1

Capitolo I45
integrali tripli e multipli

Contenuti delle sezioni

5 pagine

I450.01 In questo capitolo viene introdotta la nozione di integrale triplo, riprendendo molte argomentazioni usate in I44 per gli integrali doppi; inoltre si introduce a grandi linee la costruzione più generale concernente gli integrali multipli.

Qui sono anche precisate varie nozioni riguardanti le regioni in $\mathbb{R}^{\times 3}$ ed i sottoinsiemi tendenzialmente regolari di un generico spazio d-dimensionale sui reali $\mathbb{R}^{\times d}$.

Inizialmente si definiscono gli integrali di funzioni limitate su regioni limitate. Anche per questi tipi di integrali si impone l'opportunità di introdurre integrali generalizzati riguardanti funzioni con domini reali illimitati e funzioni con valori reali illimitati.

I45 a. integrali tripli

I45a.01 In queste pagine incontreremo sistematicamente regioni-RRR, cioè regioni dello spazio 3D, ossia sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{\times 3}$, dotati di punti interni e connessi, taluni semplicemente connessi, altri molteplicemente connessi.

Il maggiore interesse è rivolto alle regioni-RRR cubabili, ovvero regioni alle quali si possa attribuire un volume, cioè una valutazione costituita da un numero reale che estende il volume definito nella geometria elementare e che gode di proprietà di invarianza che lo rendono utile in molte applicazioni a partire da quelle della fisica dei corpi rigidi.

Il volume di una regione-RRR D viene identificato da notazioni come $\boldsymbol{Vol}(D)$; tuttavia in vari sviluppi circoscritti conviene utilizzare notazioni più concise come $\mathcal{V}(D)$.

Denotiamo con **SSRRR** la collezione delle regioni-RRR, con **SSRRRC** la collezione delle regioni-RRR chiuse, con **SSRRRLC** la collezione delle regioni 3D limitate e chiuse e con **SSRRRLCQ** la collezione delle regioni-RRR chiuse, limitate e quadrabili.

Nel seguito considereremo sistematicamente la generica regione di questo genere introducendola con un suo identificatore, tipicamente $D \in$ **SSRRRLCQ**.

Un sottoinsieme N di punti interni di una regione cubabile R si dice **insieme negligibile-RRR** sse è costituito da un insieme finito di superfici continue σ_i per $i = 1, ..., m$ (che potrebbero ridursi a semplici linee continue o a semplici punti), insieme tale che per ogni $\epsilon > 0$ (ipap) si possono individuare m regioni aperte cubabili G_1, ..., G_m tali che per $i = 1, ..., m$ si abbia $\sigma_i \subset G_i \subset D$ e $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Vol}(G_i) < \epsilon$, pur essendo $\inf_{P\in I \; Q\in(D\setminus I)} \text{dist}(P, Q) > 0$.

In parole povere un insieme trascurabile-RRR di una regione R cubabile è un insieme finito di superfici continue contenute in D che possono essere racchiuse in regioni aperte di volume complessivo arbitrariamente piccolo.

I45a.02 Per suddivisione finita di una regione $R \subset \mathbb{R}^{\times 3}$ intendiamo una copertura $\mathcal{D}$ dell'insieme tridimensionale R costituita da un numero finito di insiemi, che diremo **porzioni della suddivisione** $\mathcal{D}$, le cui mutue intersezioni sono costituite al più da insiemi trascurabili-RRR.

Anche le suddivisioni finite di una regioni 3D costituiscono un insieme parzialmente ordinato dalla relazione di crescente raffinatezza che esprimiamo con relazioni della forma $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{E}$, intendendo che ciascuna di esse è verificata sse ogni porzione di $\mathcal{E}$ è contenuta, a meno di un insieme trascurabile-RRR, in una porzione della $\mathcal{D}$.

Denotiamo con **SbdvFCubl**$_D$ l'insieme delle suddivisioni di una regione D cubabile costituite da collezioni finite di porzioni di D cubabili.

Sia $\mathcal{D} = \{i = 1, ..., r \;:|\; D_i\}$ una collezione in **SbdvFCubl**$_D$ e quindi sia $\bigcup_{trasc\, i=1,...,r} D_i = D$.

Per ogni suddivisione $\mathcal{D}$ introduciamo i numeri reali

$$d_{\mathcal{D}} := \max_{i=1,...,r} \text{diag}(D_i) \quad , \quad \forall i = 1, 2, ..., |\mathcal{D}| \;\vdots\; V_i := \boldsymbol{Vol}(D_{\mathcal{D},i})$$

ed osserviamo che $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{E} \implies d_{\mathcal{D}} \geq d_{\mathcal{E}}$.

