1

Capitolo P12
cinematica

Contenuti delle sezioni

15 pagine

P120.01 Queste pagine sono dedicate alla introduzione della cinematica considerata come capitolo introduttivo della dinamica classica.

Questa disciplina si occupa dei possibili movimenti di oggetti materiali che possono essere rappresentati da modelli piuttosto semplici che non indagano la loro costituzione interna, considerando che le cause che provocano i loro movimenti si possano attribuire interamente a grandezze vettoriali misurabili con una certa facilità chiamate forze.
Una forza $\vec{F}$ è caratterizzate primariamente dal fatto che agendo su un corpo definito solo della sua massa m gli imprime una accelerazione $\vec{a}$ tale che $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.
La semplicità dei modelli e la facile misurabilità delle forze implicano che la dinamica classica non si occupa di movimenti con velocità vicine alla velocità della luce e di forze che richiedono di indagare su componenti microscopiche degli oggetti materiali. Questi fenomeni sono lasciati alle discipline relativistiche e quantistiche (P60, P70).

Il fatto che la cinematica si limita a studiare i possibili movimenti degli oggetti fisici senza far intervenire le forze motrici, cioè le forze che li possono giustificare, induce taluni a collocare la cinematica al di fuori della fisica e a proporre di chiamarla “geometria del movimento”.

Accade tuttavia che la cinematica trova importanti applicazioni dirette che non coinvolgono di indagare sulle forze motrici, in settori come la meccanica pratica, la meccanica celeste, l’ingegneria meccanica (sistemi con parti mobili che sono vincolate),la robotica, la biomeccanica.
Questo rende interessante e utile lo studio specifico della cinematica e in particolare lo studio di problemi risolvibili con calcoli che si servono solo dell’algebra elementare e delle prime nozioni della semplice geometria cartesiana e del calcolo infinitesimale, nozioni in genere sostenibili con descrizioni intuitive.

P120.02 Ricordiamo anche che il merito della nascita della cinematica va attribuita a Pierre Varignon che nel 1700 ha introdotto la nozione di accelerazione portando ad un notevole chiarimento delle idee che avevano i fisici sopra i movimnenti.

Segnaliamo anche che dopo la cinamatica conviene presentare la statica, il settore della dinamica che si occupa solo del particolare movimento dei corpi consistente nello stato di quiete. Anche questa riduzione dei fenomeni indagati dalla dinamica è molto rilevante, ma anche essa ha consentito di risolvere con facilità importanti problemi e a servire da base per tanti approfondimenti.
In effetti la statica sono stati ottenuti risultati utili e con importanti applicazioni pratiche (ad esempio per leve e carrucole) molto prima degli studi della cinematica e della dinamica galileiana e newtoniana, in particolare da Archimede nel III secolo aC.

Sono qui presi in considerazione nell'ambito della meccanica classica solo oggetti fisici rappresentabili come corpi puntiformi o come corpi rigidi poco articolati.

Si tratta di entità che possono essere rappresentate con poche coordinate reali la cui cinematica può essere impostata con una certa facilità e che porta a risultati che vengono utilizzati come nozioni di base per lo studio della cinematica di sistemi più complessi, per la dinamica, per la meccanica celeste e per molte altre tematiche della fisica-matematica.

P120.03 Si inizia introducendo nozioni di amplissima portata come tempo, spazio fisico ordinario, sistemi di riferimento, corpi puntiformi, corpi rigidi.

Successivamente ci si concentra sui corpi puntiformi mobili e si presenta una panoramica delle loro traiettorie più semplici, osservando che si possono applicare a processi di notevole interesse pratico.

Si presenta poi lo studio dei moti relativi.
Successivamente vengono trattati i corpi rigidi e in particolare quelli di maggiore interesse per la meccanica pratica.

Da ultimo si presentano per cenni i sistemi a due corpi e a tre corpi.

P12 a. dinamica classica

P12a.01 Per **dinamica** si intende la parte della fisica che si occupa dei processi di evoluzione di oggetti e di insiemi di oggetti considerando che le cause che li provocano siano rappresentabili dalle sole grandezze vettoriali chiamate forze.
Qui iniziamo ad esaminare la **dinamica classica** che di seguito chiameremo semplicemente "dinamica".
Si tratta della parte della meccanica che considera entità fisiche (oggetti osservabili e processi) particolarmente semplici le cui proprietà si elaborano con relativa facilità, utilizzando algebra elementare, geometria cartesiana e primi elementi del calcolo infinitesimale.

Queste proprietà, ossia le relazioni quantitative che legano le grandezze in gioco, si rivelano facilmente utilizzabili per derivare previsioni sulle evoluzioni di oggetti e di sistemi simili e forniscono una buona base per lo studio degli oggetti e dei processi più complessi che si devono affrontare per risolvere i problemi che si pongono nelle applicazioni più realistiche.

Ricordiamo che per entità fisiche intendiamo gli oggetti e i processi sottoponibili a osservazioni empiriche che sono considerate attendibili da parte della comunità scientifica che possiede competenze nei corrispondenti campi di indagine.

