1

Capitolo I38
funzioni analitiche

Contenuti delle sezioni

a. elementi analitici e prolungamento analitico p. 2
b. serie di funzioni analitiche p. 4
c. singolarità isolate p. 5
d. residui integrali p. 6
f. funzione Gamma euleriana p. 7
g. funzioni di Bessel $J_n(z)$ p. 8

10 pagine

I38 0.01 In questo capitolo, in stretta connessione con il precedente, si introduce la nozione di funzione analitica e si danno le proprietà basilari di queste entità.

Inoltre si amplia la presentazione di alcune funzioni speciali di largo uso, sia per vari sviluppi speculativi generali che per le applicazioni: funzioni inverse delle circolari, funzione Gamma e funzioni di Bessel.

I38 a. elementi analitici e prolungamento analitico

I38 a.01 Si dice **elemento analitico** ogni sviluppo in serie di Taylor-Cauchy $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$ avente raggio di convergenza positivo.
Più dettagliatamente il precedente oggetto viene chiamato elemento analitico di centro c e successione $\mathsf{a} := \langle n \in \mathbb{N} :| \ c_n \rangle$ e viene denotato con $\boldsymbol{AnE}(c, \mathsf{a})$. Nel seguito identificheremo questo oggetto specifico anche con $\mathcal{E}$.

Denotiamo con $\boldsymbol{CC}(c, \mathsf{a})$ il suo cerchio aperto di convergenza e con $CCR(c, \mathsf{a})$ il raggio (positivo) di tale cerchio; nel seguito useremo anche gli identificatori locali $\mathcal{C} := \boldsymbol{CC}(c, \mathsf{a})$ ed $R := CCR(c, \mathsf{a})$.

I punti interni del cerchio $\mathcal{C}$ sono detti anche punti interni dell'elemento $\mathcal{E}$; doppia attribuzione simile per i punti di frontiera.

Sia c_1 un punto interno di $\mathcal{E}$; esso si può considerare centro di un altro elemento analitico che individueremo con $\mathcal{E}_1 := \boldsymbol{AnE}(c_1, \mathsf{a}^{(1)}) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(c_1)}(z-c_1)^n$.

$\mathcal{E}_1$ può essere determinato univocamente da $\mathcal{E}$ e c_1: come si è visto $\mathcal{E}_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(z-c_1)^n$.

Rappresenteremo questa dipendenza funzionale scrivendo $\mathcal{E}[\rightarrow]c_1 = Ecl_1$.

Scriviamo inoltre $\mathcal{C}_1 := \boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1)$ e $R_1 := CCR(\mathcal{E}_1)$ e ricordiamo esplicitamente che tale raggio di convergenza si può determinare con il teorema di Cauchy-Hadamard [I37b05].

I38 a.02 Denotiamo con $\overline{c\,c_1}$ la semiretta $\overrightarrow{c\,c_1}$ che inizia nel centro c e passa per c_1; con $\overline{AB}$ il relativo diametro e con A_1 il punto nel quale la semiretta $\overrightarrow{c\,c_1}$ interseca la circonferenza di $\mathcal{C}$.
Il raggio R_1 deve essere maggiore o uguale della distanza minima tra c_1 e la circonferenza $circ(\mathcal{E}_1)$, cioè della lunghezza di $\overline{c_1\,A}$: in caso contrario la $f(z)$ non sarebbe olomorfa negli infiniti punti di $\overline{A_1 A}$.
Inoltre R_1 deve essere minore o uguale della massima distanza tra a_1 e $circ(\mathcal{C})$, cioè della lunghezza di $\overline{a_1 B}$: in caso contrario $f(z)$ sarebbe olomorfa all'interno di un cerchio di centro a_1 più esteso di $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E})$.

Vanno distinti il caso in cui $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1)$ è interamente contenuto in $C(\mathcal{E})$, caso in cui $A = A_1$, dal caso in cui $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1)$ contiene punti esterni a $CC(\mathcal{E})$, punti che costituiscono la lunula $L := \boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1) \setminus \boldsymbol{CC}(\mathcal{E})$.
Non è invece necessario distinguere i casi $R < R_1$, $R = R_1$ e $R > R_1$.

