Capitolo T16: strutture algebriche sopra più terreni

Contenuti delle sezioni

a. moduli e spazi vettoriali p.2
b. algebre su campo p.8
c. polinomi e serie formali p.9
d. arricchimenti dei moduli p.10
e. spazi con prodotto interno e spazi metrici p.11

13 pagine

T16:**0.01** Questo capitolo prosegue la rassegna delle strutture algebriche iniziata in T15 con la presentazione delle nozioni di maggior rilievo riguardanti le strutture che si basano su due o più terreni, insiemi che in genere sono presentati anche come terreni di una delle strutture presentate nel capitolo precedente.

Nei casi di maggiore rilievo si incontrano due tipi di elementi che spesso sono chiamati, risp., vettori e scalari.

La prima parte è dedicata ai moduli e più in particolare agli spazi vettoriali.

Successivamente queste specie di strutture si arricchiscono affiancando alla somma di vettori una seconda legge di composizione tra vettori che in genere viene chiamata prodotto: tra queste strutture le più importanti sono le algebre su campo, le algebre su anello, le algebre di polinomi e più in generale le algebre di serie formali.

Vengono poi accennate le strutture che presentano due insiemi di scalari come i bimoduli, le bialgebre e le algebre di Hopf.

Nell'ultima parte vengono definiti gli arricchimenti degli spazi vettoriali, come gli spazi con prodotto interno, gli spazi metrici e gli spazi di Hilbert.

In queste strutture si individuano costruzioni di natura topologica (distanza, norma e loro varianti) che si rivelano di grande utilità, sia per gli approfondimenti formali che per le attività computazionali.

Si possono dunque introdurre gli spazi vettoriali topologici e altre specie di strutture che dispongono di una ricca dotazione di costruzioni formali le quali servono a facilitare il loro studio e aprono la strada a loro applicazioni di notevole rilevanza.

T16:a. moduli e spazi vettoriali

T16:**a.01** Consideriamo l'anello $\boldsymbol{R} = \langle R, +, 0, -, \cdot, 1 \rangle$; si dice **modulo a sinistra** su $\boldsymbol{R}$ una struttura espressa da una notazione della forma $\boldsymbol{M} = \langle M, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp \rangle$, dove $\langle M, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0} \rangle$ è un gruppo abeliano, mentre $\perp$ denota una cosiddetta **legge di composizione esterna**, applicazione del genere $\perp \in \lceil R \times M \longmapsto M \rceil$ alla quale si chiedono le seguenti proprietà:

$$\forall a, b \in R, \ \ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in M \ \ \vdots \ \ a \perp (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (a \perp \boldsymbol{w}) \ , \qquad (a+b) \perp \boldsymbol{v} = (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (b \perp \boldsymbol{v}) \ ,$$
$$(a \cdot b) \perp \boldsymbol{v} = a \perp (b \perp \boldsymbol{v}) \ , \qquad 1 \perp \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \ .$$

Denotiamo con **Mdl** la classe dei moduli a sinistra e con $\mathsf{Mdl}_{\boldsymbol{R}}$ la classe dei moduli a sinistra sull'anello $\boldsymbol{R}$.

T16:**a.02** Dualmente-LR si dice **modulo a destra** su $\boldsymbol{R}$ una struttura della forma $\boldsymbol{M} = \langle M, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp \rangle$, dove $\langle M, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0} \rangle$ è un gruppo abeliano, mentre $\perp$ denota una legge di composizione esterna del genere $\perp \in \lceil M \times R \longmapsto M \rceil$ per la quale si chiedono le proprietà che seguono

$$\forall a, b \in R, \ \ \forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in M \ \ \vdots \ \ (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) \perp a = (\boldsymbol{v} \perp a) \boldsymbol{+} (\boldsymbol{w} \perp a) \ , \qquad \boldsymbol{v} \perp (a+b) = (\boldsymbol{v} \perp a) \boldsymbol{+} (\boldsymbol{v} \perp b) \ ,$$
$$\boldsymbol{v} \perp (a \cdot b) = (\boldsymbol{v} \perp a) \perp b \ , \qquad \boldsymbol{v} \perp 1 = \boldsymbol{v} \ .$$

Denotiamo con **Mdlrt** la classe dei moduli a destra e con $\mathsf{Mdlrt}_{\boldsymbol{R}}$ la classe dei moduli a destra sull'anello $\boldsymbol{R}$.

Evidentemente la distinzione tra la specie dei moduli a sinistra e quella dei moduli a destra ha interesse solo in presenza di un anello noncommutativo.

T16:**a.03** Consideriamo il campo $\boldsymbol{F} = \langle F, +, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1 \rangle$; si dice **spazio vettoriale** sul campo $\boldsymbol{F}$ una struttura della forma $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0}, \perp \rangle$, dove $\langle V, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \boldsymbol{0} \rangle$ è un gruppo abeliano e $\perp \in \lceil R \times F \longmapsto V \rceil$ tale che

$$\forall a, b \in F \ , \ \ \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V \ \ \vdots \ \ a \perp (\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}) \ = \ (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (a \perp \boldsymbol{w}) \ , \qquad (a+b) \perp \boldsymbol{v} \ = \ (a \perp \boldsymbol{v}) \boldsymbol{+} (b \perp \boldsymbol{v}) \ ,$$
$$(a \cdot b) \perp \boldsymbol{v} \ = \ a \perp (b \perp \boldsymbol{v}) \ , \qquad 1 \perp \boldsymbol{v} \ = \ \boldsymbol{v} \ .$$

Relativamente allo spazio vettoriale precedente gli elementi di V si dicono **vettori**, gli elementi di F **scalari** e la legge di composizione esterna $\perp$ **prodotto esterno** di $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{V}$. Spesso i segni di prodotto "$\cdot$" e "$\perp$" si possono sottintendere senza portare ad ambiguità.

