1

Capitolo I35
serie formali di potenze

Contenuti delle sezioni

30 pagine

I350.01 Questo capitolo è dedicato all'introduzione dei tipi più semplici di serie formali di potenze in un anello commutativo, entità che individuiamo concisamente con l'acronimo sfp).

Queste serie interessano primariamente (e tradizionalmente) quando l'anello commutativo è il campo dei numeri complessi; in effetti queste serie hanno un ruolo centrale nell'analisi infinitesimale e sono una delle basi degli studi sulle funzioni analitiche [I38] e sulle funzioni speciali [W60].

Qui useremo i termini costanti numeriche e valori numerici per gli elementidell'anello commutativo e useremo il termine variabili numeriche per le corrispondenti variabili. n. Chiameremo inoltre *serie di potenze di variabili numeriche*, in acronimo `spvn`, le serie studiate principalmente in quanto per determinate scelte dei valori delle variabili risultano convergenti e quindi possono fornire valori numerici.

Le serie formali di potenze vengono presentate come espressioni formalmente simili a quelle delle `spvn` e che possono essere composte con operazioni algebriche che estendono quelle applicabili ai polinomi (combinazione lineare, prodotto, ...) e che trovano corrispondenza con composizioni applicabili alle `spvn`, ma per le quali non si pongono preliminarmente questioni di convergenza.

Per esempio l'espressione

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2\,n+1)x^n \;=\; 1-3\,x+5\,x^2-7\,x^3+9\,x^4-11\,x^5+\cdots$$

come serie di potenze della variabile complessa x è un'entità che fornisce numeri complessi per ogni x complesso con modulo minore di 1, mentre come serie della variabile formale x serve per presentare la successione numerica $\langle 1,-3,5,-7,9,-11,...\rangle$ mediante un'espressione che, sotto opportune condizioni, potrà essere usata per individuare una `spvn`.

In effetti si constata che rinunciando a porre problemi di convergenza si acquista la possibilità di effettuare sulle serie di potenze (formali e numeriche) una gamma più ampia di manipolazioni che consentono procedimenti formali per il controllo delle successioni numeriche i quali si rivelano assai utili ed efficaci; in particolare molti di questi procedimenti vengono implementati in programmi di calcolo simbolico incisivi e di rilevante portata.

Per ciascuna delle serie ottenute con queste manipolazioni formali, naturalmente, è aperta la possibilità di applicare i procedimenti dell'analisi volti alla determinazione della convergenza e all'utilizzo dei possibili valori limite.

I35 a. successioni numeriche costruibili e serie formali di potenze

I35a.01 Introduciamo ora la nozione di **serie formale di potenze in una variabile**, entità che chiameremo anche serie di potenze formali in una variabile e per la quale useremo la sigla `sfp1`.

Vedremo che queste serie sono rappresentate da scritture che consentono di trattare proficuamente successioni costruibili di elementi di un anello commutativo. Successivamente tratteremo queste entità, o per essere più precisi classi di equivalenza di queste espressioni, come elementi di una struttura algebrico-topologica costruibile.

Consideriamo un anello commutativo $\boldsymbol{R} = \langle R, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ e l'insieme delle successioni costruibili di elementi di R che denotiamo con $\mathsf{SeqNC}_{\boldsymbol{R}} := \lceil \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R \rceil$. Nel seguito con la sigla `seqNC` abbrevieremo il termine "successione costruibile di elementi di un anello commutativo".

Per le operazioni su $\mathsf{SeqNC}_{\boldsymbol{R}}$ useremo un doppio sistema di notazioni.
Quando serve evidenziare la loro specificità denotiamo con $\oplus$ la somma componente per componente tra successioni, con $\ominus$ la differenza componente per componente e l'operazione unaria di cambiamento di segno di tutte le componenti e con $\odot$ il loro **prodotto di Cauchy di due successioni**, cioè l'operazione che a due successioni $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n\rangle$ e $\mathsf{b} = \langle n \in \mathbb{N} :| b_n\rangle$ fa corrispondere la successione

$$\mathsf{a} \odot \mathsf{b} := \left\langle n \in \mathbb{N} :\Big| \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} \right\rangle = \langle a_0 b_0\ ,\ a_0 b_1 + a_1 b_0\ ,\ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\ ,\ \ldots\rangle\ .$$

In altri contesti nei quali si ritiene che possano essere evitate interpretazioni erronee seremo invece le più usuali notazioni "+", "−" e per il prodotto "·" oppure la semplice spaziatura.

Ci serviremo inoltre di due prevedibili notazioni per successioni particolari

$$\mathbf{0} := \langle 0, 0, ..., 0, ...\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathbf{1} := \langle 1, 0, ..., 0, ...\rangle\ .$$

Si dimostra facilmente che $\mathbf{0}$ è l'elemento neutro per $\oplus$, che $\mathbf{1}$ è l'elemento neutro per $\odot$, che $\oplus$ e $\odot$ sono operazioni commutative, che $\oplus$ è associativa e che vale la distributività di $\oplus$ rispetto a $\odot$.

Dunque $\oplus$ e $\odot$ sono operazioni di anello unifero commutativo.
Questo consente di chiamare **anello delle successioni costruibili** di elementi di $\boldsymbol{R}$ l'anello commutativo

$$\left\langle \lceil \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R \rceil, \oplus, \ominus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1} \right\rangle\ .$$

I35a.02 Le successioni numeriche costruibili rivestono grande importanza per molti campi della matematica e per molte sue applicazioni.

Interessano innanzi tutto le **sequenze enumerative**, sequenze di interi positivi, ciascuna associata alle configurazioni discrete di un certo tipo T costruibili con un certo numero di oggetti di base: una tale successione $\langle k_0, k_1, ..., k_n, ...\rangle$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, k_n esprime il numero di configurazioni di tipo T ottenibili con n oggetti di base.

Esempi sono la sequenza dei fattoriali, con $k_n = n!$ esprimente il numero delle permutazioni di n oggetti distinguibili, la sequenza dei `numeri di Catalan (wi)`, con $k_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ esprimente il numero di modi per suddividere un poligono convesso con $n+2$ vertici in triangoli aventi i tre vertici coincidenti con vertici del poligono (insieme al cardinale di altre configurazioni).

Più in generale interessano le successioni di numeri interi. A tali entità è dedicata una delle più importanti iniziative sul Web per la matematica, la `Online Encyclopedia of Integer Sequences` (we), in sigla OEIS, iniziativa avviata da Neil Sloane la quale raccoglie e organizza una gran mole di informazioni sopra più di 340.000 successioni.

Ancor più in generale interessano le sequenze di numeri razionali: un esempio è costituito dalla sequenza dei **numeri di Bernoulli** [W10g02]

$$\left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, ... \right\rangle .$$

In seguito vedremo molti altri esempi di sequenze di razionali associate a serie formali specifiche [a05, a08, d04, tomo G].

Inoltre va tenuto presente che le successioni di numeri complessi rivestono un ruolo centrale per l'analisi infinitesimale e per le sue molteplici applicazioni.

I35a.03 Si pone il problema di controllare in modo efficace e possibilmente efficiente le `seqNC` e per questa attività risultano utili molti tipi di procedimenti costruttivi.

Oltre ai procedimenti algebrici che si basano sulle operazioni di combinazione lineare e prodotto, vengono utilizzati vari generi di equazioni riguardanti componenti contigue delle successioni; tra questi sono particolarmente efficaci le cosiddette regole di ricorrenza.

Consideriamo l'esempio della successione dei `numeri di Fibonacci` (wi) [D20d]

$$\langle F_0, F_1, F_2, ..., F_n, ... \rangle = \langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... \rangle .$$

Essa può essere definita dalle richieste: $F_0 := 0, F_1 := 1, \ \forall n = 2, 3, ... \ \vdots \ F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$

È molto fruttuoso riuscire a collegare questi procedimenti e per questi collegamenti risultano molto utili le serie formali di potenze.
Nel caso dei numeri di Fibonacci si rivela molto chiarificante la serie $x + x^{+} 2\,x^3 + 3\,x^4 + 5\,x^5 + 8\,x^6 + \cdots$
.

I35a.04 Introduciamo ora le serie formali di potenze in una sola variabile, termine che abbreviamo con la sigla `sfp1`, entità con il ruolo di espressioni per le successioni costruibili di $\lceil \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R \rceil$.

Come vedremo queste espressioni consentono di effettuare varie efficaci elaborazioni sopra le successioni e consentono di collegarle in modo piuttosto diretto alle serie di potenze di una variabile numerica studiate nell'analisi infinitesimale [B35, I13].

Le `sfp1` costituiscono il caso più semplice di serie formali di potenze, espressioni che riguardano successioni costruibili a molti indici, cioè funzioni costruibili del genere $\lceil \mathbb{N}^{\times d} \longmapsto_{\mathsf{C}} R \rceil$, dove $d = 2, 3, ...$ determina il numero degli indici.

In queste espressioni compaiono d lettere che chiameremo **variabili formali** le quali sono gli elementi di base per le annunciate manipolazioni formali e che sostituite da variabili numeriche conducono alle serie numeriche di potenze in d variabili.

Per le variabili formali qui useremo solo alcune specifiche lettere minuscole e per precisare che questi simboli hanno tali funzioni usiamo la scrittura $t, \mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, x, y, z \in$ **Varf**.

I35a.05 Diciamo **serie formale di potenze in una variabile in forma ordinaria** sull'anello commutativo costruibile $\boldsymbol{R}$ un'espressione della forma

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n = A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \cdots + A_n\, x^n + \cdots \ ,$$

dove x denota una variabile formale, l'indice n potrebbe essere sostituito da qualsiasi altra lettera e ciascuno degli A_n rappresenta un'espressione sull'anello $\boldsymbol{R}$ o un'algoritmo in grado di fornire un elemento di $\boldsymbol{R}$.
Abbrevieremo con `sfp1o` l'espressione "serie formale di potenze in una variabile e in forma ordinaria".

Tre esempi di `sfp1` sono i seguenti:

serie geometrica $x^* \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \;=\; 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \;.$

serie esponenziale $\exp(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \;.$

serie logaritmica $\mathrm{ln1p}(x) \;:=\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n} \;=\; x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \cdots \;.$

Per la prima serie potrebbe essere sufficiente l'anello dei numeri interi, per le altre due il campo dei numeri razionali.
Alla `sfp1o` della definizione (1) è associata la `seqNC` **a** $=\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\rangle \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R \rceil$ dove per ogni $n \in \mathbb{N}$ a_n è l'elemento di R individuato da A_n.
Questa successione si dice **successione generata ordinariamente** dalla `sfp1b` e questa serie formale si dice essere una delle `sfp1` in grado di rappresentare la successione.

