Capitolo I35:
Serie formali di potenze

Contenuti delle sezioni

I35:0.01 Questo capitolo è dedicato all'introduzione dei tipi più semplici di serie formali di potenze in un anello commutativo (in sigla **sfp**),
Queste serie interessano primariamente (e tradizionalmente) quando l'anello commutativo è il campo dei numeri complessi; in effetti queste serie hanno un ruolo centrale nell'analisi infinitesimale e sono una delle basi degli studi sulle funzioni analitiche e sulle funzioni speciali.
Qui useremo, risp., i termini *valori numerici* e *variabili numeriche* per costanti e variabili nell'anello commutativo. Chiameremo inoltre *serie di potenze di variabili numeriche*, in breve **spvn**, le serie studiate principalmente in quanto per determinate scelte dei valori delle variabili risultano convergenti e forniscono corrispondenti valori numerici.

Le serie formali di potenze vengono presentate come espressioni formalmente simili a quelle delle spvn e che possono essere composte con operazioni algebriche che estendono quelle applicabili ai polinomi (combinazione lineare, prodotto, ...) e che trovano corrispondenza in composizioni applicabili alle spvn, ma per le quali non si pongono preliminarmente questioni di convergenza. Ad esempio l'espressione

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)x^n \;=\; 1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+\cdots$$

come serie di potenze della variabile complessa x è un'entità che fornisce numeri complessi per ogni x complesso con modulo minore di 1, mentre come serie della variabile formale x serve per presentare la successione numerica $\langle 1,-3,5,-7,9,-11,...\rangle$ mediante un'espressione che, sotto opportune condizioni, potrà essere usata per individuare una spvn.
In effetti si constata che rinunciando a porre problemi di convergenza si acquista la possibilità di effettuare sulle serie (formali) di potenze un'ampia gamma di manipolazioni che portano a procedimenti formali per il controllo delle successioni numeriche i quali si rivelano assai utili ed efficaci; in particolare molti di questi procedimenti vengono implementati in programmi di calcolo simbolico incisivi e di vasta portata.
Per ciascuna delle serie ottenute con queste manipolazioni formali, naturalmente, si può cercare di applicare i procedimenti dell'analisi volti alla determinazione della convergenza e all'utilizzo delle possibili somme.

I35:a. Successioni numeriche costruibili e serie formali di potenze

I35:a.01 Introduciamo ora la nozione di **serie formale di potenze in una variabile**, entità che chiemeremo anche **serie di potenze formali in una variabile** e per le quali useremo la sigla **sfp1**, come espressioni che consentono di trattare proficuamente successioni costruibili di elementi di un anello commutativo. Successivamente tratteremo queste entità, o per essere più precisi classi di equivalenza di queste espressioni, come elementi di una struttura algebrico-topologica costruibile.

Consideriamo un anello commutativo $\boldsymbol{R} = \langle R, +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ e l'insieme delle successioni costruibili di elementi di R che denotiamo con $\mathsf{SeqNC}_{\boldsymbol{R}} := \{\mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R\}$. Nel seguito con la sigla **seqNC** abbrevieremo il termine "successione costruibile di elementi di un qualche anello commutativo".
Denotiamo con $\oplus$ la somma termine a termine fra successioni di $\mathsf{SeqNC}_{\boldsymbol{R}}$ e con $\ominus$ la corrispondente operazione inversa. Denotiamo inoltre con $\odot$ il **prodotto di Cauchy** fra successioni di $\mathsf{SeqNC}_{\boldsymbol{R}}$, cioè l'operazione che a due successioni $\mathbf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n\rangle$ e $\mathbf{b} = \langle n \in \mathbb{N} :| b_n\rangle$ fa corrispondere la successione

$$\mathbf{a} \odot \mathbf{b} \ := \ \left\langle n \in \mathbb{N} :| \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}\right\rangle = \left\langle a_0 b_0 \ , \ a_0 b_1 + a_1 b_0 \ , \ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \ , \ \ldots\right\rangle .$$

