Capitolo P60:
relatività ristretta

Contenuti delle sezioni

a. osservatori e misurazioni p.2
b. relatività galileiana p.5
c. crisi della relatività galileiana p.7
d. relatività ristretta p.7
e. contrazione delle lunghezze e dilatazione delle durate p.7

7 pagine

P60:**0.01** Le teorie relativistiche si propongono di esprimere leggi fisiche mediane espressioni che risultino invarianti rispetto ai cambiamenti dei sistemi di riferimento di tipi determinati.

In questo capitolo presenteremo le nozioni di base e alcuni primi risultati della relatività galileiana classica e della relatività ristretta dovuta ad Albert Einstein, cominciando con una discussione delle misurazioni su corpi in movimento che effettuano e cercano di collegare i diversi osservatori; in questa discussione risulta necessario puntualizzare le nozioni di algebra lineare che si devono utilizzare per collegare gli osservatori coinvolti.

P60:a. osservatori e misurazioni

P60:**a.01** Tutte le grandezze fisiche vanno definite a partire da misurazioni realizzabili concretamente mediante apparecchi e procedimenti che devono essere definiti con precisione, evitando ogni ambiguità.

Il soggetto delle misurazioni, uomo e/o macchina, viene chiamato osservatore.
All'osservatore e alle apparecchiature che egli utilizza per le misurazioni si fa corrispondere sul piano matematico un cosiddetto **sistema di riferimento**.

Qui ci limitiamo alla meccanica dei sistemi costituiti da corpi puntiformi, idealizzazioni di oggetti aventi estensioni molto più piccole degli spostamenti in gioco.
Più particolarmente cominciamo considerando il comportamento meccanico di un unico corpo puntiforme.

P60:**a.02** Nella fisica classica, fondata da Newton su basi gettate da Galileo e sviluppata a partire dal '600 con grandi successi e senza sostanziali ripensamenti fino alla fine dell'800, si suppone possibile determinare la posizione x di un corpo puntiforme in relazione al verificarsi di un fenomeno istantaneo attribuito a un istante t.
I fenomeni istantanei sono idealizzazioni di processi aventi durata molto inferiore a quella degli altri processi in gioco.

Si osserva che la nozione di fenomeni istantanei, basate su ben definite idealizzazioni, presenta caratteristiche cognitive simili a quelle della nozione di corpi puntiformi.

Si suppone inoltre che le posizioni x e gli istanti t possano essere misurati con una precisione illimitata, ritenendo che le approssimazioni degli strumenti utilizzabili possano essere ridotte quanto si vuole.

P60:**a.03** Naturalmente si riconosce che ogni misurazione reale è affetta da errori; nella fisica classica però si ipotizza che non vi siano limiti alla possibilità di rendere ogni misurazione precisa quanto si vuole, ovvero alla possibilità di individuare e di impiegare risorse sperimentali atte a consentire di raggiungere la precisione che richiede ogni possibile utilizzo delle misurazioni stesse.

Nella fisica classica quindi si possono considerare misurazioni ideali prive di errori espresse da numeri reali.
Le stesse nozioni di corpo puntiforme e di fenomeno istantaneo sono coerenti con l'ipotesi di illimitata possibilità di precisazione delle misure.

I corpi puntiformi si possono rappresentare mediante punti dello spazio euclideo tridimensionale reale E_3. Le posizioni di questi corpi misurate da un osservatore sono rappresentate da vettori del sottostante spazio vettoriale V_3 dotato del prodotto interno $\langle * \mid * \rangle$; una distanza tra corpi puntiformi si esprime mediante la norma del vettore che porta da un punto all'altro.

P60:**a.04** Chiamiamo **evento** ogni accadimento che si possa riferire a una precisa posizione dello spazio e a un preciso istante e quindi che possa rappresentarsi con una coppia di misure in linea di principio del tutto precise $\langle t, \mathsf{x} \rangle \in \mathbb{R} \times \mathsf{V}_3$.
Un evento associato a tale coppia potrebbe essere costituito da un corpo puntiforme che all'istante t si osserva trovarsi nella posizione x.

Altra ipotesi fondamentale della fisica classica è la possibilità di riferire ogni evento ad un tempo assoluto, identico per tutti gli osservatori.

Questa ipotesi, tacitamente accettata da tutti prima dell'inizio del '900, a ben vedere risultava giustificata solo dalla considerazione intuitiva che gli orologi di due osservatori possano essere sincronizzati mediante segnali luminosi con una precisione superiore a quella con la quale si potevano ottenere gran parte delle altre misurazioni concernenti una osservazione sperimentale.

Quindi si concordava sulla possibilità di stabilire la simultaneità dei fenomeni oggetti di osservazioni empiriche.

