1

Capitolo I36

approccio infinitesimale alle curve

Contenuti delle sezioni

I360.01 Procedendo con la presentazione di nozioni basilari del calcolo infinitesimale per le funzioni dei generi $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \rceil$, in questo capitolo viene introdotto lo studio relativamente semplice delle funzioni tendenzialmente regolari del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \rceil$.

Se $e = 2$ si tratta di curve nel piano e se $e = 3$ di curve nello spazio tridimensionale della fisica classica.

Molti risultati trovati per questi due casi molto studiati per la loro diretta applicabilità e per la visualizzabilità delle costruzioni valgono anche per i meno intuitivi insiemi dei generi $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \rceil$, insiemi che quando sono costituiti da funzioni sufficientemente regolari si possono chiamare insiemi di curve in e dimensioni.

Esaminando queste entità si incontrano varie importanti applicazioni degli integrali, applicazioni di natura geometrica o riconducibili alla geometria.

I36 a. funzioni di una variabile reale a valori vettoriali

I36a.01 Le funzioni del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \rceil$, che chiamiamo anche **funzioni-RtRe**, sono le funzioni che a ogni reale del proprio dominio associano una sequenza di e numeri reali; per queste sequenze conviene usare i termini e le notazioni dei vettori.

Le funzioni-RtRe interessano principalmente quando il loro dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ continuo e abbastanza semplice; nel seguito ci riferiremo primariamente a intervalli reali e secondariamente a insiemi finiti o numerabili di intervalli.

Per la variabile indipendente di queste funzioni utilizzeremo prevalentemente la lettera t e spesso risulterà conveniente descriverla come una variabile temporale.

I36a.02 I casi più semplici e ricchi di applicazioni, prevedibilmente, sono quelli nei quali, risp., $e = 2$ ed $e = 3$.
Per le notazioni relative focalizziamo l'attenzione sul caso $e = 3$.

Per i versori di riferimento, come al solito $\mathsf{e}_1 = \mathsf{i} = \mathsf{e}_x$, $\mathsf{e}_2 = \mathsf{j} = \mathsf{e}_y$ e $\mathsf{e}_3 = \mathsf{k} = \mathsf{e}_z$ denotano i versori orientati, risp., come gli assi cartesiani $\mathsf{Ox} = \mathsf{Ox}_1$, $\mathsf{Oy} = \mathsf{Ox}_2$ e $\mathsf{Oz} = \mathsf{Ox}_2$.

Per le **funzioni-RtRRR** ci serviremo di notazioni simili alle seguenti:

$$\mathsf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle \ , \quad \mathsf{x}(t) = \langle x_1(t), y_1(t), z_1(t)\rangle \ , \quad P(t) = x(t)\mathsf{i} + y(t)\mathsf{j} + z(t)\mathsf{k} \ ,$$
$$\mathbf{X}(t) = X_1(t)\mathsf{e}_1 + X_2(t)\mathsf{e}_2 + X_3(t)\mathsf{e}_3 \ , \quad \mathsf{f}(t) = \langle \xi(t), \eta(t), \zeta(t)\rangle \ , \quad \mathsf{g}(t) = g_1(t)\mathsf{e}_x + g_2(t)\mathsf{e}_y + g_3(t)\mathsf{e}_z \ .$$

Le prime quattro notazioni si usano prevalentemente quando si esamina una unica funzione considerando le sue proprietà generiche, non legate alle specificità della funzione stessa; le due rimanenti si preferiscono quando si esaminano funzioni specifiche e quando si confrontano diverse funzioni-RtRRR.

Queste notazioni sono utilizzate in cinematica [P12] per rappresentare traiettorie percorse da corpi puntiformi: in questi casi un vettore come $\mathsf{r}(t)$ esprime la posizione assunta all'istante t da un tale corpo rispetto a un sistema di riferimento spaziale che viene associato alla terna di riferimento cartesiana Oxyz.

Per l'insieme delle funzioni-RtRRR si usa la notazione **FunRtRRR**.

Nel caso $e = 2$ si ha la rappresentazione della traiettoria di un corpo puntiforme vincolato a muoversi in un piano, tipicamente quello che in $\mathbb{R}^{\times 3}$ è il piano Oxy, piano individuato dall'equazione $z = 0$, spesso utilizzato per rappresentare un'area orizzontale limitata della superficie terrestre.

Per l'insieme delle funzioni-RtRR si usa la notazione **FunRtRR**.

I36a.03 Il codominio o immagine di una traiettoria del tipo $\mathsf{f}(t) \in \lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$ esprime solo i punti dello spazio tridimensionale che via via sono toccati dal corpo puntiforme, ma non la sua completa cinematica.
Questa potrebbe ottenersi completamente dal grafico della $fSd(t)$, ma questo richiederebbe 4 dimensioni, poco intuibili. Essa potrebbe anche ottenersi con una rappresentazione dinamica, cioè con una animazione che mostri un corpo puntiforme che si muove rispetto ad oggetti presentati cinematograficamente come collocati in una parte di spazio che viene osservata da uno spettatore; in molte animazioni lo spettatore stesso è in movimento per meglio osservare la traiettoria.

Queste rappresentazioni non sono semplici da realizzare, in quanto richiedono tecniche di grafica grafiche che consentano di presentare movimenti tridimensionali su quadri rettangolari piani che si concretizzano negli schermi di un monitor o di un simile dispositivo.

Oggi tuttavia i progressi della cosiddetta `computer grafica 3D (wi)` consentono di produrre animazioni molto sofisticate [v.a. `cinema tridimensionale (wi)`].

Per le traiettorie dei corpi puntiformi che si muovono nel piano le rappresentazioni sono molto più semplici. Sia le animazioni in due dimensioni che i grafici tridimensionali statici oggi si possono realizzare con relativa facilità.

I36a.04 Un tipico esempio di traiettoria con immagine bidimensionale è fornita da due sistemi di equazioni equivalenti

$$(1)\qquad \begin{cases} x = r\,\cos(\omega\,t) \\ y = r\,\sin(\omega\,t) \end{cases} \quad \text{per} \quad t \in [0,T] \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x = r\,\cos\left(\dfrac{2\,\pi\,t}{T}\right) \\ y = r\,\sin\left(\dfrac{2\,\pi\,t}{T}\right) \end{cases} \quad \text{per} \quad t \in \left[0, \frac{2\,\pi}{\omega}\right] \ .$$

Essa esprime un punto che si muove di moto uniforme sulla circonferenza di raggio r con centro nell'origine compiendo un giro completo nell'intervallo di tempo $[0,T]$ e con `velocità angolare (wi)` pari a $\omega = \dfrac{2}{\pi}$ radianti/sec.

Mentre l'immagine di questa funzione di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ è una circonferenza, la funzione dice anche con quale movimento la circonferenza viene percorsa.

Spesso tuttavia si prescinde dall'interpretazione cinematica e si presentano le funzioni vettoriali di una variabile reale identificandole, con un abuso di linguaggio, con le curve che costituiscono i loro codomini.

Le funzioni di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rceil$ e di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times 3} \rceil$ vengono quindi chiamate, risp., **curve piane in forma parametrica** e **curve tridimensionali in forma parametrica**; con tale terminologia la variabile t viene detta **parametro per la determinazione della curva**.

I36a.05 La funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ per $x \in [-1,1]$ rappresenta la semicirconferenza di raggio 1 con centro nell'origine degli assi cartesiani contenuta nei quadranti I e II.
Questa curva si può individuare con le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x \ = t \\ y \ = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in [-1,1]$$

oppure con queste altre

$$\begin{cases} x \ = \ \cos\theta \\ y \ = \ \sin\theta \end{cases} \qquad \text{per} \quad \theta \in [0,\pi] \ .$$

La semicirconferenza data dall'ultimo sistema di equazioni si può estendere nella corrispondente circonferenza ampliando l'intervallo di variabilità del parametro con la richiesta $\theta \in [0, 2\,\pi]$.

Evidentemente questa curva non si può esprimere con il grafico di una funzione di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, mentre si può rappresentare in forma implicita con l'equazione in coordinate cartesiane $x^2 + y^2 \ = \ 1$.

I36a.06 Un tipico esempio di curva tridimensionale in forma parametrica è dato dal seguente sistema di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x \ = \ r\,\cos\omega\,t \\ y \ = \ r\,\sin\omega\,t \\ z \ = \ v\,t \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in \left[0, \frac{8\,\pi}{\omega}\right] \ .$$

Si tratta di un arco di **elica cilindrica**, curva i cui punti giacciono sul cilindro avente come asse l'asse coordinato Oz e raggio r e che presenta quattro porzioni ottenibili le une dalle altre mediante traslazioni verticali di passo $\dfrac{2\,\pi}{\omega}$.

I36a.07 Consideriamo la funzione vettoriale tridimensionale

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2\,t \qquad \text{per} \quad t \in [0,1] \; . \\ z &= t^2 \end{cases}$$

Essa descrive una curva in $\mathbb{R}^{\times 3}$. Accade tuttavia che essa appartiene al piano $y = 2\,x$, come si ricava dalle prime due equazioni; dalla terza si ricava anche che si tratta di una parabola passante dall'origine e avente come asse Oz.

Quindi si può dire che la funzione vettoriale di partenza rappresenta una curva piana collocata nello spazio.

Le curve tridimensionali che non appartengono ad alcun piano, come gli archi di elica cilindrica in a05, si dicono **curve sghembe** o curve gobbe.

I36 b. derivate e differenziali di vettori variabili

I36b.01 Nel seguito faremo riferimento ad un intero positivo e, ad un intervallo reale $I = (a,b\ )$ e a una funzione di una variabile reale $t \in I$ a valori in $\mathbb{R}^{\times e} \searrow \mathsf{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), ..., f_e(t)\rangle$.

