1

Capitolo I44
integrali doppi

Contenuti delle sezioni

20 pagine

I440.01 Questo capitolo è dedicato alla nozione di integrale doppio, costruzione per la quale useremo anche il termine "integrale sopra una regione piana" o in breve "integrale-RR".

Preliminarmente sono precisate varie nozioni riguardanti le regioni piane che si rendono necessarie nel seguito.

In queste pagine sono anche esposte le formule che consentono di ridurre alcuni integrali doppi a due successive integrazioni semplici, le formule di Gauss e di Green per il piano, le trasformazioni di coordinate e l'estensione degli integrali, chiamati quindi generalizzati, per includere, se possibile, integrali di funzioni-RRtR a valori illimitati e integrali di funzioni-RRtR su domini illimitati.

I44 a. figure piane quadrabili

I44a.01 In queste pagine ci occupiamo di vari tipi di insiemi di punti-RR, cioè di elementi di **SetRR**.

Per primi sono stati considerati i sottoinsiemi delimitati da poligonali chiuse orientate nonintrecciate ai quali è stata attribuita un'area con segno.
Più precisamente tra questi insiemi si distinguono i poligoni aperti, i loro corrispondenti chiusi e le loro frontiere.
Se P denota un tale poligono aperto, abbiamo denotato [B46c01] con $\boldsymbol{Adrn}(P)$ il corrispondente poligono chiuso e con ∂P la sua frontiera, cioè $\overline{P} \setminus P$; spesso la notazione $\boldsymbol{Adrn}(P)$ si può sostituire con la più semplice $\overline{P}$.
Abbiamo inoltre tutti i sottoinsiemi intermedi contenenti P e contenuti in $\overline{P}$, cioè gli insiemi costituiti dai punti di P e da una parte dei punti di ∂P; la loro collezione la chiamiamo **classe-mns di sottoinsiemi** e va denotata con $P \text{ Я } \sim_{mns}$.
A questa classe si attribuisce l'area con segno che denotiamo con $\boldsymbol{Area}(P)$

In particolare si hanno le figure rettangolari-hd alle quali si attribuisce come area il prodotto della base per l'altezza.
Alle figure rettangolari-hd si accostano le figure-RR degeneri che si possono considerare delimitate dalle poligonali costituita da un vettore-RR applicato orizzontale e dal suo vettore-RR opposto: a tali figure piane degeneri si attribuisce area nulla.
L'insieme di queste figure degeneri si generalizza considerando le figure delimitate dalle poligonali costituite da un vettore applicato (in particolare da un vettore applicato verticale) e dal suo vettore applicato opposto: anche a tali figure degeneri si assegna area nulla.

I44a.02 Intendiamo assegnare a un ampio numero di insiemi-RR un'area con segno, valutazione costituita da un numero reale coerente con l'area dei poligoni semplici e alla quale chiediamo di sodisfare un consistente raggruppamento di proprietà.
Gli insiemi di punti-RR dotati di area si dicono **insiemi-RR quadrabili** e la loro collezione la denotiamo con **SetRRQdrb**.
Inoltre denotiamo con **SetRRLCQ** la collezione degli insiemi-RR limitati, chiusi e quadrabili.

Vediamo dunque le proprietà richieste per la valutazione $\boldsymbol{Area}$ delle figure piane.

(1) L'area è invariante per traslazione e per rotazione.
Questo attribuisce all'area un carattere di invariante rispetto ai movimenti rigidi del piano e quindi un pregio di intrinsecità che la rende proficuamente utilizzabile per le applicazioni fisiche.

(2) L'area cambia di segno per riflessione.
Si osserva che la riflessione nel caso di un poligono cambia l'orientazione della poligonale chiusa sua frontiera e questo risulta in accordo con il cambiamento di segno dell'area.

(3) Dati due insiemi-RR A e B quadrabili e disgiunti alla loro unione si attribuisce cme area $\boldsymbol{Area}(A \dot\cup B) := \boldsymbol{Area}(A) + \boldsymbol{Area}(B)$.
Anche questa proprietà, chiamata additività dell'area, la rende una valutazione utilizzabile per molte applicazioni.
In particolare se si considera un regione aperta A che si può separare con un segmento orizzontale **s** in due sottoregioni aperte A_1 e A_2 abbiamo che $\boldsymbol{Area}(A) = \boldsymbol{Area}(A_1) + \boldsymbol{Area}(A_2)$, in quanto al circuito degenere **s** $\ominus$ **s** deve corrispondere un'area nulla.

Questa particolare situazione si generalizza facilmente in seguito delle richieste di invarianza per traslazione e rotazione e della stessa additività.

I44a.03 Con l'additività si trova che ogni poligonale è un insieme negligibile-RR e lo stesso si può affermare per ogni curva rettificabile e per ogni insieme-RR costituito da un insieme finito di curve rettificabili (eventualmente orientate) e di punti-RR.

Abbiamo dunque che ogni circuito chiuso nonintrecciato rettificabile (eventualmente orientato) delimita una regione semplicemente connessa aperta A che possiede un'area uguale alla sua corrispondente regione chiusa $\overline{A}$ e a tutte le figure appartenenti alla collezione $A \sim_{mns}$.
Le aree dunque possono essere attribuite alle regioni-mns o equivalentemente alle loro regioni aperte o alle corrispondenti regioni chiuse.

Grazie alla additività si può attribuire un'area alle unioni di regioni quadrabili prive di punti interni comuni.
Andando verso la suddivisione invece che verso l'aggregazione abbiamo che l'area di un insieme-RR quadrabile si può ottenere come somma delle aree delle sue porzioni ottenute con tagli effettuati con curve rettificabili.

Si intravvede quindi che si ha la possibilità di attribuire un'area a una grande varietà di insiemi-RR oppure di classi-mns di insiemi finiti di regioni.

Per la pratica computazionale si tratta di individuare procedimenti che consentano di individuare concretamente le aree di un ampi gamma di figure; in particolare possono essere utili espressioni algebriche ma non solo che permettano di determinare aree di interesse applicativo.

Va inoltre segnalato che negli sviluppi riguardanti figure-RR quadrabili e aree risulta opportuno individuare con una certa elasticità le suddette figure con identificazioni semplificative che rinuncino a distinguere insiemi aperti, corrispondenti insiemi chiusi e classi-mns, confidando che una lettura consapovole possa evitare concrete ambiguità

I44a.04 In queste pagine ci occupiamo primariamente di regioni piane, cioè di P sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ connessi che posseggono punti interni e punti di frontiera.
Si distinguono le regioni piane aperte costituite solo da punti interni e le regioni piane chiuse che contengono tutti i loro punti di frontiera.
Aggiungendo ad una regione aperta D l'insieme dei suoi punti di frontiera ∂D si ottiene la regione chiusa che spesso si denota cn $\overline{D}$ e che si chiama chiusura di D
Si hanno inoltre le regioni che contengono una regione aperta e sono contenute nella chiusura di questa.