In seguito ci serviremo di due notazioni per successioni particolari

$$\mathbf{0} := \langle 0, 0, ..., 0, ...\rangle \qquad \text{e} \qquad \mathbf{1} := \langle 1, 0, ..., 0, ...\rangle \ .$$

Si dimostra facilmente che $\mathbf{0}$ è l'elemento neutro per $\oplus$, che $\mathbf{1}$ è l'elemento neutro per $\odot$, che $\oplus$ e $\odot$ sono operazioni commutative e che vale la distributività di $\oplus$ rispetto a $\odot$; dunque $\oplus$ e $\odot$ sono operazioni di anello commutativo.
Questo consente di chiamare **anello delle successioni costruibili** di elementi di $\boldsymbol{R}$ l'anello commutativo

$$\left\langle \{\mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R\}, \oplus, \ominus, \odot, \mathbf{0}, \mathbf{1}\right\rangle \ .$$

I35:a.02 Le successioni numeriche costruibili rivestono grande importanza per molti campi della matematica e per molte sue applicazioni.
Interessano innanzi tutto le **sequenze enumerative**, sequenze di interi positivi, ciascuna associata alle configurazioni discrete di un certo tipo costruibili con un certo numero di oggetti di base: per la $\langle k_0, k_1, ..., k_n, ...\rangle$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, k_n esprime il numero di configurazioni ottenibili con n oggetti di base. Esempi sono la sequenza dei fattoriali, con $k_n = n!$ esprimente il numero delle permutazioni di n oggetti distinguibili, la sequenza dei [[numeri di Catalan]], con $k_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ esprimente (ad esempio) il numero di modi per suddividere un poligono convesso con $n+2$ vertici in triangoli aventi i vertici coincidenti con tre vertici del poligono.
Più in generale interessano le successioni di numeri interi. A tali entità è dedicata una delle più importanti iniziative sul Web per la matematica, la [[Online Encyclopedia of Integer Sequences]], in sigla OEIS, iniziativa avviata da Neil Sloane la quale raccoglie e organizza una gran mole di informazioni sopra più di 100.000 successioni.
Ancor più in generale interessano le sequenze di numeri razionali: un esempio è costituito dalla sequenza dei **numeri di Bernoulli**

$$\left\langle 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, ... \right\rangle \ ;$$

vedremo molti altri esempi di sequenze di razionali associate a serie formali specifiche (v. :a.05, :a.08, :d.04, :G).

Infine hanno interesse pratico le sequenze di numeri complessi.

I35:a.03 Si pone il problema di controllare in modo efficace e possibilmente efficiente le seqNC e a questo scopo sono stati sviluppati diversi tipi di procedimenti costruttivi.
Oltre ai procedimenti algebrici che si basano sulle operazioni di combinazione lineare e prodotto, vengono utilizzati opportuni sistemi di equazioni per le componenti delle successioni ed in particolare regole di ricorrenza.
Consideriamo l'esempio della successione dei [[numeri di Fibonacci]] $\langle F_0, F_1, F_2, ..., F_n, ...\rangle = \langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...\rangle$. Essa può essere definita dalle richieste: $F_0 = 0, F_1 = 1$, $\forall n = 2, 3, ... \; : \; F_n := F_{n-2} + F_{n-1}$
È importante che questi procedimenti e altri tipi di costruzioni possono essere posti in collegamento: per questi collegamenti risultano molto utili le serie formali di potenze. Nel caso dei numeri di Fibonacci si ha la serie $X + X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 5X^5 + 8X^6 + \cdots$.

I35:a.04 Introduciamo ora le serie formali di potenze in una sola variabile (in sigla **sfp1**) come espressioni per le successioni costruibili di $\{\mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R\}$. Come vedremo queste espressioni consentono di effettuare varie efficaci elaborazioni sopra le successioni e consentono di collegarle in modo piuttosto diretto alle serie di potenze di una variabile numerica studiate nell'analisi infinitesimale.

