g in x,f implica $V_2 \fatsemi (g^{-\mathbf{1}}) \in \mathsf{Ngbr}(x,f)$; a sua volta la continuità della f in x implica $(V_2 \fatsemi (g^{-\mathbf{1}})) \fatsemi (f^{-\mathbf{1}}) \in \mathsf{Ngbr}(x)$ e questa equivale alla continuità in x della $f \circ_{lr} g$ ∎

T30 b.03 Una $f \in \lceil S_1 \longmapsto S_2 \rceil$ si dice **funzione continua** sse è continua in tutti i punti $x \in S_1$.
L'insieme delle funzioni continue relativamente agli spazi topologici $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ si denota con $\mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2}$.
Sono evidentemente continue le seguenti funzioni:

(a) $\mathsf{Id}_{S_1} \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_1}$;

(b) le funzioni costanti $\lceil x \in S_1 \mapsto c \rceil$ per ogni $c \in S_2$, quali che siano gli spazi $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$;

(b) tutte le funzioni da uno spazio topologico discreto ad un qualsiasi spazio topologico .

(1) Prop.: Consideriamo $\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2 \in \mathbf{Tsp}$ ed $f \in \lceil S_1 \longmapsto S_2 \rceil$. Gli enunciati che seguono sono equivalenti.

(a) $f \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2}$.

(b) $\forall A \subseteq S_1 \ : \ f(\mathsf{Clsr}(A)) \subseteq \mathsf{Clsr}(f(A))$.

(c) $\forall K_2 \in \mathsf{SetClsd}_{\boldsymbol{T}_2} \ : \ (f^{-\mathbf{1}})(K_2) \in \mathsf{SetClsd}_{\boldsymbol{T}_1}$.

(d) $\forall K_2 \in \mathsf{SetOpen}_{\boldsymbol{T}_2} \ : \ (f^{-\mathbf{1}})(K_2) \in \mathsf{SetOpen}_{\boldsymbol{T}_1}$.

Dim.: "(a)$\Longrightarrow$(b)" Equivale a b02(1) ∎

"(b) $\Longrightarrow$ (c)" Consideriamo un arbitrario $K_2 \in \mathsf{SetClsd}_{\boldsymbol{T}_2}$ e sia $K_1 := (f^{-\mathbf{1}})(K_2)$; applicandogli l'ipotesi si ottiene $f(\mathsf{Clsr}(K_2)) \subseteq \mathsf{Clsr}(f(K_1)) = \mathsf{Clsr}(K_2) = K_2$, cioè $\mathsf{Clsr}(K_1) \subseteq (f^{-\mathbf{1}})(K_2) = K_1 \subseteq \mathsf{Clsr}(K_1)$ e da qui $K_1 \in \mathsf{SetClsd}_{\boldsymbol{T}_1}$ ∎

"(c) $\Longrightarrow$ (d)" La deduzione discende dalla relazione generale

$$\forall f \in \lceil\!\lceil\, S_1 \longmapsto S_2 \,\rceil\!\rceil \ , \ A_2 \subseteq S_2 \ : \ \complement\big((f^{-1})(A_2) = (f^{-1})(\complement(A_2)\big) \ .$$

"(d)$\Longrightarrow$ (a)" consideriamo un arbitrario $x \in S_1$ e un qualsiasi $V_2 \in \mathsf{Ngbr}(f(x))$.
Il significato di intorno implica che $\mathbf{SetOpen}_{\boldsymbol{T}_2} \ni O_2 \,\rceil\!\rceil\, f(x) \in O_2 \subseteq V_2$ e quindi $x \in (f^{-\mathbf{1}})(O_2) \subseteq (f^{-\mathbf{1}})(V_2)$;
grazie all'ipotesi abbiamo $(f^{-\mathbf{1}})(O_2) \in \mathbf{SetOpen}_{P\boldsymbol{T}_1}$ e di conseguenza $(f^{-\mathbf{1}})(V_2) \in \mathsf{Ngbr}_{\boldsymbol{T}_1}(x)$ e di conseguenza la continuità della f ∎

T30 b.04 Va rilevato che il trasformato per una funzione continua di un insieme aperto non è necessariamente aperto; similmente il trasformato di un insieme chiuso non è necessariamente chiuso.