Si vengono quindi a definire le regioni-mns, regioni modulo un insieme di punti di misura nulla, insiemi di figure piane che differiscono solo per l'appartenenza o meno di punti di frontiera.

Alle regioni piane cerchiamo di attribuire un'area, cioè una valutazione costituita da un numero reale che in un primo momento chiediamo appartenga a $\mathbb{R}_+$, che sia coerente con le aree attribuite ai poligoni nella geometria elementare e alle poligonali chiuse nonintrecciate e che gode della proprietà della additività (che stiamo per precisare).

Un sottoinsieme N di punti interni di una regione quadrabile R si dice **insieme-RR negligibile** o anche insieme-RR trascurabile sse gli si può attribuire un'area nulla (ossia ricopribile infinitesimalmente). Questo accade a ogni insieme costituito da un insieme finito di curve continue Γ_i per $i = 1, ..., m$ (che potrebbero ridursi a semplici punti) tale che per ogni $\epsilon > 0$ (ipap) si possono individuare m regioni aperte quadrabili G_1, ..., G_m tali che per $i = 1, ..., m$ si abbia $\Gamma_i \subset G_i \subset D$ e $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{Area}(G_i) < \epsilon$, pur essendo $\inf_{P \in I} \inf_{Q \in (D \setminus I)} \text{dist}(P, Q) > 0$.

In parole povere un insieme negligibile-RR di una regione R quadrabile è un insieme finito di curve continue contenute in D che possono essere racchiuse in regioni aperte di area complessiva arbitrariamente piccola.

Chiaramente sono negligibili-RR i sottoinsiemi di una D costituiti da un numero finito di curve rappresentabili con funzioni continue e da un numero finito di punti.

I44 b. integrali su regioni piane

I44b.01 Ricordiamo che per suddivisione finita di una regione piana $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ intendiamo una copertura $\mathcal{D}$ dell'insieme-RR R costituita da un numero finito di insiemi chiamati **porzioni della suddivisione** $\mathcal{D}$ le cui mutue intersezioni sono vuote o negligibili-RR.

Denotiamo con Sbdv_S l'insieme delle suddivisioni di un insieme S e più specificamente con SbdvF_S il suo sottoinsieme costituito dalle suddivisioni finite di S.

Si osserva che l'aggregato Sbdv_R delle suddivisioni dell'insieme-RR R costituisce un insieme parzialmente ordinato di collezioni dalla relazione $\sqsubseteq$ la quale in un enunciato della forma $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathbf{E}$ afferma che ogni porzione della suddivisione $\mathcal{E}$ di R è contenuta, a meno di un insieme negligibile-RR, in una porzione della suddivisione $\mathcal{D}$ della stessa R.
La stessa considerazione vale quando ci si limita a considerare le suddivisioni finite di una regione-RR.

Più specificamente prendiamo in considerazione le suddivisioni delle regioni quadrabili R e denotiamo con $\mathsf{SbdvFQdrl}_R$ l'insieme delle suddivisioni finite di R le cui porzioni sono solo regioni quadrabili.

In particolare si possono considerare le suddivisioni delle regioni R quadrabili costituite da collezioni finite di regioni rettangolari-hd (ancora più in particolare da quadrati-hd).

Conviene segnalare che queste definizioni vanno considerate come casi particolari della definizione di aggregato delle suddivisioni finite misurabili di sottoinsiemi di uno spazio metrico.

I44b.02 Sia $\mathcal{D} = \{i = 1, ..., r :| R_i\}$ una collezione appartenente a $\mathsf{SbdvFQdrl}_R$ opportunamente sequenzializzata; per essa dunque abbiamo ${}_{mns}\bigcup_{i=1,\ldots,r}^{(mns} R_i \;=\; R$.
Ad essa associamo i seguenti numeri reali

$$mxd_{\mathcal{D}} \;:=\; \max_{i=1,\ldots,r} \operatorname{diam}(R_i) \quad \text{e} \quad \forall i = 1, ..., n \;\vdots\; A_i := \boldsymbol{Area}(R_i)$$

Per essi si prova facilmente che, date $\mathcal{D}, \mathcal{E} \in \mathsf{SbdvFQdrl}_R$, $\mathcal{D} \sqsubseteq \mathcal{E} \implies mxd_{\mathcal{D}} \geq mxdd_{\mathcal{E}}$.

Osserviamo che data una suddivisione $\mathcal{D}$ di un insieme-RR R con diametro massimo $mxd_{\mathcal{D}}$, è possibile trovare una suddivisione $\mathcal{E}$ con massimo diametro $mxd_{\mathcal{E}} \;\leq\; \dfrac{1}{\sqrt{2}} mxd_{\mathcal{D}}$; basta assegnare ad $\mathcal{E}$ per ciascuna delle porzioni R_i di $\mathcal{D}$ le 4 parti ottenute dimezzando le sue estensioni orizzontali e verticali.
Conviene rilevare esplicitamente che il fattore $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ garantisce che la diminuzione del diametro massimo si possa ottenere anche per porzioni circolari o quadrate con i lati disposti con inclinazione a 45°.

Queste considerazioni consentono di individuare successioni di suddivisioni con diametro massimo tendente a 0 e di conseguenza aprono l possibilità di far uso di passaggi al limite di costruzioni sulle duddivisioni per diametro massimo tendente a 0.

I44b.03 Osserviamo anche che alternativamente le suddivisioni si possono definire come insiemi di classi di equivalenza tra regioni piane coatituenti classi della relazione di equivalenza $\sim_{mns}$, dove per due regioni piane R_1 ed R_2 si ha $R_1 \sim_{mns} R_2$ sse la differenza simmetrica $R_1 \ominus R_2$ è un insieme negligible-RR.

In questo spirito si possono definire senza difficoltà anche le operazioni di unione, intersezione e complementazione per classi-mns di insiemi-RR per le quali usiamo le notazioni che seguono.
Denotiamo con SetRR_{mns} l'aggregato delle collezioni-mns di insiemi piani e denotiamo on $\mathsf{SetRRNegl}$ la collezione dei sottoinsiemi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di misura nulla, cioè la collezione degli insiemi negligibili-RR.