Con $\mathsf{Vsp}_{\boldsymbol{F}}$ si denota la classe degli spazi vettoriali sul campo $\boldsymbol{F}$ e con **Vsp** si denota la classe degli spazi vettoriali su un qualsivoglia campo.

T16:**a.04** Si possono anche considerare le varianti dei moduli su anello sostituendo questo tipo di struttura con gli anelli, ovvero con le strutture che ampliano la collezione degli anelli.uniferi in quanto non si chiede loro di contenere una unità.
Le strutture di questa specie si possono chiamare **pseudomoduli**.

Si possono anche studiare generalizzazioni nelle quali gli scalari sono forniti, non da un anello ma da un semianello. Si osserva che, mentre i moduli su anello sono gruppi abeliani, i moduli su semianello son soltanto monoidi commutativi.

T16:**a.05** Consideriamo un intero positivo d e l'insieme delle sequenze di lunghezza d di elementi del terreno R di un anello o di un anello.unifero, $R^d \ = \ \lceil (d] \longmapsto R \rceil$.

Se $\boldsymbol{v} = \langle v_1, ..., v_d \rangle$ e $\boldsymbol{w} = \langle w_1, ..., w_d \rangle$ sono due elementi di tale insieme, consideriamo la **somma termine a termine** di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ $\boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w} := \langle v_1 + w_1, ..., v_d + w_d \rangle$. Se $\boldsymbol{R}$ è un anello consideriamo anche il passaggio alla sequenza opposta di $\boldsymbol{v}$: $\boldsymbol{-v} := \langle -v_1, ..., -v_d \rangle$, ed il **vettore nullo** $\mathbf{0}_d := \langle 0, ..., 0 \rangle \in R^d$, sequenza di lunghezza d che scriviamo anche 0^{seq_d}.

Come si è già notato parlando di prodotti diretti di monoidi, $\langle R^d, \boldsymbol{+}, \mathbf{0} \rangle$ costituisce un monoide abeliano e come si è notato parlando di prodotti diretti di gruppi $\langle R^d, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \mathbf{0} \rangle$ costituisce un gruppo abeliano.

Consideriamo anche il prodotto per uno scalare di un vettore $a \perp \boldsymbol{v} := \langle a \cdot v_1, ..., a \cdot v_d \rangle$.
Se $\boldsymbol{R}$ è un anello si verifica che $\langle R^d, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \mathbf{0}, \perp \rangle$ costituisce un modulo a sinistra; esso è chiamato **modulo delle sequenze su R di dimensione** d e si denota con $\mathsf{Mdl}_d(\boldsymbol{R})$.
Se $\boldsymbol{R}$ è un anello si verifica che $\langle R^d, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \perp \rangle$ costituisce uno pseudomodulo a sinistra; esso è chiamato **pseudomodulo delle sequenze su R di dimensione** d.

Se al posto di un anello $\boldsymbol{R}$ si ha un campo $\boldsymbol{F}$ si ottiene uno spazio vettoriale chiamato **spazio vettoriale delle sequenze su F di dimensione** d. Esso si denota con $\mathsf{Vsp}_d(\boldsymbol{F})$.
Particolarmente utili sono gli spazi $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{Q})$, $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{R})$, $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{C})$ e gli spazi $\mathsf{Vsp}_d(\mathbb{Z}_p)$ associati ai vari numeri primi p.

Le notazioni introdotte per gli insiemi di strutture delle diverse specie caratterizzati dalle diverse specie di struttura dei terreni in molti contesti possono essere semplificate sottintendendo il terreno attuale.

T16:**a.06** Della precedente costruzione si ha una estesa generalizzazione costruendo, per un insieme qualsiasi X, lo spazio vettoriale avente come terreno l'insieme di funzioni $\lceil X \longmapsto F \rceil$, con F che costituisce un anello o un campo.
Munendo tale insieme dell'operazione binaria di somma di funzioni, dell'operazione di passaggio alla funzione opposta e dell'operazione nullaria $0^{fun_X} := \lceil x \in X \mapsto 0 \rceil$, cioè la funzione che assume il valore costante 0 per ogni elemento di X, si ha un gruppo abeliano.

Prendiamo in considerazione anche il prodotto esterno

$$\perp := \cdot^{actf_X} := \left\lceil a \in F, f \in \lceil X \longmapsto F \rceil \mapsto \lceil x \in X \mapsto a \cdot f(x) \rceil \right\rceil .$$

Si verifica che $\langle \lceil X \longmapsto F \rceil, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \mathbf{0}, \perp \rangle$ è uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{F}$, detto **spazio delle funzioni** di X nel campo $\boldsymbol{F}$.

Oltre agli spazi delle sequenze finite, delle diverse lunghezze, possono risultare utili molti spazi di funzioni ottenuti chiedendo che le funzioni del terreno soddisfino determinate proprietà. Lo studio degli spazi di funzioni è alla base dell'analisi funzionale.

T16:**a.07** **Eserc.** Precisare le componenti degli spazi aventi come terreno uno dei seguenti insiemi di funzioni, convenendo che F denota un anello o un campo:

(a) $\lceil \mathbb{N} \longmapsto F \rceil$ (spazi delle successioni);

(b) $\lceil \mathbb{Z} \longmapsto F \rceil$ (spazi delle successioni bilatere);

(c) spazi di matrici con entrate in F finite e infinite, ad esempio di aspetto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$;

(d) spazi delle funzioni di una variabile reale o complessa;

(e) spazi delle funzioni di d variabili reali o complesse, con $d = 2, 3, 4, ...$

T16:**a.08** Introduciamo la nozione di sottostruttura per moduli, pseudomoduli e spazi vettoriali.

