1

Capitolo I50
equazioni differenziali ordinarie

Contenuti delle sezioni

41 pagine

I500.01 In questo capitolo si presentano i primi elementi della teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

Si prendono in considerazione soprattutto i procedimenti risolutivi di equazioni specifiche che si servono di manipolazioni analitiche e che portano a risultati in buona parte ottenuti nel '600 e nel '700 e che si concludono con calcoli di integrali.

Tutti i risultati presentati riguardano funzioni reali di una variabile reale, ma in buona parte sono estendibili a funzioni olomorfe di una variabile complessa: infatti molti degli sviluppi sono ottenuti mediante manipolazioni formali concernenti espressioni algebriche e analitiche che mantengono la loro validità passando dal campo reale al campo complesso.

Molti sviluppi conviene siano esaminati in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ perché qui sono più semplici e in particolare possono contare su visualizzazioni bidimensionali.
Per contro alcuni sviluppi risulta più conveniente collocarli in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ perché qui risultano più generali, più completi e sostanzialmente più naturali.

I50 a. motivazioni delle equazioni differenziali ordinarie

I50a.01 Si dice **equazione differenziale ordinaria** un'equazione che presenta come incognita una funzione di una variabile indipendente che può muoversi sia in $\mathbb{R}$, che in $\mathbb{C}$ che in uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ per qualche intero positivo d. In tale equazione possono entrare parametri (reali, complessi o d-dimnsionali), funzioni della variabile indipendente e derivate (almeno una) della funzione incognita.

Si dice **ordine di un'equazione differenziale ordinaria** il massimo degli ordini delle derivate della funzione incognita.
Esempi di equazioni differenziali ordinarie sono

$$y'(x) = y(x) \quad , \quad x\,y' + y = 3x^3 - 1 \quad , \quad y' = f(x)\,y^2 + g(x)\,y + h(x) \quad , \quad (y')^2 - x\,y^4 y' + \sin x \;=\; 0$$

$$y''(x) = 0 \quad , \quad x^2\,y'' + x\,y' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad , \quad xy'' + (c-x)y' - a\,y = 0$$

$$y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0 \quad , \quad y^{(n)} = g(x) \;\text{ con }\; n = 1, 2, 3, ...$$

Le prime 4 sono equazioni del primo ordine, seguono 3 del secondo ordine, una del terzo e una equazione di un non identificato ordine n.

Nel seguito di questo capitolo spesso semplificheremo i discorsi sostituendo il termine "equazione differenziale ordinaria" con quello di "equazione differenziale" o anche con la semplice parola "equazione". Occorre anche segnalare che nella letteratura internazionale il termine "equazione differenziale ordinaria" viene abbreviato con **ODE**, l'acronimo del termine inglese *ordinary differential equation.*

Conviene segnalare qui anche che si dice **equazione alle derivate parziali** un'equazione che ha come incognita una funzione di due o più variabili (reali o complesse) nella quale possono entrare parametri, funzioni delle variabili e derivate parziali della funzione incognita. Esempi di queste equazioni per funzioni nelle due variabili x e y sono

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \;=\; \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \;=\; v^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \;.$$

I50a.02 Le equazioni differenziali servono innanzi tutto per individuare funzioni che siano le loro soluzioni. Le soluzioni delle equazioni di ordine n, naturalmente, vanno ricercate tra le funzioni n volte derivabili. Questo tendenzialmente comporta che nelle equazioni differenziali compaiono funzioni piuttosto regolari e che siano sufficientemente regolari anche gli insiemi di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}^{\times d}$ nei quali possono muoversi le variabili.

Le equazioni differenziali intendono individuare delle funzioni a partire da uguaglianze nelle quali intervengono le loro variazioni locali dei vari ordini: questo comporta che si cercano come soluzioni funzioni definite in intervalli reali o in insiemi aperti e connessi del piano complesso.
In effetti molti risultati sulle equazioni differenziali date da espressioni algebriche o analitiche conducono a funzioni olomorfe, cioè a funzioni illimitatamente derivabili e definite in insiemi aperti e connessi di $\mathbb{C}$. Molti risultati conducono anche a funzioni analitiche polidrome. Lo studio delle equazioni differenziali è strettamente collegato con lo studio delle funzioni speciali e di tutti gli altri strumenti che servono al loro studio

Una qualsiasi equazione differenziale di ordine $n = 1, 2, 3, ...$ in può essere presentata con una espressione della forma

$$(1) \qquad \Phi\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}\right) \;=\; 0 \;.$$

In tutti i casi specifici che prenderemo in considerazione, in sintonia con quanto segnalato sopra, la Φ è costituita da un'espressione ben formata nella quale possono comparire i suoi $n+2$ argomenti, costanti, funzioni date da espressioni analitiche e altre funzioni note.

I50a.03 La più semplice delle equazioni differenziali è l'equazione $y'(x) = f(x)$, equazione del primo ordine che può essere presa in considerazione per tutti gli insiemi aperti e connessi nei quali la $f(x)$ è definita; come sappiamo essa comporta $y(x) = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, f(u)$ con x_0 reale che può scegliersi con una certa arbitrarietà.
Si osserva che la sola equazione non conduce a una sola soluzione: per avere una soluzione determinata si deve aggiungere una condizione; l'espressione data in precedenza nel caso di x_0 determinato suppone che si richieda una soluzione tale che $y(x_0) = 0$; una tale condizione è detta condizione iniziale.
Equivalentemente la condizione precedente si può esprimere come richiesta che la $y(x)$ passi per il punto $\langle x_0, 0\rangle$ del piano delle variabili x e y. Più in generale si può chiedere che la curva individuata dalla soluzione passi per un generico punto $\langle x_0, y_0\rangle$ e questa richiesta conduce alla soluzione

$$(1) \qquad y(x) \;=\; y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\; f(u) \; .$$

L'equazione $y''(x) = 0$ è soddisfatta da tutte le funzioni della forma $y(x) = \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0$ con $\mathtt{C}_1$ e $\mathtt{C}_2$ costanti che possono scegliersi arbitrariamente in $\mathbb{R}$. Si osserva quindi che le soluzioni della suddetta equazione del secondo ordine costituiscono una famiglia bidimensionale di funzioni.

Una unica soluzione si può individuare chiedendo che per un dato valore x_0 della variabile x abbiano determinati valori reali o complessi la funzione soluzione e la sua derivata: $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = {y_0}'$; dalla seconda si ottiene $\mathtt{C}_1 = {y_0}'$ e dalla prima $\mathtt{C}_0 = y_0 - {y_0}'\, x_0$.
Una sola soluzione si ottiene anche in seguito alla richiesta che la soluzione assuma due determinati valori per due valori x_0 e x_1 della variabile x: $y(x_0) = y_0$ e $y(x_1) = y_1$. Infatti queste comportano le due equazioni $\mathtt{C}_1\, x_0 + \mathtt{C}_0 = y_0$ e $\mathtt{C}_1\, x_1 + \mathtt{C}_0 = y_1$ che per i coefficienti della soluzione forniscono

$$(2) \qquad \mathtt{C}_1 \;=\; \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad , \quad \mathtt{C}_0 \;=\; \frac{y_0\, x_1 - y_1 - x_0}{x_1 - x_0} \; .$$

Le uguaglianze costituenti la prima richiesta si dicono **condizioni iniziali**, quelle relative alla seconda richiesta si chiamano **condizioni al contorno**.

I50a.04 Consideriamo in generale l'equazione $y^{(n)} = 0$ per un generico $n = 1, 2, 3, ...$ È evidente che essa viene risolta da ogni polinomio di grado $n-1$; inoltre questi polinomi costituiscono le sole soluzioni. Quindi le soluzioni sono individuate dall'espressione

$$\mathtt{C}_{n-1}\, x^{n-1} + \mathtt{C}_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots + \mathtt{C}_2\, x^3 + \mathtt{C}_1\, x_1 + \mathtt{C}_0$$

per qualsiasi scelta delle costanti $\mathtt{C}_i$ per $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; dunque le soluzioni della precedente semplicissima equazione differenziale di ordine n costituiscono una famiglia ad n indici.
Per individuare una sola soluzione vanno aggiunte alla equazione stessa altre condizioni che riguardano valori particolari della funzione e/o delle sue derivate in punti determinati. In particolare se si impongono i valori assunti per un determinato valore della x della funzione e delle sue derivate fino a quella di ordine $n-1$ si richiedono le n equazioni chiamate condizioni iniziali

$$(1) \qquad y(x_0) \;=\; y_0 \quad , \quad y'(x_0) \;=\; {y_0}' \quad , \quad y''(x_0) = {y_0}'' \quad , \quad \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \; .$$

Si constata che queste n equazioni costituiscono un sistema di n equazioni lineari in n incognite che possiede una e una sola soluzione.

Vedremo che questa univocità della soluzione vale più in generale per le equazioni differenziali che soddisfano requisiti piuttosto ragionevoli.
Un problema che richiede di individuare le soluzioni di una equazione differenziale di ordine n che soddisfino date condizioni iniziali viene detto **problema di Cauchy [dell'equazione differenziale]**.

I50a.05 Il problema principale dello studio delle equazioni differenziali è la determinazione delle loro soluzioni. Questa attività in linea di principio consente di conoscere l'andamento complessivo di una funzione o di una famiglia di funzioni a partire da una sua caratterizzazione locale espressa con alcune delle sue derivate.
Può tuttavia essere utile anche la trasformazione inversa: data una funzione ricavare una equazione differenziale che essa soddisfa. Una tale equazione infatti può consentire di portare avanti uno sviluppo deduttivo o computazionale (numerico o simbolico) per il quale l'equazione ottenuta può essere più direttamente utile di un'espressione della funzione in causa.

Come abbiamo intravvisto sopra, le soluzioni in genere sono costituite da famiglie di funzioni date da espressioni contenenti parametri; tuttavia si possono avere anche soluzioni non comprese in queste famiglie chiamate **soluzioni singolari**.

Come vedremo le soluzioni di molte equazioni differenziali che non siano troppo elaborate si ottengono con procedimenti che portano al calcolo di integrali: questo potrebbe consistere nella quadratura, ovvero nel calcolo di un integrale definito di una funzione particolare, oppure nel calcolo simbolico di un integrale indefinito.
Questo ha indotto a usare anche il termine **integrazione di un'equazione differenziale** per il procedimento di ricerca delle sue soluzioni e a chiamare **integrale di un'equazione differenziale** una sua soluzione.

I50a.06 Le equazioni differenziali ordinarie e quelle alle derivate parziali rivestono una grande importanza per tutte le discipline che affrontano problemi quantitativi e quindi si servono di metodi e procedimenti matematici. Su di esse si basano numerosi modelli matematici di grande importanza per la fisica, la chimica, la gran parte delle aree tecnologiche, per molti settori della biologia, della genetica, dell'epidemiologia, della farmacologia, della dinamica delle popolazioni e della sociologia. e dell'economia.

Un primo semplice esempi è dato dall'equazione

$$\frac{\mathrm{d}y\,(x)}{\mathrm{d}x} \;=\; k\,y(x)\ .$$

In molte applicazioni di questa equazione la x ha come tipica interpretazione quella di una variabile temporale.
In particolare quando $k > 0$ l'equazione può servire a esprimere una crescita normale di una popolazione (di persone, di specie viventi, ...), cioè di una crescita che vede la popolazione riprodursi proporzionalmente alla propria ampiezza, evidentemente in assenza di stimoli o inibizioni esterne.
Se viceversa $k < 0$ può servire a esprimere il decadimento normale di una popolazione, per esempio il decadimento di un campione di una sostanza radioattiva o chimicamente attiva.
L'equazione porta alle soluzioni espresse da

$$y(x) \;=\; y(0)\,\mathrm{e}^{kx}$$

cioè a funzioni esponenziali che dipendono proporzionalmente dalla ampiezza della popolazione in una circostanza iniziale che si assume corrispondere al valore $x = 0$.
Questa espressione consente di prevedere l'ampiezza della popolazione in un qualsiasi istante successivo o di conoscere l'istante in cui la popolazione avrà raggiunta una data ampiezza.

Questo esempio elementare riguarda quindi un modello di processi concreti molto semplificati (trascura la possibilità di stimoli, di inibizioni e di cambiamenti delle condizioni ambientali), ma che mostra chiaramente una sua valenza predittiva.

Un altro esempio riguarda il comportamento di un sistema elastico (*Calculus di Lynn Loomis* p. 264) idealizzato e delle sue vibrazioni. A partire dalla legge di Hooke per la forza F esercitata da una molla elastica avente lunghezza $x = x(t)$, cioè dalla equazione $F = -h\,x$, e dalla legge di Newton che lega tale forza con l'accelerazione $F = m\,\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, si ottiene l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h}{m}\,x = 0 .$$

Si vede facilmente che questa ha soluzioni della forma

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \quad \text{con} \quad \omega := \sqrt{\frac{h}{m}} .$$

I50a.07 Si abbia una entità esprimibile come variabile nell'insieme dei numeri reali che dipenda da una variabile reale x e da un certo numero $k \in \mathbb{P}$ di parametri reali $\mathtt{C}_1$, $\mathtt{C}_2$, ... , $\mathtt{C}_k$. Questa variabile si assume possa essere espressa da una funzione della forma

(1) $$y = f(x, \mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2, ..., \mathtt{C}_n)$$

con la $f(x)$ continua e derivabile n volte rispetto alla x. Dalle sue derivate dalla prima alla n-esima si ottiene il sistema di uguaglianze

(2) $$\begin{cases} y' = \mathrm{D}_x f(x, \mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2, ..., \mathtt{C}_n) \\ y^{(2)} = \mathrm{D}_x{}^2 f(x, \mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2, ..., \mathtt{C}_n) \\ \quad\cdots\cdots \\ y^{(n)} = \mathrm{D}_x{}^n f(x, \mathtt{C}_1, \mathtt{C}_2, ..., \mathtt{C}_n) \end{cases} .$$

Si può cercare di ottenere dalle (1) e dalle (2) delle espressioni per i parametri $\mathtt{C}_i$ in funzione di y, y', $y^{(2)}$, ... , $y^{(n)}$; se questo si può fare, eventualmente introducendo condizioni e distinguendo casi in alternativa, attraverso la sostituzione di tali espressioni in qualcuna delle equazioni iniziali si giunge a una equazione della forma

$$\Phi\left(x, y, y', y^{(2)}, ..., y^{(n)}\right) = 0 ,$$

cioè a una equazione differenziale ordinaria di ordine n. Questa viene detta **equazione differenziale ottenuta per eliminazione dei parametri**.

I50a.08 I procedimenti per la soluzione delle equazioni differenziali ordinarie trovano la loro giustificazione rigorosa in un importante teorema di esistenza e unicità che qui ci limitiamo a segnalare.

Preliminarmente occorre segnalare che sono strettamente collegati alle equazioni differenziali ordinarie i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, sistemi di equazioni concernenti una sequenza $\langle y_1, y_2, ..., y_k\rangle$ di funzioni di una sola variabile indipendente x e di almeno una delle derivate delle suddette funzioni. Li vedremo in seguito.

I50a.09 Si dice **equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale** ogni equazione del detto ordine sse presenta la forma

(1) $$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$$

o una forma poco diversa da questa.