Definiamo **incremento della funzione vettoriale f** attinente al passaggio della sua variabile indipendente dal valore iniziale t_0 al valore variato $t_0 + \Delta t =: t_0 + h$, entrambi appartenenti ad I, il vettore

$$\Delta\mathsf{f} \ := \ \mathsf{f}(t_0 + h) - \mathsf{f}(t_0) \ .$$

Definiamo poi **rapporto incrementale della funzione vettoriale** $\mathsf{f}(t)$ attinente al passaggio della t da t_0 a $t_0 + h$, il rapporto

$$\frac{\Delta\mathsf{f}}{\Delta t} \ :=_{\text{if}\exists} \ \frac{\mathsf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathsf{f}(t_0)}{\Delta t} \ = \ \frac{\mathsf{f}(t_0 + h) - \mathsf{f}(t_0)}{h} \ .$$

Definiamo infine derivata della $\mathsf{f}(t)$ nel punto t_0, se esiste, il limite

$$\mathsf{f}'(t_0) \ := \ (\mathrm{D}_t\, \mathsf{f}(t))_{t=t_0} \ := \ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathsf{f}(t)\right)_{t=t_0} \ := \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathsf{f}(t_0)}{\Delta t} \ .$$

Si osserva che dalle definizioni seguono immediatamente due fatti.
Se la funzione è derivabile in t_0, ivi deve essere continua.
La funzione vettoriale $\mathsf{f}(t)$ è derivabile in t_0 sse lo sono tutte le funzioni componenti $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_e(t)$ e in tal caso risulta

$$\mathsf{f}'(t_0) \ = \langle f'_1(t_0), f'_2(t_0), ..., f'_e(t_0)\rangle \ = \ \sum_{j=1}^{e} \mathsf{e}_j\, f'_j(t_0) \ .$$

I36b.02 Anche per la derivata di funzione vettoriale si introducono in modo prevedibile le nozioni di derivabilità in un intervallo contenuto nel dominio della funzione e di differenziabilità in un punto e in un intervallo.
Anche per la derivata di una funzione-RtRe si possono introdurre le costruzioni parziali ma più ampiamente applicabili **derivata a destra** e **derivata a sinistra** [v.a. I20b02] attraverso le definizioni:

$$\mathsf{f}'_+(t_0) \ := \ \lim_{h \to 0+} \frac{\mathsf{f}(t_0 + h) - \mathsf{f}(t_0)}{h} \quad , \quad \mathsf{f}'_-(t_0) \ := \ \lim_{h \to 0+} \frac{\mathsf{f}(t_0 - h) - \mathsf{f}(t_0)}{-h}$$

o mediante espressioni equivalenti.
Inoltre anche per le funzioni di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times e} \rceil$ si introducono le derivate degli ordini 2, 3, ... , attraverso formule come le seguenti

$$\left[\mathsf{f}''(t)\right]_{t=t_0} \ :=_{\text{if}\exists} \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{f}'(t_0 + \Delta t) - \mathsf{f}'(t_0)}{\Delta t} \quad . \ . \ .$$

$$\left[\mathsf{f}^{(n)}(t)\right]_{t=t_0} \ :=_{\text{if}\exists} \ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathsf{f}^{(n-1)}(t_0 + \Delta t) - \mathsf{f}^{(n-1)}(t_0)}{\Delta t} \ .$$

Per le componenti si hanno risultati come il seguente

$$\mathsf{f}^{(n)}(t_0) \ = \ \left\langle f_1^{(n)}(t_0), f_2^{(n)}(t_0), ..., f_e^{(n)}(t_0)\right\rangle \ = \ \sum_{j=1}^{e} \mathsf{e}_j\, f_j^{(n)}(t_0) \ .$$

I36b.03 Procedendo con argomentazioni analoghe a quelle seguite per le funzioni reali, ovvero riconducendosi alle funzioni reali componenti, si trovano le seguenti **regole di derivazione per funzioni vettoriali**:

$$\mathrm{D}_t\, (\alpha\, \mathsf{f}(t) + \beta\, \mathsf{g}(t)) \ = \ \alpha\, \mathsf{f}'(t) + \beta\, \mathsf{g}'(t) \ ;$$

$$\mathrm{D}_t\left(\alpha(t)\cdot\mathbf{v}\right) \;=\; \alpha'(t)\cdot\mathbf{v}\;;$$
$$\mathrm{D}_t\left(\alpha(t)\cdot\mathbf{f}(t)\right) \;=\; \alpha'(t)\cdot\mathbf{f}(t)+\alpha(t)\cdot\mathbf{f}'(t)\;.$$

Dei vettori variabili con la t interessa spesso il prodotto scalare o prodotto interno che introduciamo con le espressioni

$$\big\langle\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t)\big\rangle \;=\; \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{g}(t) \;:=\; \sum_{j=1}^{e} f_j(t)\cdot g_j(t)\;.$$

Per le derivate di queste funzioni-RtRe si deducono facilmente formule come le seguenti

$$\mathrm{D}_t\left\langle\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t)\right\rangle \;=\big\langle\mathbf{f}'(t)|\mathbf{g}(t)\big\rangle+\big\langle\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}'(t)\big\rangle\;.$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left\langle\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t)\right\rangle=\big\langle\mathbf{f}''(t)|\mathbf{g}(t)\big\rangle+2\left\langle\mathbf{f}'(t)|\mathbf{g}'(t)\right\rangle+\big\langle\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}''(t)\big\rangle\;,$$
$$\forall k=1,2,3,...\;:\;\;\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\big\langle\mathbf{f}(t)|\mathbf{g}(t)\big\rangle \;=\; \sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}\left\langle\mathbf{f}^{(h)}(t)|\mathbf{g}^{(k-h)}(t)\right\rangle\;.$$

Interessa anche il cambiamento della variabile indipendente; se la variabile t si esprime a partire da una nuova variabile indipendente reale u come $t=\phi(u)$, dove la funzione ϕ è definita e derivabile in un opportuno intervallo (α,β) tale che $(a,b) \subseteq \mathsf{cod}(\phi)$, si ha $\mathbf{f}(t)=\mathbf{f}(\phi(u))=:\mathbf{F}(u)$ e per la derivata di questa nuova funzione vettoriale si trova

$$\mathbf{F}'(u) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\mathbf{F}(u) \;=\; \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{f}(t) \;=\; \phi'(u)\cdot\mathbf{f}'(\phi(u))\;.$$

I36b.04 Anche la differenziabilità è estendibile alle funzioni del genere $\lceil\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{\times e}\rceil$.
Si dice che $\mathbf{f}(t)$ è differenziabile nel punto t_0 sse l'incremento $\Delta\mathbf{f}$ corrispondente al passaggio dall'ascissa iniziale t_0 all'ascissa variata $t_0+\Delta t=t_0+h$ si può esprimere come

$$\Delta\mathbf{f} \;=\; \mathbf{S}\cdot\Delta t+\vec{\epsilon}(\Delta t)\cdot\Delta t \quad\text{ con }\quad \mathbf{S}\text{ indipendente da }\Delta t\;\text{ e }\;\lim_{h\to 0}\vec{\epsilon}(h)=\mathbf{0}\;.$$

Il prodotto $\mathbf{S}\cdot\Delta t$ si dice **differenziale della funzione vettoriale** $\mathbf{f}(t)$ attinente l'ascissa iniziale t_0 e l'ascissa variata $t_0+\Delta t$ e si scrive $\mathrm{d}\,\mathbf{f} \;:=\; \mathbf{S}\cdot\Delta t$.

Si dimostra, estendendo facilmente le argomentazioni in I24a01, che la funzione $\mathbf{f}(t)$ risulta differenziabile nell'ascissa t_0 sse esiste finito il vettore derivato $\mathbf{f}'(t_0)$ e in tal caso si ha $\mathrm{d}\,\mathbf{f} \;=\; \mathbf{f}'(t)\cdot\Delta t$.

Se la $\mathbf{f}(t)$ è differenziabile per ogni $t\in(a,b)$, come per le funzioni reali differenziabili si trova conveniente sostituire Δt con $\mathrm{d}t$ in modo da avere

$$\mathrm{d}\,\mathbf{f} \;=\; \mathbf{f}'(t_0)\,\mathrm{d}t \quad\text{ e }\quad \Delta\mathbf{f} \;=\; \mathrm{d}\mathbf{f}+h\cdot\vec{\epsilon}(h) \quad\text{ con }\quad \lim_{h\to 0}\vec{\epsilon}(h) \;=\; \mathbf{0}\;.$$

Se $\mathbf{f}'(t)$ non si annulla in (a,b) si trova che per Δt tendente a 0 anche $\Delta\,\mathbf{f}$ tende a $\mathrm{d}\,\mathbf{f}$, cioè accade che il differenziale $\mathrm{d}\,\mathbf{f}$ è la parte principale dell'incremento $\Delta\mathbf{f}$ rispetto a $\Delta t=\mathrm{d}t$ assunto come infinitesimo di riferimento.

Conviene rilevare che le scritture $\mathbf{S}$ e $\mathrm{d}\mathbf{f}$ costituiscono notazioni abbreviate utili in quanto consentono argomentazioni, dimostrazioni e conclusioni concise. Su di esse influiscono vari elementi che sono lasciati impliciti; vanno quindi usate con cautela e solo entro contesti che consentano di individuare con sicurezza gli accennati elementi impliciti.

I36b.05 Vogliamo ora trovare un'immagine geometrica dei vettori derivati nel piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$.

Nel piano riferito al sistema cartesiano ortogonale Oxy consideriamo la curva orientata Γ data dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{cases} \qquad \text{per} \quad t \in I := [a,b\,] \ .$$

Più sinteticamente individuiamo Γ con la notazione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ con $\mathbf{r} = \langle x, y \rangle$ e quindi $\mathbf{f}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$.

Chiediamo inoltre che $f(t)$ e $g(t)$ siano continue in I e che sia $a \leq t_1 < t_2 \leq b \implies \mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$, con la sola eccezione possibile della coincidenza dei punti iniziale e finale della Γ, cioè quando sia $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$.

Si vuole quindi che Γ sia una curva continua orientata nonintrecciata. Se $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ si dice che Γ è una **curva chiusa**, mentre se $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$ viene chiamata **curva aperta**.

I36b.06 Particolari curve aperte sono i diagrammi delle funzioni continue definite in intervalli chiusi: il diagramma di una $f(x)$ continua per $x \in [a,b\,]$ si riconduce al formalismo precedente introducendo il parametro $t = x$.

Caso molto semplice è quello del segmento rettilineo orientato che va da $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$ a $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2 \rangle$ e viene definito dalle equazioni

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x = & x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = & y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 1 \ .$$

Un esempio di curva chiusa è dato da

$$\begin{cases} x &= x_C + A \cos t \\ y &= y_C + B \sin t \end{cases} \qquad \text{per} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \ .$$

Essa rappresenta l'ellisse orientata in verso positivo (antiorario), avente il centro in $\langle x_C, y_C \rangle$, un asse parallelo a Ox con semiasse di lunghezza A e un asse parellelo ad Oy con semiasse di lunghezza B.