Per esempio la funzione $\lceil\!\lceil\, x \in \mathbb{R} \ \mapsto \ \dfrac{1}{1+x^2} \,\rceil\!\rceil$ appartiene a $\mathsf{FunCnt}_{\mathbb{R},\mathbb{R}}$, ma $f(\mathbb{R}) = (0,1]$ e questo intervallo non è né un insieme aperto, né un insieme chiuso della retta reale.

T30 b.05 Consideriamo tre spazi topologici $\boldsymbol{T}_i = \langle S_i, \mathsf{O}_i \rangle$ per $i = 1,2,3$ e le due funzioni
$f \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2}$ e $g \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_3}$; allora $f \circ_{lr} g \ \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_3}$.
Dim.: Segue facilmente da b02(2) ∎

Una funzione $f \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2}$ invertibile e tale che $f^{-\mathbf{1}} \in \mathsf{FunCnt}_{\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_1}$ si dice **funzione bicontinua** relativamente a $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$.

(1) Prop.: Una biiezione β tra due spazi topologici $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ è un omeomorfismo tra tali spazi sse f è bicontinua.

Dim.: Segue direttamente dalle definizioni ∎

L'insieme delle funzioni bicontinue relativamente alle topologie $\boldsymbol{T}_1$ e $\boldsymbol{T}_2$ si denota con $\mathsf{FunBcnt}_{\boldsymbol{T}_2,\boldsymbol{T}_1}$.

T30 c. sottospazi topologici, spazi topologici quoziente

T30 c.01 Consideriamo $\boldsymbol{T} = \langle S, \mathsf{O}\rangle \in \mathbf{Tsp}$, un sottoinsieme $U \subseteq S$ e la collezione di insiemi $\{O \in \mathsf{O} :|\ O \cap U\}$. Si constata facilmente che questa collezioni di sottoinsiemi di U soddisfa le richieste [TopO 1,2].
È quindi lecito chiamarla **topologia-O indotta** da O su U.

La coppia $\boldsymbol{T}|_U := \big\langle U, \{O \in \mathsf{O} :|\ O \cap U\}\big\rangle$ appartiene a $\mathbf{Tsp}_U$ e si dice **sottospazio topologico-O** di $\boldsymbol{T}$.
La relazione che sussiste tra questo spazio e $\boldsymbol{T}$ si enuncia scrivendo $\boldsymbol{T}|_U \leq_{Tsp} \boldsymbol{T}$.
Per concisione in questo capitolo semplifichiamo "sottospazio topologico" con "sottospazio".

Un esempio di sottospazio è quello relativo alla topologia indotta dalla topologia della retta razionale $\mathbb{Q}$ sull'insieme $\mathbb{Z}$. Quella che si ottiene è la topologia discreta di $\mathbb{Z}$, in quanto per ogni $n \in \mathbb{Z}$ $\big(n - 1/2 : n + 1/2\big) \cap \mathbb{Z} = n$ e quindi nella topologia indotta è insieme aperto ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}$.

T30 c.02 Consideriamo, oltre a $\boldsymbol{T}$ e $\boldsymbol{T}|_U$, anche un insieme di punti $W \subseteq U \subseteq S$.
Si constata dalle definizioni che $\boldsymbol{T}|_W$ coincide con $\boldsymbol{T}|_U|_W$: la collezione degli insiemi aperti è per entrambe le costruzioni $\{O \in \mathsf{O} :|\ O \cap W\}$.

T30 d. prodotto di spazi topologici

T30 d.01 Consideriamo una famiglia di insiemi $\ulcorner\, j \in J \mapsto S_j \,\urcorner$, l'insieme prodotto cartesiano $\prod_{j\in J} S_j$ e una famiglia di collezioni di insiemi $\boldsymbol{F} := \ulcorner\, j \in J \mapsto \mathsf{E}_j \,\urcorner$, dove $\forall j \in J : \mathsf{E}_j \subseteq \mathfrak{P}(S_j)$.
Diciamo **prodotto della famiglia** $\boldsymbol{F}$ la collezione di sottoinsiemi

$$\prod_{j\in J} \mathsf{T}_j \;:=\; \left\{ \forall j \in J \;:\; E_j \in \mathsf{E}_j \;\middle|\; \prod_{j\in J} E_j \right\} .$$

