Capitolo I52:
calcolo delle variazioni

Contenuti delle sezioni

a. motivazioni del calcolo delle variazioni p.2
b. prima problematica del calcolo delle variazioni p.4
c. annullamento della prima variazione p.6
d. equazione di Euler p.7
e. condizioni per l'esistenza di un estremo p.8
f. curve estremali parallele a rette orizzontali p.9
g. più funzioni variazionali incognite p.10
h. massimi e minimi condizionati p.11
i. prima variazione di integrale doppio p.12

12 pagine

I52:**0.01** Il calcolo delle varazioni si occupa di problemi volti ad individuare dei massimi o dei minimi costituiti, non da numeri reali appartenenti al dominio di una funzione, ma da una o più funzioni incognite che tra quelle che appartengono ad una determinata famiglia sono tali da rendere massimo o minimo il valore di un integrale o di un funzionale di altro genere applicato ai membri della suddetta famiglia e alle loro derivate.

I52:a. motivazioni del calcolo delle variazioni

I52:**a.01** Il calcolo delle variazioni è un ampio settore dell'analisi infinitesimale nel quale si possono collocare sia problemi posti fin dall'antichità, sia sviluppi settecenteschi a carattere euristico, sia successive impostazioni più rigorose, sia molteplici problematiche con caratteri propri sviluppate più recentemente e tuttora in vigoroso sviluppo.

Iniziamo con alcuni singoli problemi di calcolo delle variazioni per introdurre pianamente gli scopi di questo calolo.

Consideriamo due punti-RR $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e $B = \langle x_B, y_B \rangle$ si richiede la equazione $y = f(x)$ della curva Γ rettificabile che congiunge A con B e presenta lunghezza minima.

Dato che la lunghezza della Γ è data da

$$J \;=\; \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \;\sqrt{1 + f'(x)^2}\;,$$

il problema si traduce nel trovare tra tutte le possibili $f(x)$ che congiungono A e B quella che rende minimo l'integrale J.

Questa curva, evidentemente, è il segmento $\overline{A\,B}$.

I52:**a.02** Un problema equivalente riguarda un cilindro $\boldsymbol{C}$ con le generatrici parallele all'asse Oz e con la sezione con il piano $z = 0$ data dalle equazioni

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)\;;$$

Su $\boldsymbol{C}$ sono dati due punti $A = \langle x(t_A), y(t_A), z_A \rangle$ e $B = \langle x(t_B), y(t_B), z_B a \rangle$ non appartenenti alla stessa generatrice e si considerano le curve Γ rettificabili passanti pe A e B e forniti dalle equazioni parametriche $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = \zeta(t)$.
Si chiede di determinare tra le curv Γ quella di lunghezza minima.

La lunghezza della curva Γ è data dall'integrale

$$J \;=\; \int_{t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \;\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + \zeta'(t)^2}\;;$$

quindi si tratta di individuare tra le corve Γ quella che minimizza J.

Per questo si può pensare di distendere su un piano la superficie cilindrica a partire dalla generatrice passante per A fino alla generatrice passante per B mediante una trasformazione che mantiene le lunghezze di tutte le curve tracciabili sul cilindro.
Quindi il problema di minimo si trasforma nel problema della curva piana visto in precedenza risolto dal segmento di retta che congiunge i punti trasformati, risp., di A e B.
Si conclude dunque individuando la curva sulla superficie $\boldsymbol{C}$ che interseca tutte le generatrici (parallele e verticali) formando un angolo costante.

I52:**a.03** Consideriamo due diversi punti del piano-RR $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e $B = \langle x_B, y_B \rangle$ che per semplicità assumiamo appartenere al primo quadrante, cioè aventi tutte le loro coordinate positive.
Tra le curve Γ passanti per A e B alle cui equazioni diamo la forma $y = f(x)$ si chiede di determinare quella che in conseguenza di una rotazione completa intorno all'asse Ox genera la superficie di area minima.

Dato che l'area da minimizzare è fornita dall'integrale

$$J \;=\; 2\,\pi \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \;\; f(x)\,\sqrt{1 + f'(x)^2}\;,$$

si tratta di individuare tra le ammissibili $f(x)$ derivabili e tali che $f(x_A) = y_A$ e $f(x_B) = y_B$ quella che minimizza J.