I35a.06 Per formalizzare questo collegamento useremo scritture come

$$\mathsf{ogenseq}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right) \;:=\; \langle n \in \mathbb{N} :|\; A_n \rangle \;=\; \langle A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...\rangle \;.$$

Per le tre serie precedenti abbiamo, risp.,

$$\mathsf{ogenseq}\,(x^*) = \langle 1, 1, 1, 1, ..., 1, ...\rangle \;,$$

$$\mathsf{ogenseq}\,(\exp(x)) = \left\langle 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3!}, ..., \frac{1}{n!}, ...\right\rangle \;,$$

$$\mathsf{ogenseq}\,(\mathrm{ln1p}(x)) = \left\langle 0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{(-)1^{n+1}}{n}, ...\right\rangle \;.$$

Inoltre denotiamo con Ogf la relazione inversa della funzione $\mathsf{ogenseq}$ che a ogni successione di elementi di R cerca di associare le corrispondenti funzioni generatrici, in modo da avere la possibilità di servirci di scritture della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, x^n \;\in\; \mathsf{Ogf}\left(\langle n \in \mathbb{N} :|\; A_n \rangle\right) \;.$$

Maggiori dettagli sul collegamento tra una `sfp1o` e la `seqNC` che essa genera ordinariamente si ottengono mediante la cosiddetta successione degli **estrattori di coefficienti** $\langle k \in \mathbb{N} :|\; [x^k] \rangle$ definiti come

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; [x^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right) \;:=\; A_k \;.$$

Quindi

$$\mathsf{ogenseq}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right) = \left\langle n \in \mathbb{N} :\middle|\; [x^n]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right)\right\rangle \;.$$

I35a.07 Osserviamo anche che nella scrittura della serie logaritmica abbiamo trascurato l'addendo $a_0\,x^0$ nel quale $a_0 = 0$. In genere in presenza di ogni componente con coefficiente nullo si adotta questa semplificazione.

Per esempio una `sfp1b` che genera ordinariamente la sequenza dei numeri di Bernoulli si scrive

$$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}\,x^{-}\frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{42}x^6 - \frac{1}{30}x^8 + \cdots \ .$$

Questa semplificazione evidentemente è una estensione della semplificazione comunemente adottata per i polinomi.
In accordo con questa semplificazione possiamo dire che i polinomi formali in una variabile e in forma base sono casi particolari di `sfp1b` e precisamente sono tutte e sole le `sfp1b` che generano ordinariamente le `seqNC` con un numero finito di componenti diverse da 0.

Sulle `sfp1o` si definiscono facilmente le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione per uno scalare e prodotto di Cauchy estendendo le definizioni relative ai polinomi formali.
Sopra le `sfp1o` definiremo varie altre costruzioni che conducono ad altre `sfp1o` e che consentono di esprimere in più modi moltissime `seqNC`.

I35a.08 Più in generale definiamo **serie formale di potenze in una variabile** x su $\boldsymbol{R}$ una espressione nella quale entra la x e possono entrare elementi di R, operazioni di anello corrispondenti a quelle per l'anello delle `seqNC` e altre espressioni che sono riconducibili alle costruzioni sopra accennate e che ci proponiamo di definire in modo da garantire che a ciascuna serie formale si possa associare effettivamente una `sfp1b` e quindi una `seqNC`.

Dunque anche a ogni "serie formale di potenze in una variabile", cioè a ogni `sfp1`, corrisponde una `seqNC`; a tutte le `sfp1` si può applicare la funzione ogenseq.
Diremo quindi che ciascuna di queste serie formali genera ordinariamente la stessa successione.

I35a.09 Introduciamo altre `sfp1` semplici e importanti.

serie del seno $\sin(x) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \ = \ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \ .$

serie del coseno $\cos(x) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{2\,n}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n!} \ = \ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \ .$

serie del seno iperbolico $\sinh(x) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} \ = \ x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \ .$

serie del coseno iperbolico $\cosh(x) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n!} \ = \ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \ .$

Volendo essere pignoli queste non sono serie in forma ordinaria in quanto a un valore n dell'indice non corrisponde il termine in x^n. In effetti ciascuna di queste scritture si riconduce senza difficoltà a una forma ordinaria che però spesso ha il difetto di essere più pesante alla lettura.
Per esempio si dovrebbe scrivere $\sin(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)_2(-1)^n\frac{x^n}{n}$

Per le `seqNC` delle precedenti serie abbiamo:

$$\mathsf{ogenseq}(\sin(x)) = \left\langle 0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, ... \right\rangle \quad , \quad \mathsf{ogenseq}(\cos(x)) = \left\langle 1, 0, -\frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, ... \right\rangle \ ,$$

$$\mathsf{ogenseq}(\sinh(x)) = \left\langle 0, 1, 0, \frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, ... \right\rangle \quad , \quad \mathsf{ogenseq}(\cosh(x)) = \left\langle 1, 0, \frac{1}{2!}, 0, \frac{1}{4!}, 0, ... \right\rangle \ .$$

I35a.10 Altre serie formali di potenze non nella forma ordinaria si ottengono da serie in forma ordinaria rimpiazzando la variabile x con una sua potenza positiva e componendo con combinazioni lineari e prodotti serie formali consolidate. Per esempio

$$\exp(x^2) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^{2\,n} \qquad , \qquad \sinh(x^3) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6\,n+3}}{(2\,n+1)!} \qquad ,$$

$$\cos(x^{h+1}) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{2\,n}\, \frac{x^{2\,n(h+1)}}{(2\,n)!} \qquad , \qquad \sin(x) \cdot \frac{1}{1-x} \;.$$

Più avanti vedremo condizioni che consentono di comporre serie formali in modo da poter trattare espressioni come

$$\exp(x + 2\,x^{-}3\,x^3) \qquad , \qquad \exp(x^h) \cdot \cosh(x^2) \qquad , \qquad \cos(\sin(x)) \qquad , \qquad \frac{\cosh(x)}{1 + x - 2\,x^2} \;.$$

I35a.11 Due serie di potenze formali in una variabile si dicono **serie di potenze formali in una variabile equivalenti** sse forniscono la stessa successione di elementi di $\boldsymbol{R}$.
L'equivalenza tra `sfp1` è l'equivalenza associata alla funzione `ogenfun`.

Sono evidentemente equivalenti due `sfp1b` che, come $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n y^n$, differiscono solo nella variabile formale.

Si hanno duetti equivalenti aventi forme come $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{E}_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n x^n$, tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}_n$ ed $\mathcal{F}_n$ denotano espressioni sull'anello $\boldsymbol{R}$ che sono riconducibili l'una all'altra applicando gli assiomi degli anelli commutativi.

Più in generale si hanno duetti di `sfp1b` equivalenti aventi le forme $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n y^n$ che per ogni $k \in \mathbb{N}$ presentano algoritmi diversi ma equivalenti, cioè tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$ forniscono lo stesso elemento dell'anello $\boldsymbol{R}$.

Diciamo **funzione generatrice in una variabile**, in sigla `fungen1`, ogni classe di equivalenza di `sfp1`Ḋenoteremo con **Fungen1** l'insieme di queste funzioni generatrici.
Una `sfp1` in una determinata variabile formale x che appartiene a una $\mathsf{f} \in$ **Fungen1** si dice anche **manifestazione** nella x della f.
Denoteremo con $\boldsymbol{R}\,[\,x\,]$ l'insieme delle manifestazioni nella variabile formale x delle `sfp1` sull'anello $\boldsymbol{R}$.

I35a.12 Evidentemente la corrispondenza tra le `fungen1` e le `seqNC` è biunivoca. Inoltre una specifica `fungen1` deve essere presentata effettivamente attraverso una `sfp1` che le appartiene.
Questo nella pratica espositiva dei risultati generali, nonostanti le precedenti precisazioni introduttive, induce a confondere una funzione generatrice con le serie formali equivalenti che le appartengono e spesso anche con la successione costruibile che essa genera ordinariamente.
Analogamente si tende a confondere ciascun algoritmo A_n con il valore a_n che fornisce.

Questi abusi di linguaggio consentono di presentare equivalenze di serie formali come uguaglianze di funzioni generatrici presentate attraverso diverse serie formali.
In effetti i termini "serie formale di potenze" e "funzione generatrice" di solito vengono usati come sinonimi. Qui sono stati imposti due significati diversi (solo) per presentare definizioni iniziali ben distinte.

Si osserva che i suddetti abusi di linguaggio costituiscono estensioni di convenzioni simili sui polinomi.

I35a.13 Conviene segnalare fin d'ora che vengono studiati proficuamente diversi modi di ricavare da una `sfp1` da una successione numerica.

Ad esempio si dice **successione esponenzialmente generata** dalla `sfp1` $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n\, x^n$ la `seqNC`

$$\big\langle a_0, a_1, 2\, a_2, 3!\, a_3, ..., n!\, a_n, ...\big\rangle\ ,$$

con i soliti significati di A_n e a_n.

Si dice inoltre **funzione generatrice esponenziale** nella $x \in$ **Varf** della `seqNC` $\mathsf{a} = \big\langle n \in \mathbb{N}\ :|\ a_n\big\rangle$ la classe di equivalenza alla quale appartiene una `sfp1b` della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!}\, x^n$.

Questa situazione si esprime con enunciati come

$$\mathsf{egenseq}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right) = \big\langle n \in \mathbb{N}\ :|\ n! a_n\big\rangle \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!}\, x^n \in \mathsf{Egf}\left(\big\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\big\rangle\right)$$

I35a.14 Gli elementi costruibili a dell'anello $\boldsymbol{R}$ si possono identificare con le serie formali che presentano come prima componente il valore a e tutte le altre componenti uguali a 0. La manifestazione nella x di tale a si può scrivere $a\, x^0$.

Si osserva che l'espressione x è la manifestazione nella variabile x della `seqNC` $\langle 0, 1, 0, 0, ..., 0, ...\rangle$; inoltre si constata che le successive potenze della variabile x^2, x^3, ecc. sono le manifestazioni, risp., delle `seqNC` $\langle 0, 0, 1, 0, 0, ...,\rangle$, $\langle 0, 0, 0, 1, 0, ...,\rangle$, ecc.

In generale per ogni $m \in \mathbb{N}$ l'espressione x^m è la manifestazione nella x della `seqNC` $\big\langle n \in \mathbb{N}\ :|\ \delta_{n,m}\big\rangle$.