Le spf1 costituiscono il caso più semplice di serie formali di potenze (in sigla **sfp**), espressioni che riguardano successioni costruibili a molti indici, cioè funzioni costruibili del genere $\{\mathbb{N}^{\times d} \longmapsto_{\mathsf{C}} R\}$, dove d denota il numero degli indici. In queste espressioni compaiono d lettere che chiameremo **variabili formali** le quali sono le basi per le annunciate manipolazioni formali e che sostituite da variabili numeriche conducono alle serie numeriche di potenze in d variabili.
Per le variabili formali qui useremo solo alcune lettere maiuscole e per precisare che alcuni di questi simboli hanno tali funzioni useremo scritture come $X, Y, Z, T \in$ **Varf**.

I35:a.05 Diciamo **serie formale di potenze in una variabile** $X \in$ **Varf** e **in forma base** sull'anello commutativo $\boldsymbol{R}$ costruibile un'espressione della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n = A_0 + A_1 X + A_2 X^2 + \cdots + A_n X^n + \cdots \;,$$

dove l'indice n potrebbe essere sostituito da qualsiasi lettera e ogni A_n è un'espressione sull'anello $\boldsymbol{R}$ o un'algoritmo che fornisce un l'elemento di $\boldsymbol{R}$. Abbrevieremo con **sfp1b** l'espressione "serie formale di potenze in una variabile e in forma base".
Tre esempi di sfp1b sono i seguenti:

Serie geometrica $X^* \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} X^n \;=\; 1 + X + X^2 + X^3 + \cdots\,.$

Serie esponenziale $\exp(X) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} \;=\; 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots\,.$

Serie logaritmica $\mathrm{ln1p}(X) \;:=\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n} \;=\; X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \cdots.$

Per la prima serie potrebbe essere sufficiente l'anello dei numeri interi, per le altre due il campo dei numeri razionali.
Alla spf1b della definizione è associata la seqNC $\mathsf{a} = \langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\rangle \in \{\mathbb{N} \longmapsto_{\mathsf{C}} R\}$ dove per ogni $n \in \mathbb{N}$ a_n è l'elemento di R individuato da A_n. Questa successione si dice **successione generata**

ordinariamente dalla spf1b e questa serie formale si dice essere una delle sfp1 che rappresentano la successione.

I35:a.06 Per formalizzare questo collegamento useremo scritture come

$$ogenseq\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n\right) = \langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n\rangle = \langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\rangle\ .$$

Per le tre serie precedenti abbiamo, risp.,

$$ogenseq\,(X^*) = \langle 1, 1, 1, 1, ..., 1, ...\rangle\ ,$$

$$ogenseq\,(\exp(X)) = \left\langle 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3!}, ..., \frac{1}{n!}, ...\right\rangle\ ,$$

$$ogenseq\,(\mathrm{ln1p}(X)) = \left\langle 0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{(-)1^{n+1}}{n}, ...\right\rangle\ .$$

Inoltre denotiamo con **Ogf** la relazione inversa della funzione *ogenseq* e useremo scritture come

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \ \in\ \mathbf{Ogf}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n\right)\ .$$

Maggiori dettagli sul collegamento fra una spf1b e la seqNC che essa genera ordinariamente si ottengono mediante la cosiddetta successione degli **estrattori di coefficienti** $\left\langle k \in \mathbb{N} :|\ [X^k]\right\rangle$ definiti come

$$\forall k \in \mathbb{N}\ :\ [X^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n\right) := a_k\ .$$

Quindi

$$ogenseq\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n\right) = \left\langle n \in \mathbb{N} :|\ [X^n]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n\right)\right\rangle\ .$$

I35:a.07 Osserviamo anche che nella scrittura della serie logaritmica abbiamo trascurato l'addendo $a_0 X^0$ con $a_0 = 0$. Questa cancellazione viene adottata per ogni termine con coefficiente nullo. Ad esempio una sfp1b che genera ordinariamente la sequenza dei numeri di Bernoulli si scrive

$$1 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{6}X^2 - \frac{1}{30}X^4 + \frac{1}{42}X^6 - \frac{1}{30}X^8 + \cdots\ .$$

