1

Capitolo I47
integrali di superficie

Contenuti delle sezioni

a. integrali di superficie [1] p. 2
b. integrali su una faccia di superficie e calcolo dei volumi p. 5
c. formule di Gauss e di Ostrogradsky p. 8
d. formula di Kelvin-Stokes p. 10
e. integrali su superfici con bordo in comune p. 12
f. cambiamento delle variabili negli integrali tripli p. 14
g. area di una superficie secondo Minkowski p. 18

19 pagine

I47 0.01 In questo capitolo viene presentata la nozione di integrale di superficie e questo rihiede di richiamare o introdurre varie nozioni della geometria nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Inizialmente si definiscono gli integrali sopra superfici opportunamente regolari e si mostra come si possano calcolare i volumi di solidi mediante integrali sopra le superfici che li delimitano.

Si dimostrano poi alcune formule concernenti integrali di funzioni-RRtR, alle quali ancora si chiedono requisiti di regolarità, che riguardano figure solide, superfici che li delimitano e curve che contornano queste ultime.

Queste formule sono associate ai nomi di Gauss, Green, Ostrograds'kij, Kelvin e Stokes, hanno significative formulazioni vettoriali ed hanno grande importanza per applicazioni a cominciare da quelle della fisica.

Più avanti si considerano le questioni della dipendenza degli integrali superficiali esprimenti flussi dal solo contorno delle superfici attraversate, le conseguenze dei cambiamenti delle variabili negli integrali tripli e una definizione di area di superficie dipendente da un volume dovuta a Minkovski.

I47 a. integrali di superficie [1]

I47 a.01 Diciamo **superficie bivariata** l'insieme dei punti $\langle x,y,z\rangle$ determinati dalle funzioni-RRtR

$$x = X(u,v) \quad , \quad y = Y(u,v) \quad , \quad z = Z(u,v) \tag{1}$$

al variare del punto $\langle u,v\rangle$ in un dominio $D \in \mathbf{SetRRLCQ}$; chiediamo anche che le funzioni $X,Y,Z \in \lceil\, D \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$ siano continue in D insieme alle rispettive derivate parziali prime.
Chiediamo inoltre che uno almeno dei tre determinanti jacobiani

$$\frac{\mathrm{d}(X,Y)}{\mathrm{d}(u,v)} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}(Y,Z)}{\mathrm{d}(u,v)} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}(Z,X)}{\mathrm{d}(u,v)}$$

sia diverso da 0 su D.

Senza ledere la generalità, cioè riservandoci la possibilità di cambiare alcuni identificatori delle funzioni, possiamo scegliere che sia $\forall\langle u,v\rangle \in D \;:\; \dfrac{\mathrm{d}(X,Y)}{\mathrm{d}(u,v)} \neq 0$.

In relazione a una suddivisione di D mediante porzioni limitate e quadrabili $\mathcal{D} = \{D_1,...,D_r\}$, la superficie S viene ad avere una suddivisione finita $\mathcal{T} = \{S_1,...,S_t\}$ mediante sottodomini anch'essi limitati e quadrabili.
Per formalizzare questa corrispondenza scriviamo $\mathcal{T} = \mathsf{volTsup}(\mathcal{D})$.

Ricordiamo che, con le definizioni

$$E := \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad G := \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 \quad ,$$

$$F := \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} \quad .$$

per le aree della i-esima dei suddetti sottodomini si ha

$$\boldsymbol{Area}(S_i) = \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \sqrt{E\,G - F^2} \quad . \tag{2}$$

I47 a.02 Ci proponiamo ora di ottenere una formula infinitesimale per l'area della superficie S e per questa occorre chiarire il rapporto tra le aree delle porzioni D_i nel campo di variabilità di $\langle u,v\rangle$ e le aree delle porzioni S_i della S stessa.

Più precisamente vogliamo collegare $\mathrm{maxoV}_{\mathcal{D}}$, cioè il massimo diametro dei D_i della suddivisione $\mathcal{D}$ in D con $\mathrm{maxoS}_{\mathcal{T}}$, ovvero con il massimo diametro degli E_i che costituiscono la suddivisione $\mathcal{T}$ della superficie S.

Prop. $\mathrm{maxoV}_{\mathcal{D}} \to 0 \iff \mathrm{maxoS}_{\mathcal{T}} = \mathrm{maxoS}_{volTsup(\mathcal{D})} \to 0$.

"$\Longrightarrow$" Per la distanza tra due punti $\langle u,v\rangle$ e $\langle \overline{u},\overline{v}\rangle$ in D si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= \sqrt{[X(\overline{u},\overline{v}) - X(u,v)]^2 + [Y(\overline{u},\overline{v}) - Y(u,v)]^2 + [Z(\overline{u},\overline{v}) - Z(u,v)]^2} \\ &\leq |X(\overline{u},\overline{v}) - X(u,v)| + |Y(\overline{u},\overline{v}) - Y(u,v)| + |Z(\overline{u},\overline{v}) - Z(u,v)| \;\leq\; 3\,M\,(|\overline{u} - u| + |\overline{v} - v|) \ ,\end{aligned}$$

dove con M denotiamo il massimo valore assoluto tra le 6 derivate parziali delle funzioni X, Y e Z rispetto alla u e alla v.
Fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), se suddividiamo D in porzioni con diametri inferiori a $\dfrac{\epsilon}{6}$, per due punti $\mathbf{u}$ e $\overline{\mathbf{u}}$ collocati nella stessa porzione abbiamo $|\overline{u} - u| + |\overline{v} - v| \leq \dfrac{\epsilon}{3\,M}$.

Quindi abbiamo $\text{dist}(\mathbf{u},\mathbf{v}) < 3\,M\,\dfrac{\delta}{3\,M} = \epsilon$ e per l'arbitrarietà di ϵ l'asserto risulta dimostrato.
"$\Longleftarrow$" Questa dimostrazione si ottiene sulla falsariga della precedente ma basandosi sulle funzioni $u = U(x,y,z)$ e $v = V(x,y,z)$ che invertono la trasformazione fornite dalle funzioni in a01(1), grazie al fatto che dalla continuità delle funzioni X, Y e Z e delle loro derivate prime discende la continuità delle funzioni X, Y e Z e delle loro derivate prime ∎

I47 a.03 Consideriamo ora una funzione $f(x,y,z)$ continua in ogni punto della superficie bivariata S e in relazione a una suddivisione $\mathcal{D} = \{D_1,...,D_r\} \in \textbf{SbdvFQdrl}_D$ ed alla corrispondente $\mathcal{T} := \text{volTsup}(\mathcal{D}) = \{S_1,...,S_r\} \in \textbf{SbdvFCubl}_S$ consideriamo le somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} \textbf{\textit{Area}}(S_j)\,f_j$, dove per ogni $j = 1,...,r$ f_j è un valore reale scelto arbitrariamente nell'intervallo $\left[\inf_{\mathbf{x}\in S_j}(f(\mathbf{x}))\ ,\ \sup_{\mathbf{x}\in S_j}(f(\mathbf{x}))\right]$.