Tutte le serie formali che presentano un numero finito di componenti diverse da 0 si manifestano nella variabile formale x come polinomi formali nella variabile x: il polinomio $a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n$ è la manifestazione della `seqNC` $\big\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...\big\rangle$
Anche questo induce a dichiarare che le funzioni generatrici in una variabile sono le estensioni dal finito all'infinito numerabile dei polinomi formali in una variabile.

La distinzione tra una funzione generatrice e una sua manifestazione in una variabile risulta necessaria quando si trattano serie in più variabili formali e quando si effettuano sostituzioni di variabili formali con espressioni composite.
Quando non ci sono queste esigenze è possibile identificare ogni `fungen1` con la sua manifestazione in una variabile formale tipica, spesso la x, senza sostanziali rischi di confusione e con il vantaggio dell'uso di espressioni significative e sottoponibili con relativa facilità a elaborazioni simboliche.
Coerentemente risulta comodo servirsi della notazione $\boldsymbol{R}[\,x\,]$ invece di una più astratta $\boldsymbol{R}[\ *\ ]$.

I35a.15 Ad ogni `sfp1` $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ si attribuisce un **supporto di serie formale** denotato con $\mathsf{Supp}(\mathsf{a})$ costituito dall'insieme degli esponenti della variabile ai quali corrisponde un coefficiente diverso da 0: in formula $\mathsf{Supp}(\mathsf{a})\ :=\ \{n \in \mathbb{N} \mathrel{]\!]} a_n \neq 0\}$.
Chiaramente il supporto di una `sfp1` è finito sse essa è un polinomio formale e il supporto della serie nulla $\sum_{n=0}^{+\infty} 0\, x^n$ è $\emptyset$.

Ad ogni `sfp1` $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ si attribuisce inoltre un elemento di $[0 : +\infty]$ chiamato **ordine di serie formale** o grado inferiore che denotiamo con $\mathsf{ord}(\mathsf{a})$: alla `sfp1` nulla si assegna $\mathsf{ord}(\mathbf{0}) := +\infty$, mentre si definisce ordine di ogni altra serie $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ il minimo intero facente parte del suo supporto, cioè il minore degli esponenti n della variabile per il quale $a_n \neq 0$.

Prop. Consideriamo due qualsiasi `sfp1` $\mathsf{a} := \sum_{n=p}^{+\infty} a_n\, x^n$ e b.

(1) $\mathsf{ord}(\mathsf{a}) = p \in \mathbb{N} \iff i < n \Longrightarrow a_i = 0 \;\wedge\; a_p \neq 0$ ▮

(2) $\mathsf{ord}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{ord}(\mathsf{b}) \implies \mathsf{ord}(\mathsf{a}+\mathsf{b}) = \min(\mathsf{ord}(\mathsf{a}), \mathsf{ord}(\mathsf{b}))$ ▮

(3) $\mathsf{ord}(\mathsf{a}) = \mathsf{ord}(\mathsf{b}) \implies \mathsf{ord}(\mathsf{a}+\mathsf{b}) \geq \mathsf{ord}(\mathsf{a})$ ▮

(4) $\mathsf{ord}(\mathsf{a} \cdot \mathsf{b}) = \mathsf{ord}(\mathsf{a}) + \mathsf{ord}(\mathsf{b})$ ▮

(5) $\forall h \in \mathbb{N} \;\colon\; \mathsf{ord}(\mathsf{a}^h) = h \cdot \mathsf{ord}(\mathsf{a})$ ▮

Esempi:

$$\mathsf{ord}\left[\sin(x^2)\right] = 2 \qquad , \qquad \mathsf{ord}\left[\sin(x^2) \cdot \sinh(x^3)\right] = 6 \qquad , \qquad \mathsf{ord}\left[\sinh(x) - \sin(x)\right] = 3 \;.$$

I35a.16 Le `sfp1` di ordine 1 sono chiamate anche **serie delta**.
Per ogni h intero naturale denotiamo con $\mathbf{Sfp1}_h$ l'insieme delle `sfp1` di ordine h, con $\mathbf{Sfp1}_{\geq h}$ l'insieme delle `sfp1` di ordine maggiore o uguale ad h; sono poi intuibili i significati di $\mathbf{Sfp1}_{>h}$, di $\mathbf{Sfp1}_{<h}$ e di $\mathbf{Sfp1}_{\leq h}$.
Esempi di serie delta sono la serie del seno e la serie del seno iperbolico.

I35 b. algebra topologica delle serie formali di potenze

I35b.01 La possibilità di combinare linearmente e di moltiplicare le `sfp1` conduce a considerare l'**algebra delle serie formali di potenze di una variabile**; per questa struttura usiamo la notazione $\mathsf{Sfp1}_{Alg}$.

Molte nozioni riguardanti la specie di strutture delle algebre risultano utili per varie argomentazioni sulle `sfp1`; questo si riscontra soprattutto per le serie sul campo dei complessi, per le quali risultano particolarmente utili varie proprietà sugli spazi vettoriali.
In particolare sono utili le nozioni di proiettore, base, indipendenza lineare, operatore lineare e funzionale lineare.

Innanzi tutto si osserva che la successione delle potenze della variabile formale $x \searrow \langle n \in \mathbb{N} :| \ x^n \rangle$ costituisce una base per l'algebra $\mathsf{Sfp1}_{Alg}$; essa viene detta **base canonica per le serie formali**; va notata la somiglianza con le basi canoniche degli spazi $\mathbb{F}^{\times d}$, in quanto costituita da sequenze con una sola componente nonnulla e uguale ad 1.

I35b.02 Gli estrattori di coefficienti per le `sfp1` sono dei funzionali lineari-$\boldsymbol{R}$: infatti

$$\forall\ \alpha,\beta \in R\ ,\ \forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,x^n \in \mathsf{Sfp1b}\ :\ [x^k]\left(\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\,x^n\right) = \alpha\,a_k + \beta\,b_k\ .$$

Ad ogni estrattore $[x^k]$ corrisponde il proiettore relativo al vettore x^k della base canonica di $\mathsf{Sfp1}_{Alg}$ definito da:

$$\boldsymbol{Prj}_k(\mathsf{a}) = ([x^k]\mathsf{a})x^k\ .$$

È evidente che questi proiettori sono operatori idempotenti e che l'applicazione di due diversi estrattori porta a $\mathbf{0}$, il vettore nullo di $\mathsf{Sfp1}_{Alg}$.

Gli estrattori consentono di ricavare coefficienti utili per moltissimi problemi della combinatorica, in particolare coefficienti con significati enumerativi. A questo proposito possono essere utili le loro generalizzazioni che seguono.

Per ogni $\alpha \in R \setminus \{0\}$ si definisce il funzionale $[\alpha x^k]$ ponendo

$$[\alpha x^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\right) := \frac{1}{\alpha}[x^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\right) = \frac{a_k}{\alpha}\ .$$

Per ogni $f \in \lceil \mathbb{N} \longmapsto R \setminus \{0\} \rceil$ si definisce il funzionale $[f(k)x^k]$ ponendo

$$[f(k)x^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\right) := \frac{1}{f(n)}[x^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n\right) = \frac{a_k}{f(k)}\ .$$

Per esempio $\quad [2\,x^k]\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{(-1)^k}{2} \quad$ e $\quad \dfrac{1}{k!}[x^k]\,(\exp(x)) = 1$.

I35b.03 Grande importanza rivestono per la combinatorica e per molte altre questioni matematiche, le **successioni di polinomi speciali**.

Si tratta di successioni di polinomi $\langle n \in \mathbb{N} :| \ p_n(x) \rangle$ nei quali per ogni n $p_n(x)$ denota un polinomio di grado n, successione che viene individuata da un algoritmo specifico e nei casi più semplici e tradizionali da una espressione algebrica specifica che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ consente di individuare $p_n(x)$.

Tra gli esempi più semplici di successioni di polinomi speciali, segnaliamo:

la successione dei polinomi x^n,
la successione dei polinomi dati dalla espressione $(x+a)^n$ per qualche $a \in R$,
la successione dei $x^{\overline{n}} := x(x+1)\cdots(x+n-1)$,
la successione dei $x^{\underline{n}} := x(x-1)\cdots(x-n+1)$.

I coefficienti di questi polinomi costituiscono schieramenti triangolari o triangoli-N, le cui componenti in molti casi significativi sono numeri interi o razionali.
Nei casi più studiati questi numeri hanno significati enumerativi di grande importanza, cioè forniscono i cardinali di strutture discrete di elevato interesse. Caso tipico è costituito dai coefficienti binomiali che risultano associati ai polinomi $(x+a)^n$.

I35b.04 Alcuni aspetti di queste successioni di polinomi possono essere utilmente studiati considerando che si tratti di successioni di polinomi formali.

Ciascuna di queste successioni di polinomi che presentano $\mathbb{N}$ come successione dei gradi costituisce una base per l'algebra delle `sfp1`, chiamata **base polinomiale per le serie formali**.

Le espressioni di questi polinomi hanno la forma $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{n,i}\, x^i$ che risulta utile considerare la rappresentazioni nella base canonica di un'altra base di $\mathsf{Sfp1}_{Alg}$.

Spesso risulta utile riferire gli elementi di $\mathsf{Sfp1}_{Alg}$ a due diverse basi e in particolare a due diverse basi polinomiali che scriviamo

$$\mathsf{P} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ p_n(x)\rangle = \left\langle n \in \mathbb{N} :|\ \sum_{i=0}^{n} p_{n,i}\, x^i \right\rangle \quad \text{e} \quad \mathsf{Q} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ q_n(x)\rangle = \left\langle n \in \mathbb{N} :|\ \sum_{i=0}^{n} q_{n,i}\, x^i \right\rangle .$$

In queste situazioni si devono padroneggiare i cambiamenti delle basi ovvero le espressioni dei polinomi $q_n(x)$ della base **Q** come combinazioni lineari dei polinomi $p_m(x)$ costituenti la base alternativa **P** e i cambiamenti reciproci.

A questi cambiamenti diamo la forma

$$q_n(x) \;=\; \sum_{m=0}^{n} \gamma_{n,m}\, p_m(x) \qquad , \qquad p_m(x) \;=\; \sum_{n=0}^{m} \gamma'(m,n)\, q_n(x) \ ,$$

Gli schieramenti triangolari dei coefficienti $\gamma_{n,m}$ per $0 \le m \le n \in \mathbb{N}$, e $\gamma'(m,n)$ per $0 \le n \le m \in \mathbb{N}$ sono detti **matrici di raccordo tra due basi**, **P** e **Q** e i loro elementi sono chiamati **coefficienti di raccordo**.