Questa semplificazione estende la semplificazione adottata per i polinomi.
In accordo con questa semplificazione possiamo dire che i polinomi formali in una variabile e in forma base sono casi particolari di sfp1b e precisamente sono tutte e sole le sfp1b che generano ordinariamente le seqNC con un numero finito di componenti diverse da 0.
Sulle spf1b si definiscono facilmente le operazioni di somma, sottrazione, moltiplicazione per uno scalare e prodotto di Cauchy estendendo le definizioni relative ai polinomi formali.
Sopra le spf1b definiremo varie altre costruzioni che conducono a spf1b e che consentono di esprimere in più modi moltissime seqNC.

I35:a.08 Più in generale definiamo **serie formale di potenze in una variabile** X su $\boldsymbol{R}$ una espressione nella quale entra la X e possono entrare elementi di R, operazioni di anello corrispondenti a quelle per l'anello delle seqNC ed altre espressioni che sono riconducibili alle costruzioni sopra accennate e che ci proponiamo di definire in modo da garantire che a ciascuna serie formale si possa associare effettivamente una spf1b e quindi una seqNC. Dunque anche ad ogni "serie formale di potenze in una variabile", cioè ad ogni sfp1, corrisponde una seqNC; a tutte le sfp1 si può estendere la funzione *ogenseq*. Diremo quindi che ciascuna di queste serie genera ordinariamente la successione.

Introduciamo ora altre sfp1 semplici ed importanti.

Serie del seno $\sin(X) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots$.

Serie del coseno $\cos(X) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{2n}\frac{X^{2n}}{(2n!} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots$.

Serie del seno iperbolico $\sinh(X) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X^{2n+1}}{(2n+1)!} = X + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} + \frac{X^7}{7!} + \cdots$.

Serie del coseno iperbolico $\cosh(X) := \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X^{2n}}{(2n!} = 1 + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^6}{6!} + \cdots$.

Volendo essere pignoli queste non sono serie in forma base in quanto a un valore n dell'indice non corrisponde il termine in X^n. In effetti ciascuna di queste scritture si riconduce senza difficoltà a una forma base che però spesso ha il difetto di essere più pesante alla lettura. Ad esempio si trova $\sin(X) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)_2(-1)^n\frac{X^n}{n}$

Diamo anche le seguenti formule

$$\mathit{ogenseq}(\sin(X)) = \left\langle 0,1,0,-\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},0,...\right\rangle \quad , \quad \mathit{ogenseq}(\cos(X)) = \left\langle 1,0,-\frac{1}{2!},0,\frac{1}{4!},0,...\right\rangle \ ,$$

$$\mathit{ogenseq}(\sinh(X)) = \left\langle 0,1,0,\frac{1}{3!},0,\frac{1}{5!},0,...\right\rangle \quad , \quad \mathit{ogenseq}(\cosh(X)) = \left\langle 1,0,\frac{1}{2!},0,\frac{1}{4!},0,...\right\rangle \ .$$

Altre serie formali di potenze non nella forma base si ottengono da serie in forma base rimpiazzando la variabile X con una sua potenza positiva e componendo con combinazioni lineari e prodotti serie formali consolidate. Ad esempio

$$\exp(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}X^{2n} \quad , \quad \sinh(X^3) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{X^{6n+3}}{(2n+1)!} \quad , \quad \cos(X^{h+1}) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{2n}\frac{X^{2n(h+1)}}{(2n)!} \ ,$$

$$sin(X)\cdot\frac{1}{1-X} \ .$$

Più avanti vedremo condizioni che consentono di comporre serie formali in modo da poter trattare espressioni come

$$\exp(X+2X^2-3X^3) \quad , \quad \exp(X^h)\cdot\cosh(X^2) \quad , \quad \cos(\sin(X)) \quad , \quad \frac{\cosh(X)}{1+X-2X^2} \ .$$