Se $L \neq \emptyset$ è definita la funzione olomorfa con dominio in $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E}) \cup \boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1)$ coincidente con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$ in $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E})$ e con $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(1)}\,(z-c_1)^n$ in $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1)$, le due serie fornendo le stesse somme negli infiniti punti di $\boldsymbol{CC}(\mathcal{E}) \cap \boldsymbol{CC}(\mathcal{E}_1)$.

L'elemento analitico $\boldsymbol{AnE}(\mathcal{E}_1)$ si dice **prolungamento analitico** dell'elemento $\boldsymbol{AnE}(\mathcal{C})$.

I38 a.03 A partire da $AnE(\mathcal{E}_1)$ e da un suo punto c_2 si può ripetere il processo e individuare un terzo elemento analitico $\mathcal{E}_2 = \boldsymbol{AnE}(\mathcal{C}_2)$ e così via. Denotiamo con $\sim_{ancntn}$ l'estensione per transitività della relazione costituita dalle coppie di elementi analitici esprimibili come $\langle \mathcal{E}, \mathcal{E}[\rightarrow]c \rangle$.

(1) Teorema La relazione $\sim_{ancntn}$ è una equivalenza.

Dim.: Riprendiamo le notazioni introdotte in I37f01 e I37f02 per $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{E}_1$.

La relazione, oltre che transitiva per definizione, è riflessiva: infatti $\boldsymbol{AnE}(c,\mathsf{a})[\rightarrow]d = \boldsymbol{AnE}(da,\mathsf{c})$.
Dimostriamo che essa è anche simmetrica, cioè da $\boldsymbol{AnE}(c,\mathsf{a}) \sim_{ancntn} \boldsymbol{AnE}(c_1,\mathsf{c}^{(1)})$ ricaviamo $\boldsymbol{AnE}(c_1,\mathsf{a}^{(1)}) \sim_{ancntn} \boldsymbol{AnE}(a,\mathsf{c})$.
Se $R_1 > \overline{c_1\,c}$ si può ottenere $\boldsymbol{AnE}(c,\mathsf{a})$ come $\boldsymbol{AnE}(c_1,\mathsf{c}^{(1)})[\rightarrow]c$. In caso contrario per ottenere $\boldsymbol{AnE}(c,\mathsf{a})$ si rende necessario effettuare successive costruzioni di elementi analitici utilizzando come nuovi centri successivi punti sul segmento $\overline{c_1\,c}$.
In conclusione la relazione $\sim_{ancntn}$ è riflessiva, simmetrica e transitiva ∎

I38 a.04 Con Weierstrass definiamo **funzione-analitica** ogni insieme di elementi analitici equivalenti per la relazione di prolungamento analitico $\sim_{ancntn}$.
Queste entità sono funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,\rceil$ solo in una parte dei casi. Questo accade sicuramente se essa consiste in una `spvc` avente come raggio di convergenza $+\infty$, come per i polinomi e le funzioni trascendenti intere (le serie esponenziale, del seno, del coseno, del seno iperbolico e del coseno iperbolico). Questi sviluppi in serie sono definiti per ogni $z \in \mathbb{C}$ e non si possono individuare loro prolungamenti analitici effettivi.

Esistono poi `spvc` con raggi finiti che sono prive di effettivi prolungamenti analitici: un esempio è dato dalla serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n!}$ [I37???].
Per il teorema di Cauchy-Hadamard [I37???] essa ha raggio di convergenza uguale ad 1. Consideriamo una qualsiasi frazione propria positiva $\dfrac{p}{q}$ ($q \in \mathbb{P}$, $p = 0, 1, 2, ..., q-1$) e lo sviluppo che segue.

$$\lim_{r\to 1-} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(r\,\mathsf{e}^{2\,\pi\,\mathsf{i}\,\frac{p}{q}}\right)^{n!} = \lim_{r\to 1-} \sum_{n=0}^{q-1} \left(r\,\mathsf{e}^{2\,\pi\,\mathsf{i}\,\frac{p}{q}}\right)^{n!} + \lim_{r\to 1-} \sum_{n=q}^{+\infty} r^{n!}\ ;$$

Chiaramente il primo limite dà un definito numero complesso mentre il secondo limite dà $+\infty$.
Dato che l'insieme dei punti $\mathsf{e}^{2\,\pi\,\mathsf{i}\,\frac{p}{q}}$ è denso sulla circonferenza $|z| = 1$ in nessun punto di tale circonferenza la serie in esame converge e non esiste nessun elemento analitico contiguo a tale serie che contenga punti della $|z| = 1$.