Accade spesso che le componenti di queste matrici-N siano numeri interi o numeri razionali che godono di proprietà ricche di significati enumerativi.

Il prodotto di due matrici-N di raccordo tra basi polinomiali è un altro triangolo-N inferiore e costituisce un'altra matrice-N di raccordo tra basi polinomiali.
In particolare i due prodotti di due matrici-N reciproche come le precedenti Gam e Γ' danno la matrice-N identità.

I35b.05 Risulta opportuno munire l'insieme **Sfp1** anche di una topologia, in modo da poter organizzare costruzioni che si servono di un meccanismo di convergenza che non sia quello indotto dalla convergenza delle successioni di elementi di R, il quale consente di trattare solo le serie convergenti secondo la distanza nello stesso R, cioè le serie di funzioni-RtR o di funzioni-CtC che si incontrano nell'analisi infinitesimale.

La definizione di una topologia per l'anello delle serie formali in una variabile si può effettuare in diversi modi che risultano equivalenti e conducono a una struttura di anello topologico.

Cerchiamo dunque una metrica secondo la quale due `sfp1` sono tanto più vicine, quanto maggiore è il numero dei loro primi termini che coincidono.

Questo porta ad affermare che una generica `sfp1` $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ viene via via approssimata dai polinomi costituiti dai suoi primi N termini $\sum_{n=0}^{N} a_n\, x^n$ al crescere progressivo e illimitato dell'intero N.

I35b.06 Date due `sfp1` $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ e $\mathsf{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, si definisce come loro distanza $\mathrm{d}_{sfp}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) := 2^{-k}$, dove k è il minimo numero naturale tale che $a_k \neq b_k$.
Si osserva che un tale k non esiste sse le due successioni coincidono ovvero sse la loro distanza è nulla.

Questa definizione soddisfa il requisito dell'avere due `sfp1` tanto più vicine quanto maggiore è il numero dei loro primi termini che coincidono.

A questo punto si può attribuire un senso alla relazione

$$\langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n\, x^n \rangle = \lim_{m \to +\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \ .$$

Si osserva inoltre che ogni riarrangiamento della serie converge allo stesso limite.

Si può verificare che la struttura metrica introdotta, e la conseguente struttura topologica, e la struttura di anello commutativo vista in precedenza costituiscono una struttura di anello topologico.
Essa viene chiamata **anello topologico delle serie di potenze formali** in una variabile sull'anello commutativo $\boldsymbol{R}$.

I35b.07 Nell'ambito della sopra definita topologia si possono definire utili meccanismi di passaggio al limite per successioni di elementi di **Sfp1** e di somma di serie di `sfp1`.

Consideriamo una successione di `sfp1` $\mathsf{A} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ \mathsf{a}_n \rangle$; si dice che la `sfp1`**A converge alla** `sfp1` **limite L**, e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{a}_n = \mathsf{L} \qquad \text{oppure} \qquad \mathsf{a}_n \to \mathsf{L} \ \text{ per } \ n \to +\infty$$

sse per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste un intero naturale $\nu = \nu(N)$ tale che $\forall k \in [\nu, +\infty) \ \vdots\ \ \mathsf{ord}(\mathsf{a}_k - \mathsf{L}) \geq N$.

In parole povere si ha $\lim_{n \to +\infty} \mathsf{a}_n = \mathsf{L}$ sse al crescere dell'indice intero n un numero via via crescente di componenti delle a_n coincide con i coefficienti iniziali della L.

I35b.08 Consideriamo una successione di `sfp1` $\searrow$ $\mathsf{A} = \langle n \in \mathbb{N} :|\ \mathsf{a}_n \rangle$; la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{a}_n$ si chiama **serie che converge alla somma S** $\in$ **Sfp1** e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{a}_n = \mathsf{S}$$

sse $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \mathsf{a}_i \right) = \mathsf{S}$, ovvero sse per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste un intero naturale $\nu = \nu(N)$ tale che

$$\forall k \in [\nu, +\infty) \ \vdots\ \ \mathsf{ord} \left(\sum_{i=0}^{n} \mathsf{a}_i - \mathsf{L} \right) \geq N \ .$$

I35b.09 Consideriamo una `sfp1` f avente ordine $\mathsf{ord}(\mathsf{f}) \geq 1$; si osserva che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $\mathsf{ord}(\mathsf{a}^h) \geq h$

Una successione di `sfp1` che converge alla `sfp1` nulla $\mathbf{0}$ si dice **successione di `sfp1` infinitesima**.
Per la precedente `sfp1` f possiamo affermare che la $\left\langle h \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{f}^h \right\rangle$ è una successione di `sfp1` infinitesima.

Esempi di successioni infinitesime sono $\left\langle h \in \mathbb{N} :| \ \sin^h(x) \right\rangle$, $\left\langle h \in \mathbb{N} :| \ \sinh^h(x^2) \right\rangle$ e più in generale per ogni $m \in \mathbb{P}$ le successioni $\left\langle h \in \mathbb{N} :| \ \sin^h(x^m) \right\rangle$ e $\left\langle h \in \mathbb{N} :| \ \sinh^h(x^m) \right\rangle$

Prop. Consideriamo una successione di `sfp1` $\left\langle k \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{f}_k \right\rangle$.

$$\lim_{k\to+\infty} \mathsf{f}_k = \mathbf{0} \iff \lim_{k\to+\infty} \mathsf{ord}(\mathsf{f}_k) = +\infty \ .$$

Dim.: Segue facilmente dalle definizioni ▮

I35 c. valutazioni delle serie formali e serie di MacLaurin

I35c.01 Le serie formali di potenze di una variabile formale vengono spesso trattate in stretto parallelismo con le corrispondenti serie di funzioni numeriche, soprattutto con le serie di potenze di una variabile complessa, caso al quale è stata dedicata maggiore attenzione a causa della loro notevolissima importanza generale e applicativa.

Le serie di potenze di una variabile complessa, a loro volta, sono in biiezione con le funzioni-CtC, le funzioni del genere $\lceil \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \rceil$ aventi come dominio l'insieme dei valori della variabile nelle quali la serie converge; per queste funzioni le serie numeriche costituiscono gli sviluppi in serie di MacLaurin e di Taylor.

Occorre aggiungere che nella pratica espositiva spesso queste serie e le corrispondenti funzioni analitiche vengono identificate e vengono individuate con le stesse notazioni.

I35c.02 Per chiarire i collegamenti tra serie serie di potenze formali e serie di potenze di una variabile complessa ci serviremo di coppie di lettere come $\langle x, x\rangle$ o $\langle z\rangle$ considerando le maiuscole elementi di **Varf** e le corrispondenti minuscole come variabili in $\mathbb{C}$. Useremo quindi coppie di notazioni come $\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \;,\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right\rangle$.

Ci serviremo anche degli identificatori delle serie e delle funzioni speciali e delle espressioni analitiche contenenti tali identificatori usando coppie di notazioni come $\left\langle \sin(x) \;,\; \sin(x) \right\rangle$ o come $\left\langle \frac{\exp(x)-1}{x} \;,\; \frac{\exp(x)-1}{x} \right\rangle$.

Ci serviremo inoltre, per opportuni valori di $\overline{x} \in \mathbb{C}$, della funzione **valutazione di una `sfp1`** in corrispondenza del valore $\overline{x}$, funzione definita da

$$\mathsf{Eval}_{\overline{x}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \overline{x}^n \;.$$

I valori di $\overline{x}$ utilizzabili sono quelli che rendono convergente la serie numerica a secondo membro e dipendono dalla successione $\langle n \in \mathbb{N} :| \; a_n \rangle$ come visto in I34.

In concreto la funzione valutazione si ottiene con una sostituzione formale della x con la $\overline{x}$ effettuabile sotto condizioni di convergenza che vanno esaminate caso per caso.

Va osservato che la biiezione tra serie formali e serie numeriche rispetta gran parte delle operazioni: le operazioni algebriche di combinazione lineare e prodotto, la derivazione e la antiderivazione.

Viene rispettata anche la composizione tra serie di potenze, costruzione formale che dovremo esaminare con qualche precisazione critica.

I35c.03 Vari importanti esempi di `sfp1` si ottengono riprendendo le serie di MacLaurin per le funzioni speciali più note.

Queste serie conviene che siano identificate attraverso gli stessi simboli utilizzati nell'analisi infinitesimale, come abbiamo fatto in a05, a08, a09 e a10 .

In questi casi e in altri nei quali la successione dei coefficienti viene individuata da qualche algoritmo significativo, si usa il termine **serie di potenze formali speciali**, termine che qui in genere abbreviamo con serie speciali.

Si osserva che quasi tutte le serie speciali si possono collocare nell'algebra $\mathbb{Q}_{\mathsf{C}}[\, x \,]$, anche se per molte questioni conviene condurre il loro studio nell'ambito dell'algebra $\mathbb{C}[\, x \,]$, cioè nell'insieme di tutte le serie formali sui numeri complessi.

I35c.04 Le serie di potenze speciali presentano numerose varianti e un complesso di risultati organizzati in una fitta rete di collegamenti.
Molte varianti dei risultati con i corrispondenti collegamenti si ottengono effettuando semplici modifiche della variabile, che in genere conviene collocare nell'ambito del campo complesso, e applicando manipolazioni di largo uso.
Insieme a questi collegamenti conviene prestare precisa attenzioneanche ad alcune proprietà di simmetria dei complessi delle entità e delle loro relazioni.

Si dimostrano dunque facilmente le uguaglianze che seguono.

$$
\begin{aligned}
\forall h \in \mathbb{P} :\ (x^h)^* &= 1 + x^h + x^{2h} + x^{3h} + \cdots + x^{nh} + \cdots \ , \\
\forall h \in \mathbb{P} :\ \left((-x)^h\right)^* &= 1 - x^h + x^{2h} - x^{3h} + \cdots + (-1)^n x^{nh} + \cdots \ , \\
(x^*)^2 &= 1 + 2x + 3\,x^+ 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \ , \\
\cosh(x) &:= \frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cosh(-x) \ , \\
\sinh(x) &:= \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = -\sinh(-x) \ , \\
\cos(x) &= \cosh(\mathrm{i}x) = \frac{\exp(\mathrm{i}x)+\exp(-\mathrm{i}x)}{2} = \cos(-x) \ , \\
\sin(x) &= \frac{\exp(\mathrm{i}x)-\exp(-\mathrm{i}x)}{2i} = \sin(-x) \ , \\
\exp(\mathrm{i}x) &= \cos(x) + \mathrm{i}\,\sin(x) \qquad , \qquad \exp(x) = \cos(-\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\,\sin(-\mathrm{i}x) \ , \\
\sin^2(x) + \cos^2(x) &= 1 \qquad , \qquad \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \ .
\end{aligned}
$$

I35 d. inversione delle serie formali di potenze

I35d.01 Data una sfp1 **a**, è importante stabilire se esista o meno una sfp1 **b** tale che $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{1}$; se tale sfp1 esiste è unica: infatti se fosse $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a} = \mathbf{1}$, grazie alla commutatività dei coefficienti delle serie formali, sarebbe $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}'\cdot\mathbf{1} = \mathbf{1}\cdot\mathbf{b}$, cioè sarebbe $\mathbf{b}' = \mathbf{b}$.