Osserviamo che data una qualsiasi suddivisione $\mathcal{D}$ di un insieme D avente diametro massimo $d_{\mathcal{D}}$, è possibile trovare una suddivisione $\mathcal{E}$ che presenta come diametro massimo $d_{\mathcal{E}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, d_{\mathcal{D}}$; basta assegnare

ad $\mathcal{E}$ per ciascuna delle porzioni D_i di $\mathcal{D}$ le 8 parti ottenute dimezzando le estensioni nelle tre dimensioni della D_i.
Va rilevato che il fattore $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ garantisce che la diminuzione del diametro massimo si possa ottenere anche per porzioni sferiche o cubiche con due vertici opposti disposti verticalmente.

Si possono quindi individuare successioni di suddivisioni con diametro massimo tendente a 0 e di conseguenza si può far uso di passaggi al limite di costruzioni basate sulle duddivisioni per diametro massimo delle porzioni tendente a 0.

Utilizzeremo anche l'operazione di unione di insiemi disgiunti a meno di una differenza simmetrica trascurabile-RRR; per questa operazione useremo le notazioni $\dot{\cup}_{negl}$ e $\dot{\cup}_{negl}{}_{i=1}^{r}$.

I45a.03 Sia $D \in$ **SetRRRLCQ** e si abbia la funzione-RRRtR $f(x, y, z) = f(\mathsf{x})$ del genere $\lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ limitata per la quale scriviamo $m := \inf_{\mathsf{x}\in D} f(x, y)$ ed $M := \sup_{\mathsf{x}\in D} f(x, y)$.
Introduciamo inoltre per ogni $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_{|\mathcal{D}|}\} \in$ **SbdvFCubl**$_D$:

$$A_{\mathcal{D},i} := \boldsymbol{Vol}(D_i) \quad , \quad m_{\mathcal{D},i} := \inf_{\langle x,y\rangle\in D_{\mathcal{D},i}} f(x, y) \quad , \quad M_{\mathcal{D},i} := \inf_{\langle x,y\rangle\in D_{\mathcal{D},i}} f(x, y) \quad .$$

$$\mathsf{Suminf}(\mathcal{D}, f) := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathcal{D},i}\, m_{\mathcal{D},i} \quad , \quad \mathsf{Sumsup}(\mathcal{D}, f)_{\mathcal{D},i} := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathcal{D},i}\, M_{\mathcal{D},i} \quad ;$$

le ultime due quantità sono dette, risp., somma inferiore e somma superiore della f relative alla suddivisione $\mathcal{D}$.

Come per le funzioni bivariate, si definisce **integrale inferiore** della f in D

$$\underline{\iint_D} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ f(x, y) := \sup_{\mathcal{D}\in\mathsf{SbdvFCubl}_D} \mathsf{Suminf}(\mathcal{D}, f)$$

e si definisce **integrale superiore** della f in D

$$\overline{\iint_D} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ f(x, y) := \inf_{\mathcal{D}\in\mathsf{SbdvFCubl}_D} \mathsf{Sumsup}(\mathcal{D}, f) \ .$$

La funzione $f(x, y, z)$ si dice **funzione integrabile-RRR** su D sse coincidono il suo integrale inferiore e il suo integrale superiore.
In questo caso il loro valore si dice **integrale triplo** della f in D e lo si denota con

$$\iiint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ f(x, y, z) \qquad \text{o con} \qquad \iiint_D \mathrm{d}\mathsf{x}\, f(\mathsf{x}) \ .$$

Inoltre la funzione $f(x, y, z)$ si dice **funzione integrabile-RRR**.

I45a.04 Anche in 3D risulta utile servirsi della oscillazione della funzione a valori reali $f(x, y, z)$ entro un insieme $E \subseteq \mathsf{dom}(f)$ che scriviamo $\boldsymbol{oscl}(f, E) := \sup_{\mathsf{x}\in E} f(\mathsf{x}) - \inf_{\mathsf{x}\in E} f(\mathsf{x})$.