I comportamenti delle entità studiate dalla dinamica sono studiati a partire dalle osservazioni e dalle misurazioni effettuate da osservatori in grado di compiere attendibilmente determinate prestazioni.

Questi osservatori sono agenti, umani o artificiali, che si servono di propri sistemi di riferimento e di propri strumenti e che sono in grado di comunicare con altri agenti; gli strumenti per le misurazioni e le comunicazioni devono essere sufficientemente attendibili, e questa attendibilità si chiede che sia confermata con continue verifiche.

Nella dinamica classica anche osservatori, dati da osservazioni e loro comunicazioni vanno definiti accuratamente in termini operativi e tendenzialmente sono considerati semplici in relazione alle prestazioni degli strumenti disponibili; tutto questo in effetti si riscontra anche in tutte le altre parti della fisica.

P12a.02 Osservatori ed entità osservabili sono visti dai fisici collocati nello spazio e nel tempo, due ambienti definiti con modelli ben precisi.
Per ogni osservatore lo spazio viene rappresentato dallo spazio tridimensionale cartesiano e il tempo da una grandezza scalare reale da trattare come continuamente crescente.

Gli oggetti più elementari esaminati dalla dinamica sono i cosiddetti **corpi puntiformi**; ciascuno di questi oggetti è caratterizzato dalle sue osservazioni con la sue posizioni nel tempo e nello spazio e viene chiamato **evento**.
Un evento tipicamente viene rappresentato da una quaterna della forma $\langle x, y, z, t\rangle$ o da una coppia della forma $\langle \mathsf{x}, traa.$

Per le applicazioni della dinamica i corpi puntiformi, chiamati anche **punti materiali** o semplicemente "punti" sono utilizzati, innanzi tutto, per rappresentare corpi fisici molto piccoli per i quali sia ragionevole trascurare le estensioni. Essi tuttavia vengono utilizzati anche per rappresentare corpi con estensioni ben percepibili, ma il cui comportamento sia ragionevolmente approssimabile con quello di un corpo molto piccolo.

In effetti nelle elaborazioni della dinamica risulta conveniente e accettabile servirsi di corpi puntiformi che rappresentano oggetti materiali tutt'altro che minuscoli come carrucole, ascensori, biciclette o automobili.

La lecitezza di queste schematizzazioni dovrebbe essere confermata caso per caso da esami e verifiche sui risultati che consentono di ottenere con una certa facilità. In pratica le molte esperienze della bontà delle schematizzazioni mediante corpi puntiformi giustificano molte mancate verifiche.
Tuttavia, nello spirito del metodo scientifico, permane la necessità di verifiche delle situazioni problemache che possano condurre a ristudiare ogni problema servendosi di una schematizzazione diversa che si verifiche essere più adeguata.
in genere le schematizzazioni nuove sono simili alle precedenti, ma più elaborate e impegnative. In pochi casi tuttavia le verifiche più attente portano a schematizzazioni sostanzialmente diverse; in questi casi si parla di "cambiamento di paradigma scientifico".

P12a.03 Nella dinamica classica, come vedremo, si studiano anche sistemi costituiti da più corpi puntiformi e corpi estesi la cui posizione può essere definita da loro punti (talora pochi, talora numerosi) caratterizzabili con eventi spazio-temporali come i corpi puntiformi.

Le evoluzioni di un corpo puntiforme sono da pensare come costituite da fasi successive che sono individuabili dalle sue possibili osservazioni, ciascuna delle quali va attribuita ad un evento preciso.

Una evoluzione di un punto mobile vista da un osservatore, quindi, nella dinamica viene caratterizzata da una sequenza di eventi riguardanti essenzialmente le sue posizioni nello spazio e nel tempo.
Per una evoluzioe si usa tipicamente una espressione della forma

$$\Big\langle \langle \mathbf{r}_0, t_0\rangle, \langle \mathbf{r}_1, t_1\rangle, ...\langle \mathbf{r}_n, t_n\rangle \Big\rangle \ .$$

P12a.04 Una ipotesi fondamentale della dinamica classica riguarda la misurazione del tempo: si postula che due osservatori siano in grado di determinare la durata di una fase evolutiva di un corpo puntiforme, ossia la differenza tra l'istante finale e l'istante iniziale della fase, ottenendo lo stesso valore.

Le durate delle fasi evolutive e delle intere evoluzioni sono quindi considerate grandezze indipendenti dall'osservatore. Questo rende lecito di parlare di un tempo assoluto che gli osservatori possono misurare affidabilmente.

Una seconda ipotesi fondamentale riguarda la possibilità dei diversi osservatori abilitati a trasmettersi attendibilmente i dati delle rispettive osservazioni con trascurabile impiego del tempo e delle altre risorse che le trasmissioni reali effettivamente richiedono.