Prop. Esiste un reale J, che chiameremo **integrale di superficie della funzione-RRtR** $f(x,y,z)$ esteso alla S che soddisfa le proprietà che seguono.
Scelto arbitrariamente $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) si riesce a individuare un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni suddivisione $\mathcal{T} = \{S_1,...,S_t\}$ con porzioni S_j con diametro inferiore a δ si abbia

$$\left| J - \sum_{j=1}^{t} \textbf{\textit{Area}}(S_j)\,f_j \right| \ <\ \epsilon\ . \tag{1}$$

Inoltre questo integrale, per il quale usiamo anche le notazioni $\displaystyle\iint_S \mathrm{d}S\ f(x,y,z)$ e $\displaystyle\iint_S \mathrm{d}S\ f(\mathbf{x})$, è fornito dall'espressione

$$\iint_S \mathrm{d}S\ f(x,y,z)\ =\ \iint_D \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ F\left(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)\right)\ \sqrt{E\,G - F^2}\ . \tag{2}$$

Dim.: Introduciamo la funzione con dominio D $\phi(u,v)\ :=\ F\left(X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)\right)$, ricordiamo la a01(2) e consideriamo l'espressione:

$$\sum_{j=1}^{r} \textbf{\textit{Area}}(S_j)\,f_j - \iint_D \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \phi(u,v)\,\sqrt{E\,G - F^2}$$
$$= \sum_{j=1}^{r} f_j \iint \textbf{\textit{Area}}(S_j)\,\sqrt{E\,G - F^2} - \sum_{j=1}^{r} \iint_{D_j} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \phi(u,v)\,\sqrt{E\,G - F^2}\ .$$

Si tratta allora di dimostrare che per maxoV$_{\mathcal{D}}$to0 anche l'espressione precedente tende a 0.

Scelto arbitrariamente $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), la continuità della ϕ garantisce l'esistenza di un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni suddivisione $\mathcal{D} = \{D_1,...,D_r\}$ con $d_{\mathcal{D}} < \delta$ si abbia $\forall i = 1,2,...\ :\ \textbf{\textit{oscl}}_{D_i}(f(u,v)) < \epsilon$.
Abbiamo quindi le relazioni

$$\left| \sum_{i=1}^{r} f_i \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \sqrt{E\,G - F^2} - \sum_{i=1}^{r} \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \phi(u,v)\,\sqrt{E\,G - F^2} \right| \ =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{r} \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \left(f_i - \phi(u,v)\,\sqrt{E\,G - F^2}\right) \right| \ \le\ \epsilon \sum_{i=1}^{r} \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \sqrt{E\,G - F^2}\ =\ \epsilon\,\textbf{\textit{Area}}(S)\ .$$

L'arbitrarietà di ϵ conduce all'enunciato ∎

Una funzione con le caratteristiche della $f(x,y,z)$ precedente viene chiamata **funzione-RRRtR quadrabile**.

I47 a.04 Si può definire l'integrale superficiale anche per una funzione continua $f(x, y, z)$ il cui dominio sia una cosiddetta **multisuperficie bivariata**, ossia l'unione di un numero finito di superfici bivariate mutuamente disgiunte $S^{(1)}$, ... , $S^{(m)}$ riferibili, risp., ai domini bidimensionali $D^{(1)}$, ..., $D^{(m)}$.

Anche questa funzione risulta quadrabile su ciascuna delle superfici $S^{(i)}$ e il suo integrale viene definito invocando l'additività come

$$\iint_S \mathrm{d}S\ f\ := \iint_{S^{(1)}} \mathrm{d}S\ f + \cdots + \iint_{S^{(m)}} \mathrm{d}S\ f\ .$$

I47 b. integrale su una faccia di superficie e calcolo di volumi

I47 b.01 In precedenza abbiamo implicitamente considerato superfici la cui orientazione, individuabile con uno dei due versori normali o equivalentemente da una delle due corrispondenti rette orientate normali, subisce cambiamenti ridotti.
Per poter utilizzare agevolmente le superfici per questioni più globali si pongono altri problemi.

Si consideri una S **superficie regolare**, cioè una superficie dotata in ogni suo punto $P = \langle x, y, z\rangle = \mathsf{x}$ di un piano tangente, e quindi di due versori normali $\mathsf{n}(\mathsf{x})$ e $-\mathsf{n}(\mathsf{x})$, che cambiano con continuità al variare di x.
Fissiamo un punto $\bar{\mathsf{x}} \in S$ e un suo versore normale $\bar{\mathsf{n}}$ e conveniamo di chiamare **faccia positiva della superficie** quella sulla quale emerge il detto versore.

Se un punto variabile sulla S si muove su una curva chiusa, quando torna in $\bar{\mathsf{x}}$ si possono dare due situazioni: quale che sia la curva il versore normale torna a coincidere con $\bar{\mathsf{n}}$; percorrendo alcune curve il versore normale viene a coincidere con $-\bar{\mathsf{n}}$, mentre per altre curve, in particolare per tutte quelle di estensione opportunamente ridotta, torna allo stesso $\bar{\mathsf{n}}$.

Queste ultime vengono dette **superfici bilatere** e le precedenti **superfici unilatere**.

Tra queste ultime si trova il ben noto **nastro di Moebius**, superficie della quale si ottiene un modello materiale ottenibile prendendo una striscia di carta, accostando le due estremità e incollandole dopo aver fatto compiere a una di esse una rotazione di 180°. Altre superfici unilaterali si ottengono similmente ma facendo compiere ad una delle estremità una rotazione di un multiplo dispari di 180°.

I47 b.02 Torniamo a una superficie S bivariata espressa parametricamente con le funzioni

$$x = X(u, v) \quad , \quad y = Y(u, v) \quad , \quad z = Z(u, v) \quad ,$$

ove la variabile bidimensionale $\mathsf{u} = \langle u, v\rangle$ corre entro una regione $D \in \mathbf{SetRRLCQ}$ e le funzioni X, Y e Z sono continue insieme alle loro derivate in D. Facendo variare u in una curva chiusa in D a partire da un dato punto, per la continuità delle tre funzioni e delle loro derivate, quando si ritorna nel punto di partenza si ritrovano gli stessi coseni direttori della normale. Quindi la S deve essere una superficie bilatera.

Si osserva quindi che ogni superficie bilatera non può essere riferita a un unico dominio piano.

Conveniamo di chiamare positiva quella delle due facce che presenta il versore positivo e di chiamare negativa la faccia opposta caratterizzata dal versore normale negativo; la positiva la denotiamo con $+S$, la seconda con $-S$.