(1) Teorema (**teorema di Riemann**) Consideriamo $D \in$ **SetRRRLCQ**; una funzione $f(x, y, z) \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ limitata è integrabile-RRR in D sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) **SbdvFCubl**$_D \ni \mathcal{D} =: \{D_1, ..., D_r\}$ tale che sia

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{Vol}(D_i) \cdot \boldsymbol{oscl}(f, D_i) < \epsilon \ .$$

(2) Coroll.: Se $f(x, y, z)$ è integrabile-RRR in ogni E sottoinsieme cubabile di $\mathsf{dom}(f)$, allora $f(x, y, z)$ è integrabile-RRR in E ▮

(3) Coroll.: Se $f(x, y, z)$ è integrabile-RRR in E sottoinsieme cubabile di $\mathsf{dom}(f)$, allora $|f(x, y, z)|$ è integrabile-RR in E ▮

I45a.05 Anche in 3D si individuano facilmente alcune funzioni che non sono integrabili-RRR.
I più semplici riguardano le funzioni definite in domini semplici come i parallelepipedi $\{a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d\ :|\ \langle x, y\rangle\}$ le quali assumono il valore 0 nei punti con le tre coordinate razionali ed il valore 1 negli altri punti del dominio. In qualsiasi sottoinsieme del dominio con diametro positivo queste funzioni hanno come estremo superiore 1, come estremo inferiore 0 e come oscilazione 1, non riducibile a valore piccolo a piacere.

I45a.06 Un sottoinsieme N di un insieme $D \subset \mathbb{R}^{\times 3}$ limitato, chiuso e cubabile si dice **insieme negligibile-RRR** sse è l'unione di un numero finito di punti, curve piane continue e superfici continue Γ_i, $i = 1, 2, ..., t$ tali che, scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si può costruire per ogni $i = 1, 2, ..., t$ una superficie chiusa K_i al cui interno $^{\searrow}R_i$ appartiene Γ_i ed accade che $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(R_i) < \epsilon$.

Una funzione del genere $\{\mathbb{R}^{\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}\rceil$ si dice **funzione continua a pezzi** o anche funzione generalmente continua nel proprio dominio $D := \mathsf{dom}(f)$ sse in esso è continua escluso al più un sottoinsieme trascurabile di D.

I45a.07 Una funzione-RRRtR $f(x, y, z)$ definita in una regione $D \in$ **SetRRRLCQ** che sia limitata e continua in tutto D a eccezione dei punti di un insieme trascurabile-RRR, possiede l'integrale triplo

(1) $$\iiint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z\ f(x, y, z) \ =\ \lim[\mathcal{D} \in \textsf{SbdvFCubl}\ ,\ d_{\mathcal{D}} \to 0] \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} A_{\mathcal{D},i}\, f(x_i, y_i, z_i)\ .$$

per qualsiasi scelta dei punti $\langle x_i, y_i, z_i\rangle \in D_{\mathcal{D},i}$

(2) Prop.: (**caratterizzazione di Riemann di funzione-RRRtR**) Una funzione $f(x, y, z)$ definita in $D \in$ **SetRRRLCQ** continua a pezzi è integrabile-RRR in D sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che ogni suddivisione di D $^{\searrow}$ $\mathcal{D} = \langle D_1, ..., D_r\rangle$ in parti aventi diametro inferiore a δ si ha

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{Vol}(D_i) \cdot \boldsymbol{oscl}(f, D_i) < \epsilon\ .$$

I45a.08 Conviene segnalare, come si è fatto in 44a08, che per studiare le proprietà di molti integrali tripli, è sufficiente prendere in considerazione suddivisioni del dominio di integrazione costituite da piccoli parallelepipedi con i lati paralleli o all'asse Ox o ad Oy o ad Oz. Se le tre lunghezze dei lati dei parallelepipedi di una suddivisione le scriviamo Δx, Δy e Δz, all'espressione a07(1) si può dare una forma come la seguente:

(1) $$\iiint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ f(x, y, z) \ =\ \lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \sum_i \sum_j \sum_k \Delta z\, \Delta y\, f(x_i, y_j, z_k)\ .$$

Questo giustifica l'adozione del simbolo $\iiint$ per l'integrale triplo.

I45a.09 Integrabilità delle funzioni continue a pezzi

Analogamente a quanto esposto in I44a06 si dimostra che le funzioni continue a pezzi sopra un dominio $D \in$ **SetRRRLCQ** sono integrabili-RRR.

I45 b. teorema di Darboux-Riemann e altre proprietà degli integrali tripli

I45b.01

I45b.02 **(1) Prop.**: Consideriamo la funzione $f(x,y,z)$ integrabile-RRR in $E \subseteq \mathsf{dom}(f)$; accade che $f(x,y,z)$ è integrabile-RRR i n ogni sottoinsieme di E chiuso e cubabile ▮

(2) Prop.: $f(x)$ integrabile-RRR in $E \subseteq \mathsf{dom}(f) \quad\Longrightarrow\quad \forall S \in \mathfrak{P}(E) \cap \mathbf{SetRRRQdr}$:
$|f(x)|$ è integrabile-RRR in S ▮