Si dice **sottomodulo** di un modulo a sinistra $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \mathbf{0}, \perp \rangle$ ogni $S \subseteq V$ che, munito delle restrizioni delle operazioni definite per $\boldsymbol{V}$, costituisce un modulo a sinistra. Questo equivale a chiedere che

S sia chiuso rispetto alle operazioni $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{-}$, che contenga $\mathbf{0}$ e che sia stabile rispetto alla moltiplicazione per qualsiasi elemento del campo.

Analoghe definizioni riguardano i **sottomoduli di moduli a destra** e i **sottopseudomoduli di pseudomoduli**.

Similmente si dice **sottospazio di uno spazio vettoriale** $\boldsymbol{V} = \langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{-}, \mathbf{0}, {}_\perp \rangle$ ogni $S \subseteq V$ che, munito delle restrizioni delle operazioni definite per $\boldsymbol{V}$, costituisce uno spazio vettoriale.
Questo equivale a chiedere che S sia chiuso rispetto alle operazioni $\boldsymbol{+}$ e $\boldsymbol{-}$, che contenga 0 e che sia stabile rispetto alla moltiplicazione per qualsiasi elemento del campo.

In formula $\left\langle S, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}|_{S\times S}, \boldsymbol{-}|_{S\times S}, \mathbf{0}, {}_\perp|_{\boldsymbol{F}\times S} \right\rangle \in \mathsf{Vsp}_F$. Questo sottospazio si denota con $\boldsymbol{V}|_S$.
Equivalentemente si trova che S è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ sse $\forall a, b \in \boldsymbol{F}$ e $\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$: $a {}_\perp \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} b {}_\perp \boldsymbol{w} \in S$.

T16:**a.09** **Eserc.** Considerare lo spazio delle funzioni reali che ha come terreno $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$. Dimostrare che definiscono suoi sottospazi i seguenti insiemi di funzioni-RtR:
(a) insieme delle funzioni-RtR pari;
(b) insieme delle funzioni-RRtR simmetriche nello scambio dei due argomenti;
(c) insieme delle funzioni-RtR e delle funzioni-RRtR che si annullano in un determinato sottoinsieme del rispettivo dominio.

T16:**a.10** Denotiamo $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$ l'insieme dei sottospazi vettoriali di $\boldsymbol{V}$. In questo insieme si trovano, in particolare, il **sottospazio zero** $\{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$ e l'intero $\boldsymbol{V}$ (sottospazio improprio); i sottospazi rimanenti si dicono **sottospazi propri e nonnulli**.

Per enunciare che $\boldsymbol{W}$ è sottospazio (proprio) di $\boldsymbol{V}$ scriviamo $\boldsymbol{W} \leq_{Vsp} \boldsymbol{V}$ ($\boldsymbol{W} <_{Vsp} \boldsymbol{V}$).

Per un qualsiasi $\boldsymbol{V} \in \mathsf{Vsp}$ e per ogni suo vettore v nonnullo $\{a \in F :| a {}_\perp \mathsf{v}\}$ sottende un sottospazio che in breve può denotarsi $F {}_\perp \mathsf{v}$ o $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(\mathsf{v})$. Questo sottospazio si chiama anche **raggio** (*array*) di $\boldsymbol{V}$.

T16:**a.11** $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$, come ogni collezione di sottostrutture di una data struttura, è ordinato parzialmente dall'inclusione dei relativi terreni.

(1) Prop.: Se S e T sono terreni di sottospazi di $\boldsymbol{V}$ su $\boldsymbol{F}$, anche $S \cap T$ è terreno di un sottospazio dello stesso genere; più precisamente questo è il più esteso dei sottospazi contenuti sia in S che in T ▮

T16:**a.12** Accade invece, in generale, che $S \cup T$ non sostiene un sottospazio di $\boldsymbol{V}$.

(1) Prop.: $S \cup T$ è sottospazio di $\boldsymbol{V}$ sse $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$ ▮

T16:**a.13** Si dice **somma dei sottospazi** S e T: $S \boldsymbol{+}^{be} T := \{\boldsymbol{v} \in S,\ \boldsymbol{w} \in T :| \boldsymbol{v} \boldsymbol{+} \boldsymbol{w}\}$.
Evidentemente $S \boldsymbol{+}^{be} T = T \boldsymbol{+}^{be} S$.
(1) Prop.: $S \boldsymbol{+}^{be} T$ sostiene un sottospazio di $\boldsymbol{V}$ e più precisamente è il più ridotto sottospazio contenente $S \cup T$ ▮

Abbiamo quindi che $\boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V})$ è un insieme ordinato, reticolato dall'inclusione degli insiemi terreno e che $\langle \boldsymbol{Sbvsp}(\boldsymbol{V}), \cap, \boldsymbol{+} \rangle$ è un reticolo dotato di minimo ($\{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$) e di massimo ($\boldsymbol{V}$). Esso si dice **reticolo dei sottospazi** di $\boldsymbol{V}$.

T16:**a.14** Se $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S} \boldsymbol{+}^{be} \boldsymbol{T}$ e $S \cap T = \{\mathbf{0}_{\boldsymbol{V}}\}$, $\boldsymbol{T}$ è chiamato **sottospazio complemento** di $\boldsymbol{S}$ in $\boldsymbol{V}$.
Simmetricamente $\boldsymbol{S}$ è sottospazio complemento di $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{V}$; chiaramente la complementazione di sottospazi è una relazione simmetrica e antiriflessiva.