I35:a.09 Due **serie di potenze formali in una variabile** si dicono **equivalenti** sse forniscono la stessa successione di elementi di $\boldsymbol{R}$.
L'equivalenza fra sfp1 è l'equivalenza associata alla funzione *ogenfun*.
Sono evidentemente equivalenti due sfp1b che, come $\sum_{n=0}^{+\infty}A_nX^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}A_nY^n$, differiscono solo nella variabile formale.
Si possono avere duetti di sfp1b equivalenti aventi le forme $\sum_{n=0}^{+\infty}A_nX^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty}B_nY^n$ che per ogni $k \in \mathbb{N}$ presentano algoritmi diversi ma equivalenti, cioè tali che $\forall k \in \mathbb{N} : [X^k]A_kX^k = [Y^k]B_kX^k = a_k$.

Infine segnaliamo duetti equivalenti aventi forme come $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{E}_n X^n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n X^n$, dove per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{E}_n$ ed $\mathcal{F}_n$ denotano espressioni sull'anello $\boldsymbol{R}$ che sono riconducibili l'una all'altra applicando gli assiomi degli anelli commutativi.

Diciamo **funzione generatrice in una variabile**, in sigla **fungen1**, ogni classe di equivalenza di sfp1. Denoteremo con **FunGen1** l'insieme di queste funzioni generatrici.
Le sfp1 in una determinata variabile formale X che appartengono ad una $\mathsf{f} \in$ **FunGen1** si dicono anche **manifestazioni** nella X della **f**.
Denoteremo con $\boldsymbol{R}[[X]]$ l'insieme delle manifestazioni nella variabile formale X delle sfp1 sull'anello $\boldsymbol{R}$.

I35:a.10 Evidentemente la corrispondenza fra le fungen1 e le seqCN è biunivoca. Inoltre una specifica fungen1 deve essere presentata effettivamente attraverso una sfp1 che le appartiene. Questo induce, nonostanti le precedenti precisazioni introduttive, a confondere nella pratica espositiva dei risultati generali, una funzione generatrice con le serie formali equivalenti che le appartengono e spesso anche con la successione costruibile che essa genera ordinariamente; similmente si tende a confondere ciascun algoritmo A_n con il valore numerico a_n. Questi abusi di linguaggio consentono di presentare equivalenze di serie formali come uguaglianze di funzioni generatrici presentate attraverso diverse serie formali.
In effetti i termini "serie formale di potenze" e "funzione generatrice" di solito vengono usati come sinonimi. Qui sono stati imposti due significati diversi (solo) per presentare definizioni iniziali ben distinte.
Anche i suddetti abusi di linguaggio costituiscono estensioni di convenzioni sui polinomi.

Conviene segnalare fin d'ora che sono studiati proficuamente diversi modi di ricavare da una sfp1 da una successione numerica: ad esempio si dice **successione esponenzialmente generata** dalla sfp1 $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n$ la seqNC $\langle a_0, a_1, 2a_2, 3!a_3, ..., n!a_n, ...\rangle$, co i soliti significati di A_n e a_n. Si dice inoltre **funzione generatrice esponenziale** nella $X \in$ **Varf** della seqNC $\mathsf{a} = \big\langle n \in \mathbb{N} :|\ a_n \big\rangle$ la classe di equivalenza alla quale appartiene una sfp1b della forma $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} X^n$. Questa situazione si esprime con scritture come

$$egenseq\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n X^n\right) = \langle n \in \mathbb{N} :|\ n!a_n\rangle \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} X^n \in \mathsf{Egf}\left(\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...\rangle\right)$$

I35:a.11 Gli elementi costruibili a dell'anello $\boldsymbol{R}$ si possono identificare con le serie formali che presentano come prima componente il valore a e tutte le altre componenti uguali a 0. Le loro manifestazioni nella X si possono scrivere aX^0. Si osserva che l'espressione X è la manifestazione nella variabile X della seqNC $\langle 0, 1, 0, 0, ..., 0, ...\rangle$; inoltre si constata che le successive potenze della variabile X^2, X^3, ecc. sono le manifestazioni, risp., delle seqNC $\langle 0, 0, 1, 0, 0, ...\rangle$, $\langle 0, 0, 0, 1, 0, ...\rangle$, ecc. In generale per ogni $m \in \mathbb{N}$ l'espressione X^m è la manifestazione nella X della seqNC $\langle n \in \mathbb{N} :|\ \delta_{n,m}\rangle$.