Consideriamo anche una famiglia di spazi topologici $\ulcorner\, j \in J \mapsto \mathsf{T}_j \,\urcorner$, dove $\forall j \in J \;:\; \text{`}\mathsf{T}_j = \langle S_j, \mathsf{O}_j \rangle$.
Si dice **prodotto degli spazi topologici** della precedente famiglia la coppia

$$\prod_{j\in J} \mathsf{T}_j \;:=\; \left\langle \prod_{j\in J} S_j, \prod_{j\in J} \mathsf{O}_j \right\rangle .$$

Gli spazi topologici-O T_j sono chiamati **spazi fattori** del precedente prodotto.

T30 d.02 Gli esempi più chiari e più ytilizzati di prodotti di spazi topologici sono quelli ottenuti a partire da famiglie finite, cioè da sequenze finite di spazi T_j.

T30 e. filtri

T30 e.01 Si dice **filtro** sopra un insieme S una collezione di sottoinsiemi di S che denotiamo con F, tale che

[Fltr 1] Se $F \in \mathsf{F}$, ogni $F' \supset F$ appartiene a F.

[Fltr 2] Ogni intersezione finita di insiemi in F appartiene ad F.

[Fltr 3] $\emptyset \notin \mathsf{F}$.

([Fltr 2] e [Fltr 3] implicano che ogni intersezione finita di insiemi in un filtro non è vuota.

Una coppia $\langle S, \mathsf{F}\rangle$ con F che soddisfa [Fltr 1,2,3] si dice **insieme filtrato**. Di una tale coppia S si dice il terreno.

Denotiamo con $\mathbf{Fltr}_S$ la collezione dei filtri sull'insieme S.
I precedenti enunciati consentono di caratterizzare la specie di struttura degli insiemi filtrati.

T30 e.02 Per ogni insieme nonvuoto S la collezione $\{S\}$ è un filtro su S.

Per ogni insieme nonvuoto S e per ogni suo sottoinsieme nonvuoto A la collezione dei sottoinsiemi di S che contengono A è un filtro su S.

Per ogni $\boldsymbol{T} = \langle S, \mathsf{O}\rangle \in \mathbf{Tsp}$ e ogni E sottoinsieme di S nonvuoto la collezione $\mathsf{Ngbr}(E)$ determina un filtro su S chiamato **filtro degli intorni** di E entro S.

Denotiamo con $\mathbf{Fltr}_{\boldsymbol{T}}$ la collezione dei filtri per lo spazio topologico $\boldsymbol{T}$.

T30 e.03 Per un qualsiasi insieme infinito S la collezione dei sottoinsiemi cofiniti di S, $\mathfrak{P}_{cof}(S)$ costituisce un filtro di S.
In particolare si dice **filtro di Frechet** la collezione dei sottoinsiemi cofiniti di $\mathbb{N}$, cioè $\mathfrak{P}_{cof}(\mathbb{N})$.
Germi di un filtro B65

T30 f. limiti

T30 f.01 Consideriamo uno spazio topologico $\boldsymbol{T} = \langle S, \mathsf{O} \rangle$ e un suo filtro $\mathsf{F} \in \mathbf{Fltr}_{\boldsymbol{T}}$.

Un punto $\overline{x} \in S$ si dice **punto limite del filtro** F sse F è più fine in senso lato del filtro degli intorni di $\overline{x}$ $\mathsf{Ngbr}(\overline{x})$.

In queste circostanze si dice anche che il filtro converge ad x e più genericamente che F è un **filtro convergente**.

T30 f.02 Si dice **ultrafiltro** sopra un insieme S un filtro U su S tale che non esista altro filtro su S più fine di esso. Si tratta dunque di un filtro massimale per l'ordinamento relativo alla finezza crescente.

Il lemma di Zorn consente di affermare ...

(1) Prop.: Dato un filtro F su S, in $\mathbf{Fltr}(S)$ esiste un ultrafiltro più fine di F.

(2) Prop.: Sia U un ultrafiltro su S. Se A e B sono sottoinsiemi di S tali che $A \cup B \in \mathsf{U}$, allora aut $A \in \mathsf{U}$ aut $B \in \mathsf{U}$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php