P60:**a.05** La meccanica classica si propone di determinare la traiettoria di un corpo puntiforme vista da un osservatore come fornita da una funzione del tipo $\mathsf{x}(t) \in \{[t_0, t_1] \to \mathsf{V}_3\}$.

Oltre che con la precedente descrizione cinematica, ovvero descrizione parametrica nel parametro t, una traiettoria può rappresentarsi equivalentemente con la curva fissa nello spazio a 4 dimensioni $\mathbb{R} \times \mathsf{V}_3$ corrispondente alla famiglia degli eventi $\langle t, \mathsf{x}\rangle$ per i diversi t appartenenti a $[t_0, t_1]$.

Un corpo puntiforme per le sue proprietà meccaniche viene caratterizzato dalla sua massa m, grandezza che la fisica classica considera intrinseca al corpo, costante nel tempo e indipendente dall'osservatore.

Una importante acquisizione della meccanica classica afferma che la conoscenza della risultante F delle forze che agiscono sul corpo consente di prevedere la sua traiettoria attraverso la risoluzione dell'equazione di moto di Newton:

$$m \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathsf{x}(t) \;=\; \mathsf{F} \;.$$

Questa equazione differenziale porta a una unica soluzione quando sono conosciute le condizioni iniziali del moto, cioè la posizione $\mathsf{x}(t_0)$ e la velocità $\mathsf{v}(t_0)$ del corpo in un istante iniziale t_0.

P60:**a.06** Sul piano fisico, le misurazioni della posizione P di un corpo puntiforme in un dato istante da parte di un osservatore $\mathcal{O}$ presuppongono ben determinati strumenti materiali ed elaborazioni concettuali.

(1) Deve essere stabilita una unità di misura per le lunghezze (per esempio mediante un campione di metro solido o con un multiplo definito della lunghezza d'onda di una determinata linea spettrale).

(2) Deve essere stabilita una unità di misura per le durate (per esempio mediante un campione di secondo fornito da un multiplo definito del periodo della radiazione relativa ad una determinata linea spettrale).

(3) Deve essere fissata una base per lo spazio vettoriale V_3 mediante il quale $\mathcal{O}$ rappresenta lo spazio euclideo; di solito si preferisce che questa base sia ortonormale e che l'origine delle coordinate O coincida con la posizione dell'osservatore.

(4) Devono essere disponibili apparecchiature in grado di misurare le distanze tra la posizione O dell'osservatore e i punti P occupati da corpi puntiformi; se queste distanze sono alla portata dell'uomo si può usare un metro materiale, se sono molto grandi si usano il radar o strumenti astronomici, se bisogna misurare distanze molto piccole si ricorre ad altri dispositivi ottici o elettrici.

(5) Deve essere disponibile qualche tipo di orologio, cioè qualche apparecchiatura che produce un processo periodico chiaramente osservabile; il periodo del processo si può collegare alla unità di misura delle durate e si può determinare un istante zero di riferimento per la scala dei tempi t alla quale riferire il processo periodico dell'orologio e le traiettorie da studiare.

P60:**a.07** Ad ogni osservatore $\mathcal{O}$ quindi deve potersi associare una quintupla di riferimento degli eventi $\langle t_0, O, \mathsf{d}_1, \mathsf{d}_2, \mathsf{d}_3\rangle$, nella quale t_0 è l'istante assunto come iniziale, O è la posizione dell'osservatore e l'origine del suo sistema di riferimento spaziale, $\langle \mathsf{d}_1, \mathsf{d}_2, \mathsf{d}_3\rangle$ è una base dello spazio vettoriale nel quale $\mathcal{O}$ colloca le posizioni P_i dei corpi puntiformi che esprime come $P_i - O \;=\; x^1\mathsf{d}_1 + x^2\mathsf{d}_2 + x^3\mathsf{d}_3$.

P60:**a.08** Per lo sviluppo della fisica e delle sue applicazioni è necessario rielaborare le descrizioni dei fenomeni fisici da parte di osservatori diversi e stabilire collegamenti precisi tra queste descrizioni.

Fondamentalmente si devono collegare due osservatori $\mathcal{O}$ ed $\mathcal{O}'$ e risulta necessario che di un osservatore l'altro conosca istante iniziale della scala dei tempi, la posizione e i vettori di base ai quali riferisce le sue coordinate.

Per questo fine la quintupla precedentemente associata ad un osservatore, nell'ambito di precise convenzioni riguardanti i punti (1)-(5) di a06 sulle modalità di esecuzione delle misurazioni, rappresenta esaurientemente l'osservatore stesso.
Sul piano matematico l'osservatore si può identificare con tale quintupla.

Osserviamo che per talune situazioni risulta opportuno correlare due osservatori che utilizzano due diverse unità per distanze e durate.
Questa maggiore generalità però costituisce una certa complicazione tecnica inessenziale per la precisazione delle nozioni relativistiche. Viceversa spesso, come vedremo, è opportuno esaminare le correlazioni tra due osservatori con varie caratteristiche in comune, in particolare osservatori che condividono l'istante iniziale della scala dei tempi, che si servono di due basi ortonormali le quali in particolare si possono sovrapporre mediante semplici traslazioni.