I47 b.03 Vogliamo trattare vari integrali superficiali definibili su superfici opportunamente regolari. In questi integrali vogliamo far comparire i coseni direttori delle due normali nel punto x variabile sopra una tale superficie S che denoteremo, risp., con $C_x(\mathsf{x})$, $C_y(\mathsf{x})$ e $C_z(\mathsf{x})$. Per essi useremo anche le notazioni $\cos(\widehat{\mathsf{x}, \pm\mathsf{n}})$, $\cos(\widehat{\mathsf{x}, \pm\mathsf{n}})$ $\cos(\widehat{\mathsf{x}, \pm\mathsf{n}})$, intendendo che le notazioni con $+\mathsf{n}$ riguardino il versore normale positivo e quelle con $-\mathsf{n}$ il vettore opposto.

Consideriamo dunque terne di funzioni $\big\langle X(\mathsf{x}), Y(\mathsf{x}), Z(\mathsf{x})\big\rangle$ che intendiamo denotare equivalentemente con $\big\langle X_1(\mathsf{x}), X_2(\mathsf{x}), X_3(\mathsf{x})\big\rangle$, le quali siano continue nei punti x della superficie S. ed introduciamo le notazioni

$$\widetilde{\iint}_{\pm S} \mathrm{d}S\ XC_x \quad , \quad \widetilde{\iint}_{\pm S} \mathrm{d}S\ YC_y \quad , \quad \widetilde{\iint}_{\pm S} \mathrm{d}S\ ZC_z$$

per denotare integrali estesi alla faccia positiva di S quando contengono i deponenti $+S$, integrali estesi alla faccia negativa se presentano $-S$. Per questi costrutti useremo anche espressioni nelle quali si distinguono i versori $+\mathbf{n}$ e $-\mathbf{n}$ come

$$\widetilde{\iint}_S \mathrm{d}\mathbf{x}\, X_i(\mathbf{x})\, \cos(\mathbf{x}, +\mathbf{n}) \quad \text{e} \quad \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}\mathbf{x}\, X_i(\mathbf{x})\, \cos(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) \ .$$

Utilizzeremo anche espressioni come

$$\widetilde{\iint}_{\pm S} \mathrm{d}S\ (X\, C_x + Y\, C_y + Z\, C_z).$$

che si possono considerare definite invocando l'additività.

I47 b.04 Consideriamo una superficie S che sia semplice rispetto ad Oz e sia rappresentata da una funzione $z = z(x, y)$ con $\langle x, y\rangle$ variabile nella regione $D := \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oxy}}(S)$. Essa si può scrivere

$$z \ = \ \xi \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \quad ,$$

ove $\xi = 1$ se fa riferimento alla normale positiva e $\xi = -1$ se alla negativa, $p := \mathrm{D}_x\, z$ e $q := \mathrm{D}_y\, z$.
Otteniamo quindi una espressione riguardante un integrale doppio

$$\widetilde{\iint} \mathrm{d}S\ Z\big(x, y, z(x, y)\big) \ = \ \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, \frac{\xi\, Z(x, y, z(x, y))}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \ = \ \xi \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ Z(x, y, z(x, y)) \ .$$

Se sono continue in $D \in \mathsf{SetRRLCQ}$ anche $p(x, y)$ e $q(x, y)$ si ha anche

$$\iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ Z(x, y, z(x, z)) \ = \ \widetilde{\iint} \mathrm{d}S\ R(x, y, z)\, \cos(\mathbf{e}_x, +\mathbf{n}) \ .$$

Anche integrali di superficie come gli ultimi introdotti in b03 si possono esprimere mediante un integrale doppio. In effetti si trova

$$\cos(\mathbf{x}, +\mathbf{n}) \ = \ \frac{\xi}{\sqrt{E\, G - F^2}}\, \frac{\mathrm{d}(y, z)}{\mathrm{d}(u, v)}\, \sqrt{E\, G - F^2}\, \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \ = \ \xi\, \frac{\mathrm{d}(y, z)}{\mathrm{d}(u, v)}\, \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

e due altre analoghe espressioni. Si ottiene quindi

$$\widetilde{\iint}_{\pm S} \mathrm{d}S\ (X\, C_x + Y\, C_y + Z\, C_z) \ = \ \xi \iint_D \left(X\, \frac{\mathrm{d}(y, z)}{\mathrm{d}(u, v)} + Y\, \frac{\mathrm{d}(z, x)}{\mathrm{d}(u, v)} + Z\, \frac{\mathrm{d}(x, y)}{\mathrm{d}(u, v)} \right) \ .$$

Si osserva che anche in questa espressione il determinante jacobiano si presenta come estensione bidimensionale della derivata.

I47 b.05 Si abbia una figura solida **S** la cui superficie topologicamente equivalente a una sfera sia semplice rispetto ad Oz. Più precisamente chiediamo che la sua superficie sia l'unione delle superfici S_1 ed S_2 date, risp., dalle equazioni $z = Z_1(x, y)$ e $z = Z_2(x, y)$, ove per ogni punto della proiezione piana del solido $D := \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oxy}} \in \mathsf{SetRRLCQ}$ sia $Z_1(x, y) \le Z_2(x, y)$; supponiamo anche che le funzioni Z_1 e Z_2 siano continue in D insieme alle loro derivate prima.
Il volume del solido è dato da

$$\boldsymbol{Vol}(\mathbf{S}) \ = \ \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ Z_2(x, y) - \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ Z_1(x, y) \ . \tag{1}$$

Per il primo integrale

$$\iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\ Z_2(x, y) \ = \ \widetilde{\iint}_{S_2} \mathrm{d}S\ Z_2(x, y)\, C_z \quad ,$$

dove della superficie S_2 si assume la faccia esterna del solido. Per il secondo integrale abbiamo

$$-\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ Z_1(x,y) \ = \ \widetilde{\iint}_{S_1} \mathrm{d}S\ Z_2\, C_z \quad ,$$

dove ancora si assume la faccia esterna del solido e il versore normale che con $\mathbf{e}_z$ forma un angolo ottuso. Quindi

$$\boldsymbol{Vol}(\mathbf{S}) \ = \ \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\, Z(x,y) \ = \ \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\ Z(x,y)\ \cos(\mathbf{e}_z, \mathbf{n}_e) \quad , \tag{2}$$

dove con $\mathbf{n}_e$ si denota il vettore normale diretto verso l'esterno del solido.

I47 b.06 Si abbia ora un solido la cui superficie S è costituita da due calotte S_1 ed S_2 esprimibili con le funzioni $z = Z_1(x,y)$ e $z = Z_2(x,y)$ e da una superficie cilindrica C con le generatrici parallele ad Oz. Su questa superficie $C_z = 0$ e quindi $\widetilde{\iint}_C \mathrm{d}S\ Z(x,y)\, Cz \ = \ 0$.
Vale dunque anche per il volume di questo solido l'uguaglianza b05(2).