Questa semplificazione è giustificabile per le comunicazioni tra osservatori poco distanti tra i quali si possono avere comunicazioni ottiche che con buona approssimazione si possono considerare immediate.
Questo equivale a considerare che le radiazioni luminose, in breve i segnali luminosi, si trasmettano con velocità infinita. Questa idea di solito viene accettata acriticamente, in quanto si impone alla intuizione comune; a rigore invece confligge con le molte misurazioni della effettiva velocità della luce nel vuoto e nei diversi mezzi che risultano trasparenti; in particolare le differenze delle velocità della luce nei vari mezzi trasparenti sono necessarie per spiegare gli evidenti fenomeni della diffrazione.

P12a.05 In sostanza la dinamica classica rinuncia a trattare fenomeni che si evolvono con velocità che si avvicinano a quella della luce e che riguardano distanze sensibilmente più elevate di quelle che sono controllabili con lo scambio di segnali percepibili dall'occhio umano. Questi fenomeni devono essere affrontati con le teorie relativistiche.

La assunzione dei corpi puntiformi, evidentemente oggetti privi di distinzioni interne, comporta anche che la dinamica classica rinunci ad occuparsi dei fenomeni che riguardano oggetti molto piccoli nei quali le tecniche della miscroscopia permettono di osservare componenti differenziate e comportamenti diversi da quelli degli oggetti macroscopici semplici; i comportamenti non inquadrabili nella dinamica classica devono essere trattati ricorrendo a effetti termici (caos molecolare), effetti di superficie, fenomeni elettrici e magnetici, processi chimici, effetti di viscosità e a tanto altro.

Tanto meno la dinamica classica si può occupare di oggetti nanoscopici soggetti a fenomeni di pertinenza della chimica molecolare, della fisica atomica e nucleare e della fisica quantistica.

P12a.06 Nonostanti tutte le limitazioni segnalate, la dinamica di base è in grado di ottenere risultati incisivi che possono portare a proprietà esprimibili con formule, algoritmi e metodi alquanto stringenti e che attualmente possono essere utilizzati per previsioni ed estrapolazioni ottenibili con strumenti computazionali molto efficaci e di portata molto ampia.

Queste proprietà “classiche”' possono servire come basi di studi che si servono di dati osservati via via più estesi e accurati e che si riferiscono a modelli delle situazioni reali via via più elaborati, più comprensivi e più attendibilmente applicabili a decisioni efficaci.

Conviene porre in rilievo che le argomentazioni e le conclusioni della dinamica classica in molti momenti possono essere condotte servendosi di considerazioni intuitive che facilitano il chiarimento e la comunicazione delle conoscenze; questo costituisce un vantaggio non trascurabile di questa disciplina; lo stesso accade per altre teorie fortemente semplificatrici.

P12a.07 Nella dinamica si distinguono due parti caratterizzate da restrizioni del campo di indagine, la cinematica e la statica, che conviene sviluppare preliminarmente.

La cinematica studia i possibili movimenti dei corpi indipendentemente dalle cause alle quali possono essere attribuiti.
Mentre la dinamica prende in considerazione sostanzialmente solo osservatori che si muovono gli uni rispetto agli altri di moti rettilinei uniformi, i cosiddetti osservatori inerziali, la cinematica può fare riferimento a osservatori di ogni genere.

La statica si limita invece a studiare i comportamenti di corpi tendenzialmente semplici che si trovano in uno stato di quiete, ovvero che sono caratterizzati da posizioni che non cambiano nel tempo, ma mettendoli in relazione alle forze alle quali sono sottoposti.

Lo stato dei corpi in quiete sostanzialemnte viene esaminato solo dal punto di vista di un unico osservatore che si può scegliere in modo da esprimere nel modo più semplice e maneggevole gli eventi da esaminare.
Infatti le descrizioni quantitative di altri osservatori possono essere ottenute facilmente con trasformazioni di coordinate chiaramente trattabili.

Conviene segnalare che per affrontare taluni problemi di statica risulta opportuno fare riferimento a due osservatori in quiete l'uno rispetto all'altro, in quanto accade che alcune caratteristiche richieste si ottengono più agevolmente in uno dei due riferimenti spaziali, mentre altre caratteristiche si individuano più agevolmente dalle formule relative all'altro riferimento.

P12 **b. corpi puntiformi**

P12b.01 Per corpo puntiforme dunque si intende una entità fisica la cui collocazione spazio-temporale può essere rappresentata da quattro coordinate reali, tre coordinate spaziali che collocano il corpo in un punto dello spazio cartesiano tridimensionale e una coordinata temporale che fornisce l'istante nel quale il corpo è stato localizzato. Questi parametri sono detti anche costituire un evento della meccanica newtoniana.

L'istante di ogni evento viene fornito da un valore usualmente identificato con la lettera t; nell'ambito di un processo evolutivo o di una sua fase si considera che in valore t appartenga ad un intervallo temporale al quale si dà una forma come $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$.