Oltre alle curve sopra descritte vanno studiate le curve illimitate caratterizzate dal variare del parametro in un intervallo illimitato; esse sono riconducibili alle precedenti riducendo il dominio del parametro a un sottointervallo finito che si può scegliere ad arbitrio.

Esempi di questo genere sono le sinusoidi $y = A \sin(\omega t + \delta)$ con $t \in \mathbb{R}$ e la parabola avente come asse Ox definibile con le equazioni parametriche $y = t$ e $x = t^2$ per $t \in \mathbb{R}$.

I36b.07 Si dice **arco di curva regolare** ogni arco di curva orientata del piano o dello spazio definibile come dominio di una funzione vettoriale $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ per t variabile in un intervallo chiuso $I = [a,b\,]$ dotata per ogni t di vettore tangente nonnullo.

Per tali curve è quindi ben definito per ogni $t \in I$ il **versore tangente** $\mathbf{t} + \dfrac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$.

I36 c. lunghezza di un arco di curva rettificabile

I36c.01 Al livello pratico-intuitivo a un oggetto filiforme si attribuisce come lunghezza la lunghezza di un tratto di filo flessibile e inestensibile teso dopo averlo fatto aderire all'oggetto lungo la sua intera estensione e con i capi nelle sue due estremità.

In matematica per associare una misura di lunghezza a un ampio insieme di archi di curva piana o tridimensionale sghemba bisogna fare ricorso alla nozione di limite.

Nel caso basilare di una circonferenza la lunghezza si definisce come elemento separatore tra l'insieme delle lunghezze dei poligoni inscritti e l'insieme delle lunghezze dei poligoni circoscritti.
Per attribuire questa lunghezza bastano i poligoni inscritti e la lunghezza si può definire come l'estremo superiore dell'insieme delle loro lunghezze.
Questo modo di procedere si può applicare per definire le lunghezze di un ampio insieme di curve piane o sghembe dotate di opportune doti di regolarità. Anzi esso si può applicare anche a curve opportunamente regolari in spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ e in altri spazi metrici.
Qui procederemo a trattare il caso delle curve in $\mathbb{R}^{\times 3}$ date da parametrizzazioni cartesiane e otterremo espressioni delle lunghezze delle curve piane viste come casi particolari.

I36c.02 Consideriamo un arco di curva Γ in tre dimensioni definito dalle espressioni parametriche nelle variabili di un sistema di riferimento cartesiano Oxyz come

$$(1) \qquad \mathsf{r}(t) = \langle \xi(t), \eta(t), \zeta(t) \rangle \quad \text{con } a \le t \le b \ ;$$

Scriviamo $A := \mathsf{r}(a) = \langle \xi(a), \eta(a), \zeta(a) \rangle$ e $B := \mathsf{r}(b) = \langle \xi(b), \eta(b), \zeta(b) \rangle$ i due punti estremità dell'arco; spesso un arco di curva come Γ, quando non si trattano altri archi di curva, viene di individuato semplicemente con la scrittura $\widehat{AB}$.

Consideriamo poi una generica decomposizione dell'intervallo $[a,b\,]$

$$\mathsf{S} = \langle t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n \rangle \in \mathsf{Dcmp}[a,b\,]$$

e denotiamo i corrispondenti punti dell'arco con

$$R_i = \mathsf{r}_i := \langle \xi_i, \eta_i, \zeta_i \rangle \ := \ \langle \xi(t_i), \eta(t_i), \zeta(t_i) \rangle \quad \text{per } i = 0, 1, ..., n-1, n \text{ ove } n = n(\mathsf{S}) \ .$$

Per le distanze tra due punti successivi si ha l'espressione pitagorica

$$(2)\ . \quad \ell_i \ := \ \overline{R_{i-1}\, R_i} \ = \ \sqrt{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_i - \eta_{i-1})^2 + (\zeta_i - \zeta_{i-1})^2} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, ..., n-1, n \ .$$

Denotiamo con $\mathsf{plgnl}(\Gamma, \mathsf{S})$ e chiamiamo **poligonale inscritta nella curva** Γ indotta dalla decomposizione S, la poligonale $\langle R_0 = A, R_1, R_2, ..., R_n = B \rangle$

Di tale poligonale definiamo la lunghezza come somma delle distanze tra nodi successivi scrivendo

$$(3) \qquad \mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma, \mathsf{S})) \ := \ \sum_{i=1}^{n} \ell_i \ = \ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_i - \eta_{i-1})^2 + (\zeta_i - \zeta_{i-1})^2} \ .$$

Inoltre denotiamo l'insieme delle poligonali associate alla Γ con

$$(4) \qquad \mathbf{Plgnl}(\Gamma) \ := \ \{\mathsf{S} \in \mathsf{Dcmp}[a,b\,] \ :| \ \mathsf{plgnl}(\Gamma, \mathsf{S})\} \ .$$

Ricordiamo infine che, per $d \in \mathbb{R}_+$, con $\mathsf{Dcmp}_{<d}[a,b\,]$ denotiamo l'insieme delle decomposizioni dell'intervallo $[a,b\,]$ costituite da sottointervalli di ampiezza inferiore a d.

I36c.03 L'arco $\Gamma =: \widehat{AB}$ si dice **arco rettificabile** sse esiste un reale nonnegativo L tale che

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \ (\text{idap}) \quad : \quad \mathbb{R}_+ \ni \delta = \delta(\epsilon) \ \P \ \forall \mathsf{S} \in \mathsf{Dcmp}_{<\delta}[a,b\,] \ : \ |L - \mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma, \mathsf{S}))| < \epsilon \ .$$

In tale caso L si dice **lunghezza dell'arco** $\Gamma = \widehat{AB}$ e si scrive $\mathsf{len}(\Gamma) := L$.

La nozione di lunghezza di un arco rettificabile si può equivalentemente esprimere facendo riferimento alla nozione di estremo superiore ponendo

$$\mathsf{len}(\Gamma) :=_{\text{if}\exists} \sup_{\mathsf{S}\in\mathsf{Dcmp}[a,b]} \mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma,\mathsf{S}))$$

A questo proposito si osserva che infittendo la decomposizione di $[a,b]$ la lunghezza della corrispondente poligonale non decresce: infatti ogni infittimento di una decomposizione si può ottenere con una sequenza di infittimenti elementari costituiti dalla sostituzione di un particolare sottointervallo $[\mathsf{r}_{i-1},\mathsf{r}_i]$ con due sottointervalli della forma $[\mathsf{r}_{i-1},\mathsf{r}(\overline{t})]$ e $[\mathsf{r}(\overline{t}),\mathsf{r}_i]$ con $T_{i-1} < \overline{t} < t_i$, in conseguenza della disuguaglianza triangolare

$$\mathsf{len}[\mathsf{r}_{i-1},\mathsf{r}_i] \le \mathsf{len}[\mathsf{r}_{i-1},\mathsf{r}(\overline{t})] + \mathsf{len}[\mathsf{r}(\overline{t}),\mathsf{r}_i] .$$

Procedendo con l'infittimento delle decomposizioni la lunghezza della poligonale non decresce.

Si può quindi definire la lunghezza di un arco rettificabile ricorrendo a un processo di limite sulle decomposizioni governato dalla progressiva illimitata diminuzione dell'ampiezza massima dei sottointervalli che le costituiscono. Possiamo quindi affermare anche

$$\mathsf{len}(\Gamma) :=_{\text{if}\exists} \lim_{maxwid\left(\mathsf{S}\in\mathsf{Dcmp}[a,b]\right)\to 0} \mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma,\mathsf{S})) .$$

I36c.04 Cerchiamo ora formule più stringenti in grado di fornire espressioni calcolabili per curve caratterizzate da espressioni parametriche o loro equivalenti sufficientemente maneggevoli.

(1) Teorema Un arco di curva Γ fornito da una parametrizzazione cartesiana

$$\mathsf{r}(t) = \langle \xi(t), \eta(t), \zeta(t) \rangle \quad \text{con } a \le t \le b , \tag{1}$$

dove le funzioni $\xi(t)$,$\eta(t)$ e $\zeta(t)$ sono funzioni differenziabili in $[a,b]$ è un arco rettificabile e la sua lunghezza è data da

$$\mathsf{len}(\Gamma) = \int_a^b \mathrm{d}t \sqrt{(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2 + (\zeta'(t))^2} . \tag{2}$$

Dim.: Prendiamo in esame la decomposizione $\mathsf{S} \in \mathsf{Dcmp}[a,b]$ e per ogni $i = 1,2,...,n-1,n$ con $n = n(\mathsf{S})$ e poniamo $h_i := t_i - t_{i-1}$.
Per il teorema del valor medio per ogni $i = 1,2,...,n$ abbiamo

$$\xi_i - \xi_{i-1} = (t_i - t_{i-1})\xi'(\tau_{x,i}) = h_i\, \xi'(\tau_{x,i}) \quad , \quad \eta_i - \eta_{i-1} = h_i\, \eta'(\tau_{x,i}) \quad , \quad \zeta_i - \zeta_{i-1} = h_i\, \zeta'(\tau_{z,i}) ,$$

dove $\tau_{x,i}$, $\tau_{y,i}$ e $\tau_{z,i}$ sono opportuni elementi di $I_i := [t_{i-1},t_i]$.
Con tali scelte otteniamo $\ell_i = h_i \sqrt{(\xi(\tau_{x,i})^2 + \eta(\tau_{y,i})^2 + \zeta(\tau_{z,i})^2}$ e quindi

$$\mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma,\mathsf{S})) = \sum_{i=1}^n h_i \sqrt{(\xi(\tau_{x,i}))^2 + (\eta(\tau_{y,i}))^2 + (\zeta(\tau_{z,i}))^2} . \tag{3}$$

Nell'ultima espressione vogliamo passare a un radicale contenente le derivate delle funzioni componenti ξ, η e ζ valutate in un unico elemento di I_i e più precisamente in τ_i.
Per questa modifica va tenuta presente la disuguaglianza

$$\begin{aligned} &\left| \sqrt{(\xi'(\tau_{x,i}))^2 + (\eta'(\tau_{y,i}))^2 + (\zeta'(\tau_{z,i}))^2} - \sqrt{(\xi'(\tau_i))^2 + (\eta'(\tau_i))^2 + (\zeta'(\tau_i))^2} \right| \\ &\qquad \le |\eta'(\overline{\tau}_i) - \eta'(\tau_i)| + |\zeta'(\overline{\overline{\tau}}_i) - \zeta'(\tau_i)| \end{aligned} . \tag{4}$$

derivabile dalla disuguaglianza triangolare

$$\left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}-\sqrt{a^2+\overline{b}^2+\overline{c}^2}\right| \leq |\overline{b}-b|+|\overline{c}-c| \ ,$$

concernente i tre lati del triangolo avente come vertici i punti di $\mathbb{R}^{\times 3}$ $\langle 0,0,0\rangle$, $\langle a,b,c\rangle$ e $\langle a,\overline{b},\overline{c}\rangle$.