I38 a.05 Oltre alle funzioni-analitiche riconducibili a un unico elemento analitico (funzioni trascendenti intere ed elementi analitici privi di prolungamenti analitici), come vedremo, vi è una ampia varietà di funzioni analitiche costituite da più elementi analitici.

Tra queste va fatta una distinzione fondamentale in due sottoclassi.

La prima è detta insieme delle **funzioni analitiche monodrome** ed è costituita dalle funzioni-analitiche tali per cui tutti gli elementi analitici che le compongono e che riguardano cerchi di convergenza con punti comuni in tali punti assumono gli stessi valori; evidentemente queste funzioni-analitiche sono a tutti gli effetti funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,\rceil$.

La seconda classe è costituita dalle **funzioni analitiche polidrome**, entità che presentano coppie di elementi analitici che nei punti comuni ai loro cerchi di convergenza assumono valori diversi e quindi, a rigore di termini, non si possono considerare funzioni del genere $\lceil\, \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,\rceil$.
Come vedremo vi sono funzioni-polidrome che a un punto complesso associano valori diversi che possono 2, 3, ..., n, ... o costituire sequenze finite e numerabili di valori complessi.

Vedremo anche che due diversi elementi analitici aventi lo stesso centro hanno lo stesso cerchio di convergenza e in esso le due rispettive funzioni differiscono per un addendo costante ottenibile con un integrale di cammino significativo.

I38 b. serie di funzioni analitiche

I38 b.01 Le serie di funzioni olomorfe uniformemente convergenti consentono di definire nuove funzioni olomorfe che possono essere utilmente elaborate in forza della proprietà che segue.

(1) Teorema (**teorema di Weierstrass**) Consideriamo $\mathsf{f} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ f_n(z) \rangle$, successione di funzioni olomorfe in un insieme aperto e connesso $\mathcal{O}$.

Se la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ è uniformemente convergente in ogni cerchio (chiuso) $\mathcal{C}$ contenuto in $\mathcal{O}$, allora

(a) la somma della serie $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ è una funzione olomorfa in $\mathcal{O}$;

(b) la serie delle rispettive derivate n-esime è anch'essa uniformemente convergente in qualunque cerchio chiuso contenuto in $\mathcal{O}$ e si ha

$$f^{(k)}(z) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(z) \ .$$

Dim.: . . . . . .

I38 b.02 Le funzioni cui si applica il teorema precedente sviluppate in serie di potenze presentano coefficienti collegati da serie numeriche.

Per ogni $c \in \mathcal{O}$ sia la $f(z)$ che le $f_n(z)$ sono funzioni olomorfe in un cerchio $\mathcal{C}$ di centro c e raggio $R > 0$. Si possono quindi considerare serie delle forme

$$f(z) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-c)^k \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ : \ f_n(z) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} (z-c)^k ,$$

In tal caso

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ a_k \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} \ .$$

I38 c. singolarità isolate

I38 c.01 Sia $f(z)$ una funzione analitica monodroma e non trascendente intera e sia s un suo punto singolare.
Questo punto-C si dice **punto singolare isolato** sse esiste un cerchio aperto $\mathcal{C}$ di centro s nel quale non cadono altri punti singolari della funzione $f(z)$.
Sia R il raggio di tale cerchio, sia $R_1 \in (0, R)$ e $\mathcal{C}_1$ un cerchio aperto di centro s contenuto propriamente in $\mathcal{C}$; siano inoltre R_1 il suo raggio e $\overline{\mathcal{C}_1}$ la sua chiusura. Nella corona circolare $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_1$ sussiste lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-s)^k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(z-s)^n} \;;$$

per l'arbitrarietà di R_1 esso vale per ogni z tale che $0 < |z-s| < R$.

Si possono dare due casi:

(P) i termini nonnulli delle potenze negative di $z - s$ sono in numero finito;

(E) questi termini sono infiniti.

Nel caso (E) si dice che s è una **singolarità essenziale isolata** o un punto singolare essenziale isolato della funzione $f(z)$.

Nel caso (P) se denotiamo con m la massima delle potenze di $\dfrac{1}{(z-s)^n}$ per le quali $\alpha_n \neq 0$, si dice che s è un polo di ordine m per la $f(z)$.