I47 b.07 Scambiando il ruolo delle tre coordinate e adottando di conseguenza le funzioni che danno le superfici, si giunge a formule sostanzialmente equivalenti per i solidi che sono semplici, risp., rispetto alla direzione di Ox ed Oz:

$$\boldsymbol{Vol}(\mathbf{S}) \ = \ \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, X(y,z) \ = \ \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\ X(y,z)\ \cos(\mathbf{e}_x, \mathbf{n}_e) \quad , \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Vol}(\mathbf{S}) \ = \ \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z\, Y(x,z) \ = \ \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\ Y(x,z)\ \cos(\mathbf{e}_y, \mathbf{n}_e) \quad , \tag{2}$$

I47 c. formule di Gauss e di Ostrogradsky

I47 c.01 Consideriamo ancora un solido V limitato, cubabile e delimitato da una superficie S semplice rispetto Oz; consideriamo anche la sua proiezione $D := \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oxy}}(\mathsf{V})$ e le funzioni $Z_1(x,y)$ e $Z_2(x,y)$ che lo delimitano, risp., inferiormente e superiormente.

Sia inoltre $R(x,y,z)$ una funzione con dominio contenente V continua insieme alla $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ sul solido e si intenda valutare l'integrale triplo

$$J \;:=\; \iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{\partial R}{\partial z}$$

Per esso si trova

$$J \;=\; \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} \mathrm{d}z\,\frac{\partial R}{\partial z} \;=\; \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\Big(R(x,y,Z_2)-R(x,y,Z_1)\Big)$$

e quindi, grazie alla formula $\mathsf{b05}(2)$ e denotando ancora con $\mathbf{n}_e$ il versore normale alla S rivolto all'esterno,

$$J \;=\; \iint_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\;R(x,y,z) \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\;R(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathbf{n}_e\,\mathbf{e}_z}$$

Vale quindi la **formula di Gauss per integrali tripli**

$$\iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{\partial R}{\partial z} \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\;R(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathbf{n}_e\,\mathbf{e}_z}\;. \tag{1}$$

Facendo invece riferimento al versore normale alla S rivolto all'interno si ha

$$\iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{\partial R}{\partial z} \;=\; -\widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\;R(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathbf{n}_i\,\mathbf{e}_z}\;. \tag{2}$$

I47 c.02 La formula di Gauss si applica utilmente a solidi delimitati da superfici semplici rispetto a qualcuno degli assi coordinati. Sia V un solido limitato e cubabile delimitato dalla superficie S semplice relativamente ad Oz. Siano inoltre $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ ed $R(x,y,z)$ funzioni continue su V insieme alle loro derivate parziali $\dfrac{\partial P}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial R}{\partial z}$.

Similmente alla formula $\mathsf{c01}(1)$ si ottengono le seguenti

$$\iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{\partial P}{\partial x} \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\;P(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathbf{n}_e\,\mathbf{e}_x}$$

$$\iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{\partial Q}{\partial y} \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\;Q(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathbf{n}_e\,\mathbf{e}_y}\;.$$

Sommando membro a membro le tre formule otteniamo la **formula di Ostrogradsky**

$$\iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\;P(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathbf{n}_e\,\mathbf{e}_x} \quad , \tag{1}$$

presentabile anche nella forma

$$\iiint_{\mathsf{V}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) \;=\; \widetilde{\iint}_{+S}\Big(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P(x,y,z)+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,Q(x,y,z)+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R(x,y,z)\Big)\;. \tag{2}$$

I47 c.03 Al risultato precedente si può dare forma più concisa e significativa servendosi di notazioni vettoriali. Le funzioni P, Q ed R si possono vedere come componenti cartesiane del vettore di un

campo spaziale $\mathsf{P}(\mathsf{x})$ e la somma delle tre derivate parziali si può scrivere scrivere come divergenza di P:

$$\operatorname{div}\mathsf{P} \;:=\; \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\,. \tag{3}$$

Inoltre si può utilizzare il prodotto scalare di P ed n_e, cioè la componente di P secondo il versore normale esterno:

$$P(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathsf{n}_e\,\mathsf{e}_x}+Q(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathsf{n}_e\,\mathsf{e}_y}+R(x,y,z)\,\cos\widehat{\mathsf{n}_e\,\mathsf{e}_z}\;=\;\mathsf{P}\cdot\mathsf{n}_e\,. \tag{4}$$

Abbiamo quindi la cosiddetta **formula della divergenza**

$$\iiint_{\mathsf{V}}\mathrm{d}\mathsf{x}\,\operatorname{div}\mathsf{P}(\mathsf{x})\;=\;\widetilde{\iint}_{S}\mathsf{P}\cdot\mathsf{n}_e\quad. \tag{5}$$

L'integrale al secondo membro viene detto **flusso uscente del vettore P** attraverso la superficie S .
Conviene osservare esplicitamente il valore di questo flusso dipende dalle caratteristiche di $\mathsf{P}(\mathsf{x})$ e può risultare positivo, nullo o negativo.

I47 c.04 La formula di Ostrogradsky può estendersi ai solidi che insiemi di punti-RRR che possono scomporsi in un insieme finito di solidi semplici rispetto ad almeno uno degli assi coordinati. Per questi casi gli integrali su S devono intendersi come integrali da applicare a una superficie composita.

I47 d. formula di Kelvin-Stokes

I47 d.01 Si abbia un solido limitato e cubabile V e le tre funzioni $A(\mathsf{x}) = A(x, y, z)$, $B(\mathsf{x})$ e $C(\mathsf{x})$ con i domini comprendenti V e ivi continue insieme alle rispettive derivate parziali prime.
Sia poi S una superficie immersa in V che si proietti biunivocamente sui tre piani del riferimento cartesiano e dotata di piano tangente che al variare su di essa del punto di contatto vari con continuità. Il contorno ∂S sia una curva chiusa Γ che abbia la tangente che varia con continuità al variare del punto di contatto.
Conveniamo inoltre che Γ abbia come verso positivo quello che percorso da un osservatore disposto come il versore normale positivo $+\mathsf{n}$ della S veda la superficie S scorrere alla sinistra dei propri piedi.

Per tale situazione dimostreremo la **formula di Kelvin-Stokes**:

$$\widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_x} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_y} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_z}\right]$$

$$= \int_\Gamma (\mathrm{d}x\, A + \mathrm{d}y\, B + \mathrm{d}z\, C) \tag{1}$$

Conviene osservare che se la superficie è piana e giace sul piano Oxy abbiamo $\cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_x} = \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_y} = \mathrm{d}z = 0$ e $\cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_z} = 1$: quindi l'uguaglianza enunciata si riduce alla formula di Green per il piano [D47g08].