Questo problema non lo possiamo risolvere elementarmente come si è fatto per quelli in a01 e in a02 e richiede di precisare diverse condizioni che portano a diversi tipi di soluzioni.

Qui ci limitiamo a segnalare che la comparsa nella funzione integranda della derivata prima della funzione incognita comporta che si cerchi solo tra le funzioni $f(x)$ continue insieme alle rispettive derivate prime nell'intervallo $[x_A, x_B]$.

I52:**a.04** Mentre nella formulazione precedente si ammette che la curva γ sia univoca rispetto ai valori assunti in corrispondenza dei diversi valori della x, una variante del problema elimina questa restrizione consentendo che la curva si possa esprimere in forma parametrica con la coppia di equazioni $x = x(t)$ e $y = y(t)$ con t variabile in $[t_A, t_B]$ e tali che si abbia

$$x(t_A) = x_A \quad , \quad y(t_A) = y_A \quad , \quad x(t_B) = x_B \quad , \quad y(t_B) = y_B \ .$$

In queste condizioni occorre minimizzre il seguente integrale

$$J \ := \ 2\,\pi \int {t_A}^{t_B} \mathrm{d}t \ y(t)\,\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

I52:**a.05** I problemi accennati in precedenza possono essere generalizzati in vari modi.

Si possono presentare integrali da minimizzare nei quali possono essere presenti derivate della funzione incognita di ordine superiore al primo.

Si possono avere due o più funzioni incognite aventi come dominio lo stesso intervallo della variabile indipendente.

Può essere richiesta la minimizzazione di integrali multipli.

I52:b. prima problematica del calcolo delle variazioni

I52:**b.01** Consideriamo due punti del piano-RR $A = \langle x_A, y_A \rangle$ e $B = \langle x_A, y_B \rangle$ con $x_A \neq x_B$ e introduciamo la notazione $I_{AB} := [x_A, x_B]$.
Consideriamo poi una famiglia di curve passanti per A e B

$$\Gamma_\Lambda \;=\; \{\lambda \in \Lambda :| \; \gamma_\lambda\} \;,$$

ciascuna delle quali esprimibile con una funzione-RtR $y_\lambda = f_\lambda(x) \in [x_A, x_B]$ e dotata di derivata prima $y'_\lambda(x) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_\lambda$.
I punti estremi di queste curve si possono esprimere come $A = \langle x_A, f_\lambda(x_A) \rangle$ e $B = \langle x_B, f_\lambda(x_B) \rangle$
Denotiamo inoltre con funABtR l'insieme delle funzioni di $\lceil I_{AB} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ passanti per i punti A eB
Nei casi più semplici il parametro λ varia in un insieme di reali, $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$; in molti altri casi si chiede che esso appartenga ad uno spazio topologico maneggevole, ad esempio a uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ o a uno spazio metrico.

Consideriamo inoltre una funzione-RRRtR $F(x, y, p)$ e per ogni curva γ_λ con $\lambda \in \Lambda$ l'integrale curvilineo

$$J_\lambda \;:=\; \int_{\gamma_\lambda} F(x, y_\lambda, {y'}_\lambda) \;=\; \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \; F(x, y_\lambda, {y'}_\lambda) \;=\; \int_{x_A}^{x_B} \mathrm{d}x \; F\left(x, f_\lambda(x), {f_\lambda}'(x)\right) \;,$$

integrale che si suppone assumere un valore determinato.
L'insieme dei valori assunti dagli integrali J_λ, per il quale adottiamo la notazione $J_\Lambda \;:=\; \{\lambda \in \Lambda :| \; J_\lambda\}$, possiede un estremo inferiore I (finito o $-\infty$) e un estremo superiore S (finito o $+\infty$).
Se l'estremo inferiore I è finito e se si trova una curva $\gamma_{\lambda_I} \in \Gamma_\Lambda$ tale che $J_{\lambda_I} = I$, si dice che tale curva fornisce il minimo assoluto degli integrali J_λ nell'ambito della famiglia Γ_Λ. Stessa caratteristica si attribuisce alla funzione f_{λ_I}.
Se l'estremo superiore S è finito e se si trova una curva $\gamma_{\lambda_S} \in \Gamma_\Lambda$ tale che $J_{\lambda_S} = S$, si dice che tale curva fornisce il massimo assoluto degli integrali J_λ nell'ambito della famiglia Γ_Λ. Stessa caratteristica si attribuisce alla funzione f_{λ_S}.