Tutte le serie formali che presentano un numero finito di componenti diverse da 0 si manifestano nella variabile formale X come polinomi formali nella variabile X: il polinomio $a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ è la manifestazione della seqNC $\langle a_0, a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, ...\rangle$
Le funzioni generatrici in una variabile possono quindi vedersi come le estensioni dal finito all'infinito numerabile dei polinomi formali in una variabile.

La distinzione fra una funzione generatrice e una sua manifestazione in una variabile risulta necessaria quando si trattano serie in più variabili formali e quando si effettuano sostituzioni di variabili formali con espressioni composite. Quando non ci sono queste esigenze è possibile identificare ogni fungen1 con la sua manifestazione in una variabile formale tipica, di solito la X, senza sostanziali rischi di confusione e con il vantaggio dell'uso di espressioni significative e sottoponibili con relativa facilità ad elaborazioni simboliche. Coerentemente risulta comodo scrivere $\boldsymbol{R}[[X]]$ invece di $\boldsymbol{R}[[.]]$.

I35:a.12 Ad ogni sfp1 $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ si attribuisce un **supporto** denotato con $\mathsf{Supp}(\mathsf{a})$ costituito dall'insieme degli esponenti della variabile ai quali corrisponde un coefficiente diverso da 0: in formula $\mathsf{Supp}(\mathsf{a}) := \{n \in \mathbb{N} \rrbracket\, a_n \neq 0\}$.
Chiaramente il supporto di una sfp1 è finito sse essa è un polinomio formale e il supporto della serie nulla $\sum_{n=0}^{+\infty} 0X^n$ è $\emptyset$.

Ad ogni sfp1 $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ si attribuisce inoltre un elemento di $[0 : +\infty]$ chiamato **ordine** o **grado inferiore** che denotiamo con $\mathsf{ord}(\mathsf{a})$: alla spf1 nulla si assegna $\mathsf{ord}(\mathbf{0}) := +\infty$, mentre si definisce ordine di ogni altra serie $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ il minimo intero facente parte del suo supporto, cioè il minore degli esponenti n della variabile per il quale $a_n \neq 0$.

Prop. Siano a e b due sfp1 qualsiasi.

(1) $\mathsf{ord}(\mathsf{a}) = p \in \mathbb{N} \iff \mathsf{a} = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{con} \quad a_p \neq 0$ ∎

(2) $\mathsf{ord}(\mathsf{a}) \neq \mathsf{ord}(\mathsf{b}) \implies \mathsf{ord}(\mathsf{a}+\mathsf{b}) = \min(\mathsf{ord}(\mathsf{a}), \mathsf{ord}(\mathsf{b}))$ ∎

(3) $\mathsf{ord}(\mathsf{a}) = \mathsf{ord}(\mathsf{b}) \implies \mathsf{ord}(\mathsf{a}+\mathsf{b}) \geq \mathsf{ord}(\mathsf{a})$ ∎

(4) $\mathsf{ord}(\mathsf{a} \cdot \mathsf{b}) = \mathsf{ord}(\mathsf{a}) + \mathsf{ord}(\mathsf{b})$ ∎

(5) $\forall h \in \mathbb{N} \;\colon\; \mathsf{ord}(\mathsf{a}^h) = h \cdot \mathsf{ord}(\mathsf{a})$ ∎

Ad esempio

$$\mathsf{ord}\left[\sin(X^2)\right] = 2 \qquad , \qquad \mathsf{ord}\left[\sin(X)\sinh(X^3)\right] = 4 \qquad , \qquad \mathsf{ord}\left[\sinh(X) - \sin(X)\right] = 3 \ .$$

Le sfp1 di ordine 1 sono chiamate anche **serie delta**. Per ogni h intero naturale denotiamo con $\mathsf{Sfp1}_h$ l'insieme delle sfp1 di ordine h, con $\mathsf{Sfp1}_{\geq h}$ l'insieme delle sfp1 di ordine maggiore o uguale ad h; prevedibili i significati di $\mathsf{Sfp1}_{>h}$, di $\mathsf{Sfp1}_{<h}$ e di $\mathsf{Sfp1}_{\leq h}$.