Si dimostra che se nell'intorno I di un punto $P = \langle x_0, y_{0,0}, y_{1,0}, y_{2,0}, ..., y_{n,0} \rangle$ determinato da disuguaglianze della forma $|x - x_0| \le a$ e $|y_i - y_{i,0}| \le b$ per $i = 0, 1, 2, ..., n$ per dati a e b la funzione F è continua e tale che esista $L \in \mathbb{R}_+$ per il quale sia

(2) $$\forall \langle x, y_0, y_1, ..., y_n \rangle \ , \ \langle x, \overline{y}_0, \overline{y}_1, ..., \overline{y}_n \rangle \in I \ : \quad \left| F(x, y_0, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) - F\left(x, \overline{y}_0, \overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_{n-1}\right) \right| \ < \ L \sum_{i=0}^{n-1} |y_i - \overline{y}_i| \ ,$$

allora esiste un intorno di x_0 in $\mathbb{R}$ nel quale esiste una e una sola funzione $y = Y(x)$ che soddisfa l'equazione (1) e per la quale valgono le condizioni iniziali

(3) $$Y(x_0) = Y_{0,0} \ , \ Y'(x_0) = Y_{1,0} \ , \ Y''(x_0) = Y_{2,0} \ , \ ... \ , \ Y^{(n-1)}(x_0) = Y_{0,n-1} \ .$$

In altre parole esiste una e una sola soluzione dell'equazione differenziale in corrispondenza di una determinata scelta delle costanti iniziali la quale si può effettuare con una certa arbitrarietà.

I50 b. soluzioni mediante serie di potenze e procedimenti grafici

I50b.01 Il teorema segnalato in a09 si può giustificare ricorrendo allo sviluppo di Taylor.
Ammettiamo che la a09(1) possegga una soluzione che soddisfa le condizioni iniziali a09(3) e che sia sviluppabile in serie di Taylor. Dall'equazione in forma normale si ottiene

$$Y_{n,0} \;:=\; Y^{(n)}(x_0) \;=\; F\left(x_0, Y_{0,0}, Y_{1,0}, y_{2,0}, ..., Y_{n-1,0}\right) \;,$$

cioè il valore assunto in corrispondenza dell'ascissa x_0.

Per l'ipotesi di sviluppabilità in serie di Taylor della soluzione $Y(x)$, l'equazione a05(1) può essere derivata quante volte si vuole ottenendo equazioni della forma

(1) $$y^{(n+1)} \;=\; F_i\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3, ... \;;$$

queste permettono di calcolare i valori assunti dalle successive derivate per $x = x_0$:

$$Y_{n+i,0} \;:=\; Y^{(n+i)}(x_0) \;=\; F_i\left(x_0, Y_{0,0}, Y_{1,0}, y_{2,0}, ..., Y_{n-1,0}\right) \;.$$

Dunque in un intorno di x_0 si può disporre dello sviluppo in serie di Taylor

$$y(x_0 + \Delta x) \;=\; Y(x_0) + \frac{\Delta x}{1!}Y'(x_0) + \frac{\Delta x^2}{2!}Y''(x_0) + \cdots + \frac{\Delta x^n}{n!}Y^{(n)}(x_0) + \cdots \;.$$

Quindi le condizioni iniziali sono in grado di determinare univocamente una soluzione, se essa esiste. Resta tuttavia da dimostrare che la serie individuata a partire dal problema ai valori iniziali sia convergente e che la sua somma soddisfi l'equazione.

I50b.02 La precedente giustificazione induce a individuare serie di potenze che consentano di esprimere le soluzioni di equazioni specifiche o anche le soluzioni di famiglie di equazioni; in effetti, come vedremo, questo metodo risolutivo conduce a una ampia gamma di risultati riguardanti specifiche funzioni speciali e ampie famiglie di tali funzioni.

Vediamo ora alcune equazioni particolari e significative cominciando dalla seguente equazione del second'ordine:

$$(1 - x^2)\, y''(x) - 2\, xy'(x) + a(a+1)\, y(x) \;=\; 0 \quad \text{per} \quad a \in \mathbb{R}_+ \;.$$

Si cerca una soluzione della forma $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, x^k$ che soddisfi alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Per i coefficienti si trova: $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ e

$$c_{k+2} \;=\; -\frac{(a-k)(a+k+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$y(x) \;=\; 1 - \frac{a(a+1)}{2!}x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{4!}x^4 - \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)}{6!}x^6 + \cdots \;.$$

Dato che $\lim_{k \to +\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+2}}\right| \;=\; \lim_{k \to +\infty}\left|\frac{(k+1)(k+2)}{(a-4)(a+k+1)}\right| \;=\; 1$, la serie precedente ha raggio di convergenza uguale ad 1 e si può concludere che si è trovata la soluzione.

I50b.03 Similmente si cerchi di esprimere con una serie di potenze della forma $y(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n$ la soluzione dell'equazione

$$x^2\, y' + (x-1)\, y + 1 \;=\; 0$$

che soddisfi la condizione iniziale $y(0) = 1$.

Questa condizione implica $c_0 = 1$; va poi considerato lo sviluppo $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, c_n\, x^{n-1}$ e sostituendo questo e lo sviluppo della $y(x)$ nell'equazione si ottiene l'equazione

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n\, c_n\, x^{n-1} + (x-1) \sum_{n=0}^{+\infty} n\, c_n\, x^n + 1 = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)\, c_n - c_{n+1}] x^{n+1} = 0 \ .$$

Di conseguenza si ha il sistema iterativo

$$c_0 = 1 \qquad , \qquad \forall n = 0, 1, 2, ... \ : \ c_{n+1} = (n+1) c_n \ ,$$

dal quale si ottengono $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2!$, $c_3 = 3!$, ..., $c_{n+1} = (n+1)!$ Si trova dunque lo sviluppo in serie

$$y(x) = 1 + x + 2!x^2 + \cdots + n!x^n + \cdots$$

Questa serie tuttavia non converge per alcun x diverso da 0.

I50b.04 Per la comprensione dei meccanismi che consentono di risolvere le equazioni differenziali può essere utile considerare anche procedimenti per la determinazione approssimata delle soluzioni di equazioni nel campo reale che si possano presentare mediante costruzioni grafiche.

Tra i più semplici di questi procedimenti si può collocare quello che riguarda la costruzione della soluzione dell'equazione differenziale $y' = f(x)$ passante per il punto $\langle x_0, y_0 \rangle$.

Questa soluzione può essere fornita dall'espressione $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} du\ f(u)$ e quindi come procedimento approssimato si può considerare uno dei procedimenti per la valutazione approssimata di un integrale definito.

I50b.05 Più generale e interessante è il procedimento per il calcolo approssimato di una soluzione del problema caratterizzato dalla equazione e dalla condizione iniziale sui reali che seguono

$$(1) \qquad y' = f(x, y) \qquad , \qquad y(x_0) = y_0 \ .$$

In termini grafici si tratta di tracciare una curva passante per il punto $\langle x_0, y_0 \rangle$ e con una pendenza espressa dalla $f(x, y)$.
Qui vogliamo soltanto illustrare in modo intuitivo come si può procedere ad individuare una soluzione approssimata della (1) e cominciamo limitandoci a una soluzione $y(x)$ in un intervallo destro dell'ascissa iniziale determinato dalla sua ampiezza $\delta \in \mathbb{R}_+$, cioè per $x \in [x_0, x_0 + \delta)$.
Una costruzione per un intervallo sinistro si ricava da quella che segue con prevedibili modifiche.
Affronteremo la costruzione facendo l'ipotesi che $f(x, y)$ sia una funzione continua e limitata nella striscia verticale del piano relativa ai suddetti valori di x e a valori qualsiasi per la y, insieme che denotiamo con $\mathcal{S}_{x_0,\delta}$.

I50b.06 Consideriamo una decomposizione dell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta]$ $\Delta = \langle x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_m = x_0 + \delta \rangle$. Ad essa si associa la poligonale $\Pi_\Delta := \mathsf{Plgnl}\langle P_0, P_1, P_2, ..., P_{m-1}, P_m \rangle$, dove $P_0 := \langle x_0, y_0 \rangle$, $P_1 := \langle x_1, y_1 \rangle$ con $y_1 := y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)$, ... , $P_{i+1} := \langle x_{i+1}, y_{i+1} \rangle$ con $y_{i+1} := y_i + (x_{i+1} - x_i)\, f(x_i, y_i)$, ...
In parole povere questa poligonale è costituita dagli m segmenti $\overline{P_1 P_{i+1}}$ i cui coefficienti angolari sono dati dal valore di $y'(x) = f(x, y)$ calcolato nel punto iniziale P_i. La sua costruzione effettiva procedendo sui successivi vertici P_i non presenta alcuna difficoltà di principio, la sua esecuzione manuale potrebbe essere molto onerosa, ma può effettuarsi ragionevolmente con il computer.

Per questa costruzione, come per altre simili, in genere è conveniente servirsi solo di decomposizioni uniformi. Per ogni intero positivo n denotiamo con Δ_n la decomposizione uniforme in n parti di $[x_0, x_0 + \delta]$.
Quando la massima delle ampiezze degli intervalli della decomposizione Δ è molto piccola si può pensare che la poligonale Plgnl_Δ costituisca una buona approssimazione della curva che raffigura la soluzione dell'equazione in esame.

Si possono considerare anche successioni di decomposizioni con ampiezze massime decrescenti, per esempio la successione delle decomposizioni uniformi in 1, 2, 4, ..., 2^n, ... sottointervalli. Si vengono quindi a determinare successioni di poligonali aventi lati via via più piccoli le quali, ragionevolmente, costituiscono approssimazioni progressivamente migliori della soluzione.

I50b.07 Consideriamo quindi la successione delle poligonali $\mathsf{Plgnl}(\Delta_n)$ che corrispondono alle decomposizioni uniformi in n parti dell'intervallo. L'n-esima di tali poligonali, $\mathsf{Plgnl}(\Delta_n)$, come funzione continua del genere $\{[x_0, x_0 + \delta] \longrightarrow \mathbb{R}\}$ la denotiamo con $\pi_n(x)$.

Nella ipotesi che la $f(x, y)$ sia continua e limitata nella striscia $\mathcal{S}$ si dimostra che dalla successione $\langle n \in \mathbb{P} :| \pi_n(x) \rangle$ si può estrarre una sottosuccessione $\langle n \in \mathbb{P} :| \pi_{\sigma_n}(x) \rangle$ $(\sigma_i < \sigma_{i+1})$ che converge uniformemente verso una funzione $\Pi(x)$ tale che

$$\Pi'(x) \;=\; f(x, \Pi(x)) \qquad \text{e} \qquad \Pi(x_0) \;=\; y_0 \; .$$

Questa funzione limite è quindi la soluzione cercata per la b05(1).

Dallo sviluppo precedente risulta evidente che le soluzioni dell'equazione differenziale di primo grado b05(1) sono dipendenti da una costante arbitraria.

Sul procedimento precedente si basa il cosiddetto **metodo di Cauchy-Lipschitz** per la dimostrazione dei teoremi di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie.

I50 c. equazioni ai differenziali esatti e caso delle variabili separate

I50c.01 Consideriamo l'equazione del primo ordine in forma normale

(1) $$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$$

e vediamo come si può cercare di procedere alla sua risoluzione in un intorno di un punto-RR $P_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$ del dominio della $f(x,y)$ servendosi di due opportune funzioni $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ continue in un rettangolo R contenente P_0 che in R consentano di scrivere $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$.
Con queste funzioni si ha l'equazione differenziale

(2) $$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \,;$$

il suo primo membro si può considerare il differenziale totale di una funzione $\mathcal{U}(x,y)$ sse si trova un altro rettangolo R_1 contenuto in R nel quale le derivate parziali $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sono continue e soddisfano l'uguaglianza

(3) $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \,.$$

Se vale questa uguaglianza per la $\mathcal{U}$ si hanno le due espressioni

$$\mathcal{U}(x,y) = \int_a^x \mathrm{d}v\ P(v,y) + \int_b^y \mathrm{d}w\ Q(a,w) = \int_b^y \mathrm{d}w\ Q(x,w) + \int_a^x \mathrm{d}v\ P(x,b)$$

e l'equazione (2) si può riscrivere come $\mathrm{d}\,\mathcal{U}(x,y) = 0$, ossia come $\mathcal{U}(x,y) = \mathtt{C}$ con $\mathtt{C}$ costante arbitraria.
Quindi per l'integrale generale si ottiene l'espressione

$$\int_a^x \mathrm{d}v\ P(v,y) + \int_b^y \mathrm{d}w\ Q(a,w) = \mathtt{C} \,,$$

oppure l'espressione

$$\int_b^y \mathrm{d}w\ Q(v,w) + \int_a^x \mathrm{d}v\ P(v,b) = \mathtt{C} \,.$$

I50c.02 Un caso di differenziale esatto particolarmente semplice tra quelli riducibili alla I49c01(2) si ha quando la funzione P non dipende dalla variabile y e la Q non dipende dalla x: in effetti in questo caso vale l'uguaglianza $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$. Si ha quindi l'equazione differenziale

(1) $$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0 \,.$$

In questo caso si dice che si sono ottenute le **variabili separate** e l'integrale generale viene fornito dalla espressione

(2) $$\int^x \mathrm{d}v\ P(v) + \int^y \mathrm{d}w\ Q(w) = \mathtt{C} \,.$$

I50c.03 Alla situazione precedente si riducono le equazioni della forma

(1) $$X(x)\,Y(y)\,\mathrm{d}x + X_1(x)\,Y_1(y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{X(x)}{X_1(x)}\,\mathrm{d}x + \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,\mathrm{d}y = 0 \,.$$

Quindi per l'integrale generale si ottiene l'espressione

(2) $$\int^x \mathrm{d}v\ \frac{X(v)}{X_1(v)} + \int^y \mathrm{d}w\ \frac{Y(w)}{Y_1(w)} \ = \ \mathtt{C}\ .$$

Va osservato che se $\overline{y}$ è un valore del dominio della $Y(y)$ tale che $Y(\overline{y}) = 0$, allora una soluzione della (1) è la retta $y = \overline{y}$. Similmente se $\overline{x}$ è un valore del dominio della $X_1(x)$ tale che $X_1(\overline{x}) = 0$, allora una soluzione della (1) è la retta $x = \overline{x}$.

I50c.04 Consideriamo l'equazione $3\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{y^2} \ = \ 0$.

Essa implica $3\,y^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \ = \ -x$, ovvero $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,y^3 \ = \ -x$ e quindi $y^3 \ = \ \int^x \mathrm{d}u\ (-u)$, $y^3 \ = \ \mathtt{C} - \frac{x^2}{2}$ e infine

$y \ = \ \left(-\frac{x^2}{2} + \mathtt{C}\right)^{1/3}$.

Per arrivare alla soluzione risultano più comode le notazioni differenziali che consentono la seguente catena di uguaglianze:

$3\,y^2\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}x = 0 \quad , \quad \int^x \mathrm{d}u\,3\,y^2 + \int^x \mathrm{d}u\,u \ = \ \mathtt{C} \quad , \quad y^3 + \frac{x^2}{2} \ = \ \mathtt{C}$.