Consideriamo due insiemi piani A e B e le corrispondenti collezioni-mns $\mathsf{A} = A \sim_{mns}$ e $\mathsf{B} = B \sim_{mns}$.
Diciamo unione-mns di A e B la collezione $\mathsf{A} \cup_{mns} \mathsf{B} := (A \cup B) \sim_{mns}$.
Diciamo intersezione-mns di A e B la collezione $\mathsf{A} \cap_{mns} \mathsf{B} := (A \cap B) \sim_{mns}$.
Diciamo differenza simmetrica tra A e B la collezione $\mathsf{A} \ominus_{mns} \mathsf{B} := (A \ominus B) \sim_{mns}$.
Diciamo differenza insiemistica A senza B la collezione $\mathsf{A} \setminus_{mns} \mathsf{B} := (A \setminus B) \sim_{mns}$
Inoltre scriviamo $\mathsf{A} \dot\cup_{mns} \mathsf{B}$ per denotare la collezione $\mathsf{A} \cup_{mns} \mathsf{B}$ e per affermare che la collezione $\mathsf{A} \cap_{mns} \mathsf{B}$ è costituita solo da insiemi negligibili-mns, ossia per denotare la disgiunzione a meno di una differenza simmetrica negligibile-RR; per la reiterazione di questa operazione useremo notazioni della forma $\dot\bigcup{}^{(mns)}{}_{i=1}^{r}$.

I44b.04 Nel seguito denotiamo con **SetRRLCQ** la collezione degli insiemi-RR limitati, chiusi e quadrabili.

Sia $R \in$ **SetRRLCQ** e si abbia la funzione $f(x,y) = f(\mathsf{x})$ del genere $\lceil R \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ limitata per la quale scriviamo $m := \inf_{\mathsf{x} \in R} f(x,y)$ ed $M := \sup_{\mathsf{x} \in R} f(x,y)$.
Introduciamo per ogni R, per ogni f e per ogni $\mathcal{D} \in \mathsf{SbdvFQdrl}_R$ e per ogni $R_i \in \mathcal{D}$ i valori reali:

$$A_{\mathcal{D},i} := \boldsymbol{Area}(D,i) \quad , \quad m_{\mathcal{D},i} := \inf_{\langle x,y\rangle \in R_i} f(x,y) \quad , \quad M_{\mathcal{D},i} := \inf_{\langle x,y\rangle \in R_i} f(x,y) \quad .$$

$$Suminf(\mathcal{D},f) := \sum_{i=1}^{n} A_{\mathcal{D},i}\, m_{\mathcal{D},i} \quad , \quad Sumsup(\mathcal{S},f) := \sum_{i=1}^{r} A_{\mathcal{D},i}\, M_{\mathcal{D},i} \quad ;$$

le ultime due quantità sono dette, risp., “somma inferiore” e “somma superiore” riguardanti la decomposizione $\mathcal{D}$ e la funzione $f(x,y)$.

Si definisce **integrale inferiore della funzione** f in R

$$\underline{\iint_R} dx\ dy\ f(x,y) := \sup_{\mathcal{D} \in \mathsf{SbdvFQdrl}_R} Suminf(\mathcal{D},f)$$

e si definisce **integrale superiore della funzione** f in D

$$\overline{\iint_R} dx\ dy\ f(x,y) := \inf_{\mathcal{D} \in \mathsf{SbdvFQdrl}_R} Sumsup(\mathcal{D},f) \ .$$

Se questi due numeri reali coincidono il loro valore si dice **integrale doppio della funzione** f in D e si denota con

$$\iint_R dx\ dy\ f(x,y) \qquad \text{o equivalentemente con} \qquad \iint_R d\mathsf{x}\, f(\mathsf{x}) \ .$$

Una tale funzione $f(x,y)$ si dice **funzione integrabile-RR**.

Questo ultimo termine, quando il contesto lo consente, si semplifica nella abbreviazione “funzione integrabile”.
A sua volta “integrale doppio” si può considerare un'abbreviazione del termine più completo “integrale di funzione-RRtR su una regione piana quadrabile”.

I44b.05 Ricordiamo che per oscillazione di una funzione $f \in \lceil \bullet \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ entro un insieme $E \subseteq \mathsf{dom}(f)$ si intende il numero reale nonnegativo $\boldsymbol{oscl}(f,E) := \sup_{\mathsf{x} \in E} f(\mathsf{x}) - \inf_{\mathsf{x} \in E} f(\mathsf{x})$.

(1) Teorema (**teorema di Riemann**) Consideriamo $S \in$ **SetRRLCQ**; una funzione $f(x,y) \in \lceil S \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ limitata è integrabile-RR in S sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) $\mathsf{SbdvFQdrl}_S \ni \mathcal{D} =: \S_1, ..., S_n\}$ tale che sia

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Area}(S_i) \cdot \boldsymbol{oscl}(f,S_i) < \epsilon \ .$$

(2) Coroll.: Se $f(x, y)$ è integrabile-RR in E sottoinsieme quadrabile di $\mathsf{dom}(f)$, allora $f(x, y)$ è integrabile-RR in ogni sottoinsieme di E che sia chiuso e quadrabile ▮

(3) Coroll.: Se $f(x, y)$ è integrabile-RR in E sottoinsieme quadrabile di $\mathsf{dom}(f)$, allora $|f(x, y)|$ è integrabile-RR in E ▮

I44b.06 Il criterio precedente consente di individuare facilmente alcune funzioni che non sono integrabili.

I più semplici riguardano le funzioni definite in domini semplici come i rettangoli della forma $\Big\{a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d :|\ \langle x, y\rangle\Big\}$ le quali assumono il valore 0 nei punti con entrambe le coordinate razionali ed il valore 1 nei punti rimanenti. In qualsiasi sottoinsieme del dominio con diametro positivo queste funzioni hanno come estremo superiore 1, come estremo inferiore 0 e come oscilazione 1, non riducibile a valore piccolo a piacere.

Altre funzioni non integrabili-RR sono quelle che presentano oscillazioni con densità illimitata, per esempio le funzioni date da espressioni come $\sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ in domini come

$$\Big\{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} :|\ \langle x, y\rangle\Big\}\ .$$

I44b.07 Consideriamo la regione $R \in \mathsf{SetRRLCQ}$; una funzione-RRtR del genere $\lceil R \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ si dice funzione-RRtR generalmente continua, o anche **funzione-RRtR continua a pezzi**, in $R := \mathsf{dom}(f)$ sse è limitata in R ed è continua escluso al più un sottoinsieme di R negligibile-RR.

Denotiamo con $\mathsf{FunRRtRPiecnt}_R$ l'insieme delle funzioni continue a pezzi in R.

(1) Prop.: Ogni funzione $f(x, y) \in \mathsf{FunRRtRPiecnt}_R$ è integrabile-RR in R.