P60:b. relatività galileiana

P60:**b.01** Si osserva che un corpo libero, cioè non sottoposto a forze o sottoposto a forze con risultante nulla, rispetto a qualche riferimento $\mathcal{R} = \langle t_0, \mathbf{0}, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \rangle$ si mantiene immobile, ovvero che si trova in quiete.

Consideriamo un secondo riferimento $\overline{\mathcal{R}} = \langle \overline{t}_0, \mathbf{0}', \overline{\mathbf{d}}_1, \overline{\mathbf{d}}_2, \overline{\mathbf{d}}_3 \rangle$ che a un istante t sia visto da $\mathcal{R}$ come dicono le seguenti espressioni

$$\overline{\mathbf{0}} - \mathbf{0} \;=\; -\mathbf{b}(t) \;=\; -\sum_{f=1}^{3} b^f(t)\,\overline{\mathbf{d}}_f \qquad\qquad \overline{\mathbf{d}}_i \;=\; \sum_{f=1}^{3} \gamma_i{}^f(t)\,\mathbf{d}_f \ .$$

Le coordinate di P rispetto $\overline{\mathcal{R}}$ sono date da

$$\overline{x}^i(t) \;=\; \sum_{f=1}^{3} a^i{}_f(t) x^f - b^i(t) \qquad \text{dove} \qquad a^i{}_f(t) \;=\; \left(\Gamma(t)^{\mathbf{t}})^{-\mathbf{1}}\right)_{if} \ .$$

Si vede che il punto P si mantiene fermo rispetto ad $\overline{\mathcal{R}}$ se e solo se $\mathbf{b}$ e Γ si mantengono costanti rispetto al tempo e quindi sse $\overline{\mathcal{R}}$ non dipende dal tempo, cioè si mantiene in una posizione rispetto alla $\mathcal{R}$ fissa nel tempo.

La relazione che sussiste tra sistemi di riferimento che considerano fermi gli stessi punti è evidentemente una relazione di equivalenza.

Ai riferimenti che vedono in quiete un punto soggetto a forze di risultant nulla si attribuisce la qualifica di **riferimenti inerziali**.

P60:**b.02** Più in generale si dicono inerziali i riferimenti che vedono muoversi di moto rettilineo uniforme un corpo soggetto a forze di risultante nulla.
Anche la relazione che sussiste tra tali riferimenti è una equivalenza, in quanto componendo due moti rettilinei uniformi si ottiene un moto dello stesso tipo.

Osserviamo ora che la famiglia di eventi che costituisce un generico moto rettilineo uniforme corrisponde alle tre equazioni $x^h(t) - v^h\,t - x_0^h \;=\; 0$ per $h = 1, 2, 3$, equazioni lineari non omogenee in t, x^1, x^2 e x^3.

Consideriamo anche una trasformazione lineare delle coordinate spazio-temporali espressa da

$$t \;=\; M\,\overline{t} + \sum_{k=1}^{3} M_k\,\overline{x}^k + N \qquad , \qquad x^h \;=\; M^h\,\overline{t} + \sum_{k=1}^{3} M^h{}_k\,\overline{x}^k + N^h \quad \text{per} \quad h = 1, 2, 3 \ ,$$

ovvero dalla equazione matriciale

$$\begin{pmatrix} t \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} M & M_1 & M_2 & M_3 \\ M^1 & M^1{}_1 & M^1{}_2 & M^1{}_3 \\ M^2 & M^2{}_1 & M^2{}_2 & M^2{}_3 \\ M^3 & M^3{}_1 & M^3{}_2 & M^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{t} \\ \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \\ \overline{x}^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N \\ N^1 \\ N^2 \\ N^3 \end{pmatrix} \ .$$

P60:**b.03** Si vede che sostituendo le variabili t, x^1, x^2 e x^3 con le espressioni lineari nelle $\overline{t}$, $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$ e $\overline{x}^3$ le equazioni del moto rettilineo uniforme nelle nuove variabili assumono la forma

$$\overline{x}^h(t) - \overline{v}^h\,\overline{t} - \overline{x}^h{}_0 \;=\; 0 \ ,$$

cioè mantengono una forma lineare.

Questo fatto comporta che le trasformazioni di coordinate spazio-temporali che trasformano un riferimento inerziale in un altro riferimento inerziale vanno cercate tra le trasformazioni lineari.

Cerchiamo dunque di determinare la relazione tra le coordinate t, x^1, x^2 e x^3 di un riferimento inerziale $\mathcal{R}$ e le coordinate $\overline{t}$, $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$ e $\overline{x}^3$ di un secondo riferimento $\overline{\mathcal{R}}$ dello stesso tipo.