Grazie alla continuità delle funzioni ξ', η' e ζ', scelto un $\epsilon_1 \in \mathbb{R}_+$ (idap), esiste $\delta_1 \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni decomposizione di $[a,b]$ con sottointervalli di ampiezza inferiore a δ_1 in ciascuno di tali insiemi le oscillazioni delle tre funzioni sono inferiori a ϵ_1.

Abbiamo quindi $|\eta'(\overline{\tau}_i)-\eta'(\tau_i)|<\epsilon_1$ e $|\zeta'(\tau_{z,i})-\zeta'(\tau_{x,i})|<\epsilon_1$ e di conseguenza

$$\left|\sqrt{(\xi'(\tau_{x,i}))^2+(\eta'(\tau_{y,i})^2+(\zeta'(\tau_{z,i}))^2}-\sqrt{(\xi'(\tau_{x,i}))^2+(\eta'(\tau_{x,i}))^2+(\zeta'(\tau_{x,i}))^2}\right| \ \leq\ 2\,\epsilon_1$$

e la possibilità di scrivere, per un opportuno $\omega_i \in (-2,2)$,

$$\sqrt{(\xi'(\tau_{x,i}))^2+(\eta'(\tau_{y,i}))^2+(\zeta'(\tau_{z,i}))^2} \ =\ \sqrt{(\xi'(\tau_{x,i}))^2+(\eta'(\tau_{x,i}))^2+(\zeta'(\tau_{x,i}))^2}\ +\ \omega_1\,\epsilon_1 \ .$$

Di conseguenza si ha

$$(5) \qquad \mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma,\mathsf{S})) \ =\ \sum_{i=1}^{n} h_i\,\sqrt{(\xi'(\tau_i))^2+(\eta'(\tau_i))^2+(\zeta'(\tau_i))^2}\ +\ \overline{\omega}\,(b-a) \ .$$

Possiamo ora applicare il teorema di Riemann-Darboux alla funzione continua in $[a,b]$ e quindi ivi integrabile $S(t):=\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2}$.

Scelto un $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_+$ (idap), esiste $\delta_2 = f(\epsilon_2) \in \mathbb{R}_+$ tale che quando tutti gli h_i sono inferiori a δ_2 si ha

$$\left|\int_a^b dt\,\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2}-\sum_{i=1}^{n} h_i\,\sqrt{(\xi'(\tau_i))^2+(\eta'(\tau_i))^2+(\zeta'(\tau_i))^2}\right| < \epsilon_2 \ .$$

Posto $\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$, per una decomposizione S di $[a,b]$ con sottointervalli di ampiezza inferiore a δ si ha

$$\left|\int_a^b dt\,\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2}-\mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma,\mathsf{S}))\right| \ \leq$$

$$\left|\int_a^b dt\,\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2}-\sum_{i=1}^{n} h_i\,\sqrt{(\xi'(\tau_i))^2+(\eta'(\tau_i))^2+(\zeta'(\tau_i))^2}\right| +$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} h_i\,\sqrt{(\xi'(\tau_i))^2+(\eta'(\tau_i))^2+(\zeta'(\tau_i))^2}-\mathsf{len}(\mathsf{\mathbf{Plgnl}}(\Gamma,\mathsf{S}))\right| < \epsilon_1(1+2(b-a)) \ .$$

Ne segue che se assumiamo $\epsilon_2 := \dfrac{\epsilon_1}{1+2(b-a)}$ e definiamo $\epsilon := \min(\epsilon_1,\epsilon_2)$, tutte le lunghezze delle poligonali inscritte nella Γ corrispondenti a suddivisioni di $[a,b]$ con ampiezza massima inferiore a ϵ differiscono da $\displaystyle\int_a^b dt\,\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2}$ meno di ϵ. Siamo dunque giunti a quanto enunciato:

$$(6) \qquad \mathsf{len}(\Gamma) \ =\ \int_a^b dt\,\sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2} \quad ▮$$

I36c.05 Ricordiamo che si possono considerano curve orientate e che l'espressione della rettificazione degli archi di curve differenziabili c04(2) si può considerare valida anche quando $a>b$; in questo caso si attribuisce una lunghezza negativa al dominio monodimensionale di una funzione, la $\mathsf{r}(t)$, che viene percorso facendo decrescere la variabile t. Con questo allargamento dei significati si può enunciare una proprietà di additività allargata della forma

(1) $$\mathsf{len}\left(\Gamma_{a,b}+\Gamma_{b,c}\right) \;=\; \mathsf{len}\left(\Gamma_{a,b}\right)+\mathsf{len}\left(\Gamma_{b,c}\right)\;,$$

nella quale a, b e c sono ascisse del dominio della funzione $\mathbf{r}(t)$ che possono disporsi in un qualsiasi ordine e, quali che siano $\alpha,\beta\in\{a,b,c\}$, $\Gamma_{\alpha,\beta}$ denota un arco di curva orientato in relazione al crescere o decrescere del parametro t.

I36c.06 È intuitivo e facile da dimostrare che per ogni arco differenziabile $\Gamma_{a,b}$ individuato da una funzione $\mathbf{r}(t)$ per $a\le t\le b$ e per ogni decomposizione $\mathsf{S}\in\mathsf{Dcmp}[a,b\,]$ vale la disuguaglianza

$$\mathsf{len}(\mathsf{plgnl}(\Gamma_{a,b},\mathsf{S})) \;\le\; \mathsf{len}(\Gamma_{a,b})$$

e che vale l'uguaglianza sse $\Gamma_{a,b}$ è un segmento rettilineo.

I36c.07 Consideriamo ancora un arco orientato differenziabile il cui secondo estremo consideriamo variabile come funzione della variabile t; per tale arco scriviamo

$$\widehat{AB(t)}=\Gamma_{a,b(t)} := \left\lceil\ \tau\in[a,b(t)]\ \mapsto\ \mathbf{r}(\tau)\ \right\rceil\ .$$

Se introduciamo $A := \mathbf{r}(a)$, $B(t) := \mathbf{r}(b(t))$, per la lunghezza con segno di questo arco orientato scriviamo

(2) $$\mathsf{len}\left(\Gamma_{a,b(t)}\right) \;=\; \int_a^t \mathrm{d}\tau\sqrt{(\xi'(\tau))^2+(\eta'(\tau))^2+(\zeta'(\tau))^2} \;=\; \int_a^t \mathrm{d}\tau\,\sqrt{\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\zeta^2}\ .$$

Un tale arco si denota con una scrittura della forma $s(t)$ quando si reputa possibile sottintendere il fatto che la s sia riferibile alla Γ, ovvero alla $\mathbf{r}(t)$, e alla ascissa iniziale a.

Evidentemente la $s(t)$ è differenziabile e si ha

(3) $$\frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{d}t} \;=\; \sqrt{(\xi'(t))^2+(\eta'(t))^2+(\zeta'(t))^2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}\,s^2 \;=\; \mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\zeta^2\ .$$

Queste formule hanno una interpretazione geometrica ben chiara; convenendo che in ogni punto dell'arco si abbia come retta orientata tangente $\mathbf{t}$ quella concorde in direzione con la orientazione data dal crescere della variabile t. Per la retta orientata $\mathbf{t}$ variabile con t si hanno come coseni direttori

(4) $$\cos\,\alpha_x=\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\,s}\quad,\quad \cos\,\alpha_y=\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\,s}\quad,\quad \cos\,\alpha_z=\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\,s}\ .$$

I36c.08 Dalle espressioni differenziali precedenti si ricavano facilmente le espressioni per la lunghezza di un arco di curva differenziabile fornito da alcune parametrizzazioni diverse dalla cartesiana.

Limitiamoci al caso della parametrizzazione polare o **parametrizzazione nelle coordinate sferiche** ρ, θ e ϕ, per la quale abbiamo

(1) $$\xi(t)\;=\;\rho(t)\,\sin\,\theta(t)\,\cos\,\phi(t)\quad,\quad \eta(t)\;=\;\rho(t)\,\sin\,\theta(t)\,\sin\,\phi(t)\quad,\quad \zeta(t)\;=\;\rho(t)\,\cos\,\theta(t)\ .$$

Da queste espressioni e dalla c07(3) si ottengono le espressioni in coordinate sferiche per il differenziale della lunghezza

(2) $$\mathrm{d}\,s^2 \;=\; \mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\zeta^2 \;=\; \mathrm{d}\rho^2+\rho^2\,\mathrm{d}\theta^2+\rho^2\,\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$$

e la formula di rettificazione di un arco

(3) $$s(t) \;=\; \int_a^t \mathrm{d}\tau\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\rho^2\,\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\rho^2\,\sin^2\theta\,\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\ .$$

I36c.09 Dai risultati precedenti si possono derivare facilmente le formule che consentono di calcolare lunghezze e coseni direttori delle curve piane. Queste si possono considerare casi particolari delle tridimensionali relative a vincoli per le coordinate cartesiane della forma $\zeta = 0$ che si traducono in uguaglianze della forma $\theta = \frac{\pi}{2}$ per le coordinate sferiche che nel piano si riducono alle due coordinate polari ρ e ϕ.

Questi vincoli implicano $\mathrm{d}\,\zeta = 0$ e $\mathrm{d}\,\theta = 0$.

Consideriamo quindi un arco di curva piana orientata trattabile mediante una parametrizzazione cartesiana o mediante una equivalente parametrizzazione polare

$$\Gamma_{a,b} \;=\; \lceil\; t \in [a,b\,] \;\not\mapsto\; \mathsf{r}(t) = \langle \xi(t), \eta(t) \rangle = \langle \rho(t)\,\cos\,\phi(t)\,,\, \rho(t)\,\sin\,\phi(t) \rangle \;\rceil$$

con $\xi(t)$ ed $\eta(t)$ (e di conseguenza $\rho(t)$ e $\phi(t)$) continue e differenziabili nell'intervallo $[a,b\,]$.