I47 d.02 Più in generale sia $z = Z(x, y)$ l'espressione della superficie S riferita al piano Oxy, introduciamo la scritture $S_{[x,y]} := \boldsymbol{Prj}_{\mathsf{Oz}}(S)$ e sia $\Gamma = s(x, y) := \partial S_{[x,y]}$ da percorrere nel verso positivo.
Tenendo conto della definizione di integrale curvilineo, della formula di Gauss in Oxy [I44g] e della definizione di integrale superficiale abbiamo

$$\int_\Gamma \mathrm{d}x\; A(x, y, Z(x, y)) \;=\; \int_{s(x,y)} \mathrm{d}x\; A(x, y, Z(x, y)) \;=\; -\widetilde{\iint}_{S_{[x,y]}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\; \frac{\partial A(x, y, Z(x, y))}{\partial y}$$

$$= -\widetilde{\iint}_{S_{[x,y]}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\; \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\, q\right) \;=\; -\widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\; \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\, q\right) \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_z}\ .$$

Dato che [b04] $q \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_z} = \dfrac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = -\cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_y}$ si ottiene

$$\int_\Gamma \mathrm{d}x\, A \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\; \left(-\frac{\partial A}{\partial y} \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_z} + \frac{\partial A}{\partial z} \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_y}\right)\ .$$

Permutando circolarmente le coordinate x, y e z, si hanno le uguaglianze

$$\int_\Gamma \mathrm{d}y\; B \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\; \left(-\frac{\partial B}{\partial z} \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_x} + \frac{\partial B}{\partial x} \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_z}\right)\ ,$$

$$\int_\Gamma \mathrm{d}x\; C \;=\; \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\; \left(-\frac{\partial}{\partial x} C \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_y} + \frac{\partial}{\partial y} C \cos \widehat{\mathsf{n}\,\mathsf{e}_x}\right)$$

e sommando le tre relazioni si giunge alla formula d01(1) dovuta a Lord Kelvin e George Gabriel Stokes ∎

I47 d.03 Anche alla formula di Kelvin-Stokes si può dare una forma più compatta e significativa mediante notazioni vettoriali. La funzioni $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ e $C(x, y, z)$ si possono vedere come

componenti cartesiane di una funzione vettoriale $\mathbf{A}(\mathsf{x}) \in \left\lceil \mathbb{R}^{\times 3} \longleftrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \right\rceil$; introduciamo poi il vettore avente come componenti

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}$$

da considerare ottenuto applicando ad $\mathbf{A}$ un operatore vettoriale differenziale che chiamiamo **rotore di funzioni-RRtRR** e che denotiamo con rot ; il suddetto vettore lo denotiamo quindi con $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(\mathsf{x})$.

Osserviamo anche che gli integrandi dei due integrali della $\mathsf{d01}(1)$ si possono esprimere come prodotti scalari, il primo come prodotto dei vettori $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ ed $\mathbf{n}$, il secondo come prodotto dei vettori $\mathbf{A}$ e $d\mathsf{x} = \langle \mathrm{d}x\,, \mathrm{d}y\,, \mathrm{d}z\,\rangle$. Quindi la formula in esame si può scrivere concisamente

$$\widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{n} \;=\; \int_\Gamma \mathrm{d}\mathsf{x}\cdot\mathbf{A} \quad . \tag{1}$$

Questa uguaglianza si può interpretare con la frase: il flusso della rotazione del campo vettoriale $\mathbf{A}(\mathsf{x})$ attraverso la superficie S riferito alla normale positiva della stessa superficie è uguale alla circuitazione lungo il contorno chiuso Γ della S percorso nel verso positivo.
Va ricordato anche che un integrale curvilineo sopra una linea chiusa adeguatamente regolare viene detto **circuitazione**.

I47 d.04 È lecito dare la seguente definizione di un determinante contenente funzioni scalari e operatori differenziali

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{vmatrix} := a_1\left(\frac{\partial P_3}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_3}\right) + a_2\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_3} - \frac{\partial P_3}{\partial x_1}\right) + a_3\left(\frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial x_2}\right) \quad . \tag{1}$$

Servendoci di questo determinante la formula di Kelvin-Stokes si scrive

$$\widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S \begin{vmatrix} \cos\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_x} & \cos\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_y} & \cos\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_z} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A & B & C \end{vmatrix} = \int_\Gamma \Big(\mathrm{d}x\,A + \mathrm{d}y\;B + \mathrm{d}z\;C\Big) \,.$$

I47 e. integrali di superfici con bordo in comune

I47 e.01 Consideriamo un parallelepipedo Ψ con gli spigoli paralleli agli assi cartesiani ortogonali, le funzioni $P(\mathsf{x})$, $Q(\mathsf{x})$ ed $R(\mathsf{x})$ definite e continue su Ψ insieme alle loro derivate parziali prime, una superficie $S \in \mathsf{SrfcCntTan}$ contenuta in Ψ da considerare mobile a esclusione del suo contorno consistente in una curva chiusa Γ fissa.

(1) Teorema (α): L'integrale $\widetilde{\iint}_{+S} \Big(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,Q + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R \Big)$ dipende dal solo contorno Γ

$$\iff \quad (\beta)\text{: nell'intero } \Psi \text{ si ha } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \;=\; 0\ .$$

I47 e.02 Dim.: $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$: Consideriamo un qualunque $\mathsf{x}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ punto interno a Ψ che non appartenga a Γ e una sfera K con centro in x_0 e raggio piccolo quanto basta perché essa non abbia punti in comune con Γ; sia poi Δ un cerchio massimo della K e denotiamo con E_1 ed E_2 le due superfici emisferiche separate da Δ.

Sia S una qualunque superficie la cui frontiera sia $\Gamma \dot\cup \Delta$ e si considerino le superfici $S \dot\cup E_1$ ed $S \dot\cup E_2$, Senza tener conto di Δ trascurabile per le integrazioni, dall'ipotesi (α) ricaviamo

$$\widetilde{\iint}_{S \dot\cup E_1} \Big(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,Q + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R \Big) \;=\; \widetilde{\iint}_{S \dot\cup E_2} \Big(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,Q + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R \Big)\ ;$$

se si toglie dai domini di entrambi gli integrali la S in comune

$$\widetilde{\iint}_{+E_1} \Big(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,Q + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R \Big) \;=\; \widetilde{\iint}_{+E_2} \Big(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,Q + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R \Big)\ .$$

Di conseguenza l'integrale esteso all'intera superficie esterna della sfera K è nullo e per la formula di Ostrogradsky c02(2)

$$(*) \qquad \iiint_K \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \;=\; 0 \quad .$$

Questo e l'arbitrarietà del raggio della sfera K implicano che nel centro x_0 della K:

$$\frac{\partial P(\mathsf{x}_0)}{\partial x} + \frac{\partial Q(\mathsf{x}_0)}{\partial y} + \frac{\partial R(\mathsf{x}_0)}{\partial z} \;=\; 0\ ;$$

infatti se il primo membro fosse diverso da 0 si troverebbe una sferetta $\overline{K}$ con centro in x_0 con l'integrando sempre positivo o sempre negativo, contro la $((*))$ applicata a tale sferetta.

L'arbitrarietà di x_0 dimostra l'implicazione.