Come esempio delle conclusioni di I49c02 consideriamo l'equazione

$$\frac{\tan\,y}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + \frac{\tan\,x}{\cos^2 y}\,\mathrm{d}y \ = \ 0\ .$$

La separazione delle variabili comporta l'equazione

$$\frac{1}{\cos^2 x}\,\frac{1}{\tan\,x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\cos^2 y}\,\frac{1}{\tan\,y}\,\mathrm{d}y \ = \ 0$$

avente come soluzione generale

$$\ln\tan\,x + \ln\tan\,y \ = \ \mathtt{C} \qquad \text{ovvero} \qquad \tan\,x\,\tan\,y \ = \ \mathtt{C}\ .$$

I50c.05 Eserc. Dimostrare i seguenti enunciati

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{y} \ = \ 0 \implies y^2 + x^2 \ = \ \mathtt{C}$.

(b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x\,y \ = \ 0 \implies y \ = \ \mathtt{C}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

I50 d. equazioni a coefficienti omogenei

I50d.01 L'equazione della forma $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; 0$ si dice **equazione differenziale ordinaria a coefficienti omogenei** sse per un certo intero m le funzioni $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sono funzioni omogenee di grado m nelle due variabili x e y.
Una tale equazione si può trasformare in una equazione a variabili separate: infatti

$$P(x,y) \;=\; P\left(1x, \frac{y}{x}x\right) \;=\; x^m\,P\left(1, \frac{y}{x}\right) \qquad \text{e} \qquad Q(x,y) \;=\; Q\left(1x, \frac{y}{x}x\right) \;=\; x^m\,Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \;.$$

L'equazione comporta

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}x + Q\left(1, \frac{y}{x}\right)\,\mathrm{d}y \;=\; 0$$

e introdotta la variabile $t := \dfrac{y}{x}$, per la quale $\mathrm{d}y = x\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}x$, si giunge alle equazioni

(1) $$P\,(1,t)\,\mathrm{d}x + Q\,(1,t)\,\mathrm{d}y \;=\; 0 \;,$$

(2) $$[P(1,t) + t\,Q(1,t)]\,\mathrm{d}x + x\,Q(1,t)\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \;.$$

Per valori di t per i quali si ha $P(1,t) + tQ(1,t) \neq 0$, si ottiene

(3) $$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{Q(1,t)}{P(1,t) + tQ(1,t)}\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \;,$$

equazione che ha la soluzione generale

$$\ln x + \int^t \mathrm{d}\,\tau\,\frac{Q(1,\tau)}{P(1,\tau) + \tau\,Q(1,\tau)} \;;$$

$$x \;=\; \mathtt{C}\cdot\mathrm{e}^{-\int^t \mathrm{d}\,\tau\,\frac{Q(1,\tau)}{P(1,\tau)+\tau Q(1,\tau)}} \qquad \text{e} \qquad y \;=\; t\,x \;=\; \mathtt{C}\,t\,\mathrm{e}^{-\int^t \mathrm{d}\,\tau\,\frac{Q(1,\tau)}{P(1,\tau)+\overline{t}Q(1,\overline{t})}} \;.$$

Se invece interessa un determinato $\overline{t}$ si prende in considerazione la $P(1,\overline{t}) + \overline{t}\,Q(1,\overline{t}) \;=\; 0$, dalla (2) si ottiene la $x\,Q(1,\overline{t})\,\mathrm{d}t \;=\; 0$ per ogni x; quindi per ogni x si ha $\mathrm{d}t = 0$, cioè $t = \overline{t}$ costante.
Di conseguenza le rette $y = \overline{t}\,x$ sono soluzioni dell'equazione proposta.

I50d.02 Come primo esempio esaminiamo l'equazione

(1) $$(x+y)\,\mathrm{d}x + (y-x)\,\mathrm{d}y \;=\; 0 \;.$$

Per essa $P(1+t) = 1+t$, $Q(1+t) \;=\; t-1$, $P(1,t) + tQ(1+t) \;=\; 1+t^2$ e

$$\begin{aligned}\int^t \mathrm{d}\,\tau\,\frac{Q(1,\tau)}{P(1,\tau) + \tau\,Q(1\tau)} &= \int^t \mathrm{d}\,\tau\,\frac{\tau-1}{1+\tau^2} \;=\; \frac{1}{2}\int^t \frac{\mathrm{d}(1+\tau^2)}{1+\tau^2} - \int^t \frac{\mathrm{d}\,\tau}{1+\tau^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \arctan t + \mathtt{C}\end{aligned} \;.$$

.
Quindi come caso particolare della d01(4) abbiamo l'uguaglianza

$$\ln x + \ln\sqrt{1+t^2} - \arctan t + \mathtt{C} = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \ln\left[x\sqrt{1+t^2}\right] + \mathtt{C} \;=\; \arctan t$$

e quindi, dato che $y = t\,x$,

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathtt{C} \;=\; \arctan\frac{y}{x} \;.$$

L'equazione $P(1,t) + tQ(1+t) = 0$, cioè la $1+t^2 = 0$ non ha radici reali.

I50d.03 Esaminiamo l'equazione

$$(1) \qquad (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x \,-2\,x\,y\,\mathrm{d}y \;=\; 0\;.$$

Ora $P(1,t)=1+t^2 \quad , \quad Q(1,t)=-2t \quad , \quad P(1,t)+t\,Q(1,t)=1-t^2$ e la (1) implica $\dfrac{\mathrm{d}x}{x}-\dfrac{2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; 0$; da questa $\ln x+\ln(t^2-1)=\mathtt{C}'$, ovvero $x(t^2-1)=\mathtt{C}$, cioè $t^2=\dfrac{\mathtt{C}+x}{x}$ e in conclusione

$$(2) \qquad y=\pm\sqrt{x(\mathtt{C}+x)}\;.$$

L'equazione $P(1,t)+tQ(1+t) \;=\; 0$, cioè $1-t^2 \;=\; 0$ ha le radici per $t=\pm1$; si hanno quindi le due soluzioni $y=x$ e $y=-x$; queste sono comprese nella soluzione generale (2) in corrispondenza di $\mathtt{C}=0$.

I50d.04 Esaminiamo l'equazione

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; R\left(\frac{a\,x+b\,y+c}{a_1\,x+b_1\,y+c_1}\right) \qquad \text{con} \qquad a,b,c,a_1,b_1,c_1 \;\text{ costanti}\;.$$

Se $a\,b_1-b\,a_1\neq0$ si effettua il cambiamento delle variabili che porta a

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; R\left(\frac{a\,X+b\,Y}{a_1\,X+b_1\,Y}\right)$$

Questa è equazione a coefficienti in X e Y omogenei di grado 0.

Consideriamo il caso in cui $ab_1=ba_1$ e $b_1=0$, distinguendo i sottocasi $b=0$ e $a_1=0$.
Nel sottocaso $b_1=b=0$ la funzione R dipende dalla sola x e la scriviamo $S(x)$.
Nel caso $b_1=a_1=0$, essendo $c_1\neq0$ e $b\neq0$, abbiamo

$$R\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \;=\; R\left(\frac{a}{c_1}x+\frac{b}{c_1}y+\frac{c}{c_1}\right)\;.$$

Si può quindi assumere come funzione incognita $u:=\dfrac{a}{c_1}x+\dfrac{b}{c_1}y$ per la quale si ha l'equazione a variabili separate

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{a}{c_1}+\frac{b}{c_1}R\left(u+\frac{c}{c_1}\right)\;.$$

Veniamo al caso in cui $a\,b_1 \;=\; b\,a_1$ e $b_1\neq0$; può essere $a_1=0$ oppure $a_1\neq0$.
Nel caso $a_1=0$ anche $a=0$ e la funzione R dipende dalla sola y e si può scrivere $T(y)$.
Nel caso $a_1\neq0$ si ha $\dfrac{a}{a_1} \;=\; \dfrac{b}{b_1}=:\dfrac{1}{k}$; quindi $a_1\,x+b_1\,y \;=\; k(a\,x+b\,y)$. Si può allora assumere come funzione incognita $u \;:=\; a\,x+b\,y$ per la quale -$u'=a+b\,y'=a+b\,R\left(\dfrac{u+c}{k\,u+c_1}\right)$; di conseguenza la u deve soddisfare l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \;=\; a+b\,R\left(\frac{u+c}{k\,u+c}\right) \qquad \text{ovvero} \qquad \mathrm{d}x \;=\; \frac{\mathrm{d}u}{a+b\,R\left(\frac{u+c}{k\,u+c_1}\right)}\;,$$

equazione a variabili separate.

I50d.05 Per affrontare alcune versioni dell'equazione d04(1) può risultare vantaggioso servirsi delle variabili polari e di fare riferimneto alle funzioni trigonometriche.
Introduciamo quindi

$$r:=\sqrt{X^2+Y^2} \;\;,\;\; \phi:=\mathrm{atan2}\left(\frac{Y}{X}\right) \qquad \text{in modo che} \qquad X=r\,\cos\phi \;\;,\;\; Y=r\,\sin\phi\;,$$

e che l'equazione diventi

$$\frac{r\,\cos\,\phi\,\mathrm{d}\phi\;+\sin\,\phi\,dr}{-r\,\sin\,\phi\,\mathrm{d}\phi\;+\cos\,\phi\,dr}\;=\;A\left(\frac{a+b\,\tan\,\phi}{a_1+b_1\,\tan\,\phi}\right)\;.$$

Posto $S\,(\tan\phi)\;:=\;R\left(\frac{a+b\,\tan\,\phi}{a_1+b_1\,\tan\,\phi}\right)$, si ottiene

$$\frac{r\,\cos\,\phi\,\mathrm{d}\phi\;+\sin\,\phi\,\mathrm{d}r}{-r\,\sin\,\phi\,\mathrm{d}\phi\;+\cos\,\phi\,\mathrm{d}r}\;=\;S\,(\tan\,\phi)$$

e quindi si giunge all'equazione a variabili separabili

$$r\,[\cos\,\phi+\sin\,\phi\,S(\tan\,\phi)]\;\mathrm{d}\phi\;+[\sin\,\phi-\cos\,\phi\,S(\tan\,\phi)]\;\mathrm{d}r\;\;=\;0\;.$$

I50 e. equazioni differenziali ordinarie lineari

I50e.01 Una ODE si dice **equazione differenziale ordinaria lineare** sse si presenta sotto la forma

$$P_n(x)\,y^{(n)}(x) + \cdots + P_2(x)\,y''(x) + P_1(x)\,y(x) + P_0(x)\,y(x) \;=\; Q(x) \;\;,$$

ove $P_n(x)$, ..., $P_0(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni assegnate. Se la funzione a secondo membro non si riduce a essere nulla si parla di **equazione differenziale ordinaria lineare disomogenea**, in caso contrario di **equazione differenziale ordinaria lineare omogenea**.
Evidentemente a ogni ODE lineare disomogenea corrisponde la ODE lineare omogenea ottenuta annullando la funzione al secondo membro.
In questo paragrafo introduciamo lo studio delle equazioni lineari del primo ordine che consideriamo in quella che chiamiamo forma normale

(1) $$y'(x) + P(x)\,y(x) \;=\; Q(x) \;,$$

dove le funzioni assegnate $P(x)$ e $Q(x)$ sono supposte continue in un opportuno intervallo che verrà considerato dominio per la soluzione.
Si osserva subito che l'equazione omogenea associata alla precedente assume la forma a variabili separate $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} \;=\; -P(x)\,\mathrm{d}x$ e comporta $\ln y \;=\; \displaystyle\int^x \mathrm{d}v\; P(v)$; quindi le sue soluzioni hanno la forma

(2) $$y(x) \;=\; \mathtt{C}\,\mathrm{e}^{-\int^x \mathrm{d}v\; P(v)} \;.$$

I50e.02 Torniamo alla equazione più generale e01(1) e cerchiamo una soluzione della forma $y(x) \;=\; u(x)\,v(x)$ proponendoci di imporre a un fattore una condizione che consista in un'equazione differenziale trattabile e porti per l'altro fattore una seconda nuova equazione trattabile.

$$v(x)\,u'(x) + u(x)\,[v'(x) + P(x)\,v(x)] \;=\; Q(x)$$

Cerchiamo fattori $v(x)$ che soddisfino la $v'(x) + P(x)\,v(x) \;=\; 0$; questa ha come soluzione generale

$$v(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\displaystyle\int^x \mathrm{d}v\;((v)} \;.$$

Per l'altro fattore deve essere $u'(x) \;=\; \dfrac{Q(x)}{v(x)}$ e quindi viene fornito dall'espressione

$$u(x) \;=\; \int^x \mathrm{d}w\; \mathrm{e}^{\displaystyle\int^w \mathrm{d}v\; P(v)}\,Q(w) \;.$$

In conclusione per la soluzione generale della e01(2)

$$y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-\displaystyle\int^x \mathrm{d}v\; P(v)} \left[\int^x \mathrm{d}w\; \mathrm{e}^{\displaystyle\int^w \mathrm{d}v\; P(v)}\,Q(w) + \mathtt{C}\right]$$

I50e.03 La soluzione generale della e01(1) ha la forma

(1) $$y(x) \;=\; \mathtt{C}\,A(x) + B(x) \;,$$

con $A(x)$ e $B(x)$ funzioni determinate e $A(x)$ mai nulla. La linearità della soluzione generale nella costante d'integrazione $\mathtt{C}$ consente di stabilire utili collegamenti tra le soluzioni.

Confrontando tre soluzioni particolari, per le quali scriviamo $y_i(x) \; = \; \mathtt{C}_i \, A(x) + B(x)$ per $i = 1, 2, 3$, si trova

$$\frac{y_1(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_3(x)} \; = \; \frac{\mathtt{C}_1 - \mathtt{C}_2}{\mathtt{C}_1 - \mathtt{C}_3} \; ; \qquad (2)$$

si ha quindi che il rapporto semplice di tre soluzioni è costante, indipendente dalla x. Ne consegue che conoscendo due soluzioni particolari si trova ogni altra soluzione con una costruzione algebrica elementare.