I38 c.02 Consideriamo ora una funzione olomorfa $F(z)$ definita in un intorno del punto ∞ del piano complesso completato, cioè una funzione olomorfa per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che sia $|z| > M$ per un certo M reale positivo. Lo studio del comportamento della $F(z)$ in tali punti, cioè nei punti esterni al cerchio con centro nell'origine e raggio M, si utilizza la variabile complessa $\zeta := \dfrac{1}{z}$ e ci si riconduce al comportamento della funzione $\Phi(\zeta) \;:=\; F\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Si dice quindi che $z = \infty$ è un punto regolare per la $F(z)$ sse $\zeta = 0$ è un punto regolare per la $\Phi(\zeta)$. In tal caso si ha lo sviluppo in serie convergente per $|z| > M$

$$F(z) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k} \;.$$

Si dice invece che $z = \infty$ è una singolarità isolata per la $F(z)$ sse $\zeta = 0$ è una singolarità isolata per la $\Phi(\zeta)$.
In genere è importante si distinguere il caso in cui $z = \infty$ è un polo di ordine m per la $F(z)$ dal caso in cui è una singolarità essenziale.

I38 c.03 Se $z = s$ è un polo di ordine m della $f(z)$ evidentemente si ha

$$\lim_{z \to s} (z-s)^m \, f(z) \;=\; \alpha_m \neq 0 \;.$$

Nel caso in cui s è una singolarità essenziale la situazione è più complessa; essa viene chiarita dal seguente teorema.

(1) Teorema (**teorema di Picard**) Se s è una singolarità essenziale per la funzione olomorfa $f(z)$, allora per tutte le scelte del parametro $v \in \mathbb{C}$ a esclusione al più di un solo valore l'equazione nella incognita $z \in \mathbb{C}$ $\;f(z) = v\;$ è soddisfatta in infiniti punti distinti aventi s come punto di accumulazione.

I38 d. residui integrali

I38 d.01 Consideriamo una funzione analitica monodroma $f(z)$ e sia a un suo punto regolare oppure un suo punto singolare isolato. In tal caso nei punti z interni a un opportuno cerchio $\mathcal{C}$ di centro in a diversi da a si ha lo sviluppo della forma

$$f(z) \;=\; A(z-a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(z-a)^n} \;,$$

nel quale tutte le α_n sono nulle sse a è regolare e sono nulle per n maggiore di un certo $m \in \mathbb{P}$ sse a è un polo di ordine m.

Si dice (con Cauchy) **residuo [integrale] della funzione** $f(z)$ nel punto a l'integrale

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z \;\, f(z) \;,$$

ove γ denota un circuito regolare interno a $\mathcal{C}$ che circonda il punto a ed è orientato nel verso antiorario. Come si è visto il valore dell'integrale non dipende dalla scelta di uno specifico γ con le proprietà suddette.

Si trova

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{\gamma} \mathrm{d}z \;\, f(z) \;=\; \alpha_1 \;.$$

Il residue, quindi, è nullo non solo quando a è punto regolare, ma anche quando a è punto singolare isolato ma è nullo il coefficiente dello sviluppo di Laurent del termine in $\dfrac{1}{z-a}$.

I38 d.02 Il residuo della $f(z)$ nel punto ∞ è dato da

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{\gamma} \mathrm{d}z \;\, f(z) \;=\; -a_1 \;.$$

I38 d.03 Vale la formula di Cauchy

$$\frac{1}{2\,\pi} \int_{\sim\gamma} \mathrm{d}z \;\, f(z) \;=\; R_1 + r_2 + \cdots + r_h + r_\infty \;.$$

I38 f. funzione Gamma euleriana

I38 f.01 Estendendo la definizione sulle funzioni-RtR si introduce l'**integrale generalizzato di funzioni-CtC** con la formula:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ [f_1(t) + \mathsf{i}\, f_2(t))\ :=\ \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ f_1(t) + \mathsf{i} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ f_2(t)\ .$$

Questa definizione ha interesse quando i due integrali generalizzati invocati sono entrambi convergenti su $[0, +\infty)$.