Dim.: ▮

I44b.08 Una funzione reale $f(x, y)$ definita in una regione $R \in \mathsf{SetRRLCQ}$ che sia limitata e continua in tutto R a eccezione dei punti di un insieme negligibile-RR, possiede integrale doppio ottenibile, anche grazie a quanto osservato in a02, come

$$(1)\quad \iint_R \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x, y)\ =\ \lim_{\mathcal{D} \in \mathsf{SbdvFQdrl}\,,\, mxd_{\mathcal{D}} \to 0} \sum_{i=1}^{|\mathcal{D}|} A_{\mathcal{D},i}\, f(x_i, y_i) \quad \text{per qualsiasi} \quad \big\langle x_i, y_i \big\rangle \in R_{\mathcal{D},i}\ .$$

(2) Prop.: (**caratterizzazione di Riemann**) Una funzione $f(x, y)$ definita nella regione $R \in \mathsf{SetRRLCQ}$ ivi continua a pezzi è integrabile in tale regione sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che ogni partizione di $R \searrow \mathcal{D} = \big\langle R_1, ..., R_r \big\rangle$ (con $r := |\mathcal{D}|$) in parti di diametro inferiore a δ si ha

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{Area}(R_i) \cdot \boldsymbol{oscl}(f, R_i) < \epsilon\ .$$

I44b.09 Conviene segnalare che per studiare le proprietà di molti integrali doppi è sufficiente prendere in considerazione suddivisioni del dominio di integrazione costituite da piccoli rettangoli-hd, cioè rettangoli con i lati paralleli o all'asse Ox o all'asse Oy.

Se le due lunghezze dei lati dei rettangoli di una suddivisione le scriviamo Δx e Δy, all'espressione a08(1) si può dare una forma come la seguente:

$$(1)\qquad \iint_R \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x, y)\ =\ \lim_{Dltx, \Delta y \to 0} \sum_i \sum_j \Delta x\, \Delta y\, f(x_i, y_j)\ ,$$

dove per ogni i il punto $\langle x_i, y_i \rangle$ denota un arbitrario punto della porzine i della decomposizione.
Questo giustifica l'adozione del simbolo $\iint$ per l'integrale doppio, simbolo che richiama il fatto che tale costruzione può vedersi come passaggio al limite di una sommatoria su due indici.

I44 c. proprietà degli integrali-RR

I44c.01 Nel seguito denotiamo con $\lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$ l'insieme delle funzioni del genere $\lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ limitate e integrabili-RR. Qui faremo ancora riferimento a una regione $D \in$ **SetRRLCQ** e a una funzione $f \in \lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$.

Chiaramente la funzione uguale ad 1 su D è ivi integrabile-RR e si ha $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \boldsymbol{Area}(D)$. L'espressione $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ viene chiamata elemento d'area di D.

Se il dominio di integrazione D è l'unione di due domini D_1 e D_2 privi di punti interni comuni, cioè $D = D_{1m}ns \dot\cup D_2$, entrambi quadrabili, allora

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ \iint_{D_1} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) + \iint_{D_2} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ ▮$$

Questo fatto si esprime dicendo che l'integrazione-RR è una **operazione additiva sul dominio**.

Se f_1 ed f_2 sono funzioni in $\lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$ lo è anche ogni loro combinazione lineare e

$$\begin{aligned} \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ \because \ & \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \Big(c_1\, f_1(x,y) \ + \ c_2\, f_2(x,y)\Big) \\ & = \ c_1 \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f_1(x,y) + c_2 \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f_2(x,y) \end{aligned} \ ▮$$

Questo fatto si enuncia dicendo che l'integrazione-RR è un **funzionale lineare**.

Il prodotto di due funzioni di $\lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$ appartiene anch'esso a questo insieme ▮

Se f_1 ed f_2 sono funzioni in $\lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$ e $\forall \mathsf{x} \in D \ \because \ f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, allora

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f_1(x,y) \ \leq \ \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f_2(x,y) \ ▮$$

Se $f(x,y) \in \lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$, allora è tale anche $|f(x,y)|$ e

$$\left| \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \right| \ \leq \ \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ |f_1(x,y)| \ ▮$$

I44c.02 **teorema della media per funzioni-RRtR** Se $f(x,y), w(x,y) \in \lceil D \longmapsto_{LtdIntgb} \mathbb{R} \rceil$ e $w(x,y)$ non cambia mai segno in D, allora

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y)\, w(x,y) \ = \ \overline{f} \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ w(x,y)$$

dove $\overline{f}$ è un elemento dell'intervallo $[\inf_D(f(x,y)), \sup_D(f(x,y))]$ ▮

Se in particolare $w \in \lceil \mathsf{x} \in D \not\mapsto 1 \rceil$ si ha

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ \overline{f}\, \boldsymbol{Area}(D) \qquad \text{con} \qquad \overline{f} \in [\inf_D(f(x,y)), \sup_D(f(x,y))] \ ▮$$

Se più in particolare $f(x,y)$ è funzione continua sull'intero D, allora

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ f(\overline{\mathsf{x}})\, \boldsymbol{Area}(D) \qquad \text{dove} \quad \overline{\mathsf{x}} \ \text{è un opportuno punto di } D \ ▮$$

Teorema (**teorema di derivazione sotto il segno di integrale-RR**)

Consideriamo l'integrale-RR su un dominio D fisso di una funzione $f(x,y,t)$ con t variabile reale in un certo intervallo chiuso T; inoltre siano continue sia $f(x,y,t)$ che $\dfrac{\partial f(x,y,t)}{\partial t}$ per $t \in T$ e per $\langle x,y\rangle \in D$.
Allora l'integrale $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y,t)$ è funzione derivabile rispetto a t e si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y,t) \ = \ \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \frac{\partial f(x,y,t)}{\partial t} \quad ∎$$

I44c.03 Consideriamo una successione $\big\langle n \in \mathbb{N} :|\ D_n\big\rangle$ di insiemi in **SetRRLCQ** tutti contenenti un punto $\langle\overline{x},\overline{y}\rangle$ e tali che $\lim_{n\to+\infty}\mathrm{diam}(D_i) = 0$. Sia inoltre $f(x,y)$ una funzione continua in tutti i D_n. Vale allora la proprietà di **differenziazione del dominio di integrazione**:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\boldsymbol{Area}(D_n)}\iint_{D_n} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ f(\overline{x},\overline{y})\ .$$

I44 d. calcolo di volumi mediante integrali-RR

I44d.01 Consideriamo ancora una regione $D \in$ **SetRRLCQ**, il suo contorno ∂B ed una funzione $f \in \lceil D \longmapsto_{Ltd} \mathbb{R} \rceil$. Chiamiamo **cilindroide** la figura-RRR avente come base D, delimitata dalla $f(x,y)$ e dall'insieme delle rette generatrici verticali passanti per i punti $\langle x,y\rangle \in \partial D$ e denotiamo con C l'insieme dei punti $\{\langle x,y\rangle \in \partial D :| \ \langle x,y,z\rangle \ \text{ con } \ 0 \le z \le f(x,y) \ \text{ oppure } \ f(x,y) \le z \le 0\}$.