P60:**b.04** Per quanto riguarda le coordinate temporali, assunto che $\mathcal{R}$ ed $\overline{\mathcal{R}}$ assumano lo stesso istante di riferimento iniziale $t_0 = \overline{t}_0$ (e la stessa unità per le durate), in accordo con le esperienze ordinarie si richiede

$$\overline{t} \;=\; t \;.$$

Richiediamo poi che ogni moto rettilineo uniforme secondo $\mathcal{R}$, si trasformi in un moto rettilineo uniforme in $\overline{\mathcal{R}}$:

$$x^h(t) = v^h + {x^h}_0 \quad \text{per} \quad h = 1,2,3 \qquad\qquad \overline{x}^k(t) = \overline{v}^k + {\overline{x}^k}_0 \quad \text{per} \quad k = 1,2,3 \;.$$

Si tratta di precisare l'espressione $\overline{x}^h = \overline{x}^h(t, x^1, x^2, x^3)$. Consideriamo:

$$\overline{v}^k \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{x}^k \;=\; \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^h}\frac{dx^h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial t} \;=\; \sum_{h=1}^{3} {\alpha^k}_h v^h - \overline{w}^k \;,$$

dove si sono introdotti:

$${\alpha^k}_h \;:=\; \frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^h} \qquad \text{e} \qquad \overline{w}^k \;:=\; -\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial t} \;.$$

In conseguenza della indipendenza delle $\overline{v}^k$ da t e dalle x^h, devono essere indipendenti anche le ${\alpha^k}_h$ e le $\overline{w}^k$.

Integrando le prime equazioni si trova $\overline{x}^k \;=\; \sum_h {\alpha^k}_h x^h + \beta^k(t)$.

Integrando le seconde si ha $\dfrac{\partial \overline{x}^k}{\partial t} \;=\; \dfrac{d\beta^k(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; -\overline{w}^k$ e si ricava $\beta^k(t) \;=\; -\overline{w}^k\, t + {\beta_0}^k$.

In conclusione si ottiene l'espressione

$$\overline{x}^k \;=\; \sum_{h=1}^{3} {\alpha^k}_h\, x^h - \overline{w}^k\, t + {\beta_0}^k \;,$$

assimilabile alla $\overline{\mathbf{0}}P \;=\; \mathbf{0}P - \overline{\mathbf{0}}\,\mathbf{0}$.

P60:**b.05** L'esperienza ordinaria dice che la forma geometrica di un corpo non cambia quando si passa da un osservatore $\mathcal{R}$ rispetto al quale il corpo è in quiete a un osservatore $\overline{\mathcal{R}}$ in moto rettilineo uniforme.

Dato che la forma geometrica di un corpo si può esprimere mediante le distanze tra suoi punti, si è indotti a formulare una legge di conservazione della distanza.

Consideriamo quindi due punti P_1 e P_2 in quiete rispetto ad $\mathcal{R}$ che attribuisce loro, risp., le coordinate ${x_1}^h$ per $h = 1,2,3$ e ${x_2}^h$ per $h = 1,2,3$; rispetto ad $\overline{\mathcal{R}}$ essi sono in moto rettilineo uniforme ed hanno come coordinate ${\overline{x}_1}^h$ per $h = 1,2,3$ e ${\overline{x}_2}^h$ per $h = 1,2,3$.

La loro distanza per $\mathcal{R}$ è quindi $\sqrt{\sum_{h=1}^{3} \left({x_1}^h - {x_2}^h\right)^2}$.

Esprimiamo pertanto la conservazione della distanza con l'‘equazione

$$\sum_{h=1}^{3} \left({x_1}^h - {x_2}^h\right)^2 \;=\; \sum_{h=1}^{3} \left({\overline{x}_1}^h - {\overline{x}_2}^h\right)^2 \;.$$

Sostituendo le precedenti espressioni lineari per le ${\overline{x}_i}^h$ si ricava che la matrice di trasformazione A definita da $[A]_{kh} \;:=\; {\alpha^k}_h$ è una matrice ortogonale.

Le trasformazioni precedenti sono chiamate **trasformazioni di Galilei**.

P60:c. crisi della relatività galileiana

P60:**c.01** Considerando la descrizione dei fenomeni elettromagnetici espressa dalle equazioni di Maxwell in un riferimento inerziale si giunge alla scoperta della propagazione delle onde elettromagnetiche: in breve il campo elettromagnetico, ed in particolare le radiazioni luminose si propagano nel vuoto in modo isotropo con velocità uniforme data dalla costante $c = 299900$ km/sec che compare nelle stesse equazioni di Maxwell.

P60:d. relatività speciale

P60: d.01

P60:e. contrazione delle lunghezze e dilatazione delle durate

P60: e.01