I35:b. L'algebra topologica delle serie formali di potenze

I35:b.01 La possibilità di combinare linearmente le sfp1 consente di considerare l'**algebra delle serie formali di potenze di una variabile**; per questa struttura usiamo la notazione $\mathsf{Sfp1}_{alg}$.
Molte nozioni delle strutture della specie algebre possono essere utili per vari problemi sulle sfp1; questo si riscontra soprattutto per le serie sul campo dei complessi, per le quali risultano utili varie nozioni degli spazi vettoriali. In particolare sono utili le nozioni di proiettore, base, indipendenza lineare, operatore lineare e funzionale lineare.

Innanzi tutto si osserva che la successione delle potenze della variabile formale $X \searrow \langle n \in \mathbb{N} :| X^n \rangle$ costituisce una base per l'algebra $\mathsf{Sfp1}_{alg}$; essa viene detta **base canonica**, a somiglianza delle basi canoniche degli spazi $\mathbb{F}^{\times d}$, in quanto costituita da sequenze con una sola componente non nulla ed uguale ad 1.

Gli estrattori di coefficienti per le sfp1 sono dei funzionali $\boldsymbol{R}$-lineari: infatti

$$\forall\, \alpha, \beta \in R\ ,\ \forall \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n, \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \in \mathsf{Sfp1b}\ \ :\ \ [X^k]\left(\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n\right) \ =\ \alpha\, a_k + \beta\, b_k\ .$$

Ad ogni estrattore $[X^k]$ corrisponde il proiettore relativo al vettore X^k della base canonica di $\mathsf{Sfp1}_{alg}$ definito da:

$$\boldsymbol{Prj}_k(\mathsf{a}) = ([X^k]\mathsf{a})X^k\ .$$

È evidente che questi proiettori sono operatori idempotenti e che l'applicazione di due diversi estrattori porta al vettore nullo $\mathbf{0}$ di $\mathsf{Sfp1}_{alg}$.

Gli estrattori consentono di ricavare coefficienti utili per moltissimi problemi della combinatorica, in particolare coefficienti con significati enumerativi. A questo proposito possono essere utili le loro generalizzazioni che seguono.
Per ogni $\alpha \in R \setminus \{0\}$ si definisce il funzionale $[\alpha X^k]$ ponendo

$$[\alpha X^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right) \ :=\ \frac{1}{\alpha}[X^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right) = \frac{a_k}{\alpha}\ .$$

Per ogni $f \in \{\mathbb{N} \longmapsto R \setminus \{0\}\}$ si definisce il funzionale $[f(k)X^k]$ ponendo

$$[f(k)X^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right) \ :=\ \frac{1}{f(n)}[X^k]\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right) = \frac{a_k}{f(k)}\ .$$

Ad esempio $\quad 2[X^k]\left(\dfrac{1}{1+X}\right) = \dfrac{(-1)^k}{2} \quad$ e $\quad \dfrac{1}{k!}[X^k]\,(\exp(X)) = 1$.