La sfp1 così individuata viene chiamata **inversa [moltiplicativa] della serie formale a** o reciproca della serie formale **a** e si scrive $\ulcorner \mathbf{a}^{-1} \urcorner = \mathbf{b}$ oppure $\ulcorner \mathbf{b} = \dfrac{1}{\mathbf{a}} \lrcorner$.

È utile e semplice distinguere le sfp1 che sono dotate di inversa moltiplicativa da quelle che non lo sono.

Prop. La serie $\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ è invertibile sse ha ordine 0, cioè sse a_0 è invertibile in $\boldsymbol{R}$, in particolare per $\boldsymbol{R} = \mathbb{C}$ sse $a_0 \neq 0$.

Dim.: La dimostrazione è costruttiva e consiste nell'individuare concretamente la serie $\mathbf{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$ tale che sia $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{1}$.
Essa esiste sse è risolubile il sistema di equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} a_0\, b_0 = 1 \\ a_0\, b_i + a_1\, b_0 = 0 \\ a_0\, b_2 + a_1\, b_1 + a_2\, b_0 = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \cdots + a_n\, b_0 = 0 \end{cases} .$$

Questo è possibile sse a_0 è invertibile in $\boldsymbol{R}$: in tal caso semplici manipolazioni portano alle seguenti espressioni risolutive

$$(2)\blacksquare \qquad b_0 = \frac{1}{a_0}\ ,\ b_1 = -\frac{1}{a_0}\, a_1\, b_0\ ,\ b_2 = -\frac{1}{a_0}\,(a_1\, b_1 + a_2\, b_0)\ ,\ \dots ,\ b_n = -\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{n-i}\ .$$

Le espressioni trovate per i coefficienti della serie inversa garantiscono che l'inversa di una serie di $\mathbb{Q}_{\mathsf{C}}[\![x]\!]$ appartiene a questo stesso insieme e che più in generale questo accade per la serie sul campo commutativo sul terreno $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

I35d.02 Il più semplice esempio di inversione di una sfp1 si ricava dalla seguente constatazione

$$x^*\,(1-x) \;=\; \left(1 + x + x^+ x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right)\ , \qquad - x(1 + x + x^+ \cdots + x^{n-1} + \cdots) \;=\; \mathbf{1}\ .$$

Si trova quindi la **serie formale geometrica**

$$(x^*)^{-1} \;=\; 1 - x \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{1}{1-x} \;=\; x^*\ .$$

Varianti della serie geometrica si ottengono facilmente

$$(-x)^* \;=\; \frac{1}{1+x} \;=\; 1 - x + x^- x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1\pm x^2} \;=\; 1 \mp x^2 + x^4 \mp x^6 + \cdots + (\mp 1)^n\, x^{2\,n} + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} \;=\; (x^*)^2 = 1 + 2x + 3\,x^+ 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots$$

Un altro esempio riguarda la **serie formale di Fibonacci**, serie che genera la successione di Fibonacci [D20d02] :

$$\mathsf{Fib}(x) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{Fib}_n x^n = x + \; x^+ 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 + \cdots \;.$$

Per essa si trova

$$(1 - x - \; x^2) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{Fib}_n x^n \;=\; x$$

e quindi si può scrivere

$$\frac{x}{1 - x - \; x^2} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{Fib}_n x^n \;.$$

I35d.03 Gli esempi precedenti riguardano serie inverse con i coefficienti dati da espressioni molto semplici.

Nella maggior parte degli altri casi le equazioni c.04(2) non portano a coefficienti b_n esprimibili mediante formule semplici. In taluni di questi casi le serie inverse sono trattabili come successioni di coefficienti numerici le cui proprietà sono ottenute con argomentazioni specifiche che costituiscono tipici esempi di sviluppi combinatorici.

Un esempio di questa situazione è dato dalla serie della secante, inversa della serie $\cos(x)$, definita da

$$\sec(x) \;:=\; \frac{1}{\sin(x)} \;=:\; \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \,\frac{\mathrm{Eul}_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}\, x^+ \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + \frac{277}{8064} x^8 + \cdots \;,$$

dove con Eul_m si denota il cosiddetto **numero di Eulero** di indice m, componente di una successione speciale di interi [`Numeri di Euler (wi)`], successione che si può considerare definita dalla relazione precedente.

In altri casi le serie inverse si sanno trattare solo attraverso elenchi finiti di coefficienti ottenuti con calcoli effettivi specifici che in molti casi vengono progressivamente arricchiti utilizzando procedure e implementazioni software via via più prestanti.

I35d.04 Ampliamo l'elenco delle `sfp1` speciali con le seguenti definizioni.

serie della secante iperbolica $\quad \mathrm{sech}(x) \;:=\; \dfrac{1}{\cosh(x)}$

serie della tangente $\quad \tan(x) \;:=\; \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2\,k}\,(-4)^k\,(4^k - 1)}{(2n)!}\; x^{2\,k-1}$

serie della tangente iperbolica $\quad \tanh(x) \;:=\; \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \;=\; \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2\,k}\,4^k\,(4^k - 1)}{(2\,n)!}\; x^{2\,k-1}$

I35 e. derivazione e antiderivazione delle serie formali di potenze

I35e.01 Data una `sfp1` $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ si definisce come sua **derivata formale della serie formale** la `sfp1`

$$\mathrm{D}_x\, \mathsf{a} \;:=\; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\, n\, x^{n-1} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\,(n+1)\, x^n \;.$$

La trasformazione D_x viene chiamata **derivazione formale**; essa estende la derivazione dei polinomi formali dal finito all'infinito numerabile.

Si mostra facilmente che questa trasformazione è un operatore lineare-$\boldsymbol{R}$ del modulo delle `sfp1`:

$$\forall \mathsf{a}, \mathsf{b} \in \mathsf{Sfp1}\;,\; \forall \alpha, \beta \in R \quad \vdots \quad \mathrm{D}_x(\alpha\,\mathsf{a} + \beta\,\mathsf{b}) \;=\; \alpha\,\mathrm{D}_x(\mathsf{a}) + \beta\,\mathrm{D}_x(\mathsf{b}) \;.$$

In effetti si potrebbe definire la derivazione formale chiedendo che esso sia un operatore lineare sul modulo delle `sfp1` e che la sua azione sul generico vettore della base canonica $\{k \in \mathbb{N} :|\, x^k\}$ sia definita dalla $\mathrm{D}_x\,(x^k) \;:=\; k\, x^{k-1}$.

I35e.02 Alcuni esempi

$$\mathrm{D}_x \frac{1}{1-x} \;=\; 1 + 2x + 3\,x^{+}4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \;=\; \frac{1}{(1-x)^2} \;=\; \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}\;;$$

$$\mathrm{D}_x \exp(x) \;=\; \exp(x) \qquad , \qquad \mathrm{D}_x \sin(x) \;=\; \cos(x) \qquad , \qquad \mathrm{D}_x \cos(x) \;=\; -\sin(x)\;;$$

$$\mathrm{D}_x \sinh(x) \;=\; \cosh(x) \qquad , \qquad \mathrm{D}_x \cosh(x) \;=\; \sinh(x)\;.$$

I35e.03 La derivazione formale gode di una vasta gamma di proprietà che corrispondono a quelle dalla derivazione del calcolo infinitesimale.

Vale la regola della derivazione del prodotto

$$\mathrm{D}_x\big(\mathsf{a}(x)\cdot\mathsf{b}(x)\big) \;=\; \mathrm{D}_x(\mathsf{a}(x))\cdot\mathsf{b}(x) + \mathsf{a}(x)\cdot\mathrm{D}_x(\mathsf{b}(x))\;.$$

Per la derivazione dell'inversa e del quoziente si trova

$$\mathrm{D}_x \frac{1}{\mathsf{g}(x)} \;=\; -\frac{\mathrm{D}_x\mathsf{g}(x)}{\mathsf{g}(x)^2} \qquad , \qquad \mathrm{D}_x \frac{\mathsf{f}(x)}{\mathsf{g}(x)} \;=\; \frac{\mathrm{D}_x\mathsf{f}(x)\cdot\mathsf{g}(x) - \mathsf{f}(x)\cdot\mathrm{D}_x\mathsf{g}(x)}{\mathsf{g}(x)^2}\;.$$

Applicando questa regola si trova, per esempio,

$$\mathrm{D}_x \tan(x) \;=\; 1 + \tan^2(x) \;=\; \frac{1}{\cos^2(x)} \qquad , \qquad \mathrm{D}_x \tanh(x) \;=\; \frac{1}{\cosh^2(x)}\;.$$

I35e.04 Si dice **antiderivata della serie formale** $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \in \mathsf{Sfp1}$ ogni `sfp1` della forma

$$\mathtt{C} + a_0\, x + \frac{a_1}{2}\, x^2 + \frac{a_2}{3}\, x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} + \cdots \;,$$

ove $\mathtt{C}$ è un qualsivoglia elemento di R.
Si osserva facilmente che la derivata di ciascuna delle antiderivate di una `sfp1` a coincide con tale serie formale.

Anche l'antiderivazione gode delle proprietà corrispondenti a quelle dell'antiderivazione delle funzioni di variabile reale o complessa.

Spesso interessa la particolare antiderivata di una serie formale di ordine maggiore o uguale ad 1 che ha lo stesso ordine della serie di partenza; chiamiamo tale serie formale **antiderivata-00 di serie formale**.