I50e.04 Consideriamo come primo esempio l'equazione $y' + a\, y \; = \; \mathtt{e}^{b\,x}$ con a e b costanti.
Se $b \neq -a$, cioè se $a + b \neq 0$, per l'espressione della soluzione generale si trova

$$\int^x \mathrm{d}v \; P(v) \; = \; a\, x \quad , \quad \int^x \mathrm{d}w \; \mathtt{e}^{w\, \mathrm{d}v \; P(v)} \, Q(w) \; = \; \int^x \mathrm{d}w \; \mathtt{e}^{(a+b)w} \; = \; \frac{\mathtt{e}^{a+b}}{a+b} \; ;$$

di conseguenza

$$y(x) \; = \; \mathtt{e}^{-a\,x} \left(\frac{\mathtt{e}^{(a+b)x}}{a+b} + \mathtt{C} \right) \; .$$

Se più semplicemente $b = -a$, per l'equazione $y' + a\, y \; = \; \mathtt{e}^{-a\,x}$ abbiamo

$$\int^x \mathrm{d}v \; P(v) \; = \; a\, x \quad , \quad \int^x \mathrm{d}w \; \mathtt{e}^{\int^w \mathrm{d}v \; P(v)} \, Q(w) \; = \; \int^x \mathrm{d}w \; = \; x \quad , \quad y(x) \; = \; \mathtt{e}^{-a\,x} \, (x + \mathtt{C}) \; .$$

I50e.05 Esplicitiamo la soluzione dell'equazione

$$y - y \, \cot\, x \; = \; \frac{1}{x} - \cot\, x \, \ln x \; .$$

$$\int^x \mathrm{d}v \; P(v) \; = \; -\int^x \mathrm{d}v \;\; \cot\, v - \ln\, \sin\, x \quad , \quad \mathtt{e}^{-\int^x \mathrm{d}v \; P} \; = \; \sin\, x \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\int^x \mathrm{d}w \; \mathtt{e}^{\int^w \mathrm{d}v \; P} Q \; &= \; \int^x \mathrm{d}w \; \frac{1}{\sin\, w} \left[\frac{1}{w} - \cot\, w \; \ln w \right] \; = \; \int^x \frac{\mathrm{d}w}{w \, \sin\, w} \int^x \mathrm{d}w \, \frac{\cot\, w}{\sin\, w} \, \ln w \\
&= \; \frac{\ln x}{\sin\, x} + \int^x \mathrm{d}w \; \frac{\ln w}{\sin^2\, w} \, \cos\, w - \int^x \mathrm{d}w \; \ln w \; \sin\, w \; \cos\, w \; = \; \frac{\ln x}{\sin\, x}
\end{aligned} \; .$$

In conclusione si ottiene

$$y \; = \; \left(\frac{\ln x}{\sin\, x} + \mathtt{C} \right) \sin\, x \; = \; \mathtt{C}_1 \; \sin\, x + \ln x \; .$$

I50 f. equazioni di Bernoulli e di Riccati

I50f.01 Jacob Bernoulli ha studiato l'equazione

$$(1) \qquad y'(x) + P(x)\,y(x) \;=\; Q(x)\,y^m \qquad \text{con} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}\ .$$

Introducendo come nuova incognita $z(x) := y(x)^{m-1}$, essa si riduce a una equazione lineare:

$$z'(x) + (1-m)\,P(x) \;=\; (1-m)\,Q(x)\ .$$

Quindi, grazie alla espressione e02(2) si ottiene

$$(2) \qquad \begin{aligned} y(x) \;&=\; z(x)^{\frac{1}{1-m}} \\ &=\; \left[\mathrm{e}^{-(1-m)\int^x \mathrm{d}v\ P(v)} \left((1-m) \int^x \mathrm{d}w\ \mathrm{e}^{(1-m)\int^x \mathrm{d}v\ P(v)}\, Q(w) + \mathtt{C} \right) \right]^{\frac{1}{1-m}}\ . \end{aligned}$$

I50f.02 Per esempio per l'equazione $y' - \dfrac{y}{x} \;=\; y^2\,x\,\sin x$ si ha

$$m = 2 \quad , \quad P(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad Q(x) = x\,\sin x \quad , \quad -(1-m)\int^x \mathrm{d}v\ P(v) \;=\; \int^x \frac{\mathrm{d}v}{v} \;=\; \ln x \quad ,$$

$$\int^x \mathrm{d}w\ \mathrm{e}^{(1-m)\int^w \mathrm{d}v\ P(v)}\, Q(w) \;=\; \int^x \mathrm{d}w\ \frac{w\,\sin w}{w} \;=\; -\cos x$$

e in conclusione $y(x) \;=\; \left[\dfrac{1}{x}\,(-(-\cos x) + \mathtt{C}) \right]^{-1} \;=\; \dfrac{1}{x(\cos x + \mathtt{C})}$.

I50f.03 Jacopo Francesco Riccati ha studiato l'equazione

$$(1) \qquad y'(x) + L(x)\,y^2(x) + M(x)\,y(x) + N(x) \;=\; 0\ ,$$

con $L(x)$, $M(x)$ e $N(x)$ funzioni assegnate definite e continue in un opportuno intervallo reale nel quale si cercano anche le soluzioni.

In generale questa equazione non si può risolvere mediante quadrature, ma se si conosce un suo integrale particolare, che scriviamo $y_0(x)$, diventa possibile ridursi alle quadrature.

Supposto dunque di conoscere una $y_0(x)$ tale che

$${y_0}'(x) + L(x)\,{y_0}^2(x) + M(x)\,y_0(x) + N(x) \;=\; 0\ ,$$

per la nuova incognita $t(x) := y(x) - y_0(x)$, mediante sottrazione si ottiene

$$t'(x) + L(x)\,t(x)[t(x) + 2\,y_0(x)] + M(x)\,t(x) \;=\; 0\ ,$$

ovvero l'equazione del tipo di Bernoulli

$$(2) \qquad t'(x) + \big(2\,L(x)\,y_0 + M(x)\big)\,t(x) \;=\; -L(x)\,t(x)^2\ .$$

Introduciamo come ulteriore nuova incognita la funzione $z(x) := \dfrac{1}{t(x)} \;=\; \dfrac{1}{y(x) - y_0(x)}$; per essa la (2) implica l'equazione lineare

$$(3) \qquad z'(x) - \Big(2\,L(x)\,y_0(x) + M(x)\Big)\,z(x) \;=\; L(x)\ ,$$

la cui soluzione, grazie a e02, è

$$(4) \qquad z(x) \;:=\; \mathtt{e}^{\displaystyle\int^{x} \mathrm{d}v\ (zLy_0+M)} \left[\int^{x} \mathrm{d}w\ \mathtt{e}^{\displaystyle -\int^{w} \mathrm{d}v\ (z\,L\,y_0+M)} L+\mathtt{C} \right] .$$

In conclusione per la soluzione generale della (1) otteniamo

$$y(x) \;=\; y_0(x) + \frac{\mathtt{e}^{-\int^{x} \mathrm{d}v\ (zLy_0+M)}}{\int^{x} \mathrm{d}w\ \mathtt{e}^{\displaystyle -\int^{w} \mathrm{d}v\ (zLy_0+M)} L+\mathtt{C}} .$$

I50f.04 Se si conoscono due soluzioni particolari della f03(3), $z_1(x)$ e $z_2(x)$, dato che

$$z(x) \;=\; \frac{1}{y(x)-y_0(x)} \quad , \quad z+1(x) \;=\; \frac{1}{y_1(x)-y_0(x)} \quad , \quad z_2(x) \;=\; \frac{1}{y_2(x)-y_0(x)} ,$$

dalla costanza del rapporto semplice tra z, z_1 e z_2 [e03(2)] si deduce

$$\frac{z-z_1}{z_1-z_2} \;=\; \frac{\mathtt{C}-\mathtt{C}_1}{\mathtt{C}_1-\mathtt{C}_2} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{y_1-y_0}{y_2-y_1} : \frac{y-y_0}{y-y_1} \;=\; \mathtt{C}_3 ,$$

cioè si ottiene la costanza del birapporto, $\big({}_{xr}y_0, y_1, y_2, y\big)$, di ogni quaterna di integrali particolari dell'equazione di Riccati.

Dunque se di un'equazione di Riccati sono noti tre integrali particolari si ottiene la soluzione generale dalla soluzione di una semplice equazione algebrica di primo grado:

$$y \;=\; \frac{\mathtt{C}_4\, y_0(y_2-y_1) - y_1(y_2-y_0)}{\mathtt{C}_4\,(y_2-y_1)-(y_2-y_0)} .$$

I50 g. equazioni del primo ordine di particolari forme nonnormali

I50g.01

Una generica equazione del primo ordine della forma $F(x, y, y') = 0$ può risultare equivalente a più di una equazione in forma normale; in tal caso si dice **soluzione generale dell'equazione differenziale** data una espressione che fornisca tutte le soluzioni.

Se l'equazione data per un certo insieme di valori per $\langle x, y\rangle$ è equivalente a un numero finito di equazioni

$$y' = F_1(x, y) \quad , \quad y' = F_2(x, y) \ , \ \ldots \ , \ y' = F_k(x, y)$$

e queste portano, risp., alle espressioni delle soluzioni generali della forma

$$f_1(x, y, \mathtt{C}_1) = 0 \quad , \quad f_2(x, y, \mathtt{C}_2) = 0 \ , \ \ldots \ , \ f_k(x, y, \mathtt{C}_k) = 0 \ ,$$

allora la soluzione generale è espressa da

$$f_1(x, y, \mathtt{C}_1) \cdot f_2(x, y, \mathtt{C}_2) \cdot \ \cdots \ \cdot f_k(x, y, \mathtt{C}_k) = 0 \ .$$

Per esempio l'equazione $y'(x)^2 - a^2 x^2 = 0$ porta alle equazioni in forma normale $y'(x) = \pm a\, x$ e quindi all'integrale generale

$$\left(y - \frac{a}{2} x^2 - \mathtt{C}_1\right) \cdot \left(y + \frac{a}{2} x^2 - \mathtt{C}_2\right) \ .$$

I50g.02 Consideriamo l'equazione

$$f(x, y') \ = \ 0 \tag{1}$$

e due funzioni $g(t)$ e $h(t)$ di un parametro t variabile in un opportuno insieme aperto e connesso I tali che in esso sia $f(g(t), h(t)) = 0$. Se poniamo $x = g(t)$ e $\mathrm{D}_x y = h(t)$ e si assume t come variabile indipendente, dalla (1) segue l'equazione

$$D_t\, y\, \mathrm{d}t \ = \ \mathrm{D}_x\, y\, D_t\, x\, \mathrm{d}t \ = \ h(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t \ . \tag{2}$$

Questa, integrando rispetto a t e ricordando il collegamento con la x, porta a

$$y(t) \ = \ \int^t \mathrm{d}u\ h(u)\, g'(u) + \mathtt{C} \quad , \quad x = g(t) \ , \tag{3}$$

enunciato che concerne una rappresentazione parametrica della soluzione.

Se nell'intervallo I abbiamo $g'(t) \neq 0$, si può ricavare t in funzione di x dalla seconda equazione in (3) e dalla prima si ottiene la soluzione nella forma $y \ = \ Y(x, \mathtt{C})$.

Disponendo di una soluzione particolare, tutte le altre soluzioni si ottengono mediante le traslazioni verticali, ossia le traslazioni nella direzione dell'asse Oy.

I50g.03 Consideriamo come esempio l'equazione $y'^3 - x\, y' + x = 0$. Poniamo $\mathrm{D}_x\, y \ =: \ t$ (assegnandole il ruolo di $h(x)$) e $x = \dfrac{t^3}{t-1}$ con il ruolo di $g(x)$).

Per $t = 1$ si ha $y'(1) = 1$ (ma $y = x + \mathtt{C}$ non esprime soluzioni); si può dunque considerare un intorno di tale valore del parametro. Si ottiene dunque

$$\mathrm{d}y \ = \ t\, \frac{3\, t^2(t-1) - t^3}{(t-1)^2}\, \mathrm{d}t \ = \ \frac{2\, t^4 - 3\, t^3}{(t-1)^2}\, \mathrm{d}t \ = \ \left[2\, t^2 + t - \frac{1}{t-1} - \frac{1}{(t-1)^2}\right] \mathrm{d}t \ .$$

Da qui segue:

$$y \ = \ \frac{2}{3}\, t^3 + \frac{1}{2}\, t^2 - \ln(t-1) + \frac{1}{t-1} + \mathtt{C}$$

e la soluzione dell'equazione in esame è data dalle espressioni parametriche

$$x = \frac{t^3}{t-1} \quad , \quad y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \ln(t-1) + \frac{1}{t-1} + \mathtt{C} \ .$$

I50g.04 Consideriamo, analogamente a quanto sopra, l'equazione

$$(1) \qquad f(y, y') = 0$$

e due funzioni $g(t)$ e $h(t)$ di un parametro t variabile in un opportuno insieme I aperto e connesso del piano Oxy, funzioni tali che in I sia $f(g(t), h(t)) = 0$. Per ogni τ radice dell'equazione $h(t) = 0$ la retta orizzontale $y = g(\tau)$ è una curva soluzione dell'equazione in esame.

Se ci limitiamo a un intervallo J nel quale $h(t) \neq 0$ e si assume t come variabile indipendente, si ha

$$\mathrm{d}x = D_t\, x\, \mathrm{d}t = \mathrm{D}_y\, x\, D_t y\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{D}_x\, y} D_t\, y\, \mathrm{d}t = \frac{g'(t)}{h(t)}\, \mathrm{d}t \ .$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione proposta viene individuata parametricamente dalle espressioni

$$x = \int^t \mathrm{d}u\, \frac{g'(u)}{h(u)} + \mathtt{C} \qquad , \qquad y = g(t) \ .$$

Queste dicono che, disponendo di una soluzione particolare, tutte le altre soluzioni si ottengono mediante le traslazioni orizzontali, ossia traslazioni nella direzione dell'asse Ox; questo fatto è in accordo con la assenza della x nella equazione (1).

I50g.05 Consideriamo per esempio l'equazione

$$(1) \qquad {y'}^3 - y\, y' + y = 0 \ .$$

Come in g03, poniamo $\mathrm{D}_x\, y = t$ (con il ruolo di $h(x)$) e $x = \dfrac{t^3}{t-1}$ con il ruolo di $g(x)$).
Per $t = 1$ si ha $y'(1) = 1$ (ma $y = x + \mathtt{C}$ non esprime soluzioni); si può dunque considerare un intorno di 1 del parametro. Si ottiene

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,t^3 - 3\,t^2}{t(t-1)^2}\, \mathrm{d}t = \frac{2\,t^2 - 3\,t}{t(t-1)^2} = \left[2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t(t-1)^2}\right] \mathrm{d}t \ .$$

La soluzione generale della (1) è quindi espressa dalle espressioni parametriche

$$x = 2\,t + \ln(t-1) + \frac{1}{t-1} + \mathtt{C} \quad , \quad y = \frac{t^3}{t-1} \ .$$

Inoltre si verifica che si ha la soluzione $y = 0$.

I50g.06 Studiamo l'equazione

$$M(x, y, y') = 0 \ ,$$

con M funzione omogenea di grado $m \in \mathbb{P}$ nelle variabili x e y; questo equivale a dire che si ha

$$\forall t \ : \ M(tx, ty, y') = t^m M(x, y, y') \ .$$

Questa implica che in un intervallo nel quale $x \neq 0$ sia

$$F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = \frac{F(x, y, y')}{x^m} \ .$$

Posto $u := \dfrac{y}{x}$, all'equazione si può dare la forma $N(u, y') = 0$.

Se questa si può risolvere rispetto ad y' si ottiene un'equazione della forma

$$\mathrm{D}_x\, y \;=\; \nu(u) \;=\; \nu\left(\frac{y}{x}\right) \;,$$

equazione a variabili separabili trattata in `c01`.

I50g.07 Più in generale consideriamo il caso in cui una soluzione della $N(u,y') \;=\; 0$ si possa ottenere mediante espressioni parametriche in modo da avere

(1) $$u \;=\; \frac{y}{x} =: g(t) \quad , \quad \mathrm{D}_x\, y =: h(t) \;.$$

Differenziando l'espressione $y = x\, g(t)$ si ottiene

(2) $$\mathrm{d}y \;=\; x\, g'(t)\,\mathrm{d}t + g(t)\,\mathrm{d}x$$

e confrontando questa con la $\mathrm{d}y \;=\; \mathrm{D}_x\, y\,\mathrm{d}x \;=\; h(t)\,\mathrm{d}x$ si ottiene la seguente equazione differenziale concernente x e t

(3) $$\Big(g(t) - h(t)\Big)\,\mathrm{d}x + x\, g'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; 0 \;.$$

direttamente trasformabile in una equazione a variabili separate.