In generale, ogni sottospazio proprio di uno spazio vettoriale possiede più complementi.

Per esempio in $\mathbb{R}^2$ tre vettori come $\langle 1, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ e $\langle 1, 1\rangle$ consentono di scrivere

$$\mathbb{R}^2 \; = \; \mathbb{R}_{\perp}\langle 1,0\rangle \boldsymbol{+}^{be} \mathbb{R}_{\perp}\langle 0,1\rangle \; = \; \mathbb{R}_{\perp}\langle 1,0\rangle \boldsymbol{+}^{be} \mathbb{R}_{\perp}\langle 1,1\rangle \; = \; \mathbb{R}_{\perp}\langle 0,1\rangle \boldsymbol{+}^{be} \mathbb{R}_{\perp}\langle 1,1\rangle \; .$$

T16:**a.15** Se E è un sottoinsieme di V, si scrive $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E)$ per denotare l'insieme delle combinazioni lineari mediante $\boldsymbol{F}$ dei vettori di E. In formula:

$$\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E) \; := \; \Big\{ h \in \mathbb{P} \; , \; a_1, ... a_h \in \boldsymbol{F} \; , \; \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{S} :| \; a_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} a_h \boldsymbol{v}_h \Big\} \; .$$

T16:**a.16** Un insieme di vettori E di $\boldsymbol{V}$ si dice **generatore** di $\boldsymbol{V}$ sse $\boldsymbol{span}_{\boldsymbol{F}}(E) = \boldsymbol{V}$.

Un insieme di vettori I di $\boldsymbol{V}$ si dice **insieme di vettori linearmente indipendente** sse

$$\forall \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_h \subseteq I \; \vdots \; a_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} a_h \boldsymbol{v}_h = \mathbf{0}_{\boldsymbol{V}} \implies a_1 = \cdots = a_h = 0 \; .$$

Sbrigativamente si dice che i vettori di I sono **vettori linearmente indipendenti**.
In caso contrario si parla di **vettori linearmente dipendenti**.

Denotiamo con **Indep**($\boldsymbol{V}$) la collezione dei sottoinsiemi dello spazio $\boldsymbol{V}$ linearmente indipendenti e con **Dpnd**($\boldsymbol{V}$) la collezione dei sottoinsiemi di $\boldsymbol{V}$ linearmente dipendenti, cioè $\mathfrak{P}_{ne}(V) \setminus$ **Indep**($\boldsymbol{V}$).

In alcuni contesti si può sottintendere $\boldsymbol{V}$ e, molto sbrigativamente gli insiemi in **Indep**($\boldsymbol{V}$) si possono dire insiemi indipendenti e quelli in **Dpnd**($\boldsymbol{V}$) insiemi dipendenti.

Adottando questo stile verbale si può affermare, per esempio, che ogni sottoinsieme di un insieme indipendente è indipendente e che ogni sovrainsieme di un insieme dipendente è dipendente.

In altri termini: la collezione **Indep**($\boldsymbol{V}$) è chiusa rispetto al passaggio ai sottoinsiemi e la collezione **Dpnd**($\boldsymbol{V}$) è chiusa rispetto al passaggio ai sovrainsiemi.

T16:**a.17** **Prop.** Un $I \subseteq V$ è linearmente indipendente sse ogni $\mathsf{v} \in \boldsymbol{span}(I)$ si può esprimere in un solo modo come combinazione lineare di elementi di I sse nessuno tra i vettori di I è combinazione lineare dei rimanenti ▮

T16:**a.18** Ogni insieme $B \subseteq \boldsymbol{V}$ è detto **base dello spazio vettoriale** $\boldsymbol{V}$ sse B è linearmente indipendente e $\boldsymbol{span}(B) = \boldsymbol{V}$.
Denotiamo con **Base**($\boldsymbol{V}$) la collezione delle basi dello spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$.
Evidentemente **Base**($\boldsymbol{V}$) $\subseteq$ **Indep**($\boldsymbol{V}$) .
Più precisamente **Base**($\boldsymbol{V}$) è costituito da tutti e soli gli insiemi indipendenti massimali di $\boldsymbol{V}$ ▮

Sia d un intero positivo; si dice **base standard dello spazio** $\boldsymbol{F}^{\times d}$ delle sequenze di lunghezza d su $\boldsymbol{F}$:

$$\{\mathsf{e}_1, \mathsf{e}_2, ..., \mathsf{e}_d\} \quad \text{dove} \quad \mathsf{e}_1 \; := \; \big\langle 1, 0, ..., 0 \big\rangle, \; \mathsf{e}_2 \; := \; \langle 0, 1, ..., 0 \rangle, \cdots, \; \mathsf{e}_d \; := \; \langle 0, 0, ..., 1 \big\rangle \; .$$

T16:**a.19** **Prop.** Ogni spazio vettoriale che non si riduca al vettore zero, possiede una base ▮

Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso cardinale ▮

Il cardinale delle basi di uno spazio vettoriale $\boldsymbol{V}$ si dice **dimensione dello spazio** e si denota con $\dim(\boldsymbol{V})$.

Si dice **spazio vettoriale finito-dimensionale** uno spazio ridotto al vettore zero oppure uno spazio che possieda una base finita. In caso contrario, si parla di **spazio vettoriale infinito-dimensionale**.