Abbiamo quindi una trasformazione di $\mathsf{Sfp1}_{\geq 1}$ in se, la antiderivazione-00, per la quale useremo una notazione che ricalca quella delle antiderivate delle funzioni reali integrabili che si annullano per $x = 0 \in \mathbb{R}$; servendoci di una $T \in$ **Varf** scriviamo cioè

$$\int_0^x \mathrm{d}t \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, t^n \ :=\ a_0\, x + \frac{a_1}{2}\, x^2 + \frac{a_2}{3}\, x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1} + \cdots \ .$$

I35e.05 Si vede facilmente che la valutazione della derivata di una `sfp1` **a** fornisce la funzione derivata della valutazione della **a**.

Di conseguenza le valutazioni delle antiderivate di una `sfp1` **a** forniscono le funzioni antiderivate della valutazione della **a**.

Queste considerazioni aprono la prospettiva di riuscire a stabilire nuovi collegamenti tra le serie formali.

I35e.06 Si osserva che $\mathrm{D}_x(\mathrm{ln1p}(x)) \ =\ 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n \ =\ \dfrac{1}{1+x}$.
Questo rende opportuno definire come **serie formale logaritmica**:

$$\mathrm{ln1p}(x) \ :=\ \ln(1+x) \ :=\ \int_0^x \mathrm{d}t\, \frac{1}{1+t} \ =\ x - \frac{1}{2}\, x^2 + \frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^4 + \cdots \ =: \ .$$

Da questa, applicando la sostituzione $\lceil x \in \textsf{Varf} \mapsto -x \rceil$, si ottiene

$$\ln(1-x) \ =\ -x - \frac{1}{2}\, x^2 - \frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^4 - \cdots \ ;$$

inoltre combinando le due espressioni precedenti

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ =\ 2\, x + \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{2}{5}\, x^5 + \cdots \ =\ 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1} \ .$$

Dalla osservazione che $\mathrm{D}_x(\arctan(x)) \ =\ \dfrac{1}{1+\,x^2}$, passando alla antiderivata-00, si ottiene la cosiddetta **serie formale dell'arcotangente**

$$\arctan(x) \ :=\ x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^k\, \frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1} + \cdots \ .$$

I35e.07 Consideriamo la funzione binomiale $f(x) := (1+x)^\alpha$ per α reale qualsiasi ed x reale in $(1, +\infty)$; per la sua derivata n-esima si trova

$$\mathrm{D}_x{}^n f(x) \ =\ \alpha^{\underline{n}}\, (1-x)^{\alpha-n} \ =\ n! \binom{\alpha}{n} (1-x)^{\alpha-n} \ , \tag{1}$$

espressione nella quale compaiono il fattoriale decrescente [B13e07] $\alpha^{\underline{n}} \ :=\ \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ e il **coefficiente binomiale generalizzato** $\dbinom{\alpha}{n} \ :=\ \dfrac{\alpha^{\underline{n}}}{n!}$.

La precedente espressione porta allo sviluppo di Maclaurin della funzione binomiale e, senza preocuparsi delle sue condizioni di convergenza, alla **serie formale binomiale**, definibile per ogni α numero complesso

$$(1+x)^\alpha \ =\ 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \cdots \ . \tag{2}$$

I35e.08 La serie binomiale fu introdotta da Isaac Newton per il calcolo delle radici aritmetiche k-esime attraverso alcuni suoi interessanti casi particolari.

Per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ si ottiene la serie

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\,x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\,x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^3 - \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\,n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2\,n)}\,x^n + \cdots \\
&= 1 + \frac{1}{2}\,x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2\,n-3)!!}{(2\,n)!!}\,x^n
\end{aligned} \quad .
$$

Similmente per $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ si ottiene

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= (1+x)^{-1/2} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^3 - \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2\,n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2\,n)}x^n + \cdots \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2\,n-1)!!}{(2\,n)!!}\,x^n
\end{aligned} \quad .
$$

Inoltre per $\alpha = \dfrac{1}{k}$ con $k = 2, 3, 4, ...$ si ottiene

$$
(3) \qquad \sqrt[1/k]{1+x} \;=\; (1+x)^{1/k} \;=\; 1 - \frac{1}{k}\,x + \binom{1/k}{2}\,x^2 + \cdots + \binom{1/k}{n}\,x^n + \cdots \; .
$$

Segnaliamo che per il calcolo effettivo delle radici k-esime conviene valutare i coefficienti binomiali servendosi della formula di ricorrenza $\dbinom{1/k}{n+1} \;=\; -\dfrac{n-1}{k(n+1)}\dbinom{1/k}{n}$.

I35e.09 Dalla osservazione della derivata della funzione arcoseno e dallo sviluppo di MacLaurin per questa funzione ottenibile dalla e07(2), si ottiene

$$
\mathrm{D}_x \arcsin(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\,x^2}} \;=\; 1 + \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,x^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2\,n)!!}\,x^{2\,n} + \cdots \; .
$$

Passando alla antiderivata-00 si ottiene la serie formale dell'arcoseno

$$
\arcsin(x) \;=\; x + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(2\,k-1)!!}{(2\,k)!!}\,\frac{x^{2\,k+1}}{2\,k+1} + \cdots \; .
$$

I35 f. composizione delle serie formali di potenze

I35f.01 Consideriamo due `sfp1`, la prima una qualsiasi $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{a}_n\, x^n$ e la seconda, $\mathsf{b} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{b}_n\, x^n$, di ordine maggiore o uguale ad 1.
Sappiamo che la successione delle potenze della b $\searrow$ $\langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{b}^n \rangle$ è una successione infinitesima.
Si può quindi prendere in considerazione la serie formale ottenuta dalla combinazione lineare infinita delle sue potenze intere naturali determinata dalla serie formale a

$$\mathsf{a}_0 + \mathsf{a}_1\mathsf{b} + \mathsf{a}_2\mathsf{b}^2 + \cdots + \mathsf{a}_n\mathsf{b}^n + \cdots \ .$$

Questa serie di serie formali converge a una nuova serie formale che viene chiamata **composizione formale di serie formali** e denotata $\mathsf{a}(\mathsf{b}(x))$.
Per questa costruzione si usa anche il termine composizione di due `sfp1`

Si osserva che dai coefficienti delle due serie che si compongono si possono ricavare mediante espressioni polinomiali i coefficienti della composizione formale.

I35f.02 Si osserva che $\mathsf{ord}\,(\mathsf{a}(\mathsf{b}(x))) \;=\; \mathsf{ord}(\mathsf{a}) \cdot \mathsf{ord}(\mathsf{b})$. Consideriamo alcuni esempi.
Se $\mathsf{a} \;=\; a_2\, x^+ a_3 x^3 + \cdots$ e $\mathsf{b} = b_3 x^3 + b_4 x^4 + \cdots$, si ha $\mathsf{a}(\mathsf{b}(x)) \;=\; a_2 {b_3}^2 x^6 + \cdots$.

$$\ln\left(1+\sin(x)\right) \;=\; \sin(x) - \frac{\sin^2(x)}{2} + \frac{\sin^3(x)}{3} - \cdots \;=\; x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^3 + \cdots$$

$$\exp\left(\exp(x) - 1\right) \;=\; 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + \frac{5}{8}\,x^4 + \cdots$$

I35f.03 La composizione delle serie formali è un'operazione binaria parziale bilineare che fornisce un'altra struttura algebrica per le serie formali.
Se ci si limita alle `sfp1` di ordine maggiore o uguale ad 1 la composizione si può definire per ogni coppia di `sfp1` e si ottiene una struttura di anello.
Questa operazione binaria viene detto anche **prodotto-c di serie formali**.

Mentre lo zero di questo anello è la serie nulla, l'unità è la serie x, corrispondente alla successione $\langle 0, 1, 0, 0, ... \rangle$.

È di grande interesse stabilire se una `sfp1` di ordine 1 a è dotata di una `sfp1` che costituisce la sua inversa per il prodotto-c, serie che denotiamo con a^{-1_c} cioè le serie tale che $\mathsf{a}\left(\mathsf{a}^{-1_c}\right) \;=\; \mathbf{1}$.
Questa serie viene detta **serie formale inversa composizionale** o con termine più conciso **serie formale inversa-c**.

I35f.04 Vale la regola della derivazione di una composizione di `sfp1`:

$$\mathrm{D}_x(\mathsf{a}(\mathsf{b})) \;=\; (\mathrm{D}_x\mathsf{a})\,(\mathsf{b}) \cdot \mathrm{D}_x(\mathsf{b}) \ .$$

I35 g. altri esempi di serie formali di potenze

I35g.01 Molte interessanti serie formali di potenze si ottengono mediante manipolazioni piuttosto semplici di serie elementari introdotte in precedenza.

$$\exp(-x^2) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}$$

$$\frac{\sin x}{x} \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)\,k!}$$

Passando alle antiderivate si hanno le seguenti `sfp1`

$$\int_0^x \mathrm{d}t\ \exp(-t^2) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}$$

$$\int_0^x \mathrm{d}t\ \frac{\sin t}{t} \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,(2k+1)!}$$

I35g.02 Altre serie sono le corrispondenti di serie di funzioni inverse-c di funzioni trigonometriche e di funzioni iperboliche.

serie dell'arcoseno

$$\arcsin(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{(2k)!!\,(2k+1)}\,x^{2k+1}$$

serie dell'arcotangente

$$\arctan(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\,x^{2k+1}$$

serie dell'area di seno iperbolico

$$\mathrm{arsinh}(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2k)!!\,(2k+1)}\,x^{2k+1}$$

serie dell'area di coseno iperbolico

$$\mathrm{arcosh}(x) \;:=\; \ln(2x) - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{(2k)!!\,2k}\,x^{-2k}$$

serie dell'area della tangente iperbolica

$$\mathrm{artanh}(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\,x^{2k+1}$$

serie dell'area della cotangente iperbolica

$$\mathrm{arcoth}(x) \;:=\; \mathrm{artanh}\left(\frac{1}{x}\right) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\,x^{-(2k+1)}$$

serie dell'area della secante iperbolica

$$\mathrm{arsech}(x) \;:=\; \mathrm{arcosh}\,\frac{1}{x} \;=\; \ln\,\frac{2}{x} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{(2k)!!\,2k}\,x^{2k}$$

serie dell'area della cosecante iperbolica

$$\operatorname{arcsch}(x) := \operatorname{arsinh}\frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,(2\,k)!}{(2\,k)!!\,(2\,k+1)}\, x^{-(2\,k+1)}$$

I35g.03 Introduciamo la seguente **serie di Bell**

$$\frac{x}{\exp(x)-1} =: \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathsf{Bell}_n}{n!} x^n \ ,$$

dove per ogni $n \in \mathbb{N}$ il valore denotato con Bell_n viene detto n-esimo **numero di Bell** [D20i].
Per questi numeri si trovano molte notevoli proprietà partendo da questa definizione.