Se si conosce una radice τ dell'equazione $g(t) - h(t) \;=\; 0$ si giunge alle $\mathrm{d}t \;=\; 0$, $t \;=\; \tau$ e alla funzione $y \;=\; x\, g(\tau)$ come soluzione dell'equazione proposta.

Se viceversa ci si limita a un intervallo per la t nel quale accade che $g(t) - h(t) \neq 0$, dividendo i membri della (3) per $x\Big(g(t) - h(t)\Big)$ si ottiene l'equazione a variabili separate

(4) $$\frac{\mathrm{d}x}{x} \;=\; \frac{g'(t)}{h(t) - g(t)}\,\mathrm{d}t$$

e la soluzione dell'equazione in esame viene fornita dalle seguenti espressioni parametriche

$$x \;=\; \mathtt{C}\,\exp\left[\int \mathrm{d}t\, \frac{g'(t)}{h(t) - g(t)}\right] \qquad , \qquad y \;=\; \mathtt{C}\, g(t)\,\exp\left[\int \mathrm{d}t\, \frac{g'(t)}{h(t) - g(t)}\right] \;.$$

Si osserva che le curve ottenute sono tutte omotetiche rispetto all'origine, in accordo con la richiesta di omogeneità.

I50g.08 Presentiamo ora un modo di procedere che si basa sopra una derivazione e che consente di risolvere equazioni del primo ordine della forma

(1) $$y = f(x, y')$$

che rendono possibili i passaggi prospettati.
Supponendo conoscibile una espressione per la derivata della y che denotiamo con $p(x) := \mathrm{D}_x\, y$, si dispone di una espressione per l'incognita che scriviamo

(2) $$y \;=\; f(x, p)$$

che può essere derivata per ottenere una uguaglianza alla quale dare il ruolo di equazione differenziale per la stessa $p(x)$:

(3) $$p(x) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \;.$$

Questa è un'equazione alternativa che quando si riesce a risolvere fornisce un'uguaglianza della forma

(4) $$F(x, p, \mathtt{C}) \;=\; 0 \;.$$

Si può allora cercare di eliminare la p dalle equazioni (2) e (4) e giungere alla soluzione generale della equazione (1).

I50g.09 Si dice **equazione di D'Alembert-Lagrange** un'equazione della forma

(1) $$y \;=\; x\,\phi(y') + \psi(y')\ .$$

Ad essa si può praticare il procedimento delineato in g08: ponendo $p(x) := \mathrm{D}_x\, y$, elaborando la $y \;=\; x\,\phi(p) + \psi(p)$ e giungendo alla

(2) $$p \;=\; \phi(p) + \Big(x\,\phi'(p) + \psi'(p)\Big)\,\frac{dp}{\mathrm{d}x}\ .$$

Consideriamo dapprima il caso in cui sia $p - \phi(p) \neq 0$; da sopra si ricava l'equazione lineare

(3) $$\frac{\mathrm{d}x}{dp} - \frac{\phi'(p)}{p-\phi(p)}\,x \;=\; \frac{\psi'(p)}{p-\phi(p)}$$

la cui soluzione generale [e02] è data da

(4) $$x \;=\; \mathtt{e}^{\displaystyle\int^p \mathrm{d}q\,\frac{\phi'(q)}{q-\phi(q)}}\left[\int^p \mathrm{d}r\ \mathtt{e}^{\displaystyle -\int^p \mathrm{d}q\,\frac{\phi'(q)}{q-\phi(q)}}\ \frac{\psi(r)}{r-\phi(r)} + \mathtt{C}\right] \;=:\; T(p,\mathtt{C})\ .$$

Di conseguenza la soluzione dell'equazione (1) viene fornita dalle espressioni parametriche

(5) $$y \;=\; x\,\phi(p) + \psi(p) \qquad , \qquad x \;=\; T(p,\mathtt{C})\ .$$

Se $T(p,\mathtt{C})\ D_p\,\phi(p) + D_p\,\psi(p) \neq 0$ si può ottenere la funzione inversa che scriviamo $p \;=\; U(x,\mathtt{C})$ e da questa l'espressione

$$y(x) \;=\; x\,\phi\big(U(x,\mathtt{C})\big) + \psi\big(U(x,\mathtt{C})\big)\ .$$

Se non è $\phi(p) \;=\; p$ per ogni p, denotiamo con ρ una costante che soddisfi l'equazione $p - \phi(p) \;=\; 0$. Per $p \;=\; \rho$ e $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \;=\; 0$ la (2) risulta soddisfatta e per l'equazione (1) otteniamo l'ulteriore soluzione

$$y \;=\; x\,\phi(\zeta) + \psi(\zeta)$$

che rappresenta una retta.

I50g.10 L'equazione di D'Alembert-Lagrange, quando si assume $\phi(p) = p$ per ogni p si riduce alla cosiddetta **equazione di Clairaut**

(1) $$y \;=\; x\,y' + \psi(y')\ .$$

Introdotto $p := y'$, si ottiene la semplificazione della g09(2)

(2) $$\Big(x + \psi'(p)\Big)\,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \;=\; 0\ .$$

Per $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \;=\; 0$, cioè per $p = \mathtt{C}$, abbiamo le soluzioni

(3) $$y \;=\; \mathtt{C}\,x + \psi(\mathtt{C})$$

che rappresentano una famiglia di rette.

Supposto invece $x + \psi'(p) \;=\; 0$, si ottiene per la (1) anche la soluzione ottenibile eliminando la variabile p dalle due uguaglianze costituenti la condizione ipotizzata e la sua derivata rispetto a p

(4) $$y \;=\; p\,x + \psi(p) \qquad , \qquad x + \psi'(p) \;=\; 0\ .$$

Se $\psi''(p) \neq 0$ dalla seconda si può ricavare un'espressione di p in funzione della x e si ottiene una soluzione che non appartiene alla famiglia espressa dalla (3).
Si ha quindi un cosiddetto **integrale singolare dell'equazione** (1).

Si osserva che la famiglia di soluzioni date dalla (3) consiste nella famiglia delle rette tangenti alla curva costituente l'integrale singolare.

I50 h. equazioni differenziali del secondo ordine [1]

I50h.01 Consideriamo l'equazione del secondo ordine della forma

(1) $$f(x, y'') = 0 \ .$$

Si osserva che se $\overline{y}(x)$ è una sua soluzione particolare, lo è anche ogni $\overline{y} + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0$ con $\mathtt{C}_1$ e $\mathtt{C}_0$, come al solito, costanti arbitrarie e che la espressione precedente comprende tutte le soluzioni della (1).

Assumiamo che si possa conoscere una soluzione della (1) in forma parametrica in modo che si possa disporre delle espressioni

(2) $$x \ = \ g(t) \qquad , \qquad y_{x,x} \ = \ y'' \ =: \ h(t)$$

Per risolvere la (1) basta individuare una sua soluzione particolare che si annulli insieme alla sua derivata prima per il valore $x = x_0$ in corrispondenza di un valore $t = t_0$ del parametro.
Dalla (2) segue $\mathrm{d}\, y'_x \ = \ y''_{x,x}\, \mathrm{d}x \ = \ h(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$ e quindi

(3) $$(\mathrm{D}_x\, y)\,(t) \ = \ \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\ h(u)\, g'(u) \ =: \ h_1(t) \ .$$

Ne segue $\mathrm{d}y \ = \ [\mathrm{D}_x y](t)\, \mathrm{d}x \ = \ h_1(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$ e di conseguenza le espressioni parametriche della soluzione generale sono

(4) $$x \ = \ g(t) \qquad , \qquad y \ = \ \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\ h_1(u)\, g'(u) + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0 \ .$$

In un intervallo nel quale $g'(t) \neq 0$ si può ottenere la funzione inversa $t = t(x)$ e quindi un'espressione della forma $y = y(x, \mathtt{C}_1, \mathtt{C}_0)$.

Può essere utile esprimere la soluzione con un altro integrale. Si trova

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\ h_1(u)\, g'(u) \ = \ \lfloor \text{per parti} \rfloor \ = \Big[h_1(u)\, g(u)\Big]_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\ g(u)\, {h_1}'(u) \ = \ \lfloor h_1(t_0) = 0 \rfloor$$

$$= \ h_1(t)\, g(t) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\ g(u)\, h(u)\, g'(u) \ = \ \lfloor (3) \rfloor = g(t) \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\, h(u)\, g'(u) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\ g(u)\, h(u)\, g'(u)$$

e di conseguenza per la soluzione generale si ottiene:

(5) $$x \ = \ g(t) \qquad , \qquad y \ = \ \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u\, [g(t) - g(u)]\, g'(u)\, h(u) + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0 \ .$$

I50h.02 Consideriamo più in particolare l'equazione in forma normale

(1) $$y'' \ = \ h(x) \ .$$

Essa riduce le espressioni precedenti alle $x = t$ e $g(x) = x$, in modo che la sua soluzione generale è espressa da

(2) $$y(x) \ = \ \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\ (x - u)\, h(u) + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0 \ .$$

Se invece la $\mathsf{h01}(1)$ si può risolvere rispetto alla x, scriviamo

$$x \ =: \ g(y'') \quad , \quad t \ := \ y'' \quad , \quad h(t) \ = \ t$$

e per la soluzione generale dalla h01(5) si ricava

(3) $$x = g(t) \quad , \quad y = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \, \Big(g(t) - g(u)\Big)\, g'(u)\, u + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0 \ .$$

I50h.03 Consideriamo l'equazione del secondo ordine della forma

(1) $$f(y, y'') = 0$$

e assumiamo che si riesca a ottenere una sua soluzione in forma parametrica in modo che si possa disporre di espressioni della forma

(2) $$x =: g(t) \quad , \quad y'' =: h(t)$$

Si ricava $\mathrm{d}\,(y'_x) = 2\, y'_x\, y''_{x,x}\, \mathrm{d}x = 2\, y''_{x,x}\, \mathrm{d}y = 2\, h(t)\, g'(t)\, \mathrm{d}t$ e pertanto

$${y'_x}^2 = 2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \; h(u)\, g'(u) + \mathtt{C}_1 =: Y(t, \mathtt{C}_1) \ .$$

Quindi si ha una relazione della forma $y'_x = \pm Y(t, \mathtt{C}_1)$ dalla quale si può ricavare $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{y'_x} = \pm \dfrac{g'(t)}{Y(t, \mathtt{C}_1)}\, \mathrm{d}t$; in conclusione

(3) $$x = \pm \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \; \frac{g'(u)}{Y(t, \mathtt{C}_1)} + \mathtt{C}_0 \ .$$

Questa espressione e la $y = g(t)$ esprimono parametricamente la soluzione generale della (1).

I50h.04 Se in particolare l'equazione h03(1) si può risolvere nella y'', cioè si può ridurre alla forma $y'' = h(x)$, le espressioni precedenti si riducono alle $t = y$ e $g'(t) = 1$. Di conseguenza si ottiene $y'(x) = \pm \sqrt{2 \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}v \; (v) + \mathtt{C}_1}$ e per la h03(3) la soluzione generale è

$$x = \pm \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2 \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}v \; h(v) + \mathtt{C}_1}} + \mathtt{C}_0 \ .$$

I50h.05 Se invece l'equazione h03(1) si può risolvere nella y cioè si può ridurre alla forma $y = g(y'')$, le espressioni precedenti si riducono alle $t = y''$ e $h(t) = t$. Di conseguenza si ottiene la soluzione generale in forma parametrica

$$x = \pm \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}u \; \frac{g'(u)}{\sqrt{2 \int_{t_0}^{u} \mathrm{d}v \; v\, g'(v) + \mathtt{C}_1}} + \mathtt{C}_0 \quad , \quad y = g(t) \ .$$

I50h.06 Si chieda di risolvere l'equazione della forma

(1) $$f(x, y', y'') = 0 \ .$$

Una strada percorribile consiste nell'introdurre una nuova variabile $p := y'$ e nell'affrontare l'equazione del primo ordine $f\left(x, p, \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = 0$.

Se si riesce a trovare la soluzione generale per questa equazione si dispone di una relazione della forma $y'(x) = p(x, \mathtt{C}_1)$ e questa conduce alla soluzione dell'equazione (1):

$$y(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}v \; p(v, \mathtt{C}_1) + \mathtt{C}_2 \;.$$

I50 i. equazione $y^{(n)} = f(x)$

I50i.01 Si debba risolvere l'equazione

$$(1) \qquad y^{(n)} \;=\; g(x) \quad \text{con} \quad n = 2,3,\ldots \;.$$

Estendendo quanto osservato in h01, abbiamo che la conoscenza di una soluzione particolare $\overline{y}(x)$ consente di avere per la soluzione generale l'espressione

$$(2) \qquad \overline{y}(x) + \mathtt{C}_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \mathtt{C}_1\, x + \mathtt{C}_0 \;,$$

con $\mathtt{C}_{n-1}, \ldots \mathtt{C}_1$ e $\mathtt{C}_0$ costanti arbitrarie.
Una soluzione particolare viene data dalla espressione

$$(3) \qquad \overline{y}(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, g(u) \;;$$

Infatti le sue successive derivate rispetto ad x sono

$$y'(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, \frac{(x-u)^{n-2}}{(n-2)!}\, g(u) \;, \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \;, \;\; y^{n-1}(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, g(u) \quad , \quad y^{(n)}(x) \;=\; g(x) \;.$$

Si osserva che

$$y(x_0) \;=\; y'(x_0) \;=\; y''(x_0) \;=\; \cdots \;=\; y^{(n-1)}(x_0) \;=\; 0 \;.$$

Quindi l'espressione (3) costituisce uno sviluppo in serie di Taylor della soluzione con il reato sotto forma di integrale.

I50i.02 Alcune considerazioni precedenti possono riassumersi nella formula

$$(1) \qquad \mathrm{D}_x{}^{n}\, g(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\; \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, g(u) \;.$$

Se denotiamo con $\mathrm{D}_x{}^{-n}$ la trasformazione inversa della $\mathrm{D}_x{}^{n}$, si può scrivere

$$\mathrm{D}_x{}^{-n} \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, g(u) \;=\; g(x) \;.$$

Questa entità si può considerare un caso particolare dell'operazione detta **derivazione generalizzata** di ordine α definita per ogni $\alpha \in \mathbb{R}_+$ come l'operatore che agisce sopra una opportuna funzione reale $h(x)$ secondo la definizione

$$(2) \qquad \mathrm{D}_x{}^{-\alpha}\, h(x) \;:=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\, \frac{(x-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, h(u) \;.$$

Questa operazione trova applicazione nel studio delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari.

I50i.03 La derivazione generalizzata di ordine negativo gode di una proprietà analoga a una classica proprietà dell'usuale operatore derivata.