Per individuare archi di curva piana specifici attraverso specifiche espressioni per le coordinate cartesiane e polari in funzione di una variabile che corre su un intervallo troveremo comodo usare anche due notazioni nelle quali sono esplicitate le parametrizzazioni e viene sottintesa la curva:

$$\mathsf{CrvpC}(a,b,\xi,\eta) \;:\; \mathsf{CrvpP}(a,b,\rho,\phi) \;:=\; \Gamma_{a,b} \;.$$

Per la lunghezza di tale arco da c04(2) e c08(3) si ottengono le formule

(1) $$\mathsf{len}\big(\mathsf{CrvpC}(a,b,\xi,\eta)\big) \;=\; \int_a^b \mathrm{d}t\, \sqrt{\left(\xi'(t)\right)^2 + \left(\eta'(t)\right)^2} \;=\; \int_a^t \mathrm{d}\tau\, \sqrt{\mathrm{d}\xi^2 + \mathrm{d}\eta^2}\;,$$

(2) $$\mathsf{len}\big(\mathsf{CrvpP}(a,b,\rho,\phi)\big) \;=\; \int_a^t \mathrm{d}\tau\, \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \rho^2\,\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2} \;=\; \int_a^t \mathrm{d}\tau\, \sqrt{\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^{\,2}}\;.$$

I36c.10 Dalle formule precedenti si ricavano facilmente, anche le formule riguardanti curve date sotto la cosiddetta forma esplicita in coordinate cartesiane, con scritture della forma $y = f(x)$, o in coordinate polari piane, con espressioni della forma $\rho = R(\phi)$.

In effetti alle prime curve si può dare la forma $\mathsf{CrvpC}\big(a,b,x=t,f(x)\big)$ e si ottiene come caso particolare della c09(1)

(1) $$\mathsf{len}\Big(\mathsf{CrvpC}\big(a,b,x=t,f(x)\big)\Big) \;=\; \int_a^b \mathrm{d}x\;\sqrt{1+[f'(x)]^2}\;,$$

mentre alle curve in coordinate polari si può dare la forma $\mathsf{CrvpP}\big(a,b,R(\phi),\phi=t\big)$ e si ottiene come caso particolare della c09(2)

(2) $$\mathsf{len}\Big(\mathsf{CrvpC}\big(a,b,\rho(\phi),\phi=t\big)\Big) \;=\; \int_a^b \mathrm{d}\phi\;\sqrt{\rho^2(\phi)+[\rho'(\phi)]^2}\;.$$

I36 d. rettificazione di alcuni archi specifici

I36d.01 In questo paragrafo applichiamo le formule precedenti al calcolo delle lunghezze di alcuni archi specifici. Questi fanno parte di curve le cui caratteristiche basilari sono raccolte nel capitolo G70.

Consideriamo la curva $\mathsf{CrvpC}(0, 2\pi, R\cos\phi, R\sin\phi)$, cioè la circonferenza di centro nell'origine e raggio R. Per tale curva $\mathrm{d}\,s^2 = R^2\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$, ovvero, assunto che sia s crescente con ϕ, $\mathrm{d}\,s = R\,\mathrm{d}\phi$.
Precisiamo ulteriormente la coordinata curvilinea s chiedendo $s(0) = 0$ e avremo

(1) $$s(\phi) \;=\; \int_0^\phi \mathrm{d}\,\psi\; R = R\,\phi\ ,$$

mentre per la lunghezza dell'intera circonferenza si ha

(2) $$\mathsf{len}\big(\mathsf{CrvpC}(0, 2\pi, R\cos\phi, R\sin\phi)\big) \;=\; 2\,\pi\,R\ .$$

I36d.02 Consideriamo la parabola di equazione $y^2 = 4\,p\,x$ con $p \in \mathbb{R}_+$ e l'arco corrispondente a valori nonnegativi della y delimitato , dai due punti $\big\langle a, 2\sqrt{p\,a}\big\rangle$ e $\big\langle b, 2\sqrt{p\,b}\big\rangle$, con $a, b > 0$.
Con la restrizione $y \geq 0$ si ottiene: $y = 2\sqrt{p}\,x^{1/2}$, $y' = \sqrt{\dfrac{p}{x}}$, $1 + y'^2 = 1 + \dfrac{p}{x} = \dfrac{x+p}{x}$.
Si ha quindi l'espressione per la lunghezza dell'arco

$$\mathsf{len}\Big(\mathsf{CrvpC}(a, b, x, 2\sqrt{p\,x})\Big) \;=\; \int_a^b \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{x+p}{x}} \;=\; \left[\sqrt{x^2 + p\,x} + \frac{p}{2}\,\ln\Big(x + \frac{p}{2}\sqrt{x^2+p\,x}\Big)\right]_a^b\ .$$

I36d.03 Consideriamo l'ellisse caratterizzata dalla parametrizzazione cartesiana [G7ab02]

$$\begin{cases} x &= a\,\sin\phi \\ y &= b\,\cos\phi \end{cases} \qquad \text{per}\quad 0 < b \leq a\ ,\ 0 \leq \phi \leq 2\,\pi$$

Per essa $\mathrm{d}\,s^2 = (a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi)\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$; introdotta l'eccentricità $k := \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, si ottiene

$$\mathrm{d}\,s^2 \;=\; \big(a^2\cos^2\phi + a^2(1-k^2)\sin^2\phi\big)\,\mathrm{d}\phi^{\,2} \;=\; a^2\,\big(1 - k^2\sin^2\phi\big)\;\mathrm{d}\phi^{\,2}$$

Assumiamo l'ellisse orientata nel verso coerente con il crescere del parametro angolare ϕ; in tal caso si trova

$$\mathrm{d}\,s \;=\; a\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}\;\mathrm{d}\phi\ .$$

Per la lunghezza dell'arco delimitato dai valori 0 e ϕ del parametro angolare si ha

$$s(\phi) \;=\; a\int_0^\phi \mathrm{d}\,\psi\,\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \;=:\; a\,\boldsymbol{Ei}_k^{(1)}(\phi)\ ,$$

dove $\boldsymbol{Ei}_k^{(1)}(\phi)$ denota l'integrale ellittico di seconda specie [I27e09].

I36d.04 Consideriamo l'iperbole caratterizzata dalla parametrizzazione cartesiana [G7ab03]

$$\begin{cases} x &= \dfrac{a}{\sin\phi} \\ y &= b\,\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi} \end{cases} \qquad \text{per}\quad 0 < a, b \quad \text{e} \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad \text{oppure} \quad -\pi < \phi < 0\ .$$

Questa curva è costituita da due rami: il primo corrispondente a $0 < \phi < \pi$ appartiene ai quadranti I e IV, il secondo corrispondente a $-\pi < \phi < 0$ appartenente ai quadranti II e III. Segnaliamo anche

che la curva è invariante per la trasformazione $((\phi \leftrightarrow -\phi))$, applicazione che scambia i due rami e per $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ si hanno i vertici dei due rami.

Per il differenziale dell'arco si trova

$$\frac{\mathrm{d}\,s^2}{\mathrm{d}\phi^{\,2}} \;=\; \frac{a^2\,\cos^2\phi}{\sin^4\phi} + \frac{b^2}{\sin^4\phi} \;=\; \frac{b^2 + a^2\,\cos^2\phi}{\sin^4\phi},$$

Orientata la curva secondo il crescere della ϕ, per la lunghezza dell'arco sul ramo di destra delimitato dai valori ϕ e $\frac{\pi}{2}$ del parametro angolare si ha

$$s(\phi) \;=\; \int_\phi^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sin^2\psi}\,\sqrt{b^2 + a^2\,\cos^2\psi} \;=\; \Big[-\cot\psi\,\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\psi}\Big]_\phi^{\pi/2} - \int_\phi^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi\;a^2\,\cos\psi}{\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\psi}}$$

$$=\;\cot\phi\,\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\phi} \;-\; \int_\phi^{\pi/2} \mathrm{d}\psi\;\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\psi} \;+\; b^2\int_\phi^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\,\psi}{\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\psi}}\;.$$

Posto $k^2 \;:=\; \dfrac{a^2}{a^2+b^2}$, osservato che $\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\phi} \;=\; \dfrac{a}{k}\sqrt{1-k^2\,\sin^2\phi}$, si ottiene

$$s(\phi) \;=\; \cot\phi\,\sqrt{b^2+a^2\,\cos^2\phi} \;-\; \frac{a}{k}\int_\phi^{\pi/2}\mathrm{d}\,\psi\,\sqrt{1-k^2\,\sin^2\psi} \;+\; \frac{k\,b^2}{a}\int_\phi^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\,\psi}{\sqrt{1-k^2\,\sin^2\psi}}\;.$$

I36d.05 Una cardioide [G70d06] si può individuare con l'equazione polare $\rho(\phi) = 2\,R\,(1+\cos\phi)$. Si ha quindi

$$\mathrm{d}\,s^2 = (\rho^2+\rho'^2)\mathrm{d}\phi^{\,2} = 4R^2\left(1+2\cos\phi+\cos^2\phi+\sin^2\phi\right) = 8R^2(1+\cos\phi)\,\mathrm{d}\phi^{\,2} = 16R^2\cos^2\frac{\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi^{\,2}.$$

Conviene considerare questa curva chiusa orientata nel verso corrispondente al crescere di ϕ da $-\pi$ a $+\pi$ e considerare $\mathrm{d}\,s = 4\,R\,\cos\dfrac{\phi}{2}\,\mathrm{d}\phi$. Per la lunghezza con segno dell'arco di cardioide compreso tra l'origine e il punto caratterizzato dall'angolo ϕ e da $\rho(\phi)$ si ha

$$4\,R\int_0^\phi \mathrm{d}\psi\;\cos\frac{\psi}{2} \;=\; 8\,R\left[\sin\,\frac{\psi}{2}\right]_0^\phi\;.$$

Per la lunghezza dell'intera curva si ha dunque $4\,R\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{d}\,\rho\,\psi\;\cos\frac{\psi}{2} \;=\; 16\,R$.