Una tipica situazione considerata dalla cinematica vede un corpo puntiforme identificato da $\boldsymbol{P}$ al quale un osservatore **O** attribuisce come stato l'evento della forma $\langle x, y, z, t \rangle$ con x, y e z coordinate cartesiane del punto rispetto alla terna di riferimento cartesiane Oxyz utilizzata da **O**, mentre per t si ha $t \in \langle t_i, t_f \rangle$ e t, t_i e t_f esprimono istanti forniti dall'orologio in dotazione all'osservatore.

Una alternativa di maggiore versatilità presenta lo stato del corpo puntiforme $\boldsymbol{P}$ è con una coppia $\langle \mathsf{x}, t \rangle$ con $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^{\times 3}$, espressione che consente di fornire la posizione del corpo con coordinate diverse dalle cartesiane, ad esempio con coordinate cilindriche o polari [I49e].

Spesso la posizione nell'istante t del corpo $\boldsymbol{P}$ viene espressa come $P(t) = \langle x_P(t), y_P(t), z_P(t) \rangle$, notazione cartesiana equivalente alla $\mathsf{r}(t)$.

Questa curva 3D costituisce la traiettoria percorsa del corpo nell'intervallo temporale da t_i a t_f .
Questo si accorda con il tempo inteso come indice di stato che scorre in una sola direzione presentando valori sempre crescenti, ossia inteso come parametro fisico che può essere sottoposto ad osservazioni successive che forniscono valori in progressiva crescita.

Segnaliamo che spesso, sbrigativamente, si individua un corpo puntiforme $\boldsymbol{P}$ con la semplice notazione P riguardante la sua posizione; il contesto dovrebbe evitare ogni ambiguità in quanto solo in poche situazioni si considerano due diversi corpi puntiformi che si irovano nello stesso punto dello spazio.

Analogamente si segnala che spesso un osservatore viene identificato con il suo riferimento spaziale.

P12b.02 Vediamo le caratteristicgeb essenziali delle osservazioni e delle misurazioni degli elementi di una traiettoria $\mathsf{r}(t)$ di un punto materiale effettuate da un osservatore.

Per le misurazioni dei tempi si serve di orologi, apparecchi che si servono di un semplice processo che si ripete con periodicità come l'oscillazione di un bilancere costituente un orologio meccanico, il movimento oscillatorio di un pendolo, una vibrazione di un cristallo di quarzo, una riduzione frazionale di una sostanza radioattiva, una frazione della rotazione dell'asse terrestre, ... Alla sequenza degli istanti del suddetto processo l'operatore dell'orologio associa con precisione gli istanti che segnano le fasi della evoluzione che egli osserva.

Il sistema osservatore deve servirsi anche di sistemi ottici in grado di lanciare impulsi elettromagnetici (vuoi luminosi, vuoi di frequenze al di fuori dello spettro visibile dall'occhio umano) al corpo $\boldsymbol{P}$ in moto e di ricevere i segnali elettromagnetici che da quello sono in qualche modo inviati in risposta.

Con questi segnali lanciati e raccolti attraverso diversi dispositivi il sistema osservatore mediante procedimenti di triangolarizzazione riesce ad individuare la posizione del corpo in moto nei vari istanti che distinguono le fasi suo movimento.

La deduzione di ogni evento $\langle \mathsf{r}, t\rangle$ della traiettoria del corpo osservato dovrebbe tener conto della velocità di propagazione dei segnali elettromagnetici, velocità finita (circa 300 000 km/s) ma altissima per i sensi dell'uomo (circa 300 000 km/s).

In un gran numero di scenari sperimentali i tempi di trasmissione dei segnali elettromagnetici sono trascurabili rispetto agli spostamenti che il punto materiale osservato subisce negli intervalli di tempo delle fasi evolutive osservate.

Quando i tempi di trasmissione/ricezione dei suoi segnali osservativi sono impercettibili l'osservatore è indotto a pensare che questi segnali si propaghino istantaneamente: questo è quello che ci portano ad immaginare i nostri sensi e che è stato rafforzato dalle moltissime esperienze effettuate con gli strumenti di misurazione disponibili nel passato o da quelli ancora oggi più largamente utilizzati nelle esperienze quotidiane.

Questa schema mentale intuitivo ha portato a considerare le coordinate spaziali e le temporali indipendenti e determinabili con assolutezza ed ha portato a giudicare lecito attribuire la contemporaneità di due eventi che si manifestano in punti diversi dello spazio fisico.

Lo studio dei moti di corpi su grandi distanze e a velocità elevatissime per gli operatori umani ha costretto a rinunciare a questa visione che possiamo definire galileano-newtoniana e di adottare una visione che chiamiamo einsteiniana secondo la quale lo spazio e il tempo si devono considerare parti di un unico ambiente quadridimensionale che chiamiamo **cronotopo** o **spazio-tempo**.

P12b.03 Le traiettorie di taluni corpi sono soggette a vincoli che possono sia semplificare lo studio dei movimenti che, più spesso, complicarlo.