(3) Prop.: $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \;:\; \mathrm{D}_x{}^{-\beta}\, \mathrm{D}_x{}^{-\alpha}\, h(x) \;=\; \mathrm{D}_x{}^{-\beta-\alpha}\, h(x) \;.$

Dim.: $\mathrm{D}_x{}^{-\beta}\, \mathrm{D}_x{}^{-\alpha}\, h(x) \;=\; \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}u\; \frac{(x-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \int_{x_0}^{u} \mathrm{d}v\; \frac{(u-v)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, h(v).$

Per la formula di Dirichlet [I44d06]

$$\mathrm{D}_x{}^{-\beta}\, \mathrm{D}_x{}^{-\alpha}\, h(x) \;=\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}v\; \frac{h(v)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_{x_0}^{v} \mathrm{d}u\; (x-u)^{\beta-1}\, (u-v)^{\alpha-1} \;.$$

Introdotta la variabile w chiedendo che sia $u = v+(x-v)w$ e ricordando la definizione della funzione B, si ottiene

$$\int_{x_0}^{v} \mathrm{d}u\, (x-u)^{\beta-1}\, (u-v)^{\alpha-1} \;=\; (x-v)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 \mathrm{d}u\; u^{\alpha-1}\, B(\alpha,\beta) \;=\; (x-v)^{\alpha+\beta-1}\, \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\ .$$

Da qui la formula enunciata ∎

I50 j. dipendenza e indipendenza lineare di funzioni e wronskiano

I50j.01 Ricordiamo che una sequenza di h funzioni reali della variabile x reale in un intervallo $I =$ (a,b) $\searrow \langle y_1, y_2, ..., y_h \rangle$ si dice **sequenza di funzioni linearmente indipendenti** sse non è possibile determinare una h-upla di costanti $\langle d_1, d_2, ..., d_h \rangle$ diversa dalla sequenza di h zeri tale che

$$d_1\, y_1 + d_2\, y_2 + \cdots + d_h\, y_h \;=\; 0 \;.$$

In caso sia possibile determinare una h-upla con la suddetta proprietà si parla di **sequenza di funzioni linearmente dipendenti**.

Evidentemente in una sequenza di funzioni linearmente indipendenti non si possono avere componenti coincidenti; quindi, se l'ordine di tali componenti non ha influenza si può parlare equivalente di insiemi di funzioni linearmente indipendenti o linearmente dipendenti.

Un esempio di h funzioni linearmente indipendenti è costituito dalle funzioni $1 = x^0$, x, x^2, ..., x^{h-1}; infatti il principio di identità dei polinomi dice che l'uguaglianza $d_0 + d_1\, x + d_2\, x^2 + \cdots + c_{h-1}\, x^{h-1} = 0$ può riscontrarsi in un intero intervallo sse $d_0 = d_1 = d_2 = \cdots = d_{h-1} = 0$.

I50j.02 Un altro esempio di h-upla di funzioni linearmente indipendenti è costituito dalle funzioni

$$\mathsf{e}^{\alpha x} \;,\quad x\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;,\quad x^2\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;,\; \ldots\;,\quad x^{h-1}\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;,$$

dove α denota un qualunque numero reale. Infatti una generica loro combinazione lineare è

$$d_0\,\mathsf{e}^{\alpha x} + d_1\, x\,\mathsf{e}^{\alpha x} + d_2\, x^2\,\mathsf{e}^{\alpha x} + \cdots + d_{h-1}\, x^{h-1}\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;=\; \mathsf{e}^{\alpha x}\left(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{n-1}\, x^{n-1}\right)$$

ed essendo il fattore $\mathsf{e}^{\alpha x}$ sempre diverso da 0 dal primo esempio dato segue quando sopra asserito.

Si osserva che abbiamo individuata una famiglia di h-uple indicizzata dal reale α e che questa famiglia comprende l'esempio dato in k01, esempio ottenibile ponendo $\alpha = 0$.

I50j.03 Una famiglia di insiemi di funzioni linearmente indipendenti ancora più comprensiva è costituita da insiemi della forma seguente

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccc} \mathsf{e}^{\alpha_1 x} & x\,\mathsf{e}^{\alpha_1 x} & x^2\,\mathsf{e}^{\alpha_1 x} & \ldots & x^{h_1}\,\mathsf{e}^{\alpha_1 x} \\ \mathsf{e}^{\alpha_2 x} & x\,\mathsf{e}^{\alpha_2 x} & x^2\,\mathsf{e}^{\alpha_2 x} & \ldots & x^{h_2}\,\mathsf{e}^{\alpha_2 x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{e}^{\alpha_k x} & x\,\mathsf{e}^{\alpha_k x} & x^2\,\mathsf{e}^{\alpha_k x} & \ldots & x^{h_k}\,\mathsf{e}^{\alpha_k x} \end{array} \;,$$

dove $k \in \mathbb{P}$, $n_1, n_2, ..., nk \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ denotano costanti complesse sono mutuamente diverse.

(2) Prop.: Le funzioni di un insieme della forma (1) sono linearmente indipendenti.

Dim.: Abbiamo visto in j02 che la proposizione è vera per $k = 1$ e procediamo per induzione supponendo che la proprietà valga per un insieme caratterizzato da $k - 1$ esponenziali e deducendone la validità per insiemi caratterizzati da k esponenziali.
Una relazione lineare omogenea tra le funzioni dell'insieme, se esiste, può essere messa sotto la forma

$$(2)\qquad P_1(x)\,\mathsf{e}^{\alpha_1 x} + P_2(x)\,\mathsf{e}^{\alpha_2 x} + \cdots + P_k(x)\,\mathsf{e}^{\alpha_k x} \;=\; 0 \;,$$

con $P_1(x), P_2(x), ..., P_k(x)$ polinomi aventi gradi pari, risp., a $g_1(\leq h_1)$, $g_2(\leq h_2)$, ... ,$g_k(\leq h_k)$; inoltre nessuno di questi $P_i(x)$ è il polinomio nullo perché questo contraddirebbe la ipotizzata indipendenza lineare per $k - 1$ esponenziali. Dividendo per $\mathsf{e}^{\alpha_k x}$ l'espressione in (2) si ricava

$$(3)\qquad P_1(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_1 - \alpha_k)x} + P_2(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_2 - \alpha_k)x} + \cdots + P_k(x) \;=\; 0 \;,$$

con $\alpha_1-\alpha_k$, ..., $\alpha_{k-1}-\alpha_k$ costanti mutuamente diverse e nonnulle.
Derivando la funzione in (3) si ha la relazione

$$(4) \qquad Q_1(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_1-\alpha_k)x}+Q_2(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_2-\alpha_k)x}+\cdots+{P_k}'(x)\ =\ 0\ ,$$

con $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., $Q_{k-1}(x)$ polinomi diversi dal polinomio nullo aventi, risp., come gradi g_1, g_2,...,g_{k-1} e con ${P_k}'(x)$ polinomio di grado g_k-1.
Derivando la funzione in (4) g_k volte, dato che ${P_k}^{(g_k)}(x)=0$ si ottiene una relazione della forma

$$(5) \qquad R_1(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_1-\alpha_k)x}+Q_2(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_2-\alpha_k)x}+\cdots+R_{k-1}(x)\,\mathsf{e}^{(\alpha_{k-1}-\alpha_1)x}\ =\ 0\ ,$$

cioè una relazione contraria alla ipotizzata indipendenza lineare per $k-1$ esponenziali.

I50j.04 Consideriamo una sequenza di n funzioni $\mathbf{y}(x)\ =\ \langle y_1(x),...,y_n(x)\rangle$ definite e dotate di derivate fino all'ordine $n-1$ in un intervallo o in un insieme aperto e connesso I. Si dice **matrice wronskiana** della n-upla $\mathbf{y}(x)$ la matrice

$$(1) \qquad \mathsf{Wrn}(\mathbf{y})\ =\ \mathsf{Wrn}(y_1,...,y_n)\ :=\ \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \dots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \dots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {y_1}^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}\ ,$$

mentre si dice **determinante wronskiano** o semplicemente **wronskiano** della n-upla

$$(2) \qquad \mathsf{WrnD}(\mathbf{y})\ =\ \mathsf{WrnD}(y_1,...,y_n)\ :=\ \det\Big(\mathsf{Wrn}(y_1,...,y_n)\Big)\ .$$

I50j.05 Esempi di wronskiani:

$$\mathsf{WrnD}(\sin x,\cos x)\ =\ \det\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{bmatrix}\ =\ -\sin^2 x-\cos^2 x\ =\ -1\ .$$

$$\mathsf{WrnD}(1,x,x^2,x^3)\ =\ \det\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & x^3\\ 0 & 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 0 & 2 & 6x\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{bmatrix}=12\ .$$

$$\mathsf{WrnD}(1,x,x^2,...,x^{n-1})\ =\ \det\begin{bmatrix}1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1}\\ 0 & 1 & 2x & \dots & (n-1)x^{n-2}\\ 0 & 0 & 2 & \dots & (n-1)(n-2)x^{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)!\end{bmatrix}\ =\ \prod_{i=1}^{n-1}!\ .$$

$$\mathsf{WrnD}(\mathsf{e}^{a_1x},\mathsf{e}^{a_2x},...,\mathsf{e}^{a_nx})=\det\begin{bmatrix}\mathsf{e}^{a_1x} & \mathsf{e}^{a_2x} & \dots & \mathsf{e}^{a_nx} & \\ a_1\mathsf{e}^{a_1x} & a_2\mathsf{e}^{a_2x} & \dots & a_n\mathsf{e}^{a_nx} & \\ {a_1}^2\mathsf{e}^{a_1x} & {a_2}^2\mathsf{e}^{a_2x} & \dots & {a_n}^2\mathsf{e}^{a_nx} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {a_1}^{n-1}\mathsf{e}^{a_1x} & {a_2}^{n-1}\mathsf{e}^{a_2x} & \dots & {a_n}^{n-1}\mathsf{e}^{a_nx} & \end{bmatrix}=$$

$$\mathsf{e}^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)x}\det\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & \\ {a_1}^2 & {a_2}^2 & \dots & {a_n}^2 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ {a_1}^{n-1} & {a_2}^{n-1} & \dots & {a_n}^{n-1} & \end{bmatrix}\ =\ \mathsf{e}^{(a_1+a_2+\cdots+a_n)x}\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)\ .$$

Per l'ultimo passaggio si è tenuto conto del determinante di Cauchy-Vandermonde [ILG42a09].

I50j.06 Prop. Consideriamo una sequenza di n funzioni $\mathbf{y} = \langle y_1(x), ..., y_n(x)\rangle$ definite e dotate delle derivate fino all'ordine $n-1$ in un insieme aperto e connesso; se esse sono linearmente dipendenti il loro wronskiano è nullo in I; equivalentemente se $\mathsf{WrnD}(y_1(x), ..., y_n(x)) \neq 0$, allora le funzioni sono linearmente indipendenti.

Dim.: Se le funzioni sono linearmente dipendenti esiste una n-upla di costanti $\langle c_1, c_2, ..., c_n\rangle$ diversa dalla sequenza di n zeri tale che $\sum_{i=1}^{n} c_i\, y_i(x) \;=\; 0$ identicamente nell'intero I. L'espressione di questa uguaglianza si può derivare $n-1$ volte ottenendo il seguente sistema di uguaglianze

$$(1) \qquad \begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0 \\ c_1 {y_1}' + c_2 {y_2}' + \cdots + c_n {y_n}' = 0 \\ c_1 {y_1}'' + c_2 {y_2}'' + \cdots + c_n {y_n}'' = 0 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ c_1 {y_1}^{(n-1)} + c_2 {y_2}^{(n-1)} + \cdots + c_n {y_n}^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

Questo sistema si può considerare un sistema di equazioni lineari omogenee che consente di determinare una n-upla in grado di garantire la dipendenza lineare dell'ipotesi. La risolubilità di questo sistema equivale all'annullamento del relativo determinante e questo equivale all'annullamento del wronskiano delle funzioni date:

$$\mathsf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_3) \;=\; \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \cdots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \;=\; 0 \quad ▮$$

I50j.07 Prima di procedere occorre trovare una significativa espressione per la derivata di un determinante wronskiano.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathsf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_n) \;=\; \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \cdots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{bmatrix} .$$

I50j.08 Prop. Consideriamo la matrice ottenuta eliminando l'ultima riga della matrice wronskiana $M := \mathsf{Wrn}(y_1, y_2, ..., y_n)$ che scriviamo

$$(1) \qquad L \;:=\; \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \cdots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{bmatrix} .$$

Se in ogni punto dell'insieme I la matrice L ha rango $n-1$, allora le funzioni y_i per $i = 1, 2, ..., n$ sono linearmente dipendenti.

Dim.: Denotiamo con $\mathbf{P} :=: \langle P_1, P_2, ..., P_n\rangle$ la sequenza dei complementi algebrici delle successive componenti $y_i^{(n-2)}$ della penultima riga della M e con $\mathbf{U} \;=\; \langle U_1, U_2, ..., U_n\rangle$ la sequenza dei complementi algebrici delle successive componenti $y_i^{(n)}$ dell'ultima riga della matrice wronskiana M. Consideriamo anche il sistema lineare di $n-1$ equazioni nelle n incognite X_1, X_2,...,X_n:

$$(2) \qquad \begin{cases} X_1 y_1 + X_2 y_2 + \cdots + X_n y_n = 0 \\ X_1 {y_1}' + X_2 {y_2}' + \cdots + X_n {y_n}' = 0 \\ \quad \cdots\cdots \\ X_1 y_1^{(n-2)} + X_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + X_n y_n^{(n-2)} = 0 \end{cases} .$$

Essendo $\det(M) = 0$, sia la sequenza U che la P sono soluzioni del sistema (2); inoltre per l'ipotesi sul rango della M la U non è la n-upla nulla e la P deve essere proporzionale alla sequenza U: esprimiamo questo scrivendo $\mathsf{P} \;=:\; -\rho \mathsf{U}$.

Sviluppiamo le derivate dei determinanti U_i per $i = 1, 2, ..., n$:

$$\frac{dU_i}{\mathrm{d}x} \;=\; (-1)^{n+i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_{i-1} & y_{i+1} & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & y_{i-1} & y_{i+1} & \cdots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \cdots & {y_{i-1}}'' & {y_{i+1}}'' & \cdots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-3)} & y_2^{(n-3)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-3)} & y_{i+1}^{(n-3)} & \cdots & y_n^{(n-3)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)} & y_{i+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} .$$

Come osservato, questa derivata si riduce al determinante della matrice che differisce solo per avere derivate le componenti dell'ultima riga.
Tale determinante fornisce $(-1)^{n-1+i} P_i$ per $i = 1, 2, ..., n$ e in definitiva

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}U_{\,i}}{\mathrm{d}x} \;=\; -P_1 \;=\; \rho U_1 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, ..., n \;.$$

Introdotto il modulo $R \;:=\; \sqrt{{U_1}^2 + {U_2}^2 + \cdots + {U_n}^2}$, per ipotesi maggiore di 0, si trova

$$\frac{R'}{R} \;=\; \frac{U_1 {U_1}' + \cdots + U_n {U_n}''}{R^2} \;=\; \lfloor \text{ per } (4) \rfloor \;=\; \rho \;.$$

Tornando alle (4) si hanno le equazioni

$${U_1}'' R - U_1 R' = 0 \;, \;.\;.\;.\;, \; {U_n}'' R - U_n R' = 0 \;,$$

ovvero

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{U_1}{R}\right) = 0 \;, \;.\;.\;.\;, \; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{U_n}{R}\right)$$

e di conseguenza

$$A_1 \;=\; \mathtt{C}_1 \, R \quad , \quad \ldots \quad , \quad A_n \;=\; \mathtt{C}_n \, R \;,$$

con la sequenza $\langle \mathtt{C}_1, ..., \mathtt{C}_n \rangle$ diversa dalla sequenza nulla, dato che in caso contrario sarebbero identicamente nulle tutte le U_i ▮

I50j.09 Dai risultati in k05 si ricava che sono linearmente indipendenti i seguenti insiemi di funzioni: $\{\sin x, \cos x\}$, $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ e $\{\mathrm{e}^{a_1 x}, \mathrm{e}^{a_2 x}, ..., \mathrm{e}^{a_n x}\}$ sse le costanti a_1,...,a_n sono mutuamente diverse.