(1) Prop.: Il cilindroide C è una figura solida cubabile sse la $f(x,y)$ è integrabile in un $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ▮

I44d.02 Una figura solida F si dice "figura solida semplice rispetto all'asse verticale Oz" o concisamente **figura solida semplice-Oz**, sse vi sono una regione piana E due funzioni $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$ aventi come dominio E tali che sia $F \ = \ \{\langle x,y,z\rangle \ |: \ \langle x,y\rangle \in E \ , \ f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)\}$.

Similmente si definiscono le figure semplici rispetto agli assi Oy e Oz e servendosi di opportune rotazioni in $\mathbb{R}^{\times 3}$ si definiscono anche le figure 3D semplici rispetto a una qualsiasi retta orientata in 3D passante per l'origine.

I44 e. riconduzione di integrali-RR a integrazioni successive

I44e.01 Consideriamo una regione $D \in$ **SetRRLCQ**; a essa sono associati 4 numeri:

$$\min_x(D) \ := \ \min(\langle x,y\rangle \in D :| \ x) \quad , \quad \max_x(D) \ := \ \max(\langle x,y\rangle \in D :| \ x) \quad .$$
$$\min_y(D) \ := \ \min(\langle x,y\rangle \in D :| \ y) \quad , \quad \sup_y(D) \ := \ \max(\langle x,y\rangle \in D :| \ y) \quad .$$

Chiaramente $D \subseteq \mathsf{Rctng}\Big(\big\langle \min_x(D), \min_y(D)\big\rangle, \big\langle \max_x(D), \max_y(D)\big\rangle\Big)$.

In particolare se D è ll cerchio di raggio $r > 0$, $D := \boldsymbol{Cycl}(\big\langle x_C, y_C\big\rangle, r)$, abbiamo

$\min_x(D) = x_C - r$, $\max_x(D) = x_C + r$, $\min_y(D) = y_C - r$ e $\max_y(D) = y_C + r$.

//input fI44d01

I44e.02 Il dominio D si dice **dominio semplice rispetto ad** Oy sse può assumere la forma

$$D \ = \ \{\langle x,y\rangle \ \rrbracket \ \forall x \in [\min_x(D), \max_x(D)] \ \vdots \ a(x) \leq y \leq b(x)\} \ ,$$

dove le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ si possono definire come

$$a \ := \ \lceil \ \min_x(D) \leq x \leq \max_x(D) \ \nVdash \ \min_y(B) \ \rceil \quad \text{e}$$

$$b \ := \ \lceil \ \min_x(D) \leq x \leq \max_x(D) \ \nVdash \ \max_y(B) \ \rceil \ .$$

Il contorno di D, cioè l'insieme di punti-RR ∂D, è costituito da queste curve e possibilmente da segmenti verticali.

L'insieme delle regioni in **SetRRLCQ** semplici rispetto Oy lo denotiamo con **SetRRSOy**. Una regione $D \in$ **SetRRSOy** viene convenientemente caratterizzata da una struttura di dati della forma $\big\langle D, x_m, x_M, a, ba\big\rangle$ nella quale $x_m := \min_x(D)$, $x_M := \max_x(D)$ e le funzioni $a(x)$ e $b(x)$ sono quelle sopra definite.

Dualmente-xy D si dice **Dominio semplice rispetto ad** Ox ssele si può attribuire la forma

$$D = \{\langle x,y\rangle \ \rrbracket \ \forall y \in [\min_y(D), \max_y(D)] \ \vdots \ c(y) \leq y \leq d(y)\} \ ,$$

dove le funzioni $c(y)$ e $d(y)$ si possono definire come

$$c \ := \ \lceil \ \inf_y(D) \leq y \leq \sup_y(D) \ \nVdash \ \inf_x(D) \ \rceil \quad \text{e} \quad d \ := \ \lceil \ \inf_y(D) \leq y \leq \sup_y(D) \ \nVdash \ \sup_x(D) \ \rceil \ .$$

Il contorno di D ∂D è costituito da queste curve e possibilmente da segmenti orizzontali.

L'insieme delle regioni in **SetRRLCQ** semplici rispetto Ox lo denotiamo con **SetRRSOx**.

Una regione $D \in$ **SetRRSOy** viene convenientemente caratterizzata dal sistema della forma $\big\langle D, y_m, y_M, c, d\big\rangle$ nel quale $y_m := \min_y(D)$, $y_M := \max_y(D)$ e le funzioni $c(y)$ e $d(y)$ sono quelle definite poco sopra.

I44e.03 Consideriamo $D \in$ **SetRRSOx** e la sua caratterizzazione $\big\langle D, y_m, y_M, c, d\big\rangle$; supponiamo anche che $c(x)$ e $d(x)$ siano funzioni continue; inoltre, ma al solo fine di semplificare la visualizzazione delle configurazioni, supponiamo anche che la funzione $f(x,y)$ sia maggiore o uguale a 0 in D.

Denotiamo con C il cilindroide avente come base D, delimitato superiormente dalla superficie $f(x,y)$ e lateralmente dalle rette verticali, parallele ad Oz, che passano per i punti $\langle c(y), y\rangle$ e $\langle d(y), y\rangle$ per $\min_y(D) \leq y \leq \max_y(D)$.

Per ogni $\overline{y} \in [\min_y(D), \max_y(D)]$ il piano parallelo ad Oxz di equazione $y = \overline{y}$ interseca C in un trapezoide che ha come base il segmento avente come estremità $\langle c(\overline{y}), \overline{y}, 0\rangle$ e $\langle d(\overline{y}), \overline{y}, 0\rangle$ la cui area, grazie all'integrabilità della $f(x,y)$ rispetto alla x, conseguente dalla integrabilità della $f(x,y)$, è data da $T_y(\overline{y}) = \int_{c(\overline{y})}^{d(\overline{y})} \mathrm{d}x\ f(x,y)$

Supposto $T_y(\overline{y})$ integrabile per $\overline{y} \in [y_m, y_M]$, il volume di C è dato da

$$\boldsymbol{Vol}(C) = \int_{\min_y(D)}^{\max_y(D)} \mathrm{d}\overline{y}\, T_y(\overline{y}) \ .$$

Ma il volume del cilindroide è dato anche da $\boldsymbol{Vol}(C) = \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y)$.

Quindi, dopo aver semplificato la variabile $\overline{y}$, abbiamo la **formula di riduzione del calcolo dell'integrale-RR**:

(1) $$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) = \int_{\min_y(D)}^{\max_y(D)} \mathrm{d}y\ T_y(y) = \int_{\min_y(D)}^{\max_y(D)} \mathrm{d}y \int_{c(y)}^{d(y)} \mathrm{d}x\ f(x,y) \ .$$

La restrizione della nonnegatività della $f(x,y)$ si elimina facilmente sostituendo la $f(x,y)$ con la $\overline{f}(x,y) := f(x,y) + m$ ove $m := \inf_D \Big(f(x,y)\Big)$. Questa funzione è limitata come la $f(x,y)$ e per essa valgono conclusioni analoghe alle precedenti, ossia vale l'uguaglianza

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \ (f(x,y) + m) = \int_{\min_y(D)}^{\max_y(D)} \mathrm{d}y \int_{c(y)}^{d(y)} \mathrm{d}x\ \ (f(x,y) + m) \ .$$

Da questa, tenendo conto che

$$\iint_D m = m\, \boldsymbol{Area}(D) = m \int_{\min_y(D)}^{\max_y(D)} \mathrm{d}y \int_{c(y)}^{d(y)} \mathrm{d}x \ ,$$

segue la validità della (1) senza la restrizione $f(x,y) \geq 0$.