I36d.06 Una cicloide [G70j02] è caratterizzata dalla parametrizzazione cartesiana

$$(1)\qquad \begin{cases} x &= a(t-\sin\,t) \\ y &= a(1-\cos\,t)\end{cases} \qquad \text{per}\quad t\in\mathbb{R}\;.$$

Per essa quindi $\mathrm{d}\,s^2 \;=\; a^2\,\left[(1-\cos\,t)^2+\sin^2 t\right]\,\mathrm{d}t^{\,2} \;=\; 2\,a^2\,(1-\cos\,t)\,\mathrm{d}t^{\,2} \;=\; 4\,a^2\sin^2\dfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t^{\,2}$.

Per l'arco orientato di cicloide facente parte della arcata corrispondente a $0\le x\le 2\,\pi\,a$, cioè relativa a $0\le t\le 2\,\pi$, arco delimitato dall'origine e dal punto $\big\langle a(t-\sin\,t), a(1-\cos\,t)\big\rangle$, si trova la lunghezza

$$2\,a\int_0^t \mathrm{d}u\,\sin^2\frac{u}{2} \;=\; 4\,a\,\left[\cos\,\frac{t}{2}\right]_0^t \;=\; 4\,a\,\left(1-\cos\,\frac{t}{2}\right) \;=\; 8\,a\,\sin^2\,\frac{t}{4}\;.$$

In particolare la lunghezza di un'intera arcata è $8\,a\,\sin^2\dfrac{2\pi}{4} \;=\; 8\,a$.

I36d.07 Consideriamo la spirale di Archimede, curva caratterizzata dall'equazione polare $\rho = k\,\phi$ con $k\in\mathbb{R}_+$ [G70k02]. Per essa $\mathrm{d}\,s^2 \;=\; (\rho^2+\rho'^2)\,\mathrm{d}\phi \;=\; k^2(\phi^2+1)\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$.

Scelta per la curva l'orientazione coerente con il crescere della ϕ da $-\infty$ a $+\infty$, si ottiene $\mathrm{d}\,s = \sqrt{1+\phi^2}\,\mathrm{d}\phi$ e per la lunghezza con segno dell'arco delimitato dai valori del parametro) e ϕ

$$s(\phi) \;=\; k \int_0^{\phi} \mathrm{d}\,\psi\,\sqrt{1+\psi^2} \;=\; \frac{k}{2}\,\left[\phi\,\sqrt{1+\phi^2} + \ln(\phi + \sqrt{1+\phi^2})\right] \;.$$

I36d.08 Consideriamo la spirale iperbolica caratterizzata dall'equazione polare $\rho = \dfrac{k}{\phi}$ con $k \in \mathbb{R}_+$, curva a due rami riguardanti, risp., i due intervalli del codominio del pasrametro angolare $\infty < \phi < 0$ e $0 < \phi < +\infty$ [G70k03].

Per tale curva $\mathrm{d}\,s^2 = (\rho^2 + {\rho'}^2)\,\mathrm{d}\phi^{\,2} \;=\; k^2\left(\dfrac{1}{\phi^2} + \dfrac{1}{\phi^4}\right)\mathrm{d}\phi^{\,2} \;=\; \dfrac{k^2}{\phi^4}(\phi^2+1)\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$.

Scegliamo $\mathrm{d}\,s \;=\; k\dfrac{\sqrt{(\phi^2+1)}}{\phi^2}\,\mathrm{d}\phi$, ovvero orientiamo la curva secondo l'angolo ϕ crescente.

Per l'arco orientato delimitato dai valori ϕ_1 e ϕ_2 del parametro con $0 < \phi_1, \phi_2$ oppure $\phi_1, \phi_2 < 0$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
s(\phi_1,\phi_2) \;&=\; k \int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\,\psi\,\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\psi^2} \;=\; -k^2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{1+\psi^2}\;\mathrm{d}\left(\frac{1}{\psi}\right)\\
&=\; k\left[-\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\phi}\right]_{\psi_1}^{\psi_2} + k\int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} \qquad .\\
&=\; k\left[-\frac{\sqrt{1+\psi^2}}{\phi}\right]_{\psi_1}^{\psi_2} \;=\; \left[\ln\left(\psi + \sqrt{1+\psi^2}\right)\right]_{\psi_1}^{\psi_2}
\end{aligned}$$

I36d.09 Consideriamo la spirale logaritmica, cioè la curva definita dall'equazione polare piana $\rho = \mathsf{e}^{k\,\phi}$ con $k \in \mathbb{R}_+$ [G70k04]. Per essa $\mathrm{d}\,s^2 = (\rho^2 + {\rho'}^2)\,\mathrm{d}\phi^{\,2} = \mathsf{e}^{2\,k\phi}\,(1+k^2)\,\mathrm{d}\phi^{\,2}$ e conviene scegliere $\mathrm{d}\,s = \mathsf{e}^{k\phi}\,\sqrt{1+k^2}\,\mathrm{d}\phi$, ovvero orientare la curva secondo ϕ crescente.

Con tale scelta per l'arco orientato delimitato dai valori ϕ_1 e ϕ_2 otteniamo

$$s(\phi_1,\phi_2) \;=\; \sqrt{1+k^2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\mathrm{d}\,\psi\;\mathsf{e}^{k\psi} \;=\; \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\,\left(\mathsf{e}^{k\phi_2} - \mathsf{e}^{k\phi_1}\right) \;=\; \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}\,\Big(\rho(\phi_2) - \rho(\phi_1)\Big) \;.$$

Questo risultato porta ad affermare che la lunghezza di un arco di spirale logaritmica è proporzionale alla differenza delle distanze dal centro dei raggi vettori degli estremi.

I36d.10 Consideriamo l'elica circolare, curva caratterizzata dalla parametrizzazione cartesiana

$$\begin{cases} x = R\,\cos\,t \\ y = R\,\sin\,t \\ z = k\,t \end{cases} \qquad \text{con} \quad R,k \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad t \text{ variabile sull'intero } \mathbb{R} \;.$$

Per essa si trova $\mathrm{d}\,s^2 \;=\; \left(R^2\,\cos^2\,t + R^2\,\sin^2\,t + k^2\right)\,\mathrm{d}t^{\,2} \;=\; (R^2+k^2)\,\mathrm{d}t^{\,2}$ e risulta conveniente orientare la curva secondo la t crescente scegliendo $\mathrm{d}\,s = \sqrt{R^2+k^2}$.

Per l'arco che ha per estremi i punti corrispondenti ai valori 0 e t del parametro abbiamo

$$s(0,t) \;=\; \int_0^t \mathrm{d}\tau\,\sqrt{R^2+k^2} \;=\; \sqrt{R^2+k^2}\,t \;.$$

I36 e. curvatura di una curva piana

I36e.01 Consideriamo una curva piana Γ continua e rettificabile individuata dalle equazioni parametriche $\mathsf{r}(t) = \mathsf{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t)\rangle$ per $t \in I = [$a,b $]$ e chiediamo che in I esistano e siano continui i due vettori derivati $\mathsf{f}'(t)$ e $\mathsf{f}''(t)$.

Consideriamo un punto di riferimento $\mathsf{f}(t_0)$ e un punto variato $\mathsf{f}(t_0+h) = \mathsf{f}(t_0+\Delta t)$ (con $t_0, t_0+h \in I$. Denotiamo poi con $\mathsf{t}(t)$ la tangente alla Γ nel punto $\mathsf{f}(t)$ orientata concordemente alla orientazione della Γ indotta dalla variabile t crescente. Denotiamo inoltre con $\mathsf{u}(t)$ il versore di $\mathsf{t}(t)$ e con $\alpha(t)$ l'angolo con segno formato da Ox con la retta orientata $\mathsf{t}(t)$; per eliminare la indeterminatezza dell'ampiezza $\alpha(t)$, che potrebbe essere sostituita dalla $\alpha(t) + k\,2\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, chiediamo che sia $\alpha(t_0) \in [0, 2\pi)$ e che $\alpha(t)$ sia continua in $[$a,b $]$.

Consideriamo $\Delta\alpha := \alpha(t_0+\Delta t) - \alpha(t_0)$, incremento della $\alpha(t)$ attinente al passaggio da t_0 a $t_0+\Delta t$ e osserviamo che se Δt è abbastanza piccolo deve essere $-\pi < \alpha < \pi$. Inoltre scriviamo $s(t)$ la lunghezza con segno dell'arco orientato della Γ compreso tra $\mathsf{f}(t_0)$ a $\mathsf{f}(t_0+\Delta t)$.

Il rapporto $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ si dice **curvatura media della curva** Γ attinente all'intervallo $[t_0, t_0+\Delta t]$, o equivalentemente curvatura media dell'arco $\{t \in [t_0, t_0+\Delta t] :|\ \mathsf{f}(t)\}$.

Per esempio si vede che ogni segmento rettilineo è caratterizzato dall'avere curvatura media nulla e ogni arco di una circonferenza di raggio R dall'avere curvatura media costante e pari a $\dfrac{1}{R}$.