I47 e.03 Dim.: $(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$: Cominciamo con l'individuare tre funzioni $A(\mathsf{x})$, $B(\mathsf{x})$ e $C(\mathsf{x})$ che soddisfano le equazioni

$$(1) \qquad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \;=\; P \quad , \qquad \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \;=\; Q \quad , \qquad \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \;=\; R\ .$$

Si constata facilmente che, grazie alla (β), queste relazioni risultano soddisfatte assumendo per esempio, quale che sia $\langle x_0, y_0, z_0 \rangle \in \Psi$:

$$(2) \quad A \;=\; -\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}\overline{y}\,R(x, \overline{y}, z_0) + \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\overline{z}\,R(x, y, \overline{z}) \quad , \quad B \;=\; -\int_{z_0}^{z} \mathrm{d}\overline{z}\,P(x, y, \overline{z}) \quad , \quad C \;=\; 0\ .$$

Con questa scelta per la formula di Kelvin-Stokes si ottiene

$$\begin{aligned}(3)\qquad \widetilde{\iint}_S \left(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,P + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,Q + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,R\right) &= \widetilde{\iint}_S \mathrm{d}S\,\left(P\cos\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_x} + Q\cos\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_y} + R\cos\widehat{\mathbf{n}\,\mathbf{e}_z}\right)\\ &= \int_\Gamma \left(\mathrm{d}x\,A + \mathrm{d}y\;B + \mathrm{d}z\;C\right)\end{aligned}$$

e l'integrale finale evidentemente dipendente solo dal contorno delle S ∎

I47 e.04 Un campo vettoriale $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \langle P(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}), R(\mathbf{x})\rangle$ definito in un parallelepipedo Ψ per il quale in tale dominio si abbia

$$\operatorname{div}\mathbf{P} \;=\; \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \;=\; 0$$

viene detto **campo [vettoriale] solenoidale**. Il teorema e01(1) si può quindi enunciare con la frase che segue.

Si considerino un parallelepipedo Ψ con gli spigoli paralleli agli assi di riferimento, una funzione $\Psi(\mathbf{x}) \in \left\lceil \Psi \longmapsto \mathbb{R}^{\times 3} \right\rceil$ continua insieme alle sue derivate parziali prime su Ψ e un arbitrario circuito chiuso Γ interno a Ψ. Il flusso di $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ attraverso la faccia positiva di una superficie S regolare contenuta in Ψ e avente come contorno Γ, flusso espresso da $\iint_{+S} \mathrm{d}S\;\mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$ è indipendente dalla scelta di S sse $\mathbf{P}$ è un campo solenoidale.

Conviene osservare esplicitamente che se $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ è solenoidale, per quanto contenuto nella dimostrazione e03 della implicazione $(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$, esiste un campo vettoriale $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\rangle$ (uno di quelli espressi da e03(2)) tale che $\operatorname{rot}\mathbf{I} \;=\; \mathbf{P}$.

Si ha inoltre

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{T} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) \;=\; 0 \quad .$$

I47 f. cambiamento delle variabili negli integrali tripli

I47 f.01 Consideriamo una figura solida $N \in \mathbf{SetRRRLCQ}$, una funzione $f(x,y,z)$ continua in N e l'integrale triplo

$$\iiint_N \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ f(x,y,z) =: I \quad .$$

Intendiamo studiare come cambia questo integrale quando si effettui un cambiamento di variabili rappresentato dalle formule

$$x = X(u,v,w) \quad , \quad y = Y(u,v,w) \quad , \quad z = Z(u,v,w) \quad ,$$

dove le funzioni X, Y e Z sono funzioni definite in una regione $Q \in \mathbf{SetRRRLCQ}$ e ivi continue insieme alle loro derivate parziali prime, tali che in Q sia $\dfrac{\mathrm{d}(X,Y,Z)}{\mathrm{d}(u,v,w)} \neq 0$ e che stabiliscano una biiezione tra le regioni N e Q.

Introduciamo inoltre le notazioni che seguono:
le scritture vettoriali $\mathbf{x} := \langle x,y,z\rangle$ e $\mathbf{u} := \langle u,v,w\rangle$ per le coordinate e $\mathbf{X}(\mathbf{u}) := \big\langle X(\mathbf{u}), Y(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u})\big\rangle$ per la trasformazione di coordinate in esame;
per la trasformazione inversa di questa scriviamo $\mathbf{U}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^{-1}$, intendendo che sintetizzi le trasformazioni $u = U(x,y,z)$, $v = V(x,y,z)$ e $w = W(x,y,z)$;
per la superficie che delimita la figura N scriviamo $P := \partial N$ e per la superficie che delimita la sua trasformata $Q = \mathbf{U}(N)$ scriviamo $R := \partial Q$;
denotiamo con $\mathsf{Jcb}(\mathbf{U}) := \dfrac{\mathrm{d}(X,Y,Z)}{\mathrm{d}(u,v,w)}$ il determinante jacobiano della trasformazione $\mathbf{U}$.

I47 f.02 Stabiliamo una relazione tra il volume di una figura solida limitata, chiusa e cubabile $M \subseteq N$ e quello della sua trasformata $M' = \mathbf{U}(M) \subseteq N$; per questo scopo introduciamo le notazioni $V := \boldsymbol{Vol}(M)$ e $V' := \boldsymbol{Vol}(M')$.

La superficie R sia rappresentata dalle equazioni parametriche

$$u = \overline{u}(\zeta,\eta) \quad , \quad v = \overline{v}(\zeta,\eta) \quad , \quad w = \overline{w}(\zeta,\eta) \quad ,$$

dove $\langle\zeta,\eta\rangle$ vari in una regione bidimensionale Ω del piano reale riferito alle coordinate ζ e η.
Di conseguenza la superficie P viene rappresentata dalle equazioni

$$x = X\Big(\overline{u}(\zeta,\eta),\overline{v}(\zeta,\eta),\overline{w}(\zeta,\eta)\Big)\ ,\ y = Y\Big(\overline{u}(\zeta,\eta),\overline{v}(\zeta,\eta),\overline{w}(\zeta,\eta)\Big)\ ,\ z = Z\Big(\overline{u}(\zeta,\eta),\overline{v}(\zeta,\eta),\overline{w}(\zeta,\eta)\Big)\ .$$

Introduciamo due funzioni del punto variabile sulla superficie P, cioè della coppia $\langle\zeta,\eta\rangle$ che varia nella Ω: scriviamo $\mathrm{d}P$ l'area infinitesima della P e C_z il coseno dell'angolo che il versore normale esterno della P $\mathbf{n}$ forma con $\mathbf{e}_z$. Per quanto visto in $\mathsf{b05}(2)$, introdotto $\xi \in \{-1,+1\}$, si ottiene

$$V \;=\; \widetilde{\iint}_P \mathrm{d}P\ Z\,C_z \;=\; \xi \iint_\Omega \mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta\ Z\Big(\overline{u}(\zeta,\eta),\overline{v}(\zeta,\eta),\overline{w}(\zeta,\eta)\Big)\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)} \quad .$$