I38 f.02 L'integrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathsf{e}^{-t} t^{z-1} \quad \text{con} \quad t^{\overline{z}} := \mathsf{e}^{\overline{z}\ \ln t}$$

è convergente

Definiamo come funzione gamma $\Gamma(z)$ la funzione che

$$\forall z\ ST\ \Re(z) > 0\ :\ \Gamma(z)\ :=\ \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathsf{e}^{-t}\, t^{z-1}\ .$$

I38 f.03 Cerchiamo di estendere la definizione della funzione Gamma ai punti complessi z con $\Re(z) \leq 0$ ponendo:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}\ :=\ \mathsf{e}^{\gamma_{em}} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) \mathsf{e}^{-\frac{z}{n}} \quad \text{per} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, ...\}\ .$$

Qui γ_{em} denota la costante di Euler-Mascheroni.

I38 f.04 Si trova che la funzione $\Gamma(z)$ è una funzione analitica monodroma in $\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, ...\}$.

I38 f.05 Si trova anche che la funzione $\Gamma(z)$ soddisfa l'equazione funzionale

$$\Gamma(z+1)\ =\ z\, \Gamma(z)\ .$$

I38 f.06 La funzione $\Gamma(z)$ soddisfa l'equazione dei complementi

$$\Gamma(z+1)\ =\ z\, \Gamma(z)\ .$$

I38 f.07 Si trova la formula

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\ =\ \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\ \mathsf{e}^{-t}\, t^{-\frac{1}{2}}\ =\ \sqrt{\pi}\ .$$

Questa uguaglianza è in accordo con la formula $2 \int_0^{+\infty} \mathrm{d}u\ \mathsf{e}^{-u^2}\ =\ \sqrt{\pi}$.

I38 g. funzioni di Bessel $J_n(z)$

I38 g.01 Consideriamo un n reale o complesso con $\Re(n) > 0$ e la serie di potenze nella variabile complessa z

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu \, (z/2)^{2\,\nu}}{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)} \; . \tag{1}$$

Questa serie rappresenta una funzione-CtC trascendente intera in quanto

$$\lim_{\nu\to+\infty} \left| \frac{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+\nu)\,\Gamma(\nu)} \right| \; = \; \lim_{\nu\to+\infty} |\nu\,(n+\nu)| \; = \; +\infty \; ; .$$

Quindi la serie converge per ogni valore di z.

Si osserva inoltre che se $n \notin \mathbb{Z}_-$ per $\nu \in \mathbb{N}$ si ha $\dfrac{1}{\Gamma(n+\nu+1)} \neq 0$.

Possiamo quindi definire **funzione di Bessel di ordine** n la funzione

$$J_n(z) \; := \; \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu \, (z/2)^{n+2\nu}}{\Gamma(n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1} & \text{se } \Re(n) > 0 \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu \, (z/2)^{-n+2\nu}}{\Gamma(-n+\nu+1)\,\Gamma(\nu+1} & \text{se } N \notin \mathbb{R}_- \end{cases} \; . \tag{2}$$

I38 g.02 Quando $n = 0, -1, -2, -3, ...$, dato che $\dfrac{1}{\Gamma(-n+\nu+1)} = 0$ per $\nu = 0, 1, 2, ..., n-1$, si ha

$$J_{-n}(z) \; = \; (-1)^n \, J_n(z) \; .$$

In particolare abbiamo

$$J_{1/2}(z) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\,z}} \sum_{\nu=0}^{+\infty} (-1)^\nu \, \frac{Z^{2\,\nu+1}}{2^{2\,\nu}\,\Gamma(\nu+3/2)\,\Gamma(\nu+1)} \; .$$

Dato che

$$2^{2\nu}\,\Gamma(\nu+3/2)\,\Gamma(\nu+1) \; = \; ... \; = \; (2\,\nu+1)!\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \; ,$$

si ottiene

$$J_{1/2}(z) \; = \; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin z}{\sqrt{z}} \; .$$

Similmente si ottiene

$$J_{-1/2}(z) \; = \; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos z}{\sqrt{z}} \; .$$

I38 g.03 La relazione

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^n\,J_n(z)\big) \; &= \; 2^n \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu \, (n+\nu) \, (z/2)^{2\,n+2\,\nu-1}}{\Gamma(n+\nu)\,\Gamma(\nu+1)} \\ &= \; z^n \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^\nu \, (z/2)^{n+2\,\nu-1}}{\Gamma(n+\nu)\,\Gamma(\nu+1)} \; = \; z^n \, J_{n-1}(z) \end{aligned} \; ,$$

equivale alla uguaglianza

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^n\,J_n(z)\big) \; = \; z^n \, J_{n-1}(z) \; .$$

Similmente si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(z^{-n}\,J_n(z)\big) \;=\; -z^{-n}\,J_{n+1}(z)\;.$$

Le formule precedenti sono dette formule di ricorrenza per la funzione-CtC J_n di Bessel.