Talora è opportuno distinguere gli spazi con basi numerabili da quelli con basi più che numerabili.

T16:**a.20** L'insieme dei numeri complessi si può considerare terreno di uno spazio monodimensionale sul campo dei complessi o terreno di uno spazio bidimensionale sul campo dei reali.

I polinomi a coefficienti reali in una variabile di grado non superiore ad n costituiscono il terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei reali ad $n+1$ dimensioni.

I polinomi a coefficienti complessi in una variabile di grado non superiore ad n costituiscono il terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei complessi ad $n+1$ dimensioni.

I polinomi a coefficienti complessi in una variabile di grado non superiore ad n costituiscono il terreno di uno spazio vettoriale sul campo dei reali ad $2n+2$ dimensioni.
I polinomi a coefficienti reali o complessi in una variabile o in un determinato numero d di variabili costituiscono il terreno di spazi vettoriali infinito-dimensionali.

Le funzioni di una variabile reale costituiscono il terreno di spazi infinito-dimensionali con basi più che numerabili.

T16:**a.21** Le matrici 2×2 su un campo $\boldsymbol{F}$ costituiscono il terreno di uno spazio vettoriale a 4 dimensioni su $\boldsymbol{F}$. Le matrici $n \times m$ di uno spazio vettoriale a $n \cdot m$ dimensioni.

Ogni matrice quadrata di ordine d si può scrivere:

$$M = \frac{1}{2}\left(M + M^{\mathsf{T}}\right) + \frac{1}{2}\left(M - M^{\mathsf{T}}\right) \ ;$$

Per esempio si verifica facilmente che il primo addendo è una matrice simmetrica e il secondo, una matrice antisimmetrica.
Le matrici $d \times d$ simmetriche costituiscono il terreno di uno spazio a $\dfrac{d\,(d+1)}{2}$ dimensioni, mentre le matrici $d \times d$ antisimmetriche costituiscono il terreno di uno spazio a $\dfrac{d\,t(d-1)}{2}$ dimensioni.
La formula precedente mostra che lo spazio d^2-dimensionale di tutte le matrici $d \times d$ è esprimibile come somma dello spazio delle matrici simmetriche e di quello delle antisimmetriche; questi due spazi sono sottospazi complementari.

T16:**a.22** **Prop.** Se S e T sono sottospazi di uno spazio vettoriale finito-dimensionale, allora:

$$\dim(S) + \dim(T) \ = \ \dim(S \boldsymbol{+}^{be} T) + \dim(S \cap T) \ ▮$$

T16:**a.23** Introduciamo ora i morfismi per le strutture di spazio vettoriale.

Consideriamo due spazi vettoriali sullo stesso campo:

$$\boldsymbol{V} \ = \ \left\langle V, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}_V, \boldsymbol{-}_V, \mathbf{0}_V, \cdot_V \right\rangle \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} \ = \ \left\langle W, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}_W, \boldsymbol{-}_W, \mathbf{0}_W, \cdot_W \right\rangle \ .$$

Si dice **trasformazione lineare** per il campo $\boldsymbol{F}$ da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$ una funzione $\tau \in \lceil V \longmapsto W \rceil$ tale che

$$\forall a, b \in \boldsymbol{F} \ , \ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \ : \ \tau(a \cdot_V \boldsymbol{u} \ \boldsymbol{+}_V \ b \cdot_V \boldsymbol{v}) \ = \ a \cdot_W \tau(\boldsymbol{u}) \ \boldsymbol{+}_W \ b \cdot_W \tau(\boldsymbol{v}) \ .$$

Denotiamo con $\mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ l'insieme delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$; abbreviamo $\mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V})$, l'insieme delle trasformazioni lineari da $\boldsymbol{V}$ in sè stesso, con la notazione $\mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V})$.

Come sinonimo del termine "trasformazioni lineari" si usa il termine **operatori lineari**; queste applicazioni sono gli omomorfismi tra spazi vettoriali.

Si dice **trasformazione lineare nulla** da $\boldsymbol{V}$ a $\boldsymbol{W}$: $\mathbf{0}_W{}^{\text{cnst}} \ = \ \lceil \mathsf{v} \in V \mapsto \mathbf{0}_W \rceil$.

T16:**a.24** Munendo l'insieme delle trasformazioni lineari $\mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ della somma $\boldsymbol{+}_W{}^{fe}$ e della differenza $\boldsymbol{-}_W{}^{fe}$ tra funzioni a valori in W e del prodotto $\cdot_W{}^{fe}$ per elementi del campo, si ottiene uno spazio vettoriale:

$$\left\langle \mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}), \boldsymbol{F}, \boldsymbol{+}_W{}^{fe}, \boldsymbol{-}_w{}^{fe}, \mathbf{0}_w{}^{\text{cnst}}, \cdot_W{}^{fe} \right\rangle \ .$$

Si trova facilmente che se $\boldsymbol{X}$ è un terzo spazio vettoriale su $\boldsymbol{F}$, la composizione di $\tau \in \mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ e di $\sigma \in \mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{X})$ è $\tau \circ \sigma \in \mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{X})$.
Inoltre, se τ è una applicazione biunivoca, $\tau^{-1} \in \mathsf{Lintr}_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V})$.

T16:**a.25** Vediamo ora come costruire nuovi sottospazi componendo da spazi noti.

Per k intero $k \geq 2$ consideriamo k spazi vettoriali su $\boldsymbol{F} \searrow \boldsymbol{V}_i = \langle V_i, \boldsymbol{F}, +_i, -_i, \mathbf{0}_i, \cdot_i \rangle$ per $i = 1, ..., k$ e il prodotto cartesiano dei corrispondenti terreni $V_1 \times \cdots \times V_k$.