I44e.04 Le considerazioni precedenti si possono ripetere nel caso in cui il dominio D è semplice rispetto ad Ox scambiando le coordinate x e y e conseguentemente sostituendo le funzioni del contorno $c(y)$ e $d(y)$ con le funzioni $a(x)$ e $b(x)$. In tal modo si ottiene la formula di riduzione trasposta ossia duale-hd della precedente:

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) = \int_{\min_x(D)}^{\max_x(D)} \mathrm{d}x\ T_x(x) = \int_{\min_x(D)}^{\max_x(D)} \mathrm{d}x \int_{a(x)}^{b(x)} \mathrm{d}y\ f(x,y) \ .$$

I44e.05 Le formule di riconduzione assumono forme particolarmente semplici quando il dominio di integrazione è un rettangolo chiuso. Sia precisamente $D = \Big\{a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d :|\ \langle x,y\rangle\Big\}$ e si consideri la funzione $f \in \lceil D \longmapsto_{LtdIntg} \mathbb{R} \rceil$.

Supponiamo inoltre che l'integrale $\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x,y)$ sia una funzione della y integrabile in $[c,d]$ e che l'integrale $\int_c^d \mathrm{d}y\ f(x,y)$ sia una funzione della x integrabile in [a,b].

In queste circostanze dalle formule precedenti si ricavano le seguenti:

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x,y) \quad \text{e} \quad \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y\ f(x,y) \ .$$

Da queste segue la **formula di inversione dell'ordine di integrazione** per funzioni-RRtR da integrare in un dominio rettangolare

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x,y)\ .$$

Si osserva che la formula precedente si può ottenere agevolmente considerando che gli integrali dei due membri si ottengono come limiti di somme simili alle somme inferiori e superiori viste in a04 e rispetto a queste semplificate in quanto riguardanti suddivisioni del rettangolo D in rettangolini ottenuti con segmenti verticali e orizzontali derivanti da due suddivisioni uniformi degli intervalli $a \le x \le b$ e $c \le y \le d$.

I44e.06 Le formule di riconduzione trovate facilitano il calcolo effettivo di molti integrali-RR specifici: esponiamo alcuni esempi.

Quando il dominio di integrazione D è il semplice triangolo chiuso delimitato dalle tre rette $y = a$, $x = b$ e $y = x$, cioè quando $D = \{\langle x, y\rangle \mid a \le y \le b \ \wedge\ x \le y\}$, le formule di riconduzione diventano

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y\ f(x,y) \quad \text{e} \quad \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ \int_a^b \mathrm{d}y \int_y^b \mathrm{d}x\ f(x,y)\ .$$

Da queste segue direttamente la **formula di Dirichlet**:

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_a^x \mathrm{d}y\ f(x,y) \ = \ \int_a^b \mathrm{d}y \int_y^b \mathrm{d}x\ f(x,y)\ .$$

I44e.07 Consideriamo la parabola con vertice nell'origine e avente Ox come asse; la sua equazione sia $y^2 = 2\,p\,x$, con $p > 0$. Assumiamo come dominio di integrazione S il segmento parabolico costituito dai punti relativi a $0 \le x \le a$ e a $-\sqrt{2\,p\,x} \le y \le \sqrt{2\,p\,x}$. La sua area è data da

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Area}(S) \ &= \ \iint_S \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \ = \ \int_0^a \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2\,p\,x}}^{\sqrt{2\,p\,x}} \mathrm{d}y \\ &= \ \int_0^a \mathrm{d}x\ 2\sqrt{2\,p\,x} \ = \ 2\sqrt{2\,p}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a \ = \ \frac{4}{3}\sqrt{2\,p}\,a^{3/2} \end{aligned}\ .$$

Si voglia anche calcolare $J \ = \ \iint_S \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ x^\alpha$, per $\alpha > 0$.

Integrando prima rispetto ad y poi rispetto a x si ottiene

$$J \ = \ \int_a^b \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{2\,p\,x}}^{\sqrt{2\,p\,x}} \mathrm{d}y\ x^\alpha \ = \ \int \mathrm{d}x\, x^\alpha \int_{-\sqrt{2\,p\,x}}^{\sqrt{2\,p\,x}} \mathrm{d}x \ = \ 2\sqrt{2\,p} \int_0^a \mathrm{d}x\, x^{\alpha+1/2} \ = \ 2\sqrt{2\,p}\,\frac{a^{\alpha+3/2}}{\alpha+3/2}\ .$$

Quindi facendo intervenire l'area del segmento S si ottiene

$$J \ = \ \frac{3}{2\,\alpha+3}\,a^\alpha\ \boldsymbol{Area}(S)\ .$$

I44e.08 Consideriamo l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \ = \ 1$ ed assumiamo come dominio di integrazione la semiellisse E soggetta alla limitazione $y \ge 0$.
Vogliamo calcolare $J_k \ = \ \iint_E \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ k^{4\,k+1}$ per $k \in \mathbb{N}$.

Dato che per $y \ge 0$ si ha $x \ = \ \pm\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, si ottiene

$$J_k \ = \ \int_0^b \mathrm{d}y\ y^{4\,k+1} \int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \mathrm{d}x \ = \ \frac{2\,a}{b} \int_0^b \mathrm{d}y\ y^{4\,k+1}\sqrt{b^2-y^2}\ .$$

Introdotta la t tale che $y =: b \sin t$, si ottiene

$$J_k \;=\; 2\,a\,b^{4\,k+2} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\; \sin^{4\,k+1} t \cos^2 t \;=\; 2\,a\,b^{4\,k+2} \left[\frac{(4\,k)!!}{(4\,k+1)!!} - \frac{(4\,k+2)!!}{(4\,k+3)!!}\right] .$$

In particolare $J_0 \;=\; \dfrac{2}{3}\,b^2$.

I44e.09 Consideriamo il triangolo D delimitato dall'asse Oy, dalla retta per l'origine $y = m\,x$, e dalla retta $y = n\,x + a$, dove $a > 0$ ed m ed n sono reali e tali da far in modo che il punto $B = \langle x_B, y_B\rangle$ in cui si incontrano le due rette abbia ascissa positiva.
Dovendo essere $y_B = m\,x_B$ e $y_B = n\,x_B + a$, abbiamo $x_B = \dfrac{a}{m-n}$ con $m > n$ e $y_B = \dfrac{m}{m-n}\,a$.
Si ottiene quindi $\boldsymbol{Area}(D) \;=\; \dfrac{a^2}{2(m-n)}$.