I38 g.04 Effetuandola derivazione addendo per addendo delle serie in k02(2) si verifica che le funzioni $J_n(z)$ e $J_{-n}(z)$ soddisfano la cosiddetta **equazione differenziale delle funzioni di Bessel**

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\,y+\frac{1}{z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,y+\left(1+\frac{n^2}{z^2}\right)\,y \;=\; 0\;. \tag{1}$$

Per $n\notin\mathbb{Z}_-$ l'integrale generale di questa equazione è esprimibile come

$$y \;=\; \mathtt{C}_1\,J_n(z)+\mathtt{C}_2\,J_{-n}(z) \quad \text{con arbitrarie } \mathtt{C}_1,\mathtt{C}_2\in\mathbb{C} \tag{2}$$

I38 g.05 Ci proponiamo di valutare l'integrale

$$\int_0^{\zeta}\mathrm{d}z\;\; z\,J_n(a\,z)\,z\,J_n(b\,z)\;, \tag{1}$$

con $a,b\in\mathbb{C}$, $a^2\neq b^2$, $n\in\mathbb{R}$ e $n>-1$.

Cominciamo con il caso $a\neq 0$ e $b\neq 0$. L'equazione k04(1) implica le seguenti:

$$\begin{aligned} z\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\,J_n(a\,z)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(a\,z)-\frac{n^2}{z}\,J_n(a\,z) \;&=\; -a^2\,z\,J_n(a\,z)\\ z\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\,J_n(b\,z)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(b\,z)-\frac{n^2}{z}\,J_n(b\,z) \;&=\; -b^2\,z\,J_n(b\,z) \end{aligned}\;,$$

e moltiplicando la prima per $J_n(b\,z)$, la secoda per $J_n(a\,z)$ e sottraendo membro a membro si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z\,\left(J_n(a\,z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(b\,z)-J_n(b\,z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(a\,z)\right)\right] \;=\; (a^2-b^2)\,z\,J_n(a\,z)\;J_n(b\,z)\;;$$

integrando per parti tra 0 e ζ si ha

$$\int_0^{\zeta}\mathrm{d}z\;\; z\,J_n(a\,z)\,z\,J_n(b\,z) \;=\; \frac{z}{a^2-b^2}\,\left(J_n(a\,z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(b\,z)-J_n(b\,z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(a\,z)\right)\;, \tag{2}$$

equazione che vale nelle ipotesi $a^2\neq b^2$, $a\neq 0$ e $b\neq 0$.

Passando al limite per $\dfrac{b}{a}$ tendente a 1 e applicando al secondo membro la regola di de l'Hospital, si ottiene

$$\int_0^{\zeta}\mathrm{d}z\;\; z\,\big(J_n(a\,z)\big)^2 \;=\; \frac{z}{2\,a}\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_n(a\,z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}J_n(a\,z)-J_n(a\,z)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_n(a\,z)\right)\;. \tag{3}$$

Tenendo conto che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,J_n(a\,z) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\,J_n(a\,z)}{\mathrm{d}(az)^2}\,a\,z+\frac{\mathrm{d}\,J_n(a\,z)}{\mathrm{d}(az)}\;,$$

si ottiene

$$\int_0^{\zeta}\mathrm{d}z\;\; z\,(J_n(a\,z))^2 \;=\; \frac{z^2}{2}\,\left[\left(\frac{\mathrm{d}\,J_n(a\,z)}{\mathrm{d}(a\,z)}\right]^2-J_n(a\,z)\,\frac{\mathrm{d}^2\,J_n(a\,z)}{\mathrm{d}(a\,z)^2}-\frac{J_n(a\,z)}{a\,z}\,\frac{\mathrm{d}\,J_n(a\,z)}{\mathrm{d}(a\,z)}\right]\;. \tag{4}$$

I38 g.06 Si dimostra che per $n\in(-1,+\infty)$ la funzione $J_n(z)$ presenta una infinità numerabile di zeri semplici, ad eccezione di $z=0$.