Presi $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{w}_i \in \boldsymbol{V}_i$ per $i = 1, ..., k$ ed $a \in \boldsymbol{F}$ si definiscono:

$\langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle + \langle \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_k \rangle := \langle \boldsymbol{v}_1 +_1 \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{v}_k +_k \boldsymbol{w}_k \rangle$;

$\langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle - \langle \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_k \rangle := \langle \boldsymbol{v}_1 -_1 \boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{v}_k -_k \boldsymbol{w}_k \rangle$;

$a \cdot \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle := \langle a \cdot_1 \boldsymbol{v}_1, ..., a \cdot_k \boldsymbol{v}_k \rangle$;

$\mathbf{0} := \langle \mathbf{0}_1, ..., \mathbf{0}_k \rangle$.

Si dice **somma diretta degli spazi** $\boldsymbol{V}_1, \dots , \boldsymbol{V}_k$:

$$\boldsymbol{V}_1 \oplus \boldsymbol{V}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{V}_k := \langle V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k, \boldsymbol{F}, +, -, \langle \mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2, ..., \mathbf{0}_k \rangle, \cdot \rangle \ .$$

T16:b. algebre su campo

T16:**b.01** Affrontiamo un ulteriore arricchimento della specie degli spazi vettoriali.

Si dice **algebra [lineare] sul campo** $\boldsymbol{F}$ una struttura della forma $\boldsymbol{A} = \langle A, \boldsymbol{F}, +, -, \mathbf{0}, \cdot, \odot \rangle$, dove $\langle A, \boldsymbol{F}, +, -, \mathbf{0}, \cdot \rangle$ è uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{F}$ e $\odot$ è una **operazione binaria bilineare** su A, cioè una funzione $\odot \in \lceil A \times A \longmapsto A \rceil$ tale che

$$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in A \ , \ \forall a, b \in F \ : \ (a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{w}) \odot \boldsymbol{y} \ = \ a \cdot (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{y}) + b \cdot (\boldsymbol{w} \odot \boldsymbol{y}) \ ,$$
$$\boldsymbol{v} \odot (a \cdot \boldsymbol{y} + b \cdot \boldsymbol{z}) \ = \ a \cdot (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{y}) + b \cdot (\boldsymbol{v} \odot \boldsymbol{z}) \ .$$

Se si prescinde dal campo specifico, questo genere di struttura verrà chiamato **algebra-F**; nel presente capitolo abbreviamo ulteriormente parlando semplicemente di "algebra". L'operazione $\odot$ si dice **prodotto tra i vettori dell'algebra**.

Un'algebra-F si dice **algebra-F commutativa**, o anche **algebra-F abeliana**, sse il prodotto dei suoi vettori è commutativo.

Si dice **algebra unifera** una struttura ottenuta arricchendo un'algebra-F con un vettore particolare che costituisce l'unità per il prodotto tra vettori.

Denotiamo con **Alg** la classe delle algebre-F e con **Algu** la classe delle algebre.unifere. Denotiamo inoltre **AlguAb** e **AlguNab** le classi delle algebre unifere, risp., abeliane e nonabeliane.

T16:**b.02** Un primo esempio fondamentale di algebra unifera si ottiene arricchendo lo spazio vettoriale **Lintr**($\boldsymbol{V}$) della composizione di funzioni e della trasformazione identità di $\boldsymbol{V}$.
In tal modo, si ottiene un'algebra unifera noncommutativa:

$$\langle \mathsf{Lintr}(\boldsymbol{V}), \boldsymbol{F}, +_v, -_v, \mathbf{0}_v, \cdot_v, \mathsf{Id}_v \rangle \ .$$

T16:**b.03** Esempi di algebre unifere commutative sono l'**algebra dei polinomi su un campo**, l'**algebra delle serie formali** e le **algebre delle matrici quadrate**. Queste ultime si ottengono dalle algebre di operatori lineari su uno spazio $\boldsymbol{V}$ facendo riferimento a ben determinate base di tale spazio.

T16:**b.04** Si dice **semialgebra** una struttura simile all'algebra, ma con l'insieme degli scalari costituito non da un anello, ma da un semianello.

Si dice invece **semialgebra unifera** una struttura simile alla algebra unifera ma costruita sopra un semianello unifero.
Esempi di semialgebre unifere noncommutative sono le algebre delle serie formali di variabili noncommutative. Per esse gli scalari sono forniti dal magma abeliano

$$\langle \{0,1\}, \vee, \wedge, \lceil n \in \mathbb{N} \ \Vdash \ \delta_{n,1} \rceil \rangle \ .$$

T16:c. polinomi e serie formali

T16: c.01 Algebre di grande interesse sono costituite dai polinomi in una o più variabili e dalle serie formali di potenze in una o più variabili.

T16:d. arricchimenti dei moduli

T16:**d.01** Vengono anche studiate strutture algebriche che arricchiscono i moduli le quali sono definite servendosi di due anelli il primo dei quali fornisce scalari da sinistra mentre il secondo fornisce scalari da destra. Queste strutture vengono chiamate **bimoduli**.

Interessanti arricchimenti dei bimoduli sono ottenuti definendo un prodotto tra i loro elementi.
Queste strutture sono chiamate **bialgebre** e costituiscono estensioni delle algebre su campo.

Strutture più ricche e particolari delle bialgebre sono le **algebre di Hopf**. Come altre strutture qui accennate esse hanno grande importanza per la teoria delle rappresentazioni.