Cerchiamo il valore dell'integrale $J_h \;:=\; \displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\; x^h$ per $h = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\begin{aligned} J_h \;&=\; \int_0^{x_B} \mathrm{d}x\; x^h \int_{m\,x}^{n\,x+a} \mathrm{d}y \;=\; \int_0^{x_B} \mathrm{d}x\;\; ((n-m)x + a)\; x^h \\ &=\; \frac{a\,{x_B}^{h+1}}{h+1} + \frac{(n-m){x_B}^{h+2}}{h+2} \;=\; \boldsymbol{Area}(B)\, \frac{a}{n-m}^{h} \left(\frac{1}{h+1} + \frac{1}{(n-m)(h+2)}\right) \end{aligned} .$$

I44e.10 Consideriamo il triangolo D delimitato dall'asse Ox, dalla retta verticale $x = \overline{x}$ con $\overline{x} > 0$ e dalla retta $y = x$.

Cerchiamo il valore dell'integrale $J_p \;:=\; \displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\; x^p\,\sqrt{x^2 - y^2}$ per $p \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} J_p \;&=\; \int_0^{\overline{x}} \mathrm{d}x\, x^p \int_0^{p} \mathrm{d}y\; \sqrt{x^2-y^2} \;=\; \int_0^{\overline{x}} \mathrm{d}x\, x^p \left[\frac{y\,\sqrt{x^2-y^2}}{2} + \frac{1}{2}\,x^2 \arcsin \frac{y}{x}\right]_{y=0}^{y=x} \\ &=\; \int_0^{\overline{x}} \mathrm{d}x\, x^p \left[\frac{\pi}{4}\,x^2\right] \;=\; \frac{\pi}{4} \int_0^{\overline{x}} \mathrm{d}x\, x^{p+2} \;=\; \frac{\pi}{4}\left[\frac{\overline{x}^{p+3}}{p+3}\right] \;=\; \frac{\pi}{4(p+3)}\,\overline{x}^{p+3} \end{aligned} .$$

I44e.11 La proprietà di inversione dell'ordine di integrazione [$\mathsf{e05}$] consente anche di calcolare un integrale improprio notevole come $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\sin x}{x}$.
Consideriamo il dominio di integrazione $D \;:=\; \mathsf{Rctng}(\langle 0, 0\rangle \;,\; \langle a, b\rangle)$.

I44 f. formule di Gauss e di Green e differenziali esatti nel piano

I44f.01 Consideriamo una regione $D \in$ **SetRRLCQ** e il suo contorno $\gamma := \partial D$; sia anche $D \in$ **SetRRSOx** e sia $\langle D, y_m, y_M, a(x), b(x) \rangle$ la sua caratterizzazione. Inoltre per ogni $y \in [y_m, y_M]$ le funzioni $c(y)$ e $d(y)$ siano continue insieme alle corrispondenti derivate rispetto alla y.

I44 g. trasformazioni biunivoche e bicontinue tra regioni piane e matrice jacobiana

I44g.01 Consideriamo due regioni D ed E, cioè due sottoinsiemi del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, che vogliamo porre in biiezione. Per impostare dei calcoli è opportuno riferire le due regioni a due diverse coppie di coordinate cartesiane: la D al piano che trattiamo con le due coordinate x e y, e quindi agli assi cartesiani ortogonali Ox ed Oy; la E alle coordinate u e v, e quindi agli assi cartesiani ortogonali Ou ed Ov. Possiamo allora parlare di due piani cartesiano individuati con i due riferimenti Oxy e Ouv.

Consideriamo allora una trasformazione T che associa a ogni punto (o vettore) $\mathsf{x} = \langle x, y\rangle \in D$ un punto $\mathsf{v} = \langle v, w\rangle \in E$ e chiediamo che essa trasformi l'intero D nell'intero E e che sia biunivoca, e quindi si possa considerare T come funzione in $\lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright E \rceil$ dotata della sua inversa $T^{-1} \in \lceil E \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright D \rceil$.
Più esplicitamente si può affermare che a ogni $\mathsf{x} \in D$ corrisponde uno e un solo $\mathsf{u} = T(\mathsf{x}) \in E$ e, viceversa, che a ogni $\mathsf{u} \in E$ corrisponde uno e un solo $\mathsf{x} = T^{-1}(\mathsf{u}) \in D$ e che sia $T(\mathsf{x}) = \mathsf{u}$.

Chiediamo inoltre che la T sia una **trasformazione bicontinua**, cioè che variando con continuità di $\mathsf{x} \in D$ la $\mathsf{u} := T(\mathsf{x})$ si muova con continuità in E.

Questo implica che "muovendo con continuità" $\mathsf{x} \in D$ in modo che "tracci una linea chiusa" γ contenuta in D, anche u si muove con continuità in E tracciando una linea chiusa Δ.
Se γ è una curva nonintrecciata, deve essere nonintrecciata anche Δ: infatti in caso contrario un punto di incrocio della Δ verrebbe incontrato in due punti diversi della γ, contro la biunivocità della T.

Nel seguito denoteremo con $\lceil \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longleftrightarrow_{biubic} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ l'insieme delle funzioni biunivoche e bicontinue tra $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

I44g.02 Le considerazioni sulle trasformazioni bicontinue rendono opportuno adottare una descrizione cinematica di queste biiezioni la quale parla di punti che si muovono tracciando traiettorie continue, di punti in moto che si avvicinano a o si allontanano da particolari punti fermi e così via.
Si trova che l'adozione delle descrizioni cinematiche rende più agevole precisare molte situazioni a noi abituati a osservarci o a immaginarci in movimento tra figure e configurazioni.

A questo punto conviene passare in rassegna vari esempi di trasformazioni biunivoche e bicontinue, a cominciare da esempi molto semplici.

Una prima trasformazione consiste in una traslazione: in questo caso la trasformata di una traiettoria chiusa nonintrecciata K è la sua traslata: evidente che se la K è percorsa in verso positivo oppure negativo (antiorario oppure orario)) anche la $T(K)$ viene percorsa nello stesso verso.

Alla stessa conclusione sui versi di percorrenza si giunge per le T costituite da omotetie, da coppie di omotetie ortogonali o da rotazioni.

Altre semplici T sono costituite da riflessioni rispetto a qualche retta; si vede subito che se una traiettoria chiusa K è percorsa nel verso positivo (oppure negativo), ogni sua riflessa viene percorsa nel verso opposto.