Studi decisamente più semplici sono necessari per le traiettorie dei corpi puntiformi costretti a muoversi su un piano. Se questo piano viene riferito alla coppia di assi coordinati Oxy si hanno traiettorie governate da leggi orarie della forma $\mathsf{r}(t) \ = \big\langle x(t), (t) \big\rangle$.
Queste traiettorie possono essere visualizzate come curve 3D riferibili agli assi spaziali Ox e Oy e a un asse dei tempi Ot, in genere disposto verticalmente.

Si ha una semplificazione maggiore quando si studiano corpi puntiformi costretti a muoversi in una sola dimensione: si hanno allora traiettorie regolate da leggi orarie della forma $P(t) = s(t)$ le quali possono essere visualizzate da curve in un piano del genere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ riferito a un asse Os delle posizioni, in genere disposto verticalmente, e a un asse dei tempi in genere disposto orizzontalmente; queste raffigurazioni sono interpretabili con facilità e possono essere molto chiare ed efficaci.

Tra poco ci serviremo proficuamente di queste traiettorie in una o due dimensioni spaziali, anche in omaggio al fatto che queste situazioni sono state l'oggetto dei primi studi scientifici della cinematica e della dinamica.

Altri scenari riguardanti traiettorie il cui studio risulta semplificato sono quelli nei quali il movimento avviene in condizioni nelle quali influiscono molte le simmetrie dell'ambiente nel quale il movimento si sviluppa: questo è in particolare il caso dei moti di molti corpi celesti.

P12b.04 Esaminiamo qualche possibile traiettoria monodimensionale, ossia qualche possibile movimento di un punto mobile $\boldsymbol{P}$ che si può muovere su una retta che raffiguriamo nei grafici come asse Os, come asse verticale con i tempi rappresentati susseguirsi sull'asse dei tempi Ot, disposto in orizzontale.

//input pP12a04

Prima fase: il corpo M si allontana dal punto di partenza posto nell'origine dell'asse Os fino a giungere alla distanza di s_1 metri all'istante t_1 min.
Nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 M sta fermo in s_1, la sua posizione non cambia .
Da t_2 a t_3 retrocede fino a portarsi nella posizione s_3 a sinistra del punto di partenza.
Nell'ultima fase da t_3 a t_4 si sposta verso destra fino a fermarsi in s_4, ancora a destra dal punto di partenza.

La descrizione precedente è stata ridotta all'essenziale. Precisando i valori degli istanti e delle posizioni si ha una visione più quantitativa che può essere di maggiore utilità.

Noi vogliamo rimanere sulle generali ma vogliamo evidenziare altre caratteristiche della traiettoria, se pure in modo generico.

Per questo osserviamo le varie pendenze dei quattro tratti e ci avviciniamo alla nozione di velocità del movimento.
In ciascuno dei quattro tratti costituiti da segmenti rettilinei si osserva che le grandezze degli spostamenti nei vari (piccoli) sottointervalli di tempo sono proporzionali alle ampiezze di questi.
Si dice che tutti i 4 movimenti sono effettuati con velocità costante.
Più precisamente definiamo la velocità media nell'intervallo da t' a t'' come il rapporto

$$v_{avg}\big(s(t), t', t''\big) \ := \ \frac{s(t'') - s(t')}{t'' - t'} \ .$$

Questa definizione chiediamo valga per ogni coppia $\langle t', t''\rangle$ di tempi diversi, con $t' \neq t''$, ammettendo che possa essere $t'' < t'$ e senza restrizioni sui valori reali $s(t')$ e $s(t'')$.
Si tratta quindi di una applicazione fisica della nozione matematica di rapporto incrementale.

Si osserva inoltre che pendenze positive corrispondono ad avanzamenti su Os, pendenze negative ad arretramenti, pendenze maggiori in valore assoluto a velocità maggiori sia verso sinistra che verso destra.

P12b.05 La traiettoria precedente è costituita solo da fasi nelle quali il punto mobile si muove a velocità costante e tra le quali si hanno passaggi bruschi da una velocità all'altra, situazioni poco realistiche nel caso dei veicoli aventi un peso non trascurabile.

Esaminiamo allora un grafico che vuole essere più realistico nel quale compare una curva $s(t)$ più morbida, più liscia o più precisamente con la derivata prima continua, priva dei salti della traiettoria precedente.

//input pP12a05

Qui si osserva una fase iniziale nella quale il punto mobile M si avvia con una crescita graduale della velocità fino a raggiungere una fase di velocità costante di spostamento verso destre; segue una fase di frenata da t_2 a t_3 fino all'arresto nel periodo da t_3 a t_4; Questo viene seguito da una accelerazione tra t_5 e t_6 fino a raggiungere una moderata velocità di riavvicinamento al punto di partenza; nell'istante t_6 inizia una frenata con riduzione graduale della velocità in modulo che si conclude nell'istante t_7 con l'arresto nella posizione s_7.