T16:e. spazi con prodotto interno e spazi metrici

T16:**e.01** In questo paragrafo consideriamo spazi vettoriali $\boldsymbol{V}$ su un campo $\boldsymbol{F}$, pensando soprattutto ai campi dei reali $\mathbb{R}_f$, ai campi dei complessi $\mathbb{C}_f$ e delle classi di resti modulo p per p numero primo $\mathbb{Z}_p$ sui quali è definito un tipo di funzione particolarmente utile.

Consideriamo una funzione $B \in \lceil V \times V \longmapsto F \rceil$; per tale funzione bivariata si usa spesso il termine tradizionale **forma**.

Si dice che una tale B è **funzione lineare nel primo argomento** sse

$\forall \mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in V,\ a, b \in F\ :\ B(a\,\mathsf{u} + b\,\mathsf{v}, \mathsf{w}) = a\,B(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + b\,B(\mathsf{v}, \mathsf{w})$.

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice che B gode della **linearità coniugata nel primo argomento** (o linearità hermitiana) sse

$$\forall \mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w} \in V\ ,\ a, b \in \mathbb{C}\ :\ B(a\,\mathsf{u} + b\,\mathsf{v}, \mathsf{w})\ =\ a^*\,B(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + b^*\,B(\mathsf{v}, \mathsf{w})\ .$$

Si dice che B gode della **linearità nel secondo argomento** sse

$\forall \mathsf{u}, \mathsf{w}, \mathsf{z} \in V\ ,\ c, d \in F\ :\ B(\mathsf{u}, c\,\mathsf{w} + d\,\mathsf{z}) = c\,B(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + d\,B(\mathsf{u}, \mathsf{z})$.

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice che B gode della **linearità hermitiana nel secondo argomento** (o linearità coniugata) sse

$\forall \mathsf{u}, \mathsf{w}, \mathsf{z} \in V\ ,\ c, d \in \mathbb{C}\ :\ B(\mathsf{u}\ ,\ c\,\mathsf{w} + d\,\mathsf{z})\ =\ c^*\,B(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + d^*\,B(\mathsf{u}, \mathsf{z})$.

La funzione bivariata B si dice **forma bilineare** sse è lineare nel primo e nel secondo argomento.

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, si dice **forma sesquilineare** sse è lineare nel primo argomento e lineare hermitiana nel secondo argomento.

Si ricorda che sesquilineare significa "lineare una volta e mezza").

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, la funzione B si dice **forma cosesquilineare** sse è lineare hermitiana nel primo argomento e lineare nel secondo.

B si dice invece **forma simmetrica** sse $\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in V\ :\ B(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = B(\mathsf{v}, \mathsf{u})$.

Se $\boldsymbol{F} = \mathbb{C}$, B si dice **forma simmetrica hermitiana** sse $\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in V\ :\ B(\mathsf{u}, \mathsf{v}) = B(\mathsf{v}, \mathsf{u})^*$.

Inoltre B si dice **forma definita positiva** sse $\forall \mathsf{v} \in V\ :\ B(\mathsf{v}, \mathsf{v}) \geq 0$ e $B(\mathsf{v}, \mathsf{v}) = 0 \iff \mathsf{v} = \mathbf{0}$.

T16:**e.02** Si dice **prodotto interno di uno spazio vettoriale sui reali** una funzione del genere $\lceil V \times V \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ simmetrica, lineare nel primo argomento (e quindi bilineare) e definita positiva.

Si dice **prodotto interno di uno spazio vettoriale sui complessi** una funzione di $\lceil V \times V \longmapsto \mathbb{C} \rceil$ definita positiva, simmetrica hermitiana e lineare nel primo argomento (e quindi sesquilineare).

Per il prodotto interno di due vettori v e w spesso conviene utilizzar notazioni alla Dirac basate su una coppia di parentesi angolate come $\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{w} \rangle$.

T16:**e.03** Se d denota un intero positivo, consideriamo in particolare gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^d$ e $\mathbb{C}^d$ delle sequenze di lunghezza d di numeri risp. reali e complessi. Per i vettori di questi spazi useremo notazioni quali $\mathsf{v} = \langle x_1, ..., x_d \rangle$ e $\mathsf{w} = \langle w_1, ..., w_d \rangle$.
Si dice **prodotto interno canonico** di $\mathbb{R}^d$ la funzione

$$\lceil\ \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{i=1}^{d} v_i w_i\ \rceil$$

Si dice **prodotto interno canonico** di $\mathbb{C}^d$ la funzione

$$\lceil\ \langle \mathsf{v}, \mathsf{w} \rangle \in \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \mapsto \sum_{i=1}^{d} v_i\, {w_i}^*\ \rceil$$

T16:**e.04** Si vede facilmente che restringendo una funzione del genere $\lceil V \times V \longmapsto F \rceil$ a un sottospazio di $\boldsymbol{V}$ si mantengono le varie proprietà viste in pecedenza, linearità, linearità hermitiana, bilinearità, sesquilinearità, simmetria, simmetria hermitiana, definitezza positiva. Quindi restringendo uno spazio con prodotto interno a un suo sottospazio si ottiene un sottospazio a prodotto interno.

T16:**e.05** Per il prodotto interno vale una proprietà di cancellazione.