Diamo altri due esempi di serie speciali

serie di Bessel

$$J_0(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \,\frac{x^{2\,k}}{((2\,k)!!)^2}$$

serie di Lambert

$$W_0(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!}\, x^n$$

I35g.04 Molte serie formali speciali si ottengono come casi particolari di una famiglia di serie dipendenti da due gruppi di parametri.

Se a, b, e c sono numeri complessi nonnulli e nonnegativi, si dice **serie ipergeometrica di Gauss** relativa ai parametri a, b e c la `sfp1b`

$${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{\overline{n}}\ b^{\overline{n}}}{n!\ c^{\overline{n}}}\, x^n$$

Alcune funzioni esprimibili come particolari serie ipergeometriche sono le seguenti:

$$\ln(1+x) = x \cdot {}_2F_1(1,1;2;-x) \ ;$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};\,x^2\right) \ ;$$

$$\arcsin(x) = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};\,x^2\right) \ ;$$

$$\arccos(x) = x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right) \ .$$

Tra le funzioni ipergeometriche si trovano numerosi polinomi speciali e in particolare i seguenti

polinomi di Jacobi

$$\mathsf{Pjcb}_n^{(\alpha,\beta)}(x) := \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,1+\alpha+\beta+n\ ;\ \alpha+1\ ;\ \frac{1-x}{2}\right) \ .$$

polinomi di Gegenbauer

$$\mathsf{Cggb}_n^{(\alpha)}(x) := \frac{(2\,\alpha)^{\overline{n}}}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,2\,\alpha+n\ ;\ \alpha+\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1-x}{2}\right) \ .$$

polinomi di Legendre

$$\mathsf{Plgdr}_n(x) \ := \ {}_2F_1\left(-n, n+1 \ ; \ 1 \ ; \ \frac{1-x}{2}\right) \ = \ \mathsf{C}\text{ggb}_n^{(1/2)}(x) \ .$$

polinomi di Chebyshev di prima e seconda specie

$$\text{Tchb}_n(x) \ := \ {}_2F_1\left(-n, n \ ; \ \frac{1}{2} \ ; \ \frac{1-x}{2}\right) \ = \ \mathsf{C}\text{ggb}_n^{(0)}(x) \ ;$$

$$\text{Uchb}_n(x) \ := \ (n+1)\ {}_2F_1\left(-n, n+2 \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ \frac{1-x}{2}\right) \ = \ (n+1)\ \mathsf{C}\text{ggb}_n^{(1)}(x) \ .$$

I35g.05 Si dice **serie ipergeometrica confluente** o **serie di Kummer** relativa ai parametri a e c la `sfp1b`

$$ {}_1F_1(a \ ; \ c \ ; \ x) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{\overline{n}}}{n!\, c^{\overline{n}}}\, x^n$$

Alcune funzioni ipergeometriche confluenti speciali sono le seguenti:

$$\text{erf}(x) \ := \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dT\ \exp(-t^2) \ = \ \frac{2\,x}{\sqrt{\pi}}\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2} \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ -x^2\right) \ ;$$

Vi sono inoltre varie successioni di polinomi speciali:

polinomi associati di Laguerre

$$L_n^{\alpha}(x) \ := \ \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_1F_1(-n \ ; \ \alpha+1 \ ; \ x) \ .$$

polinomi di Laguerre

$$L_n \ := \ L_n^0 \ = \ \frac{1_n}{n!}\ {}_1F_1(-n \ ; \ 1 \ ; \ x) \ .$$

polinomi di Hermite

$$\mathsf{Hrmt}_{2\,k}(x) \ := \ (-2)^k\,(2\,k-1)!!\ {}_1F_1\left(-k \ ; \ \frac{1}{2} \ ; \ x^2\right) \ = \ (-4)^k\, k!\, L_k^{(-1/2)}(x^2) \ ;$$

$$\mathsf{Hrmt}_{2\,k+1}(x) \ := \ (-1)^k 2^{k+1} (2\,k+1)!! x\ {}_1F_1\left(-k \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ x^2\right) \ = \ (-4)^k\, k!\, x\, L_k^{(1/2)}(x^2) \ ;$$

I35g.06 Le serie precedenti fanno parte di sottofamiglie della estesa collezione delle **serie ipergeometriche**. Queste sono serie che dipendono primariamente da due interi naturali p e q e da due insiemi di parametri complessi, risp., di p e q elementi. Denotiamo i parametri del primo insieme con a_1, a_2, ..., a_p ed i parametri del secondo con b_1, b_2, ..., b_p. Definiamo quindi come serie ipergeometrica caratterizzata dai suddetti parametri come

$$ {}_pF_q(a_1, ..., a_p \ ; \ b_1, ..., b_q \ ; \ x) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{a_1}^{\overline{n}}\, {a_2}^{\overline{n}} \ldots {a_p}^{\overline{n}}}{{b_1}^{\overline{n}}\, {b_2}^{\overline{n}} \ldots {b_q}^{\overline{n}}}\ \frac{z^n}{n!}$$

Semplici serie ipergeometriche, diverse da quelle già incontrate, sono le seguenti

$$\exp(x) \ = \ {}_0F_0(; \ ; \ x) \qquad , \qquad (1-x)^k \ = \ {}_1F_0(-k; \ ; \ x)$$

$$\cosh(x) \ = \ {}_0F_1\left(; \frac{1}{2} \ ; \ \frac{x^2}{4}\right) \qquad , \qquad \sinh(x) \ = \ x \cdot {}_0F_1\left(\ ; \frac{3}{2} \ ; \ \frac{x^2}{4}\right)$$

$$\text{artanh}(x) \ = \ x \cdot {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1 \ ; \ 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \ ; \ x^2\right) \ = \ x \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1 \ ; \ \frac{3}{2} \ ; \ x^2\right)$$

Osserviamo esplicitamente che tutte queste serie sono invarianti rispetto alle permutazioni dei parametri di ciascuno dei due rispettivi gruppi.

I35g.07 Delle serie ipergeometriche sono state studiate proficuamente anche molte generalizzazioni [`Basic hypergeometric series` (we), `Elliptic hypergeometric series` (we)] .

I35 h. serie formali di potenze di più variabili

I35h.01 Le serie formali di potenze in una variabile si generalizzano in modo naturale nelle serie formali di potenze in più variabili, espressioni che consentono di individuare e controllare le successioni a più indici e che costituiscono generalizzazioni dei polinomi formali in più variabili.

Consideriamo una serie di potenze in due variabili formali x e y sull'anello commutativo $\boldsymbol{R}$. Essa si dice **serie di potenze in due variabili in forma ordinaria** sse viene rappresentata da una espressione della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\, y^p$$

nella quale ogni $A_{n,p}$ denota un'espressione o un algoritmo in grado di fornire un elemento di $\boldsymbol{R}$ e nella quale si intende che la coppia di indici diversi $\langle n, p\rangle$ può essere sostituita da una qualsiasi altra coppia di caratteri.
Denotiamo con **Sfp2** l'insieme di tali serie formali.

Diciamo successione doppia ordinariamente generata dalla precedente serie la matrice di profilo $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ e con entrate in R $\lceil \langle n,p\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mapsto a_{n,p} \rceil$.

È naturale anche estendere la definizione della funzione ogenseq ponendo

$$\mathsf{ogenseq}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\, y^p\right) \;:=\; \lceil \langle n,p\rangle \in \mathbb{N} \mapsto a_{n,p} \rceil$$

e la sua relazione inversa Ogf.

Definiamo più comprensivamente **serie di potenze in due variabili formali** x e y ogni espressione riconducibile alle precedenti attraverso le equivalenze algebriche che caratterizzano le espressioni stesse. Il termine precedente lo abbreviamo con `sfp2` nella x e nella y, mentre l'insieme di queste serie prescindendo dalle variabili lo denotiamo con **Sfp2**.

Definiamo come **funzioni generatrici in due variabili** le classi di equivalenza canoniche della funzione ogenseq e denotiamo con **Fungen2** il loro insieme e con $\boldsymbol{R}[\![x,y]\!]$ l'insieme delle loro manifestazioni nelle variabili x e y.

Si definisce come **supporto di una serie formale a** $\in$ **Fungen2**, e si denota con Supp(a), il sottoinsieme di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ costituito dalle coppie di indici interi naturali per le quali $a_{n,p}\neq 0$. I polinomi formali di due variabili, chiaramente, sono tutte e sole le funzioni generatrici in due variabili aventi supporto finito.

I35h.02 Sopra **Fungen2**, servendosi delle serie formali nella forma ordinaria, si definiscono in modo prevedibile la combinazione lineare-$\boldsymbol{R}$ componente per componente (ovvero la somma termine a termine e la moltiplicazione termine a termine per un elemento di R) e il prodotto di Cauchy.

Consideriamo $\alpha,\beta\in R$ e le serie appartenenti a **Fungen2** $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\, y^p$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} B_{n,p}\, x^n\, y^p$.

Definiamo la lor combinazione lineare

$$\alpha\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\, y^p \;+\; \beta\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} B_{n,p}\, x^n\, y^p \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\alpha\cdot A_{n,p}+\beta\cdot B_{n,p}\right) x^n\, y^p \;;$$

e il prodotto di Cauchy delle due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\, y^p \cdot \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{+\infty} B_{q,r}\, x^q\, y^r \ := \ \sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s}\sum_{p=0}^{t} A_{n,p}\, B_{s-n,t-p} \right) x^s\, y^t \ .$$

Si vede facilmente che queste operazioni fanno di **Fungen2** un'algebra sull'anello commutativo $\boldsymbol{R}$.

Su **Fungen2** si può definire una topologia che costituisce un arricchimento di quella introdotta per **Fungen1** in modo da ottenere l'algebra topologica delle funzioni generatrici di due variabili.

I35h.03 Le definizioni per un numero generico d di variabili saranno riprese più avanti, in quanto richiedono alcune precisazioni notazionali.
Per le serie formali delle potenze di tre variabili lasciamo al lettore la definizioni di notazioni come **Sfp3b**, **Sfp3** e **Fungen3**, nonché le definizioni estensive delle funzioni ogenseq e Ogf.

Per le attività computazionali segnaliamo che si ottengono esempi di funzioni generatrici su due variabili di prevedibile utilità sostituendo nelle `sfp1` la variabile formale con qualche semplice espressione di due variabili formali.