Per questa traiettoria risulta interessante per ogni coppia di istanti diversi t' e t'' far tendere a 0 la differenza $t'' - t'$ per ottenere quella che chiamiamo **velocità istantanea** all'istante t' (identificabile al limite con t''). In generale vale la definizione differenziale

$$v(t) \ := \ \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} \ = \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \ .$$

La velocità media e la velocità istantanea sono grandezze dello stesso genere misurabile nell'unità m/s o in altra unità a questa proporzionale. Il loro genere nel sistema **S.I.** viene espresso dal simbolo [v] da considerare equivalente a [s t^{-1}].

Al genere di grandezza fisica velocità istantanea in una dimensione corrisponde la nozione matematica di derivata prima della variabile spostamento rispetto alla variabile tempo trascorso.

P12b.06 Nella traiettoria precedente la prima, la terza, la quinta e la settima fase sono costituite da porzioni di parabole con assi verticali. Si hanno parabole con la concavità volta verso l'alto corrispondenti ad accelerate di allontanamento dall'origine O di Os e a frenate di riavvicinamento; si hanno invece parabole volte verso il basso di rallentamento dell'allontanamento da O e parabole volte verso il basso esprimenti accelerate di avvicinamento ad O.

Si osserva anche che porzioni di parabola con raggio osculatore maggiore riguardano accelerate o decelerate tranquille, mentre porzioni di parabola con raggi minori esprimono accelerazioni o frenate più brusche.

Ricordiamo anche che le derivate seconde delle funzioni esprimenti porzioni di parabola sono numeri reali, costanti.
Possiamo concludere che le porzioni di parabole delle traiettorie esprimono moti uniformemente accelerati (o decelerati).

Questo ci conduce a prendere in considerazione la nozione di accelerazione media relativa a una coppia di istanti t' e t'' come rapporto incrementale delle velocità nei due istanti.
Si giunge poi alla nozione di accelerazione istantanea come derivata seconda dello spostamento o come derivata prima della velocità istantanea

$$a(t) \;:=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \;=\; \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2 s(t)}{\mathrm{d}t^{\,2}} \;.$$

P12b.07 Le nozioni di velocità e di accelerazioni sia medie che istantanee si estendono in modo prevedibile ai movimenti dei corpi puntiformi nel piano e nello spazio tridimensionale.

Per i movimenti in 3D espressi dalla legge oraria $\mathsf{r}(t)$ si danno le seguenti definizioni:

$$\mathsf{v}_{avg}(\mathsf{r}(t), t', t'') \;:=\; \frac{\mathsf{r}(t'') - \mathsf{r}(t')}{t'' - t'} \;.$$

$$\mathsf{v}(t) \;:=\; \frac{\mathrm{d}\mathsf{r}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{r}(t+\Delta t) - \mathsf{r}(t)}{\Delta t} \;.$$

$$\mathsf{a}_{avg}(\mathsf{r}(t), t', t'')) \;:=\; \frac{\mathsf{v}(t'') - \mathsf{v}(t')}{t'' - t'} \;.$$

$$\mathsf{a}(t) \;:=\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{v}(t+\Delta t) - \mathsf{v}(t)}{\Delta t} \;=\; \frac{\mathrm{d}\mathsf{v}(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}^2 \mathsf{r}(t)}{\mathrm{d}t^{\,2}} \;.$$

In cinematica, in dinamica e in molti capitoli della fisica le derivate rispetto al tempo vengono anche rappresentate con un punto sopra il simbolo della grandezza derivata e la derivate seconde con un doppio punto.
Abbiamo quindi le seguenti formule.

$$\mathsf{r}(t) \;=\; x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}} + z(t)\hat{\mathbf{k}} \;=\; x(t)\mathsf{e}_x + y(t)\mathsf{e}_y + z(t)\mathsf{e}_z \;=\; x_1(t)\mathsf{e}_1 + x_2(t)\mathsf{e}_2 + x_3(t)\mathsf{e}_3 \;.$$

$$\mathsf{v} \;=\; \dot{\mathsf{r}} \;=\; \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \;.$$

$$\mathsf{a} \;=\; \dot{\mathsf{v}} \;=\; \dot{v}_x\hat{\mathbf{i}} + \dot{v}_y\hat{\mathbf{j}} + \dot{v}_z\hat{\mathbf{k}} \;=\; \ddot{\mathsf{r}} \;=\; \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \;.$$

P12b.08 I movimenti dei corpi puntiformi sono spesso vantaggiosamente riferiti a una ascissa curvilinea che qui denotiamo con ℓ e consideriamo come funzione del tempo trascorso dell'inizio del movimento stesso.
Essa è definita come la lunghezza del percorso compiuto dal corpo in esame dall'inizio del suo movimento.
Per un movimento infinitesimo compiuto dall'istante t all'istante $t+\Delta t$ abbiamo che l'incremento della ascissa curvilinea è

$$\mathrm{d}\ell \;:=\; \mathrm{d}\mathbf{r} \;=\; \sqrt{\mathrm{d}x^{\,2} + \mathrm{d}y^{\,2} + \mathrm{d}z^{\,2}} \;=\; \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t \;\; .$$

Si ha quindi la legge oraria

$$\ell(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tau \, \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2 + \dot{z}(\tau)^2} \; .$$