Ora con semplici manipolazioni delle derivate parziali si trova

$$\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)} \;=\; \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(v,w)}\,\frac{\mathrm{d}(v,w)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)} + \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(w,u)}\,\frac{\mathrm{d}(w,u)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)} + \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\,\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)}$$

e quindi si giunge a

$$V \;=\; \xi \iint_\Omega \mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta\ Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(v,w)}\,\frac{\mathrm{d}(v,w)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)} + \xi \iint_\Omega \mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta\ Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(w,u)}\,\frac{\mathrm{d}(w,u)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)} + \xi \iint_\Omega \mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta\ Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\,\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(\zeta,\eta)}\ .$$

Introduciamo ora alcune funzioni del punto $\langle\zeta,\eta\rangle$ variabile su Ω; scriviamo C_u, C_v e C_w per i coseni direttori della normale esterna alla N rispetto ai versori $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$ ed $\mathbf{e}_w$ e denotiamo con $\mathrm{d}R$ l'areola infinitesima della superficie R. Otteniamo quindi

$$V \;=\; \xi \widetilde{\iint}_R \mathrm{d}R\; Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(v,w)}\,C_u + \xi \widetilde{\iint}_R \mathrm{d}R\; Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(w,u)}\,C_v + \xi \widetilde{\iint}_R \mathrm{d}R\; Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\,C_w$$

e per la formula di Gauss c01(1)

$$V \;=\; \xi \iiint_R \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w\;\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(v,w)}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(w,u)}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(Z\,\frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\right)\right] \quad .$$

Svolgendo le derivazioni nell'integrando si ottiene $V \;=\; \xi \iiint_R \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w\;J(u,v,w)$ e quindi

$$V \;=\; \iiint_R \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}w\;|J(u,v,w)| \quad .$$

I47 f.03 Calcoliamo l'integrale triplo dipendente dai parametri reali α, β, γ e $h>0$ avente come dominio il tetraedro T insieme dei punti per i quali $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ e $x+y+z<h$, cioè il solido ritagliato nel primo ottante dal piano che interseca ciascuno degli assi ortogonali in un punto a distanza h dall'origine:

$$I \;:=\; \iiint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\frac{f(x+y+z)}{(1+\alpha\,x+\beta\,y+\gamma\,z)^3} \;=\; \int_0^h \mathrm{d}x\int_0^{h-x}\mathrm{d}y\int_0^{h-x-y}\mathrm{d}z\,\frac{f(x+y+z)}{(1+\alpha\,x+\beta\,y+\gamma\,z)^3}\;.$$

Introdotte le variabili $r:=x+y+z$, $s:=\dfrac{x}{x+y+z}$ e $t:=\dfrac{y}{y+z}$, si trovano le equazioni della trasformazione inversa $x=r\,s$, $y=r(1-s)t$ e $t=\dfrac{y}{y+z}$. Da queste si ricava lo jacobiano $\dfrac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\mathrm{d}(r,s,t)}=r^2(1-s)$ e quindi, introdotte $A:=1+\alpha\,r\,s+\gamma\,r(i-s)$ e $B:=(\beta-\gamma)r(1-s)$, si ottiene l'espressione dell'integrale nelle nuove variabili che ha come dominio il parallelepipedo trasformato di T $\quad T':=\{0\le r\le h\ ,\ 0\le s\le 1\ ,\ 0\le t\le 1 :|\ \langle r,s,t\rangle\}$

$$I \;=\; \iiint_{T'} \mathrm{d}r\;\mathrm{d}\,s\,\mathrm{d}t\,\frac{f(r)\,r^2(1-s)}{(A+B\,t)^3}\;.$$

Per esso si ottiene

$$I \;=\; \int_0^h \mathrm{d}r\;r^2\,f(r)\int_0^1 \mathrm{d}\,s\,(1-s)\int_0^1\frac{\mathrm{d}T}{(A+B\,t)^3} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^h \mathrm{d}r\;r^2\,f(r)\int_0^1\mathrm{d}\,s\,(1-s)\,\frac{2A+B}{A^2(A+B)^2}\;.$$

Introdotti anche $u:=1-s$, $a:=1+\alpha\,r$, $b:=(\alpha-\beta)\,r$ e $c:=(\alpha-\gamma)r$, parametri che consentono di affermare $A=a-c(1-s)$, $A+B=a+b(1-s)$, e $A+B=2\,a-(b+c)(1-c)$, si ottiene

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,s\;(1-s)\,\frac{2\,A+B}{A^2(A+B)^2} \;=\; \int_0^1\mathrm{d}\,s\,\frac{(1-s)[2\,a-(b+c)(1-s)]}{[a-b(1-s)]^2\,[a-c(1-s)]^2} \;=$$

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\;\frac{u\,[2a-(b+c)u]}{(a-b\,u)^2(a-c\,u)^2} \;=\; \frac{1}{b-c}\int_0^1\left(\frac{1}{(a-b\,u)^2}-\frac{1}{(a-c\,u)^2}\right) \;=\; \frac{1}{a(a-b)a-c)}\;.$$

In conclusione si ottiene

$$I \;=\; \frac{1}{2}\int_0^h \mathrm{d}r\;\frac{r^2\,f(r)}{a(a-b)(a-c)} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^h \mathrm{d}r\;\frac{r^2\,f(r)}{(1+\alpha\,r)(1+\beta\,r)(1+\gamma\,r)}\;,$$

espressione che riduce il calcolo dell'integrale triplo a un integrale su un dominio reale (intervallo).

I47 f.04 Un importante cambiamento di coordinate per lo spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ riguarda il passaggio dalle coordinate cartesiane ortogonali alle coordinate sferiche, cambiamento governato dalle relazioni

$$x = r\,\sin\,\theta\,\cos\,\phi \quad , \quad y = r\,\sin\,\theta\,\sin\,\phi \quad , \quad z = r\,\cos\,\theta \qquad \text{con } \theta \in \Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big]\,,\ \phi \in \Big[0,2\pi\Big)\,.$$

Per il corrispondente determinante jacobiano si trova $\dfrac{\mathrm{d}(x,y,z)}{\mathrm{d}(r,\theta,\phi)} \;=\; r^2\,\sin\,\theta$ e quindi per due figure solide corrispondenti R ed R'

$$\iiint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,f(x,y,z) \;=\; \iiint_{R'} dr\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\;f\Big(r\,\sin\,\theta\,\cos\,\phi\,,\,r\,\sin\,\theta\,\sin\,\phi\,,\,r\,\cos\,\theta\Big)\,r^2\,\sin\,\theta\,.$$

In particolare tra i volumi si ha la relazione

$$\boldsymbol{Vol}(R) \;=\; \iiint_{R'} dr\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\;r^2\,\sin\,\theta\,.$$

I47 f.05 L'espressione $dr\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\;r^2\sin\,\theta$ viene chiamata **elemento infinitesimo di volume in coordinate sferiche**; esaminiamone il significato geometrico.

Consideriamo i tre sistemi di superfici costituiti
dalle sfere di centro nell'origine $O = \mathbf{0}_3$ aventi raggi costanti $r = \overline{r}$,
dai coni con il vertice in O aventi per asse di rotazione Oz e aventi come latitudine (angolo conico) $\theta = \overline{\theta}$,
dai piani contenenti Oz caratterizzati dalla longitudine $\phi = \overline{\phi}$.