Viceversa per ogni fissato $\overline{x}$ si ha

$$\mathbf{WrnD}(\sin x, \cos x, \sin(x + \overline{x})) \;=\; 0$$

I50j.10 Consideriamo le funzioni x^2 e $x|x|$ nel dominio $I := (-2,2)$, la loro matrice wronskiana e il corrispondente determinante

$$\mathsf{Wrn}\Big(x^2, x|x|\Big) = \begin{bmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{bmatrix} \qquad , \qquad \mathsf{WrnD}(x^2, x|x|) = 0$$

Queste due funzioni sono linearmente indipendenti in quanto $c_1\, x^2 + c_2\, x|x| = 0$ su I implica per $x = 1$ $c_1 + c_2 = 0$ e per $x = -1$ $c_1 - c_2 = 0$, cioè implica $c_1 = c_2 = 0$.
In effetti l'enunciato non è in conflitto con I49I05, dato che la matrice wronskiana ha caratteristica 0 in corrispondenza di $x = 0$: in effetti per $x < 0$ si ha $x^2 + x|x| = 0$, per $x > 0$ si ha $x^2 - x|x| = 0$ e il punto in cui si ha caratteristica 0 diversa da $n - 1 = 1$ è $x = 0$, ascissa il cui attraversamento porta a scambiare le due relazioni lineari omogenee.

I50 k. equazioni differenziali lineari omogenee e formula di Liouville

I50k.01 Si dice **equazione differenziale ordinaria lineare omogenea** una equazione della forma

$$(1) \qquad \mathcal{L}(y) \;:=\; a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y \;=\; 0$$

dove $a_n(x)$, $a_{n-1}(x)$,..., $a_1(x)$ e $a_0(x)$ denotano funzioni note e continue in un certo insieme dato I aperto e connesso e dove in tale I si ha $a_n(x) \neq 0$.

Le soluzioni della (1) devono essere derivabili n volte e avere derivate finite in I; con una notazione dell'analisi funzionale possiamo affermare che esse vanno cercate tra le funzioni di $\mathfrak{C}^n(I)$.
Si osserva subito che se sono disponibili un certo numero k di soluzioni particolari della (1) $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_k(x)$ ogni loro combinazione lineare $c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_k\, y_k(x)$ è soluzione di tale equazione.
Infatti l'operatore $\mathcal{L}$ è lineare, cioè

$$\forall c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R} \;\;\vdots\;\; \mathcal{L}\,(c_1\, y_1, +, c_2\, y_2 + \cdots + c_k\, y_k) \;=\; c_1\, \mathcal{L}(y_1) + c_2\, \mathcal{L}(y_2) + \cdots + c_k\, \mathcal{L}(y_k) \;.$$

In termini algebrici si ha che le soluzioni della (1) costituiscono un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni di $\mathfrak{C}^n(I)$.

I50k.02 **Prop.** Di ogni punto $x_0 \in I$ si trova un intorno V tale che si possono costruire n particolari soluzioni della I49I01(1) y_1, y_2, ...,y_n con dominio in V che sono linearmente indipendenti.

Dim.: Consideriamo una matrice di profilo $n \times n$ con determinante diverso da 0

$$K \;=\; \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,n} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n,1} & k_{n,2} & \dots & k_{n,n} \end{bmatrix} \;.$$

Ad ogni riga i si associano le seguenti n condizioni iniziali:

$$y_i(x_0) \;=\; k_{i,1} \quad , \quad {y_1}'(x_0) \;=\; k_{i,2} \quad , \quad \dots \quad , \quad y_i^{n-1}(x_0) \;=\; k_{i,n} \;.$$

Il wronskiano di queste soluzioni $W(x) := \mathsf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_n)$ per $x = x_0$ coincide con il determinante della suddetta matrice $\det(W)$; grazie alla continuità delle soluzioni particolari $y_i(x)$ il wronskiano è diverso da 0 in un intorno J di x_0. Quindi in tale J le n soluzioni particolari sono indipendenti linearmente.

Ci proponiamo ora di dimostrare che J coincide con l'intero insieme I nel quale $a_n(x)$ si mantiene diversa da 0. Consideriamo per questo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} W(x) \;=\; \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \cdots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} \;=\; \lfloor \text{in } I \rfloor \;=\; \frac{1}{a_n} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \cdots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \cdots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ a_x\, y_1^{(n)} & a_n\, y_2^{(n)} & \cdots & a_n\, y_n^{(n)} \end{vmatrix} \;.$$

Aggiungiamo all'ultima riga della matrice la prima moltiplicata per a_0, la seconda per a_1 la terza per a_2, ..., la penultima per a_{n-2} e teniamo conto delle uguaglianze

$$a_n\, {y_i}^{(n)} + a_{n-2}\, y_i^{(n-2)} + \cdots + a_2\, {y_i}'' + a_1\, {y_i}'' + a_0\, y_i \qquad \text{per} \qquad i = 1, 2, ..., n \;.$$

Di conseguenza otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x) \;=\; -\frac{a_{n-1}}{a_n}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ {y_1}' & {y_2}' & \dots & {y_n}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & \dots & {y_n}'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ a_x\, y_1^{(n)} & a_n\, y_2^{(n)} & \dots & a_n\, y_n^{(n)} \end{vmatrix} \;=\; -\frac{a_{n-1}}{a_n}\, W(x)\ .$$

Integrando l'equazione differenziale ottenuta si ottiene la rilevante **formula di Liouville**

$$W(x) \;=\; W(x_0)\,\mathsf{e}^{-\displaystyle\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}u\,\frac{a_{n-1}(u)}{a_n(u)}}\ .$$

In essa $W(x_0) \neq 0$ per ipotesi, il fattore esponenziale non si annulla e quindi $W(x) \neq 0$ dove $a_n(x) \neq 0$, cioè nell'insieme I ▮

I50k.03 Un insieme o una sequenza di soluzioni particolari della equazione differenziale della forma $\mathcal{L}(y) = 0$ viene chiamato, seguendo Lazarus Immanuel Fuchs , **sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione**.
Lo spazio sotteso da queste funzioni, conseguentemente, viene detto **spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione**.
Operativamente di questo spazio serve conoscere una base, sistema che diciamo **base delle soluzioni della ODE lineare**.

Abbiamo dunque dimostrato che per ogni equazione differenziale lineare omogenea di ordine n, a partire da una qualsiasi matrice di ordine n nonsingolare, si può determinare un sistema fondamentale di soluzioni $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$.

Mostriamo ora che ogni soluzione particolare y si può esprimere come combinazione lineare a coefficienti costanti delle y_i.

(1) Prop.:

$$y \;=\; \mathtt{C}_1\, y_1 + \mathtt{C}_2\, y_2 + \cdots + \mathtt{C}_n\, y_n\ ,$$

per una scelta opportuna dei coefficienti $\mathtt{C}_i$.

Dim.: Per ipotesi abbiamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} a_0y_1 + a_1{y_1}' + \cdots + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + a_ny_1^{(n)} \;=\; 0 \\ a_0y_2 + a_1{y_2}' + \cdots + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + a_ny_2^{(n)} \;=\; 0 \\ \quad\dots\dots\dots \\ a_0y_n + a_1{y_2}' + \cdots + a_{n-1}y_n^{(n-1)} + a_ny_n^{(n)} \;=\; 0 \\ a_0y + a_1y' + \cdots + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_ny^{(n)} \;=\; 0 \end{cases}$$

Considerando questo sistema per ogni x per il quale $a_n(x) \neq 0$ come un sistema di $n+1$ equazioni lineari numeriche nelle $n+1$ incognite a_i per $i = 0, 1, ..., n$, è garantito che esso possegga una soluzione nonnulla che in particolare comprende $a_n \neq 0$. Quindi deve annullarsi il suo determinante che è il wronskiano $\mathbf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_n, y)$.
Per quanto provato con A_n sostituito da $\mathbf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_n, y)$, segue che y è una combinazione lineare di y_1, y_2, ..., y_n ▮

Da quanto dimostrato si deduce anche che le equazioni lineari omogenee non hanno integrali singolari: tutte le soluzioni di una tale equazione si possono esprimere come combinazioni lineari delle funzioni di una base delle soluzioni.

I50 I. equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

I50I.01 Vediamo ora come il problema di individuare una base per le soluzioni di una ODE lineare omogenea della forma

(1) $$\mathcal{L}(y) \;=\; a_n\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) \;=\; 0 \;,$$

nella quale tutti i coefficienti sono costanti, si riconduce alla soluzione di un'equazione polinomiale di grado n, di ordine uguale all'ordine dell'equazione.

Si tratta di cercare soluzioni particolari della forma

$$y \;=\; \mathsf{e}^{\rho\, x} \quad \text{con } \; y' \;=\; \rho\, \mathsf{e}^{\rho\, x} \quad , \quad y'' \;=\; \rho^2\, \mathsf{e}^{\rho\, x} \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{(n)} \;=\; \rho^n\, \mathsf{e}^{\rho\, x} \quad .$$

L'equazione (1) conduce alla

$$\mathsf{e}^{\rho\, x}\; \big(a_n\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + a_1\rho + a_0\big)$$

e quindi, essendo per ogni x $\mathsf{e}^{\rho\, x} \neq 0$, si giunge all'equazione polinomiale

(2) $$a_n\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + a_1\rho + a_0 \;.$$

Questa relazione viene chiamata **equazione caratteristica [della equazione differenziale]** (1). Come è naturale pensare, le basi delle soluzioni dipendono dai tipi delle soluzioni della (2).

I50I.02 Prop. Quando la I01(2) possiede n radici reali distinte, radici che denotiamo, risp., con ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n, una base delle soluzioni è costituita dalle funzioni esponenziali

$$\mathsf{e}^{\rho_1\, x} \quad , \quad \mathsf{e}^{\rho_2\, x} \quad , \quad . \;.\; . \quad , \quad \mathsf{e}^{\rho_n\, x} \;.$$

Dim.: In effetti tali funzioni sono linearmente indipendenti ▮

Quindi alla soluzione generale si può dare la forma

$$y(x) \;=\; \mathtt{C}_1\, \mathsf{e}^{\rho_1\, x} + \mathtt{C}_2\, \mathsf{e}^{\rho_2\, x} + \cdots + \mathtt{C}_n\, \mathsf{e}^{\rho_n\, x} \;.$$

I50I.03 Se l'equazione caratteristica m01(2) dell'equazione :m01(1) possiede una radice $\overline{\rho}$ di molteplicità $\mu > 1$, allora μ soluzioni particolari (linearmente indipendenti) sono

$$\mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x} \quad , \quad x\, \mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x} \quad , \quad x^2\, \mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x} \quad , \quad . \;.\; . \quad , \quad x^{\mu-1}\, \mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x} \;.$$

Dim.: Cerchiamo soluzioni della m01(1) della forma $y(x) =: \mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x}\, t(x)$; il problema si trasforma nella ricerca delle soluzioni dell'equazione ricavata sostituendo $y(x)$ nella m01(1), cioè della

$$F\Big(\mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x}\, t(x)\Big) \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, {\mathrm{D}_x}^i\big(\mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x}\, t(x)\big) \;=\; \mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x} \sum_{i=0}^{n} a_i \left[\sum_{h=0}^{i} \binom{i}{h}\, \overline{\rho}^h\, {\mathrm{D}_x}^{i-h}\, t(x)\right] \;=\; 0 \;.$$

Da questa, raccogliendo i coefficienti delle derivate successive dalla nuova incognita $t(x)$, si ottiene

(1) $$\mathcal{L}(y(x)) \;=:\; \mathsf{e}^{\overline{\rho}\, x}\, G(t(x)) \quad \text{con} \quad G(t(x)) \;=\; a_n t^{(n)}(x) + A_{n-1}\, t^{(n-1)}(x) + \cdots + A_1\, t'(x) + A_0\, t(x) \;,$$

dove per $i = 0, 1, ..., n-1$ le A_i, sono costanti ottenibili con semplici operazioni algebriche.
Si deve quindi risolvere l'equazione differenziale $G\big(t(x)\big) = 0$, la cui equazione caratteristica assumiamo abbia la forma

$$a_n\, \sigma^n + A_{n-1}\, \sigma^{n-1} + \cdots + A_1\, \sigma + A_0 \;=\; 0 \;.$$

Questa equazione si ottiene dalla m01(2) per la variabile $\sigma := \rho = \overline{\rho}$; quindi essa ha $0 = \overline{\rho} - \overline{\rho}$ come radice di molteplicità μ, cioè deve essere

$$A_\mu \neq 0 \quad , \quad A_{\mu-1} \;=\; A_{\mu-2} = \cdots = A_1 = a_0 = 0$$

e l'equazione differenziale $G(t(x)) = 0$ deve avere la forma

$$a_n\, t^{(n)} + A_{n-1}\, t^{(n-1)} + \cdots + A_\mu\, t^{(\mu)} \;=\; 0 \ .$$

Evidentemente μ soluzioni particolari linearmente indipendenti sono le potenze della variabile indipendente 1, x, x^2, ..., $x^{\mu-1}$. Passando alla incognita $y(x)$ si ottiene l'asserto ▮

I50I.04 Prendendo in considerazione tutte le radici dell'equazione caratteristica m01(2) si giunge a una conclusione generale.