I36e.02 In ogni intervallo J contenuto in $[$a,b $]$ nel quale $\mathsf{t}(t)$ non è verticale i coseni direttori della tangente $\mathsf{t}(t)$ sono proporzionali, risp., a ${f_1}'(t)$ e ${f_2}'(t)$ e quindi valgono le espressioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos\,\alpha(t) = \dfrac{{f_1}'(t)}{\sqrt{({f_1}'(t))^2 + ({f_2}'(t))^2}} = \dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}\,s(t)} \\ \sin\,\alpha(t) = \dfrac{{f_2}'(t)}{\sqrt{({f_1}'(t))^2 + ({f_2}'(t))^2}} = \dfrac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}\,s(t)} \\ \tan\,\alpha(t) = \dfrac{f_2(t)}{f_1(t)} = \dfrac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}f_1(t)} \end{cases}$$

Nell'intervallo J la continuità di $\mathsf{f}'(t)$ rende lecito differenziare l'espressione della tangente per ottenere:

$$(2)\qquad \frac{1}{\cos^2\alpha(t)}\,\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,s}\left(\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_1}\right) \qquad \text{ovvero} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}f_1}\right)^2\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\,s} = \frac{\mathrm{f}_2{}^2\,\mathrm{d}f_1 - \mathrm{d}f_2\,\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}{f_1}^2\,\mathrm{d}\,s}\ .$$

Fatta eccezione per i valori di t_0 nei quali la tangente $\mathsf{t}(t_0)$ è orizzontale o verticale, esistono i limiti per $\Delta \to 0$ dei rapporti incrementali $\dfrac{\mathrm{d}\,\alpha(t_0)}{\mathrm{d}\,s(t_0)}$ e $\dfrac{\mathrm{d}\,s(t_0)}{\mathrm{d}\,\alpha(t_0)}$.
Questi limiti si dicono, risp., **curvatura** e **raggio di curvatura** della Γ attinenti il punto $\mathsf{f}(t_0)$.
Denotando con t il generico valore del parametro della curva, per essi scriviamo, risp.,

$$\kappa(t) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\alpha(t)}{\Delta s(t)} = \frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{ds(t)} \quad \text{e}$$

$$\mathtt{Rcu}(t) := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s(t)}{\Delta\alpha(t)} = \frac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{d}\,\alpha(t)}\ .$$

La (2) conduce quindi a

$$(3) \qquad \begin{array}{rclclcl} \kappa(t) & = & \dfrac{\mathrm{d}\,\alpha(t)}{\mathrm{d}\,s(t)} & = & \dfrac{\mathrm{d}f_{\,2}{}^2\,\mathrm{d}f_{\,1} - \mathrm{d}f_{\,2}\,\mathrm{d}^2 f_1}{\mathrm{d}\,s^3} & = & \dfrac{f_2{}'\,f_1{}' - f_2{}'\,f_1{}'}{\big((f_1{}')^2 + (f_2{}')^2\big)^{3/2}} \\ R_c(t) & = & \dfrac{\mathrm{d}\,s(t)}{\mathrm{d}\,\alpha(t)} & = & \dfrac{\mathrm{d}\,s^3}{\mathrm{d}f_{\,2}{}^2\,\mathrm{d}f_{\,1} - \mathrm{d}f_{\,2}\,\mathrm{d}^2 f_1} & & \end{array} .$$

I36e.03 Si chiama **centro di curvatura** della curva Γ attinente il punto $\mathbf{f}(t)$ il punto-RR `CrvC` avente come coordinate

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathtt{CrvC}_1(t) \;:=\; f_1(t) - R(t)\,\dfrac{\mathrm{d}f_2(t)}{\mathrm{d}\,s(t)} \;=\; f_1(t) - \dfrac{\mathrm{d}\,s^2\,\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}f_2{}^2\,\mathrm{d}f_1 - \mathrm{d}f_2\,\mathrm{d}^2 f_1} \\ \mathtt{CrvC}_2(t) \;:=\; f_2(t) + R(t)\,\dfrac{\mathrm{d}f_1(t)}{\mathrm{d}\,s(t)} \;=\; f_2(t) + \dfrac{\mathrm{d}\,s^2\,\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}f_2{}^2\,\mathrm{d}f_1 - \mathrm{d}f_2\,\mathrm{d}^2 f_1} \end{cases} .$$

I36e.04 Va osservato che curvatura e raggio di curvatura possono essere positivi, negativi e nulli; inoltre nei punti nei quali si annulla una componente di $\mathbf{f}'(t)$ si hanno coppie di valori $\langle 0, \infty\rangle$ e $\langle \infty, 0\rangle$.

Se si inverte il verso della curva Γ passando dal parametro t a un parametro $a - t$, allora Δs cambia di segno, mentre $\Delta\alpha$ rimane invariato; di conseguenza cambiano di segno $\kappa(t)$ e $R_c(t)$.

Il segno positivo di $\kappa(t)$ e di $R_c(t)$ corrisponde alla rotazione della tangente $\mathbf{t}(t)$ nel verso positivo (antiorario) e il negativo corrisponde al ruotare nel verso negativo (orario).

I valori t per i quali $\kappa(t) = 0$ sono i valori per i quali $\mathrm{d}f_2{}^2\,\mathrm{d}f_1 \;=\; \mathrm{d}f_2\,\mathrm{d}f_1{}^2$, ovvero per i quali

$$f_2{}'(t) f_1{}'(t) - f_2{}'(t)\, f_1{}'(t) \;=\; \det \begin{bmatrix} f_1{}'(t) & f_2{}'(t) \\ f_1{}'(t) & f_2{}'(t) \end{bmatrix} \;=\; 0 \;.$$

I punti corrispondenti si dicono **punti a tangente stazionaria** e tendendo a tali punti il raggio di curvatura diverge a ∞; tali punti sono punti di partenza per un incremento Δt tale che il corrispondente $\Delta\alpha$ è un infinitesimo di ordine superiore a Δs e l'angolo α è stazionario al variare di s.

I36e.05 Nel caso in cui la curva Γ è il diagramma di una funzione-RtR $f(x)$, abbiamo $\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}f_{\,1} = \mathrm{d}x$ risulta arbitrario, $\mathrm{d}^2 f_1 = 0$ e $\mathrm{d}^2 f_2 = \mathrm{d}^2 f = f''(x)\,\mathrm{d}x^{\,2}$.

I punti corrispondenti a tangente stazionaria sono quelli per i quali $f''(x) = 0$, come già trovato in I23a.

Si trova inoltre che $\mathrm{d}\,s^2 = \big(1 + [f'(x)]^2\big)\;\mathrm{d}x^{\,2}$, $\mathrm{d}^2 f_2\,\mathrm{d}f_{\,1} - \mathrm{d}f_{\,2}\,\mathrm{d}^2 f_1 = f''(x)\,\mathrm{d}x^{\,2}$, e pertanto per la curvatura abbiamo

$$\kappa(x) \;=\; \frac{1}{R_c(x)} \;=\; \frac{f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}} \;.$$

I36e.06 Per la circonferenza di raggio R e centro nell'origine: $\mathbf{r}(t) = R\,\cos t\,\mathbf{e}_x + R\,\sin t\,\mathbf{e}_y$, abbiamo

$$f_1{}'(t) = R\,\sin\,t\ ,\ \ f_1{}'(t) = -R\,\cos\,t\ ,\ \ f_2{}'(t) = R\,\cos\,t\ ,\ \ f_2{}'(t) = -R\,\sin\,t\ ,$$

$$f_2{}'\,f_1{}' - f_2{}'\,f_1{}' = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2\ ,\ (f_1{}')^2 + (f_2{}')^2 = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) = R^2,\ \kappa(t) = \frac{1}{R}\ .$$

Per la funzione seno si può applicare f05: $y = \sin\,x$, $y' = \cos\,x$, $y'' = -\sin\,x$ e quindi $\kappa(x) = -\dfrac{\sin\,x}{(1 + \cos^2 x)^{3/2}}$; in particolare $\kappa(0) = 0$, $\kappa(\pi/2) = -1$, $\kappa(\pi) = 0$, $\kappa(3\pi/2) = 11$.

I36e.07 Studiamo l'andamento della curvatura della curva logaritmica $y = f(x) := \log_b x$, considerando quindi $x \in \mathbb{R}_+$. Ci limitiamo al caso $b > 1$, ricordando che alla base reciproca corrisponde la funzione opposta: $y = \log_{1/b} = -\log_b x$.

Posto $c := \log_b e$ e osservato che $c > 0$, si ricava

$$f'(x) = \frac{c}{x} > 0 \quad , \quad f''(x) = -\frac{c}{x^2} < 0 \quad , \quad \kappa(x) = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}} = -c\,\frac{x}{(x^2+c^2)^{3/2}} \ .$$

Si deduce quindi che $\kappa(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}_+$, che $\lim_{x\to 0+} \kappa(x) \ = \ 0-$ e che $\lim_{x\to+\infty} \kappa(x) = 0-$.

Da quest'ultima relazione segue che Ox è asintoto orizzontale della $\kappa(x)$.

Per le parti principali della funzione $\kappa(x)$ agli estremi del suo dominio si trova

$$\kappa(x) \sim_{x\to 0-} -\frac{x}{c^2} \quad , \quad \kappa(x) \sim_{x\to+\infty} -\frac{c}{x^2} \ .$$

Precisiamo l'andamento della $\kappa(x)$ studiandone crescite, decrescite e caratteristiche di concavità.

$$\kappa'(x) \ = \ c\,\frac{2\,x^2 - c^2}{(x^2+c^2)^{5/2}} \qquad , \qquad \kappa''(x) \ = \ 3\,c\,x\,\frac{3\,c^2 - 2\,x^2}{(x^2+c^2)^{7/2}} \ .$$

Dato che $2x^2 - c^2 \ = 2\,(x-d)(x+d)$ con $d := \frac{c}{\sqrt{2}}$, si ottiene che $\kappa(x)$ decresce ($\kappa'(x) < 0$) per $0 < x < d$, presenta il suo minimo assoluto in $\left\langle d, -\frac{2\sqrt{3}}{9c}\right\rangle$ e cresce ($\kappa'(x) > 0$) per $d < x$.

Dalla derivata seconda, essendo $3\,c\,x > 0$ e $(x^2+c^2)^{7/2} > 0$, si ha che $\kappa(x)$ volge la concavità verso l'alto ($\kappa'(x) > 0$) per $0 < x < c\,\frac{3}{2}$, ha un punto di flesso in $\left\langle c\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{2}{5\,c}\sqrt{\frac{3}{5}}\right\rangle$ e volge la concavità verso il basso ($\kappa'(x) < 0$) per $c\,\frac{3}{2} < x$, in quanto accade che $d < c\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $-\frac{2\sqrt{3}}{9\,c} < -\frac{2}{5\,c}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Infine si segnala che la tangente nel punto di flesso è data da $Y = \frac{8}{25}\sqrt{\frac{2}{5}}\,\frac{1}{c^2}\,X - \frac{18}{25}\,\frac{1}{c}$ e che il limite per $x \to 0+$ delle tangenti alla curva è la retta $Y = -\frac{1}{c^2}\,X$.

I36 f. quadratura di settori in coordinate polari

I36f.01 Affrontiamo ora il calcolo dell'area di regioni piane delimitate da curve chiuse particolari. Consideriamo una curva piana orientata Γ_{AB} data mediante un'equazione in coordinate polari della forma $\rho = P(\phi)$ per $\phi \in I = [a,b]$, con $P(\phi)$ continua e differenziabile in tale intervallo.
Qui si intende che A e B denotano i due estremi della curva, punti espressi in coordinate cartesiane, risp., da $A := \langle P(a)\cos(a), P(a)\sin(a)\rangle$ e $B := \langle P(b)\cos(b), P(b)\sin(b)\rangle$, mentre per per le coordinate polari ci serviamo delle notazioni $A := [R(a), \phi(a)]$ e $B := [R(b), \phi(b)]$.