Si osserva che la nozione più comune di velocità (scalare) di un corpo si può derivare con chiarezza dal vettore velocità e dalla ascissa curvilinea:

$$v \;:=\; |\mathbf{v}| \;=\; \frac{\mathrm{d}\ell(t)}{\mathrm{d}t} \; .$$

//input pP12a08

P12 c. calcoli di traiettorie e loro generi

P12c.01 Se di un corpo mobile sono note la velocità $\mathbf{v}(t)$ e la sua posizione in un istante "iniziale" $\mathbf{r}(t_0)$ si ottiene la sua legge oraria con la seguente formula:

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \mathbf{v}(\tau) \;.$$

Quando sono note l'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ e la sua velocità iniziale $\mathbf{v}(t_0)$ si ottiene la sua velocità nei vari istanti dalla formula

$$\mathbf{v}(t) \;=\; \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \mathbf{a}(\tau) \;.$$

Se del corpo mobile si conoscono accelerazione, velocità iniziale e posizione iniziale per la sua legge oraria si hanno le seguenti espressioni:

$$\mathbf{r}(t) \;=\; \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau\, \mathbf{v}(\tau) \;=\; \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{v}(t_0)(t-t_0) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\theta\, \mathbf{a}(\theta) \;.$$

P12c.02 Sono studiati molti generi di movimenti e di corrispondenti traiettorie in relazione a svariate applicazioni.
Presentiamo concisamente i principali.

Stato di quiete: il corpo non si sposta rispetto all'osservatore.

Moto rettilineo uniforme: il corpo mantiene costante il suo vettore velocità.

Moto rettilineo uniformemeente accelerato: il corpo si muove con una velocità che mantiene l'orientazione costante e ha il modulo variabile linearmente, ovvero con il vettore accelerazione costante.

Moto circolare uniforme: il corpo è vincolato a muoversi lungo una circoferenza con velocità costante in modulo.

Moto circolare uniformemente accelerato: il corpo è vincolato a muoversi lungo una circoferenza con velocità il cui modulo varia linearmente.

Moto ellittico: il corpo si muove su una orbita piana ellittica; come vedremo questo viene causato dall'azione sul corp di una forza conservativa; in particolare è il moto di un satellite intorno al suo pianeta (Luna intorno alla Terra) a il moto di in pianeta intorno alla sua stella (Terra intorno al Sole), moti imputabili al potenziale di tipo coulombiano esercitato dal corpo maggiore sul minore.

Moto parabolico: il corpo si muove nelle due dimensioni compiendo un arco di una parabola appartenente a un piano; la parabola è verticale se il corpo è sottoposto a un campo di forze verticali uniformi (come per la gravità sulla Terra) e in tal caso si ha velocità orizzontale costante e accelerazione verticale costante; la parabola può essere vista come caso limite di una ellisse.

Moto iperbolico: il corpo si muove secondo una traiettoria iperbolica e si può considerare una alternativa al moto ellittico, in quanto anch'esso causato da una forza conservativa; è il moto dimolte comete.

Moto armonico: tipico della massa del pendolo o dello stantuffo del motore a vapore;

Moto armonico: moto riconducibile alla proiezione ortogonale di un moto circolare uniforme e in particolare è quello del pendolo e dello stantuffo di un sistema biella-manovella.

Moto elicoidale uniforme: il corpo si muove in tre dimensioni e risulta dalla composizione di un moto circolare uniforme con un moto rettilineo uniforme nella direzione ortogonale al piano del moto componente circolare.

P12 d. moti relativi

P12d.01 Spesso si rende necessario studiare la posizione di un corpo puntiforme in movimento rispetto a un altro corpo puntiforme anch'esso in moto.

Consideriamo due corpi mobili puntiformi $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ le cui posizioni variabili nel tempo denotiamo con $P_A(t)$ e $P_B(t)$.
Si definisce come vettore della posizione di $\boldsymbol{A}$ rispetto a $\boldsymbol{B}$ la differenza

$$P_{A/B} \;=\; \mathbf{r}_{A/B} \;:=\; \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B \;=\Big\langle x_A, y_A, z_A\Big\rangle - \Big\langle x_B, y_B, z_B\Big\rangle \;=\Big\langle x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B\Big\rangle \;.$$

P12d.02 Si definisce velocità di un punto $\boldsymbol{A}$ rispetto al punto $\boldsymbol{B}$ la differenza vettoriale delle loro due velocità:

$$\mathbf{v}_{A/B} \;:=\; \mathbf{v}_A - \mathbf{v}_b \;=\; \dot{P}_{A/B} \;=\; \dot{\mathbf{r}}_A - \dot{\mathbf{r}}_B \;.$$

Questa grandezza espressa mediante le coordinate cartesiame è

$$\mathbf{v}_{A/B} \;=\Big\langle v_{A,x} - v_{B,x}, v_{A,y} - v_{B,y}, v_{A,z} - v_{B,z}\Big\rangle \;.$$

P12 e. movimenti di corpi rigidi

P12e.01 Un corpo rigido è un corpo la cui parti sono sottoposte al cosiddetto vincolo di rigidità, ovvero le cui parti devono mantenere la indeformabilità questa richiede che i punti che si possono individuare in un corpo rigido devono mantenere le mutue distanze.