Elaborando queste entità formali si ritrovano molte formule dell'analisi e della trigonometria, ma con una portata più ampia. Ad esempio:

$$\begin{aligned} \exp(x+y) \ &= \ 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2\,x\,y + y^2) + \cdots + \frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n} x^n\, y^{s-n} + \cdots \\ &= \ \exp(x)\cdot\exp(y) \ , \\ \sin(x+y) \ &= \ x + y - \frac{1}{3!}(x^3 + 3\,x^2 y + 3\,x\,y^2 + y^3) + \cdots \\ &= \ \sin(x)\,\cos(y) - \cos(x)\,\cos(y) \ . \end{aligned} \qquad .$$

Sviluppi analoghi si possono effettuare con funzioni generatrici su tre e più variabili formali riuscendo a ottenere identità nelle quali possono compaiono parecchi parametri.

I35h.04 La generica serie formale di potenze di due variabili si può riscrivere in due forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\, y^p \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, y^p\right) x^n \ = \ \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p}\, x^n\right) y^p \ .$$

Queste due nuove espressioni mostrano due fatti: ogni `sfp2` nelle variabili x e y si può anche considerare come `sfp1` nella variabile x sull'anello commutativo delle serie di $\boldsymbol{R}[\,y\,]$ e come `sfp1` nella variabile y sull'anello commutativo delle serie di $\boldsymbol{R}[\,x\,]$.

Dalle definizioni delle combinazioni lineari e del prodotto di Cauchy in h02 si deduce facilmente che queste tre algebre su anelli sono isomorfe: questa proprietà si può esprimere scrivendo

$$\boldsymbol{R}[\,x,y\,] \ \longleftrightarrow_{Alg} \ (\boldsymbol{R}[\,Y\,])[\,x\,] \ \longleftrightarrow_{Alg} \ (\boldsymbol{R}[\,x\,])[\,y\,] \ .$$

I35h.05 Grande importanza rivestono le funzioni generatrici di successioni di polinomi come quelle che seguono.

Funzione generatrice dei polinomi di Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2\,t\,x}} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\, P_n(x) \quad \text{ove} \quad P_n(x) \ := \ \frac{1}{(2\,n)!!}\,\mathrm{D}_x{}^n\left[(x^2-1)^n\right] \ ;$$

Funzione generatrice dei polinomi di Laguerre

$$\frac{1}{1-t}\exp\left(-\frac{x\,t}{1-t}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,L_n(x) \quad \text{ove} \quad L_n(x) \;:=\; \frac{\exp(x)}{n!}\,\mathrm{D}_x{}^n\,[x^n\,\exp(-x)] \;\; ;$$

Funzione generatrice dei polinomi di Hermite

$$\exp(2\,x\,t-t^2) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty}\mathsf{Hrmt}_n(x)\frac{t^n}{n!} \quad \text{ove} \quad \mathsf{Hrmt}_n(x) \;:=\; (-1)^n\,\exp(x^2)\,\mathrm{D}_x{}^n\left[\exp(-\,x^2)\right] \;\; .$$

I35h.06 In generale si possono considerare serie formali su un aanello commutativo $\boldsymbol{R}$ con un numero intero positivo arbitrario di variabili.

Consideriamo un intero $d \in [2:+\infty)$ e l'insieme delle funzioni costruibili $\lceil \mathbb{N}^{\times d} \longmapsto_{\mathsf{c}} R \rceil$, funzioni chiamate anche successioni a d indici.

Su tale insieme che denotiamo con **FunNtA**$_{\boldsymbol{R}}$ si definiscono in modo intuibile la somma termine a termine, la moltiplicazione per un elemento di R e il prodotto di Cauchy.

Munendo **FunNtA**$_{\boldsymbol{R}}$ di queste operazioni (e quindi della combinazione lineare-$\boldsymbol{R}$) si ottiene un'algebra chiamata **algebra delle serie formali di potenze di d variabili**; questo termine lo abbreviamo con **Sfpd**.

I35h.07 Limitiamoci infine a segnalare che vengono studiate proficuamente anche serie formali in una successione di variabili formali x_1, x_2, ..., x_ν, ...

I35 i. serie formali di Laurent e serie formali di grado superiore limitato

I35i.01 In molte considerazioni sulle `sfp` risulta utile servirsi di potenze negative, come accade nell'analisi, in particolare nello studio delle funzioni di variabile complessa.

Una esigenza di questo genere si è incontrata in d02 : non potendosi considerare tra le `sfp1` la $\frac{1}{x}$ e la $\frac{1-x-x^2}{x}$ si è giunti a individuare l'inversa della serie di Fibonacci facendo riferimento a una modifica della definizione di serie inversa, non alla più significativa $\frac{1-x-x^2}{x} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} F_n\, x^n = \mathbf{1}$.

I35i.02 Consideriamo le successioni bilatere costruibili di elementi dell'anello commutativo $\boldsymbol{R} = \langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$, cioè funzioni del genere $\lceil \mathbb{Z} \longmapsto_{\mathsf{C}} R \rceil$. Evidentemente questo insieme munito della combinazione lineare-$\boldsymbol{R}$ costituisce uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$.

Si dice **serie bilatera di potenze formali in forma ordinaria** nella variabile $x \in$ **Varf** un'espressione della forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n\, x^N$ dove ciascuno degli A_n denota un'espressione o un algoritmo in grado di fornire un elemento $a_n \in R$.

Come sinonimo del termine "serie bilatera" useremo anche il termine **serie-Z**.

Similmente a quanto fatto per le `sfp1`, per le serie-Z formali di potenze possiamo introdurre la notazione `sZfp1o`, introdurre le più generali **serie-Z formali di potenze**, la sigla `sZfp1` che abbrevia tale termine, le notazioni `sZfp1` e `sZfp1`, la generazione ordinaria di sequenze bilatere, estendere agli "interi negativi" la funzione ogenseq, introdurre le funzioni-Z generatrici, cioè le classi di equivalenza di `sZfp1`, effettuare le corrispondenti estensioni della relazione Ogf, e della funzione Supp supporto alle funzioni-Z generatrici.

Le operazioni di somma termine a termine e la moltiplicazione termine a termine per un valore di R fanno di **SZfp1** uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$.

I35i.03 Si pone il problema di introdurre per queste serie di potenze o per una parte di esse un prodotto alla Cauchy tra suoi elementi per ottenere un'algebra su $\boldsymbol{R}$ che estenda l'algebra delle `sfp1` e che consenta di individuare procedimenti costruttivi di portata paragonabile a quelli che si trovano per le `sfp1`˙

Una estensione del prodotto di Cauchy a tutte le `sZfp1` non è possibile, in quanto richiede la valutazione di una serie di elementi di R e quindi introduce un problema di convergenza che si vuole evitare, in quanto porta a distinzioni tra serie che risulta in conflitto con la caratteristica peculiare delle serie formali di potenze.

In effetti un prodotto di Cauchy si può introdurre per due sottoinsiemi significativi di **SZfp1** che costituiscono due suoi sottospazi vettoriali (anzi delle sottoalgebre).

I35i.04 Una `sZfp1` f si dice **sZfp1 di grado limitato inferiormente** sse il suo supporto è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato inferiormente; in tal caso il minimo di Supp(f) si dice **grado inferiore** di f e si scrive *deginf*(f); se la serie-Z non presenta un grado limitato inferiormente si pone *deginf*(f) $:= -\infty$.

Dualmente-UD una `sZfp1` f si dice **sZfp1 di grado limitato superiormente** sse il suo supporto è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato superiormente; in tal caso il massimo di Supp(f) si dice **grado superiore della sZfp1 f** e si denota con *degsup*(f); se la serie-Z non possiede grado limitato superiormente si conviene di definire *degsup*(f) $:= +\infty$.

Denotiamo inoltre con **SZfp1Dinf** l'insieme delle `sZfp1` di grado limitato inferiormente e con **SZfp1Dsup** l'insieme delle `sZfp1` di grado limitato superiormente.

È chiaro che questi due sottoinsiemi di **SZfp1** costituiscono due suoi sottospazi vettoriali.

Su ciascuno dei due sottospazi si può definire il prodotto di Cauchy, dato esso richiede solo di calcolare somme finite e quindi costituisce una costruzione per la quale non si pongono problemi di convergenza.

Si ottengono quindi due algebre di serie-Z formali di potenze alle quali si possono applicare varie proprietà e costruzioni viste per le `sfp1`.

Le serie-Z formali di potenze di grado limitato inferiormente si dicono anche **serie formali di Laurent**.

I35i.05 Le serie-Z che sono sia di grado limitato inferiormente che di grado limitato superiormente, cioè le serie-Z con supporto finito, si dicono **polinomi formali di Laurent**.

Chiaramente i polinomi formali di Laurent costituiscono un sottospazio sia dello spazio che ha come terreno **SZfp1Dinf** che dello spazio che ha come terreno **SZfp1Dsup** dei polinomi di Laurent.

Altro sottospazio dello spazio dei polinomi formali di Laurent è costituito dai polinomi formali aventi supporto finito costituito da interi minori o uguali a 0.

L'insieme dei polinomi di Laurent su $\boldsymbol{R}$ si denota con $\boldsymbol{R}\left[\,x, x^{-1}\,\right]$.
Questa scrittura intende presentare l'insieme delle espressioni che costituisce la chiusura del duetto insieme di entità simboliche $\{x, x^{-1}\}$ rispetto alle operazioni di combinazione lineare-$\boldsymbol{R}$ e di prodotto di Cauchy.

I35i.06 Due polinomi di Laurent sono

$$\mathsf{a} := 2\,x^{-3} + x^{-1} + 5 - 2\,x + 3\;x^{-}5\,x^4 \qquad \text{e} \qquad \mathsf{b} := -3\,x^{-2} + x + \;x^{-}4\,x^3 + 2\,x^5;$$

una loro combinazione lineare è

$$\mathsf{a} + 2\,\mathsf{b} \;=\; 2x^{-3} - 6\,x^{-2} + x^{-1} + 5 + 5\,x^2 - 8\,x^3 - 5\,x^4 + 4x^5\ ,$$

mentre il loro prodotto di Cauchy è

$$-6\,x^{-5} - 3\,x^{-3} - 13\,x^{-2} + 8\,x^{-1} - 16 + 6\,x + 18\,x^2 - 19\,x^3 + 13\,x^4 - 7\,x^5 - 9\,x^6 + 26\,x^7 - 10\,x^9\ .$$

Segnaliamo che per prodotti di Cauchy come il precedente sono utili schemi grafici come il seguente
//input pI35i06