Per semplicità in un primo momento supponiamo che valga la limitazione $|b-a| \leq 2\pi$.

Diciamo **settore polare semplice associato alla curva** Γ_{AB} e denotiamo con $\mathsf{SectPol}(\Gamma_{AB})$, la regione delimitata dalla curva chiusa orientata Γ_{OABO} formata dal segmento orientato $\overrightarrow{OA}$, dall'arco Γ_{AB} e dal segmento orientato $\overrightarrow{BO}$.

//input pI36f01

Consideriamo sia $b = a \pm 2\pi$: quando $\rho(a) = \rho(b)$ il settore equivale alla regione interna della curva chiusa Γ_{AB} che contiene l'origine; quando $\rho(a) \neq \rho(b)$ il settore equivale alla regione interna della curva chiusa formata da G_{AB} e da $\overrightarrow{BA}$.
In accordo con la regola del segno per le aree di regioni delimitate da curve chiuse nonintrecciate, l'area di $\mathsf{SectPol}(\Gamma_{AB})$ è positiva sse $a < b$ e negativa sse $b < a$.

Se togliamo la restrizione su $|b-a|$ e se viceversa supponiamo sia $|a-b| > 2\pi$, la Γ_{OABO} individua una figura piana che ancora chiamiamo **settore polare** associato a Γ_{AB} e denotiamo con $\mathsf{SectPol}(\Gamma_{AB})$; questa figura se non è semplice si può scomporre in un numero finito di settori polari semplici componenti e la sua area si può definire come somma delle aree dei suddetti componenti: si può quindi dire che si considera una figura costituita da regioni che vanno considerati più di una volta.

Ad ogni tipo di settore risulta dunque attribuita un'area con segno che ricade sotto la definizione che riguarda una figura delimitata da un circuito chiuso orientato.

I36f.02 **Teorema** L'area del settore delimitato dalla curva chiusa Γ_{OABO} è data da

$$\boldsymbol{Area}\big(\mathsf{SectPol}(\Gamma_{AB})\big) \ = \ \frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}\phi \ P^2(\phi) \ .$$

Dim.: Consideriamo la decomposizione $\Delta = \langle \phi_0 = a < \phi_1 < \cdots < \phi_{n-1} < \phi_n = b\rangle \in \mathsf{Dcmp}[a,b]$ e le conseguenti sequenze:

dei punti $[P(\phi_i), \phi_i]$ per $i = 0, 1, ..., n$,

dei valori minimi $m_i := \min\{\phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i] :| \ P(\phi)\}$, per $i = 1, ..., n$;

dei valori massimi $M_i := \max\{\phi \in [\phi_{i-1}, \phi_i] :| \ P(\phi)\}$, per $i = 1, ..., n$;

delle oscillazioni $\omega_i := M_i - m_i$ per $i = 1, 2, ..., n$.

L'area cercata si può ottenere come somma delle areole dei settorini delimitati dalle curve chiuse $\Gamma_{OP_{i-1}P_iO}$, cioè

$$\boldsymbol{Area}\big(\mathsf{SectPol}(\Gamma_{AB})\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Area}\big(\mathsf{SectPol}(\Gamma_{OP_{i-1}P_iO})\big)$$

Supponiamo ora, per semplicità espositiva, che sia $a < b$ e quindi $\phi_{i-1} < \phi_i$ per $i = 1, 2, ..., n$; ciascuno dei suddetti settorini contiene il settore circolare di raggio m_i contenuto nell'angolo positivo $\widehat{P_{i-1}OP_i}$ ed è contenuto nel settore circolare di raggio M_i facente parte dello stesso angolo.
Quindi per le areole abbiamo

$$\frac{1}{2}\, {m_i}^2\,(\phi_i - \phi_{i-1}) \;\leq\; \boldsymbol{Area}\big(\mathsf{SectPol}(\Gamma_{P_{i-1}P_i})\big) \;\leq\; \frac{1}{2}\, {M_i}^2(\phi_i - \phi_{i-1})$$

e per l'area complessiva

$$\text{(1)}\qquad \left|\boldsymbol{Area}\big(\mathsf{SectPol}(\Gamma_{AB})\big) - \frac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}\phi\;\, P^2(\phi)\right| \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,[{M_i}^2 - {m_i}^2]\,(\phi_i - \phi_{i-1})\;.$$

Se $b < a$ si giunge alla disuguaglianza ottenuta dalla precedente in seguito alla semplice sostituzione di $(\phi_i - \phi_{i-1})$ con $|(\phi_i - \phi_{i-1})|$.

A questo punto si può procedere nel modo usuale, considerare il limite per decomposizioni di $[$a,b$\,]$ con ampiezze massime tendenti a 0 e invocare la continuità della $P(\phi)$ e della $P'(\phi)$ per dimostrare che il secondo membro della (1) è inferiore a un reale positivo arbitrario (idap) per concludere la dimostrazione ▮

I36f.03 Presentiamo ora alcuni esempi di settori delimitati da curve caratterizzate da equazioni in coordinate polari.

Consideriamo la cardioide [G70d06] data dall'equazione $\rho \;=\; 2\,a\,(1 - \cos\,\phi)$ per $\phi \in \,]-\pi, \pi]$.
Per essa $P^2(\phi) \;=\; 4\,a^2(1{+}2\,\cos\,\phi{+}\cos^2\phi) \;=\; 2\,a^2(3{+}2\,\cos\,\phi{+}\cos\,2\,\phi)$; quindi per l'area delimitata da questa curva chiusa otteniamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Area}\Big(\mathsf{SectPol}\Big(\mathsf{CrvpP}\big(-\pi, \pi, \rho = 2\,a\,(1-\cos\phi)\big)\Big)\Big) \;&=\; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\;\, P^2(\phi)\\ &=\; a^2\left(3\cdot 2\,\pi + 4\,\big[\sin\,\phi\big]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin\,2\,\phi}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right) \;=\; 6\,\pi\,a^2\end{aligned}\;.$$

I36f.04 Consideriamo la lemniscata di Bernoulli [G70d27] fornita dall'equazione $\rho^2 = 2\,a\,\cos\,2\phi$ e chiamiamola K_a. Più in particolare essa presenta un cappio appartenente al I e al IV quadrante facendo variare ϕ da $-\dfrac{\pi}{4}$ a $\dfrac{\pi}{4}$. Per l'area di questa regione chiusa abbiamo

$$\boldsymbol{Area}\left(\mathsf{SectPol}\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, K_a\right]\right) = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\phi\;\, P^2(\phi) = a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{pi}{4}} \mathrm{d}\phi\;\, \cos\,2\,\phi = a^2\,\left[\frac{\sin\,2\phi}{2}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2\;.$$

Dato che a rappresenta la distanza dall'origine di ciascuno dei due fuochi della lemniscata si ha che l'area di un cappio vale il quadrato del suo semiasse focale.

I36f.05 Consideriamo la spirale di Archimede [G70k02] caratterizzata dall'equazione $\rho = k\,\phi$ con $k \in \mathbb{R}_+$ e chiamiamola K_A. Cerchiamo l'area del settore di tale curva compreso tra i raggi vettori corrispondenti alle anomalie 0 e ϕ.

$$\boldsymbol{Area}\Big(\mathsf{SectPol}\big(0, \phi, K_A\big)\Big) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\phi} \mathrm{d}\,\psi\; k^2\,\phi^2 \;=\; k^2\,\frac{\phi^3}{6} \;=\; \frac{1}{6}\,P^2(\phi)\,\phi\;.$$

L'area quindi vale $\dfrac{1}{3}$ di quella del settore circolare avente come raggio il massimo valore del raggio polare della K_A e ampiezza ϕ. L'area della prima spira è data da $\dfrac{1}{6}\,P^2(2\,\pi)\,2\pi \;=\; \dfrac{4}{3}\,\pi^3\,k^2$.

I36f.06 Consideriamo la spirale iperbolica [G70k03] che chiameremo K_H, la curva definita dall'equazione $\rho = \dfrac{k}{\phi}$ con $k \in \mathbb{R}_+$ e $\phi \in \mathbb{R}_{0+}$.
Cerchiamo l'area del settore di tale curva compreso tra i raggi vettori corrispondenti alle anomalie ϕ_1 e ϕ_2.

$$\boldsymbol{Area}\Big(\mathsf{SectPol}\big(\phi_1, \phi_2, K_H\big)\Big) \;=\; \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\phi\; \frac{k^2}{\phi^2} \;=\; k^2 \left(\frac{1}{\phi_1} - \frac{1}{\phi_2}\right) \;.$$

Si osserva che al crescere di ϕ la curva viene percorsa prima da destra a sinistra, poi avvolgendosi secondo il verso positivo con un numero illimitato di spire intorno al punto asintotico $O = \langle 0, 0\rangle$.
Per $\phi_2 \to +\infty$ l'area tende a $-\dfrac{k^2}{2\,\phi_1}$: tale espressione assegna a una regione coperta da un raggio vettore un numero illimitato di volte assegna un'area finita.

I36f.07 Consideriamo la spirale logaritmica [G70k04] caratterizzata dall'equazione $\rho = \mathsf{e}^{k\phi}$ con $k \in \mathbb{R}_+$ e identifichiamola con K_{log}. Cerchiamo l'area del settore di tale curva compreso tra i raggi vettori corrispondenti alle anomalie ϕ_1 e ϕ_2.

$$\boldsymbol{Area}\big(\mathsf{SectPol}(\phi_1, \phi_2, K_{log})\big) \;=\; \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \mathrm{d}\phi\; \mathsf{e}^{2k\phi} \;=\; \frac{1}{4\,k}\left[\mathsf{e}^{2\,k\,\phi_2} - \mathsf{e}^{2\,k\,\phi_1}\right] = \frac{1}{4\,k}\left[P^2(\phi_2) - P^2(\phi_1)\right] \;.$$

Si osserva che, anche per questa spirale, al tendere di ϕ a $-\infty$ la curva viene percorsa mentre si avvolge secondo il verso negativo con un numero illimitato di spire intorno al punto asintotico $O = \langle 0, 0\rangle$.
Quindi per $\phi_1 \to -\infty$ l'area tende a $-\dfrac{P^2(\phi_1)}{4\,k}$: dunque anche questa espressione a una regione percorsa da un raggio vettore un numero illimitato di volte assegna un'area finita.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`