La successione di questi zeri positivi la denotiamo con $\mathsf{z}[J_n]\;:=\big\langle r\in\mathbb{P}:|\;\lambda_{n,r}\big\rangle$ e per essi si ha

$$0 < \lambda_{n,1} < \lambda n, 2 < \lambda_3 < \cdots \quad \text{e} \quad \lim_{r\to+\infty} \lambda_{n,r} = +\infty \ .$$

Dalla k05(2) assumendo $\zeta = 1$, $a = \lambda_{n,r}$ e $b = \lambda_{n,s}$ con $r \neq s$ si ottiene

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \ z\, J_n(\lambda_{n,r}\, z)\, J_n(\lambda_{n,s}\, z) \ = \ 0 \quad \text{per} \ \ r \neq s \ . \tag{1}$$

Dalla k05(4) assumendo $\zeta = 1$, $a = \lambda_r$ si ottiene

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \ z \left(J_n(\lambda_r\, z)\right)^2 \ = \ \frac{1}{2} \left(J_n{}'(\lambda_r)\right)^2 \ . \tag{2}$$

Tenendo conto delle formule di ricorrenza e del significato dei λ_r, possiamo anche la formula

$$\int_0^1 \mathrm{d}z \ z \left(J_n(\lambda_r\, z)\right)^2 \ = \ \frac{1}{2}\, {J_{n+1}}^2(\lambda_{n,r}) \ = \ \frac{1}{2}\, {J_{n-1}}^2(\lambda_{n,r}) \ . \tag{3}$$

I38 g.07 In molti problemi nella fisica matematica, in particolare nella meccanica quantistica di una particella in un campo centrale e nella teoria del calore, si pone il problema di esprimere una funzione $\Phi(\xi)$ come serie della forma

$$\Phi(\xi) \ = \ \sum_{r=1}^{+\infty} c_r\, J_n(\lambda_{n,r}\, \xi) \quad \text{con} \ \ n \in (-1, +\infty) \ . \tag{1}$$

Questa espressione si chiama **sviluppo in serie di Bessel** della funzione $\Phi(\xi)$.
Si tratta quindi di trovare una successione di numeri complessi $\langle c_0, c_1, c_2, ... \rangle$ che soddisfano la (1), cioè che sono i coefficienti del detto sviluppo in serie.

Nel caso si abbia una $\Phi(\xi)$ per la quale si trovano i coefficienti dello sviluppo e che la serie secondo membro della (1) sia uniformemente convergente per ξ variabile nell'intervallo $[0, 1]$, moltiplicando entrambi i membri per $\xi\, J_n(\lambda_{n,r}\, \xi)$, integrando in $[0, 1]$, in forza di k06(1)(2)(3), si ottiene

$$\int_0^1 \mathrm{d}\xi \ \xi\, \Phi(\xi)\, J_n(\lambda_{n,r}\, \xi) \ = \ c_r \int_0^1 \mathrm{d}\xi \ \xi\, {J_n}^2(\lambda_{n,r}\, \xi) \ = \ \frac{1}{2}\, c_r \big(J'_n(\lambda_{n,r})\big)^2 \ ;$$

Di conseguenza abbiamo l'espressione per i coefficienti dello sviluppo in serie di Bessel

$$c_r \ = \ \frac{2}{\big(J'_n(\lambda_r)\big)^2} \int_0^1 \mathrm{d}\xi \ \xi\, \Phi(\xi)\, J_n(\lambda_{n,r}\, \xi) \ . \tag{2}$$

I38 g.08 Lo studio delle funzioni di Bessel conduce a vari criteri sufficienti che assicurano la convergenza della serie k07(1) con i coefficienti forniti dalla k07(2) e quindi la validità della corrispondente rappresentazione della Φ.

Un risultato significativo e di semplice formulazione è il seguente.

Se $n \in (-1/2, +\infty)$ e $0 < a < b < 1$ e se $\Phi(\xi)$ è dotata di derivata continua in [a,b], allora la sua serie di Bessel converge uniformemente a $\Phi(\xi)$ in ogni intervallo $[\alpha, \beta]$ con $a < \alpha < \beta < b$.

Segnaliamo anche che la convergenza della serie per $\xi = 0$ e $\xi = 1$ richiede esami particolari. Per esempio per $\xi = 1$ tutti gli addendi della serie si annullano e quindi la serie può rappresentare solo funzioni $\Phi(\xi)$ tali che $\Phi(1) = 0$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php