I corrispondenti elementi di volume riguardano il generico solido compreso tra le sfere aventi raggio r e raggio $r + dr$, tra i coni aventi latitudini θ e $\theta + \mathrm{d}\theta$ e tra i piani aventi longitudini ϕ e $\phi + \mathrm{d}\phi$.

Questo solido, a meno di infinitesimi di ordine 2 o più, può considerarsi un tronco di prisma, o anche come un cuboide, con altezza dr, e lati rimanenti di lunghezza $r\,\mathrm{d}\theta$ ed $r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$; il suo volume è quindi $dr\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\;r^2\sin\,\theta$.

I47 f.06 Consideriamo il solido delimitato dai due coni con latitudini θ_1 e θ_2 ($> \theta_1$ e da una superficie di equazione $r = R(\theta,\phi)$. Per il suo volume si ottiene:

$$\boldsymbol{Vol} \;=\; \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\,\sin\,\theta\int_0^{R(\theta,\phi)}\mathrm{d}r\;r^2 \;=\; \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\,R(\theta,\phi)^3\,\sin\theta\,.$$

Consideriamo invece il solido ottenuto dalla rotazione di $2\,\pi$ intorno all'asse Oz della curva di $r = R(\theta)$ per $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$. Per il suo volume si trova

$$V \;=\; \frac{2\,\pi}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\,\sin\,\theta\,R(\theta,\phi)^3\,.$$

In particolare per il volume della sfera di raggio R si ha

$$V \;=\; \frac{2\,\pi}{3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\,R^3\,\sin\,\theta \;=\; \frac{2\,\pi}{3}\,R^3\,\Big[-\cos\,\theta\Big]_0^{\pi} \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,.$$

I47 f.07 Consideriamo la parte ottava Q dell'ellissoide di equazione $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ con $a,b,c>0$ che soddisfa le disequazioni $0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2}$ e $z\ge 0$ e calcoliamo l'integrale

$$I \;:=\; \iiint_Q \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^{\eta}\;,$$

con $\eta\in\mathbb{R}_+$. Passando alle variabili $\overline{x}\;:=\;x/a$, $\overline{y}\;:=\;y/b$, $\overline{z}\;:=\;z/c$, si trova

$$\textbf{\textit{Vol}}(Q)\;=\;a\,b\,c\int_Q \mathrm{d}\overline{x}\,\mathrm{d}\overline{y}\,\mathrm{d}\overline{z}\,\left(\overline{x}^2+\overline{y}^2+\overline{z}^2\right)^{\eta}\;.$$

Introducendo poi le coordinate sferiche si ottiene

$$\textbf{\textit{Vol}}(Q)\;=\;a\,b\,c\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\,\sin\theta\int_0^1\mathrm{d}r\;r^{2\eta+2}\;=\;\frac{2\,\pi\,a\,b\,c}{2\,\eta+3}\;.$$

I47 g. area di una superficie secondo Minkovski

I47 g.01 Consideriamo una superficie S individuata dalle espressioni $x = X(u,v)$, y$= Y(u,v)$ e $z = Z(u,v)$ con $\langle u,v\rangle$ punto variabile in una regione $D \in$ **SetRRLCQ** e con le funzioni X, Y e Z continue su D insieme con le loro derivate parziali prime.
Come si è visto in precedenza, se in D si ha $\dfrac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)} \neq 0$ l'area della superficie S è data da

$$\boldsymbol{Area}(S) \;=\; \iint_D \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\sqrt{E\,G - F^2}\;.$$

I47 g.02 Consideriamo anche il solido $R(\epsilon)$ costituito dai punti di un segmento di lunghezza $2\,\epsilon$ il cui punto medio viene fatto muovere su tutti i punti della superficie S e per il suo volume scriviamo $V(\epsilon) := \boldsymbol{Vol}(R(\epsilon))$.

(1) Prop.: $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\frac{V(\epsilon)}{2\,\epsilon} \;=\; \boldsymbol{Area}(S)\;.$

Dim.: Denotiamo con $C_x(u,v)$, $C_y(u,v)$ e $C_z(u,v)$ i coseni direttori della normale alla S nel punto di questa determinato da $\langle u,v\rangle \in D$ tramite le funzioni X, Y e Z.

Il generico punto di R è caratterizzato dalle coordinate

$$\overline{x} = X(u,v) + \eta\,C_x(u,v)\;,\;\; \overline{y} = Y(u,v) + \eta\,C_y(u,v) \;\text{ e }\; \overline{z} = Z(u,v) + \eta\,C_z(u,v)\;,\;\; \text{per ogni }\; \eta \in \big[-\epsilon,\epsilon\big]\;.$$

Si trova quindi

$$\frac{V(\epsilon)}{2\,\epsilon} \;=\; \frac{1}{2\,\epsilon}\iiint_R \mathrm{d}\overline{x}\,\mathrm{d}\overline{y}\,\mathrm{d}\overline{z} \;=\; \frac{\xi}{2\,\epsilon}\iiint_G \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\mathrm{d}\eta\,\frac{\mathrm{d}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{\mathrm{d}(u,v,w)} \quad \text{con} \quad \xi = \pm 1 \quad ,$$

dove G denota il campo di variabilità di $\langle u,v,\eta\rangle$, ovvero dove $G := D \times \big[-\epsilon,\epsilon\big]$. Si osserva poi che

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{\mathrm{d}(u,v,w)} \;=\; \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \eta\,\frac{\partial C_x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} + \eta\,\frac{\partial C_y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} + \eta\,\frac{\partial C_z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} + \eta\,\frac{\partial C_x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} + \eta\,\frac{\partial C_y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} + \eta\,\frac{\partial C_z}{\partial v} \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \quad ;$$

si può quindi affermare

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})}{\mathrm{d}(u,v,w)} \;=\; \sqrt{E\,G - F^2} + \eta\,H(u,v) + \eta^2\,K(u,v)\;,$$

con E, F, G, H e K indipendenti da η.
Sostituendo nella $(*)$, effettuando l'integrazioone rispetto ad η tra ϵ e $+\epsilon$ e in parte l'integrazione rispetto a $\langle u,v\rangle$, si ottiene

$$\frac{V(\epsilon)}{2\,\epsilon} \;=\; \iint_D \mathrm{d}u\;\mathrm{d}v\;\sqrt{E\,G - F^2} + \epsilon^2\,L\;,$$

con L indipendente da ϵ; passando al limite per $\epsilon \to 0$ si ottiene l'enunciato ∎

I47 g.03 Dal risultato precedente segue la possibilità di dare una definizione di area di una superficie opportunamente regolare alternativa di quella data in precedenza. Si può quindi considerare la definizione

$$\boldsymbol{Area}(S) \;:=\; \lim_{\epsilon\to 0}\frac{V(\epsilon)}{2\,\epsilon}\;.$$

Questa definizione è stata proposta da Hermann Minkowski .

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php