(1) Prop.: Siano u e v vettori di uno spazio vettoriale a prodotto interno $\boldsymbol{V}$.

$$\forall \mathsf{x} \in V \;:\; \langle \mathsf{u} \,|\, \mathsf{x} \rangle = \langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{x} \rangle \implies \mathsf{u} = \mathsf{v} \,.$$

Dim.: Da $\langle \mathsf{u} \,|\, \mathsf{x} \rangle = \langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{x} \rangle$ per la linearità nel primo argomento segue $\langle \mathsf{u} - \mathsf{v} \,|\, \mathsf{x} \rangle = 0$; per l'arbitrarietà di x segue $\langle \mathsf{u} - \mathsf{v} \,|\, \mathsf{u} - \mathsf{v} \rangle = 0$; infine per la positiva definitezza abbiamo $\mathsf{u} - \mathsf{v} = \mathbf{0}$ ▮

T16:**e.06** Si dice **norma in uno spazio vettoriale** V sul campo $\boldsymbol{F}$ dei reali o dei complessi una funzione $N \in \lceil V \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ tale che:

[Nrm-a] $\forall \mathsf{v} \in V \;:\; N(\mathsf{v}) \geq 0 \;\wedge\; N(\mathsf{v}) = 0 \iff \mathsf{v} = \mathbf{0}$ (positività della norma)

[Nrm-b] $\forall r \in F,\ \mathsf{v} \in V \;:\; N(r\mathsf{v}) = |r|\, N(\mathsf{v})$ (omogeneità della norma)

[Nrm-c] $\forall \mathsf{u}, \mathsf{v} \in V \;:\; N(\mathsf{u} + \mathsf{v}) \leq N(\mathsf{u}) + N(\mathsf{v})$ (**disuguaglianza triangolare per la norma**).

Invece di norma talora si parla di **lunghezza in uno spazio vettoriale**. Questo lessico si può estendere ai moduli e a strutture di genere contiguo parlando, per esempio, di "lunghezza o norma dei vettori di un modulo".

T16:**e.07** Uno spazio vettoriale munito di norma si dice **spazio normato**. Spesso per la norma di un vettore v si usa una scrittura della forma $\|\mathsf{v}\|$.

In ogni spazio con prodotto interno si può introdurre una norma definendo $\|\mathsf{v}\| := \sqrt{\langle \mathsf{v} \,|\, \mathsf{v} \rangle}$.
Quindi ogni spazio con prodotto interno può essere trasformato in uno spazio normato.

T16:**e.08** **Prop.** In uno spazio normato $\boldsymbol{V}$ sul campo $\boldsymbol{F}$, per ogni $\mathsf{v}, \mathsf{u} \in V$ e $r \in F$, valgono le seguenti proprietà:

(a) $\|\mathsf{v}\| \geq 0$;

(b) $\|\mathsf{v}\| = 0 \iff \mathsf{v} = \mathbf{0}$ (proprietà di annullamento) ;

(c) $\|\mathsf{v}\| = |r|\,\|\mathsf{v}\|$ (proprietà di omogeneità) ;

(d) $|(\mathsf{v}, \mathsf{u})| \leq \|\mathsf{v}\|\,\|\mathsf{u}\|$ (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) ;

(e) $\|\mathsf{v} + \mathsf{u}\| \leq \|\mathsf{v}\| + \|\mathsf{u}\|$ (disuguaglianza triangolare) ;

(f) $|\,\|\mathsf{v}\| - \|\mathsf{u}\|\,| \leq \|\mathsf{v} - \mathsf{u}\|$;

(g) $\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} + \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^{\mathbf{2}} = \mathbf{2}\|\mathsf{v}\|^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\|\mathsf{u}\|^{\mathbf{2}}$ (legge del parallelogramma) .

T16:**e.09** Consideriamo un insieme non vuoto S; si dice **distanza** o **metrica** su S una funzione bivariata $\boldsymbol{d} \in \lceil S \times S \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ per la quale valgono le seguenti proprietà,

[Mtr$_1$] := $\forall x, y \in S \;:\; \boldsymbol{d}(x, y) \geq 0$;

[Mtr$_2$] := $\forall x, y \in S \;:\; \boldsymbol{d}(x, y) = 0 \iff \mathsf{x} = \mathsf{y}$ (proprietà di annullamento) ;

[Mtr$_3$] := $\forall x, y \in S \;:\; \boldsymbol{d}(x, y) = \boldsymbol{d}(y, x)$ (simmetria) ;

[Mtr$_4$] := $\forall x, y, z \in S \;:\; \boldsymbol{d}(x, y) \leq \boldsymbol{d}(x, z) + \boldsymbol{d}(z, y)$ (proprietà triangolare) .

La coppia $\langle S, \boldsymbol{d} \rangle$, formata da un insieme non vuoto S e da una distanza $\boldsymbol{d}$, è chiamata **spazio metrico**.

Denotiamo con **Mtrsp** la classe degli spazi metrici.
Di $\langle S, \boldsymbol{d} \rangle \in$ **Mtrsp** l'insieme S viene chiamato il terreno.

T16:**e.10** Consideriamo l'insieme $S = \mathbb{R}^d$ e le sequenze appartenenti a $\mathbb{R}^d$ $\mathsf{x} = \langle x_1, x_2, ..., x_d \rangle$ e $\mathsf{y} = \langle y_1, y_2, ..., y_d \rangle$.
Sia dist_2 la funzione bivariata:

$$\mathrm{dist}_2(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \ := \ \|\mathsf{x} \ - \ \mathsf{y}\| \ = \ \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i \ - \ y_i) \right\}^{1/2} .$$

Questa funzione si trova essere una distanza e viene chiamata **metrica pitagorica** o **distanza pitagorica** in $\mathbb{R}^d$.
Spesso invece dei due precedenti termini si usano “metrica euclidea” e “distanza euclidea”.

Testi dell'*esposizione* in `http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/` e in `http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`