Si pongono quindi i problemi della determinazione tra tutte le curve γ_λ della famiglia Γ_Λ della curva che minimizza e della curva che massimizza il valore dell'integrale J_λ.
Si osserva che questo integrale associa un valore numerico ad ogni funzione f_λ al quale si può applicare. Quindi si può introdurre il funzionale

$$\mathbf{J}_\Lambda \;:=\; \lceil \; \lambda \in \Lambda :| \; f_\lambda \not\mapsto J_\lambda \; \rceil \;.$$

Collettivamente le curve che minimizzano o massimizzano l'integrale J_λ vengono dette curve estremanti per il funzionale.

I52:**b.02** Evidentemente cambiando di segno alla funzione F si cambiano di segno i valori J_λ; quindi la problematica della minimizzazione del funzionale e quella della massimizzazione sono problematiche duali-UD.
È quindi sufficiente, per avere risultati generali, focalizzare lo studio su una delle due problematiche; prevalentemente ci si occupa della minimizzazione.

Come nello studio dei massimi e minimi delle funzioni-RtR e in più in generle delle funzioni a valore reale, si può facilmnte impostare la ricerca dei minimi e dei massimi relativi o locali dei funzionali di interesse variazionale.

Preliminarmente conveniamo che si sappiano riconoscere regioni dello spazio nel quale si collocano le curve della famiglia Γ_Λ che si possono considerare intorni aperti

Possiamo allora dire che una curva $\overline{\gamma} := \gamma_{\overline{\lambda}}$ fornisce un minimo relativo per i corrispondenti J_λ sse si trova un intorno V della curva tale che la stessa $\overline{\gamma}$ fornisce un minimo assoluto per gli J_λ nell'ambito del solo V.

Per dualità-UD si definisce la nozione di massimo relativo tra le curve di Γ_Λ.

Come per molte altre situazioni simili si distinguono i minimi relativi propri come i minimi relativi che non sono assoluti e per dualità-UD si distinguono i massimi relativi propri. Evidentemente una curva che fornisce un estremo assoluto fornisce anche un estremo relativo ma non viceversa.

I52:**b.03** Le definizioni precedenti contengono molti elementi lasciati nel vago che per portare a risultati e a procedimenti effetivi devono essere opportunemente precisati.

Per cominciare ad essere più stringenti presentiamo le richieste che seguono.

[1] Le funzioni f_λ che definiscono le curve sono continue e derivabili fino al secondo grado nell'intervallo $I_{AB} := [x_A, x_B\rangle$.

Segnaliamo che una richiesta meno stringente spesso opportuna ma che qui per semplicità trascuriamo consente di trattare funzioni f_λ che possono presentare in $[x_A, x_B\rangle$ un numero finito di punti angolari

[2] Le curve di Γ_Λ appartengono ad una regione R del piano-RR alla quale si può dare la forma

$$\left\{ f_\lambda \in \lceil I_{AB} \longmapsto \mathbb{R} \rceil \;\P\; \forall x \in I_{AB} \;\; \vdots \;\; \underline{f}(x) \leq f(x) \leq \overline{f}(x) \right\} \quad \text{con} \quad \underline{f}(x), \overline{f}(x) \in \mathsf{funABtR} \ .$$

I52:c. annullamento della prima variazione

I52:**c.01**

I52:d. equazione di Euler

I52:**d.01**

I52:e. condizioni per l'esistenza di un estremo

I52:**e.01**

I52:f. curve estremali parallele a rette orizzontali

I52:**f.01**

I52:g. più funzioni variazionali incognite

I52:**g.01**

I52:h. massimi e minimi condizionati

I52:**h.01**

I52:i. prima variazione di integrale doppio

I52:**h.02**