Le trasformazioni biunivoche e bicontinue T che vedono la traiettoria trasformata percorsa nello stesso verso della K sono chiamate **trasformazioni dirette**, quelle che vedono traiettoria e trasformata percorse in versi opposti sono dette **trasformazioni inverse**.
Questa distinzione è molto importante: infatti la composizione di due trasformazioni dirette e quella di due trasformazioni inverse si constatano essere trasformazioni dirette; all'opposto la composizione di una diretta con una inversa e la composizione di una trasformazione inversa con una diretta risultano trasformazioni inverse.

I44g.03 Altre semplici T sono le trasformazioni lineari: queste trasformazioni sono ottenibili effettuando sui vettori riferiti ad Oxy la moltiplicazione per una matrice di profilo 2×2.

Si devono allora distinguere 2 casi: $(+)$ i versori $\mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_y$ sono trasformati in due vettori, $T(\mathbf{e}_x)$ e $T(\mathbf{e}_y)$ tali che il primo viene reso parallelo al secondo con una rotazione positiva, ossia corrispondente ad un angolo convesso positivo; $(-)$ i due vettori trasformati sono tali che il primo viene reso parallelo al secondo con una rotazione corrispondente ad un angolo convesso negativo.

Si osserva che il caso $(+)$ si ottiene con matrici aventi il determinante positivo, mentre il caso $(-)$ riguarda matrici con determinante negativo. Le trasformazioni lineari caratterizzate da $(+)$ sono trasformazioni dirette, quelle caratterizzate da $(-)$ sono trasformazioni inverse.

Mentre tutti gli esempi in g02 sono riconducibili a trasformazioni lineari, accenniamo in modo intuitivo alle cosiddette **trasformazioni topologiche** esaminando in particolare i loro effetti sulle curve semplici chiuse.
Una metà di queste si possono descrivere come ottenute distendendo sul piano Oxy una membrana materiale facilmente deformabile ma non lacerabile. Tracciata la curva K interamente sulla membrana, la si stacca da Oxy, la si sottopone ad arbitrarie deformazioni ottenute con gradulità e infine la si distende sul piano Ouv. Evidentemente tale trasformazione è diretta: il verso di percorrenza sulla immagine su membrana della K rimane invariato in ciascuna delle fasi di deformazione.
Un'altro insieme di trasformazioni topologiche viene effettuato come le precedenti, ma con una manovra finale di capovolgimento della membrana prima di "adagiarla" sul piano Ouv. Evidentemente queste sono trasformazioni inverse.

I44g.04 Vogliamo ora trattare le trasformazioni biunivoche e bicontinue servendoci di coordinate che consentano di esprimerle mediante formule maneggevoli.

La richiesta di bicontinuità di una tale trasformazione T innanzi tutto si traduce nel chiedere che essa si possa rappresentare mediante una coppia di funzioni cui daremo la forma:

$$u = U(x,y) \qquad \text{e} \qquad v = V(x,y) \ .$$

Queste si vogliono definite in un dominio $D \in \mathbf{SetRRLCQ}$ sul quale intendiamo concentrarci, come intendiamo fare con il suo trasformato $E := T(D)$.

Per la biiettività di queste funzioni si chiede che esistano altre due funzioni $x = X(u,v)$ e $y = Y(u,v)$ atte a rappresentare la T^{-1} e che per esse si abbiano le relazioni derivate dalla $T^{-1} \circ_{rl} T = \mathsf{Id}$:

$$\forall \langle x,y\rangle \in D \ \because \ X\Big((U(x,y),V(x,y)\Big) = x \qquad \text{e} \qquad Y\Big(U(x,y),V(x,y)\Big) = y \ .$$

Uguaglianze equivalenti sono quelle associabili alla $T \circ_{rl} T^{-1} = \mathsf{Id}$:

$$\forall \langle u,v\rangle \in E \ \because \ V\Big((X(u,v),Y(u,v)\Big) = u \qquad \text{e} \qquad W\Big((X(u,v),Y(u,v)\Big) = v \ .$$

Per soddisfare la richiesta di bicontinuità della T e per giungere a formule praticabili, si chiede che in ogni punto di $D \cup \partial D$, siano continue le funzioni $U(x,y)$ e $V(x,y)$ insieme alle loro derivate parziali del primo ordine ed alle derivate parziali seconde miste.

Inoltre si richiede che su D sia diverso da 0 il **determinante jacobiano** della T:

$$\mathsf{Jcb}(T) := \frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} \ .$$

Si osserva che questo determinante ricopre un ruolo che generalizza quello svolto dalla derivata prima nel caso di una trasformazione biunivoca e bicontinua tra $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}$ rappresentata da una funzione sufficientemente regolare $y = Y(x)$, almeno in un intorno di una ascissa x.
La crescenza o decrescenza della funzione determinata dal segno della $Y'(x)$ per una trasformazione bidimensionale diventa il suo carattere diretto o inverso. Infatti la trasformazione generale T in un intorno di un punto $\langle x, y \rangle$ viene approssimata da una trasformazione lineare L e il determinante jacobiano viene approssimato dal determinante della L.

I44 h. cambiamento delle variabili negli integrali-RR

I44h.01 Per il calcolo di integrali-RR, come per il calcolo di integrali di altri generi, può risultare utile effettuare dei cambiamenti delle variabili di integrazione.

Consideriamo una regione $D \in$ **SetRRLCQ** e una funzione $f(x,y) \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ tale da rendere definibile l'integrale

$$J \;=\; \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y)\ ;$$

Questa funzione f in particolare potrebbe essere continua a pezzi.

Consideriamo anche una $T \in \lceil D \triangleleft\!\!\longrightarrow\!\!\triangleright_{biubic} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ rappresentabile con le funzioni-RRtR $u = U(x,y)$ e $v = V(x,y)$ continue insieme alle loro derivate parziali prime e le loro derivate parziali miste.

Occorre riprendere la definizione di J, cominciando con la scelta di un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) e con la decomposizione-mns della regione D della forma $D \;=\; \dot{\cup}_{mns}{}_{n=1}^{\infty}$.

In tal modo, introdotti per ogni $i = 1, 2, \ldots\ m_i := \inf_{D_i}(f)$, $M_i := \sup_{D_i}(f)$, $A_i :=$ ***Area***(D_i), si ha

$$\sum_{i=1}^{+\infty} m_i\, A_i \;\leq\; \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \;\leq\; \sum_{i=1}^{+\infty} M_i\, A_i\ .$$

Passando alle grandezze trasformate dalla T si ha

$$\sum_{i=1}^{+\infty} m_i \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)} \;\leq\; \iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ f(x,y) \;\leq\; \sum_{i=1}^{+\infty} M_i \iint_{D_i} \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \frac{\mathrm{d}(x,y)}{\mathrm{d}(u,v)}\ .$$

Passando al limite per $\max(\mathrm{diam}(D_i)) \to 0$