(1) Prop.: Se l'equazione caratteristica dell'equazione lineare omogenea ha come radici ρ_1, ..., ρ_k relative, risp., alle molteplicità μ_1, ..., μ_k una base per le sue soluzioni è costituita dai seguenti gruppi di funzioni

(2)
$$\begin{array}{c} \mathsf{e}^{\rho_1\, x} \ , \ x\, \mathsf{e}^{\rho_1\, x} \ , \ x^2\, \mathsf{e}^{\rho_1\, x} \ , \ \dots \ , \ x^{\mu_1-1}\, \mathsf{e}^{\rho_1\, x} \\ \mathsf{e}^{\rho_2\, x} \ , \ x\, \mathsf{e}^{\rho_2\, x} \ , \ x^2\, \mathsf{e}^{\rho_2\, x} \ , \ \dots \ , \ x^{\mu_2-1}\, \mathsf{e}^{\rho_2\, x} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathsf{e}^{\rho_n\, x} \ , \ x\, \mathsf{e}^{\rho_n\, x} \ , \ x^2\, \mathsf{e}^{\rho_n\, x} \ , \ \dots \ , \ x^{\mu_n-1}\, \mathsf{e}^{\rho_n\, x} \end{array}$$ ▮

I50I.05 Gli sviluppi precedenti rimangono validi anche se si considerano equazioni nel campo complesso. In particolare le funzioni $\mathsf{e}^{\alpha\, x}$ per certe questioni pratiche sarebbe più chiaro se fossero considerate come funzioni della forma

$$\mathsf{e}^{\Re(\alpha\, x) + \mathsf{i}\, \Im(\alpha\, x)} = \mathsf{e}^{\Re(\alpha\, x)} \left(\cos(\Im(\alpha\, x)) + \mathsf{i}\, \sin(\Im(\alpha\, x))\right) \ .$$

Va inoltre notato che anche se i coefficienti dell'equazione caratteristica sono tutti reali, le soluzioni ρ_i possono essere numeri complessi. Tuttavia in questo caso non è difficile evitare di servirsi di quantità complesse non reali. Infatti se $\rho = \alpha + \mathsf{i}\beta$ con α e β reali è una radice complessa di molteplicità μ, anche $\rho^* \;=\; \alpha - \mathsf{i}\beta$ è radice dell'equazione caratteristica con la stessa molteplicità e quindi in una base per le soluzioni compaiono le seguenti $2\,\mu$ soluzioni particolari

$$\begin{array}{c} \mathsf{e}^{(\alpha+\mathsf{i}\beta)x} \ , \ \ x\, \mathsf{e}^{(\alpha+\mathsf{i}\beta)x} \ , \ \dots \ , \ \ x^{\mu-1}\, \mathsf{e}^{(\alpha+\mathsf{i}\beta)x} \\ \mathsf{e}^{(\alpha-\mathsf{i}\beta)x} \ , \ \ x\, \mathsf{e}^{(\alpha-\mathsf{i}\beta)x} \ , \ \dots \ , \ \ x^{\mu-1}\, \mathsf{e}^{(\alpha-\mathsf{i}\beta)x} \end{array} .$$

Dai duetti di funzioni complesse coniugate $x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{(\alpha+\mathsf{i}\beta)x}$ e $x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{(\alpha-\mathsf{i}\beta)x}$ per combinazione lineare, grazie alle formule di Eulero, si ottengono duetti di funzioni linearmente indipendenti

$$x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x} \cos\beta x \;=\; \frac{1}{2}\, x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x} \left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\beta x} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\beta x}\right) \qquad , \qquad x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x} \sin\beta x \;=\; \frac{1}{2\mathsf{i}} x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x} \left(\mathsf{e}^{\mathsf{i}\beta x} - \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\beta x}\right) \ .$$

Quindi si possono avere basi con gruppi di 2μ soluzioni particolari della forma

$$\begin{array}{c} \mathsf{e}^{\alpha x} \cos\beta x \ , \ \ x\, \mathsf{e}^{\alpha x} \cos\beta x \ , \ \dots \ , \ \ x^{\mu-1}\, \mathsf{e}^{\alpha x} \cos\beta x \\ \mathsf{e}^{\alpha x} \sin\beta x \ , \ \ x\, \mathsf{e}^{\alpha x} \sin\beta x \ , \ \dots \ , \ \ x^{\mu-1}\, \mathsf{e}^{\alpha x} \sin\beta x \end{array} .$$

I50I.06 Si osserva anche che le generiche combinazioni lineari delle due funzioni del gruppo precedente relative alla stessa potenza della x si possono scrivere

$$x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x} \left(\mathtt{C}_1 \cos\beta x + \mathtt{C}_2 \sin\beta x\right) \qquad \text{per} \quad i = 0, 1, 2, ..., \mu - 1 \ .$$

Alternativamente scrivendo per le costanti arbitrarie $\mathtt{C}_1 = \mathtt{D}\cos\mathtt{d}$ e $\mathtt{C}_2 = \mathtt{D}\sin\mathtt{d}$, cioè introducendo le nuove costanti arbitrarie $\mathtt{D} := \sqrt{\mathtt{C}_1{}^2 + \mathtt{C}_2{}^2}$ e $\mathtt{d} := \mathrm{atan2}(\mathtt{C}_2, \mathtt{C}_1)$, le generiche combinazioni lineari assumono le forme

$$D\, x^{\mathsf{i}}\, \mathsf{e}^{\alpha\, x} \cos(\beta\, x + \mathtt{d}) \quad \text{per} \quad i = 0, 1, 2, ..., \mu - 1 \ .$$

I501.07 Procediamo ora a trattare più in dettaglio le equazioni differenziali ordinarie lineari del secondo ordine.

L'equazione $y'' - k^2\, y = 0$ con k reale nonnullo ha come equazione caratteristica $\rho^2 - k^2 = 0$ e quindi ha le radici $\rho = \pm k$. La soluzione generale è quindi

$$y = \mathtt{C}_1\, \mathsf{e}^{k\, x} + \mathtt{C}_2\, \mathsf{e}^{-k\, x} \ .$$

Ponendo $\mathtt{C}_1 =: \dfrac{\mathtt{d}_1 + \mathtt{d}_2}{2}$ e $\mathtt{C}_2 =: \dfrac{\mathtt{d}_1 - \mathtt{d}_2}{2}$, ossia introducendo $\mathtt{d}_1 := \mathtt{C}_1 + \mathtt{C}_2$ e $\mathtt{d}_2 := \mathtt{C}_1 - \mathtt{C}_2$, si ottiene

$$y(x) = \mathtt{d}_1 \cosh(k\, x) + \mathtt{d}_2 \sinh(k\, x) \ .$$

I501.08 L'equazione $y'' + k^2 y = 0$ con k reale nonnullo ha come equazione caratteristica $\rho^2 + k^2 = 0$ e quindi ha le radici $\rho = \pm \mathsf{i} k$. La soluzione generale è quindi

$$y = \mathtt{C}_1\, \mathsf{e}^{\mathsf{i}\, k\, x} + \mathtt{C}_2\, \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\, k\, x} \ .$$

Mediante manipolazioni dei tipi già visti si trova anche l'espressione generale

$$y = \mathtt{D} \cos(k\, x + \mathtt{d}) \ .$$

I501.09 Consideriamo più in generale l'equazione

$$y'' + p\, y' + q\, y = 0 \quad \text{con} \quad p, q \in \mathbb{R} \ .$$

La corrispondente equazione caratteristica $\rho^2 + p\,\rho + q = 0$, posto $\Delta := p^2 - 4\, q$, ha come radici

$$\rho_1 = \frac{-p - \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \rho_2 = \frac{-p + \sqrt{\Delta}}{2} \ .$$

Se $\Delta = 0$, $\rho_1 = \rho_2 = \dfrac{p}{2}$, come visto in m03, la soluzione generale è data da

$$y = \mathsf{e}^{-\frac{p}{2} x} (\mathtt{C}_1 + x\, \mathtt{C}_2) \ .$$

Se $\Delta > 0$ le due radici sono reali e distinte e, come visto in m02, la soluzione generale è

$$y = \mathtt{C}_1\, \mathsf{e}^{\rho_1\, x} + \mathtt{C}_2\, \mathsf{e}^{\rho_2\, x} \ .$$

Se $\Delta < 0$, posto $\beta := \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$, le due radici sono espresse da $-\dfrac{p}{2} \pm \mathsf{i}\beta$ e per la soluzione generale possono essere utili le due espressioni

$$y = \mathsf{e}^{-\frac{p}{2} x} (\mathtt{C}_1 \cos \beta\, x + \mathtt{C}_2 \sin \beta\, x) = \mathtt{D}\, \mathsf{e}^{-\frac{p}{2} x} \cos(\beta\, x + \mathtt{d}) \ .$$

I50 m. equazioni differenziali lineari con secondo membro

I50m.01 Consideriamo la più generale equazione differenziale lineare inomogenea di ordine n

(1) $$\mathcal{L}(y) \;=\; a_n(x)\, y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) \;=\; S(x) \;,$$

dove $a_n(x)$, ..., $a_0(x)$ sono funzioni continue in un insieme aperto e connesso I e in esso $a_n(x) \neq 0$.
Si osserva subito che, se $\overline{y}(x)$ denota una soluzione particolare della (1) e $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\rangle$ è una base per le soluzioni dell'equazione omogenea $\mathcal{L}(y \;=\; 0$, la soluzione generale della (1) è

$$y(x) \;=\; \mathtt{C}_1\, y_1(x) + \mathtt{C}_2\, y_2(x) + \cdots + \mathtt{C}_n\, y_n(x) + \overline{y}(x) \;\; :$$

Infatti $\mathcal{L}(y) = S(x)$ e $\mathcal{L}(\overline{y}) = S(x)$ implicano $\mathcal{L}(y - \overline{y}) = 0$, cioè l'espressione

$$y - \overline{y} \;=\; \mathtt{C}_1\, y_1(x) + \mathtt{C}_2\, y_2(x) + \cdots + \mathtt{C}_n\, y_n(x) \;.$$

I50m.02 Ci proponiamo ora di individuare un integrale particolare della $\mathcal{L}(y) \;=\; S(x)$ fornito da un'espressione

(1) $$\overline{y}(x) \;=\; c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n(x) \;,$$

che si serve di una base $\{y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)\}$ per le soluzioni dell'equazione $\mathcal{L}(y) = 0$. Questo procedimento è dovuto a Lagrange e viene chiamato **metodo della variazione delle costanti arbitrarie**, in quanto l'espressione si può considerare una variante di quella per la soluzione generale dell'equazione omogenea. Esso viene suggerito dalla considerazione che se $S(x)$ è poco rilevante è ragionevole aspettarsi soluzioni poco diverse da quelle della equazione omogenea.

I50m.03 Il primo stadio del procedimento riguarda la derivazione della $\overline{y}(x)$ data dalla n02(1) :

$$\overline{y}' \;=\; (c_1\, {y_1}' + c_2\, {y_2}' + \cdots + c_n\, {y_n}') + ({c_1}'\, y_1 + {c_2}'\, y_2 + \cdots + {c_n}' y_n)$$

e l'imposizione di una prima condizione sulla variazione per le $c_i(x)$:

(1) $${c_1}'\, y_1 + {c_2}'\, y_2 + \cdots + {c_n}' y_n \;=\; 0 \;.$$

in modo da ottenere

(2) $$\overline{y}' \;=\; c_1\, {y_1}' + c_2\, {y_2}' + \cdots + c_n\, {y_n}' \;.$$

Il secondo stadio riguarda la derivazione della $\overline{y}'$ data dalla (1) semplificata dalla (2): e l'imposizione di una seconda condizione sulla variazione per le $c_i(x)$:

(3) $${c_1}'\, {y_1}' + {c_2}'\, {y_2}' + \cdots + {c_n}'\, {y_n}' \;=\; 0 \;,$$

in modo da ottenere

(4) $$\overline{y}'' \;=\; c_1\, {y_1}'' + c_2\, {y_2}'' + \cdots + c_n\, {y_n}'' \;.$$

Procedendo in questo modo all'$(n-1)$-esimo stadio imponiamo la condizione

(5) $${c_1}'\, y_1^{(n-2)} + {c_2}'\, y_2^{(n-2)} + \cdots + {c_n}'\, y_n^{(n-2)} \;=\; 0 \;,$$

ed otteniamo

(6) $$\overline{y}^{(n-1)} \;=\; c_1\, y_1^{(n-1)} + c_2\, y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n\, y_n^{(n-1)} \;.$$

Nell'n-esimo stadio deriviamo la precedente ottenendo

(7) $$\overline{y}^{(n)} \;=\; \left(c_1\, y_1^{(n)} + c_2\, y_2^{(n)} + \cdots + c_n\, y_n^{(n)}\right) + \left({c_1}'\, y_1^{(n-1)} + {c_2}'\, y_2^{(n-1)} + \cdots + {c_n}'\, y_n^{(n-1)}\right) \; .$$

A questo punto si moltiplicano le uguaglianze in n02(1)-(7), risp., per a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} e a_n e si sommano. Tenendo conto che y_1, y_2, ..., y_n sono soluzioni particolari della $\mathcal{L}(y) \;=\; 0$, si ottiene che vale la $\mathcal{L}(\overline{y}) \;=\; S(x)$ sse vale la n-esima condizione sulla variazione sulle c_i

(8) $$a_n \left({c_1}'\, y_1^{(n-1)} + {c_2}'\, y_2^{(n-1)} + \cdots + {c_n}'\, y_n^{(n-1)}\right) \;=\; S(x) \; .$$

I50m.04 Le condizioni n03(1),(3),(4),(5),(8) imposte alla variazione delle $c_i(x)$ si raccolgono nel seguente sistema lineare che per ogni $x \in I$ consiste di n equazioni in n costanti incognite

(1) $$\begin{cases} {c_1}'\, y_1 + {c_2}'\, y_2 + \cdots + {c_n}'\, y_n \;=\; 0 \\ {c_1}'\, {y_1}' + {c_2}'\, {y_2}' + \cdots + {c_n}'\, {y_n}' \;=\; 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {c_1}'\, {y_1}^{(n-2)} + {c_2}'\, {y_2}^{(n-2)} + \cdots + {c_n}'\, {y_n}^{(n-2)} \;=\; 0 \\ {c_1}'\, {y_1}^{(n-1)} + {c_2}'\, {y_2}^{(n-1)} + \cdots + {c_n}'\, {y_n}^{(n-1)} \;=\; \frac{S}{a_n} \end{cases}$$

Questo sistema ha come determinante $\mathsf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_n) \;=:\; W(x)$ diverso da 0 per ogni $x \in I$ grazie alla indipendenza lineare delle y_i.

Il sistema quindi si può risolvere univocamente, in particolare applicando la regola di Kramer che porta alle espressioni

(2) $${c_i}'(x) \;=\; \frac{W_{[n,i]}(x)\, S(x)}{a_n(x)\, W(x)} \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, ..., n \; ,$$

dove $W(x) := \mathsf{WrnD}(y_1, y_2, ..., y_n)$ e $W_{[n,i]}(x)$ denota il complemento algebrico della componente $y_n^{(n-1)}$ nella matrice wronskiana $\mathsf{Wrn}(y_1, y_2, ..., y_n)$.

Le equazioni (2) possono essere integrate e portano alle

(3) $$c_i(x) \;=\; \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,i]}\, S(u)}{a_n(u)\, W(u)} \; .$$

La soluzione particolare della$\mathcal{L}(y) = S(x)$ ha la forma

(4) $$\overline{y} \;=\; y_1 \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,1]} S}{a_n W} + y_2 \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,2]}\, S}{a_n W} + \cdots + y_n \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,n]}\, S}{a_n W}$$

e per la soluzione generale della $\mathcal{L}(y) = S(x)$ si ottiene

(5) $$y \;=\; c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n y_n + y_1 \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,1]}\, S}{a_n\, W} + y_2 \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,2]}\, S}{a_n\, W} + \cdots + y_n \int^x \mathrm{d}u\, \frac{W_{[n,n]}\, S}{a_n\, W} \; .$$

I50m.05 Per talune equazioni $\mathcal{L}(y) \;=\; S(x)$ una soluzione particolare si può ottenere con manipolazioni specifiche.

Per esempio dovendo risolvere l'equazione $y'' + p\, y' + q\, y = r\, x^2 + \; x + t$ con p, q, r, s, t costanti e $q \neq 0$ e $r \neq 0$, si può cercare di individuare una soluzione della forma $y = a\, x^2 + b\, x + c$. Basta sostituire questa espressione nell'equazione per ottenere la semplice equazione polinomiale

$$(q\, a - r) x^2 + (2\, a\, p + q\, b - s)\, x + p\, b + q\, c - t \;=\; 0 \; ;$$

questa per il principio di identità dei polinomi implica

$$q\, a - 3\, r = 0 \qquad , \qquad 2\, a\, p + q\, b - s \;=\; 0 \qquad , \qquad p\, b + q\, c - t \;=\; 0$$

e in definitiva

$$a = \frac{r}{q} \qquad , \qquad b = \frac{s\,q - 2\,r}{q^2} \qquad , \qquad c = \frac{q^2\,t - p\,s\,q + 2\,r\,p}{q^3} \; .$$

L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php