Il corpo rigido costituisce un buon modello per molti oggetti fisici: pietre, esemplari di minerali, manufatti in metallo, in legno, in materiale plastico indeformabile, strutture architettoniche (edifici, ponti, sculture, ...) in legno, in pietra, in mattoni, in cemento, in calcestruzzo, ...

Dati due punti di un corpo mobile rigido $P_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ e $P_j = \langle x_j, y_j, z_j \rangle$ e chiamata $d_{i,j}$ la loro distanza, questa deve mantenersi fissa nel tempo. Questa richiesta conviene sia espressa dalla costanza della grandezza chiamata quadranza dei due punti

$$di, j^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - Y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 .$$

P12e.02 Considerimo ora la nozione di sistema di punti, modello costituito da un insieme finito di punti mobili $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$, ciascuno dei quali può essere trattato formalmente come un coprpo puntiforme, cioè essere caratterizzato con una posizione $P_i(t) = \mathsf{x}_i(t)$, una velocità $\mathsf{v}_i(t)$ e una accelerazione $\mathsf{a}_i(t)$.

Un sistema di punti si può muovere liberamente o essere sottoposto a vincoli. Se il vincolo è la rigidità abbiamo il caso del corpo rigido e molti corpi rigidi possono essere schematizzati con sistemi di un numero di punti che devono mantenere le mutue distanze costanti nel tempo.
Per poter portare avanti calcoli agevoli spesso si tende a schematizzare un corpo rigido con un insieme ridotto di punti.

Si trova facilmente che un sistema di punti mobili soddisfa il vincolo di rigidità sse per ogni duetto di suoi punti $\{P_i, P_j\}$ con $i, j = 1, 2, ..., n$ coincidono le componenti delle corrispondenti velocità v_i e v_j sulla retta orientata passante per essi $\overrightarrow{P_i\,P_j}$.

Sono interessanti anche altri sistemi di punti soggetti a vincoli meno pesanti come quello di mantenere mutue distanze solo tra una parte delle coppie di punti: questo serve a trattare sistemi di nodi dotati di collegamenti costituiti da aste rigide ma snodate.

Altri sistemi di punti di interesse pratico per le costruzioni meccaniche o architettoniche sono quelli che consentono di schematizzare sistemi di nodi dotati di collegamenti costituiti da molle le cui lunghezze possono oscillare rispetto acorrispondenti valori di equilibrio.

P12e.03 Per lo studio dei movimenti dei sistemi di punti e più in generale per lo studio delle configurazioni di ogni sistema fisico, risulta utile la nozione di **numero di gradi di libertà**.

Questo per un sistema di punti si definisce come il numero delle variabili indipendenti che risulta necessario e sufficiente conoscere per avere determinata univocamente in ogni istante la sua configurazione spaziale, cioè il complesso delle posizioni nello spazio dei suoi punti componenti.

Il numero dei gradi di libertà del corpo puntiforme è evidentemente 3: infatti come variabili caratterizzanti si possono utilizzare le tre coordinate cartesiane o altre tre coordinate equivalenti come le polari o le cilindriche.
Il sistema costituito di 2 punti liberi di muoversi presenta 6 gradi di libertà che possono riguardare 3 coordinate, cartesiane o equivalenti, per ciascuno dei due punti; oppure le tre coordinate di un punto e tre coordinate comunque scelte che danno la posizione del secondo punto rispetto al primo; o ancora

le coordinate del punto medio del segmento che li congiunge, la loro distanza e due coordinate angolari che stabiliscono la direzione del segmento orientato che li separa.
Un sistema costituito da n punti liberi di muoversi, per considerazioni simili, presenta $3\,n$ gradi di libertà.

Il sistema costituito da due punti "P_1 e P_2 collegati da un'asta rigida di massa trascurabile (e di lunghezza fissa) presenta 5 gradi di libertà, mentre come variabili possono essere scelte tre coordinate per il punto P_1 e due coordinate angolari che danno la direzione del vettore applicato $\overrightarrow{P_1\,P_2}$ che collega i due punti.

Segnaliamo anche che si può definire un numero di gradi di libertà per ogni sisteme fisico come cardinale (in genere non finito) dell'insieme dei valori delle coordinate che determinano il suo stato.

P12e.04 Spostamento traslatorio

P12e.05 Spostamento rotatorio

P12 f. cinematica dei dispositivi meccanici

P12f.01 Per meccanismo biella manovella si intende un meccanismo materiale o un suo schema semplificato in grado di trasformare un moto rettilineo alterno in un moto rotatorio continuo e viceversa.

In particolare si può avere un meccanismo in grado di trasformare un moto rettilineo armonico in un moto circolare muniforme e vicebversa.

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php