I35:b.02 Grande importanza rivestono per la combinatorica e in generale per numerose questioni matematiche, le **successioni di polinomi speciali**. Si tratta di successioni di polinomi $\langle n \in \mathbb{N} :| p_n(X)\rangle$ con $p_n(X)$ polinomio di grado n individuati, attraverso le loro componenti, da algoritmi specifici e nei casi più semplici da espressioni algebriche specifiche.
Tra gli esempi più semplici, oltre alla successione dei polinomi X^n, segnaliamo quelle dei polinomi dati dalle espressioni $(X+a)^n$, $X^{\overline{n}} = X(X+1)\cdots(X+n-1)$ e $X^{\underline{n}} := X(X-1)\cdots(X-n+1)$. I coefficienti di questi polinomi costituiscono schieramenti triangolari di numeri che in genere sono interi o razionali. Accade che questi numeri hanno significati enumerativi di grande importanza, cioè forniscono le cardinalità di strutture discrete di grande interesse. Caso tipico è costituito dai coefficienti binomiali, associati ai polinomi $(X+a)^n$.

Alcuni aspetti di queste successioni di polinomi possono essere utilmente studiati considerando che si tratti di successioni di polinomi formali.
Ciascuna di queste successioni di polinomi che presentano $\mathbb{N}$ come successione dei gradi costituisce una base per l'algebra delle sfp1. Le espressioni di questi polinomi della forma $p_n(X) = \sum_{i=0}^{n} p_{n,i} X^i$ si vedono utilmente come rappresentazioni nella base canonica di vettori di $\mathsf{Sfp1}_{alg}$. Grande interesse

hanno anche i coefficienti delle espressioni dei polinomi $q_n(X)$ di una base come combinazioni lineari dei polinomi $p_i(X)$ di un'altra base $q_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_{n,i} p_i(X)$.
Gli schieramenti triangolari dei coefficienti $\gamma_{n,i}$ per $0 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$, coefficienti di trasformazione fra due basi dell'algebra delle spf1, spesso sono costituiti da numeri interi o da numeri razionali che godono di notevoli proprietà collegate a significati enumerativi.

I35:b.03 Risulta opportuno munire l'insieme **Sfp1** anche di una topologia, in modo da poter organizzare costruzioni che si servono di un meccanismo di convergenza che non sia quello indotto dalla convergenza delle successioni su $\boldsymbol{R}$, il quale consente di trattare solo le serie convergenti che si incontrano nell'analisi infinitesimale. La definizione di una topologia per l'anello delle serie formali in una variabile si può effettuare in diversi modi che risultano equivalenti e conducono ad una struttura di anello topologico. Qui definiamo una metrica secondo la quale due sfp1 sono tanto più vicine, quanto maggiore è il numero dei loro primi termini che coincidono. Questo consente di dire che una generica sfp1 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ viene via via approssimata dai polinomi costituiti dai suoi primi N termini $\sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ al crescere illimitato dell'intero N.

I35:b.04 Date due sfp1 $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ e $\mathsf{b} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, si definisce come loro distanza $\mathrm{d}_{sfp}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) := 2^{-k}$, dove k è il minimo numero naturale tale che $a_k \neq b_k$. Si osserva che un tale k non esiste sse le due successioni coincidono ovvero sse la loro distanza è nulla.

Questa definizione consente di dire che due sfp1 sono tanto più vicine quanto maggiore è il numero dei loro primi termini che coincidono.
A questo punto si può attribuire un senso all'equazione

$$\langle n \in \mathbb{N} :| \ a_n \rangle \ = \ \lim_{m \to +\infty} \sum_{i=0}^{m} a_i X^i \ .$$

Si osserva inoltre che ogni riarrangiamento della serie converge allo stesso limite.

Si può verificare che la struttura metrica introdotta, e la conseguente struttura topologica, e la struttura di anello commutativo vista in precedenza costituiscono una struttura di anello topologico. Essa viene chiamata **anello topologico delle serie di potenze formali** in una variabile su $\boldsymbol{R}$.

I35:b.05 Nell'ambito della precedente topologia si possono definire utili meccanismi di passaggio al limite per successioni di elementi di **Sfp1** e di somma di serie di sfp1.

Consideriamo una successione di sfp1 $\mathsf{A} = \langle n \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{a}_n \rangle$; si dice che **A converge alla sfp1 limite L** $\in$ **Sfp1**, e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} \mathsf{a}_n = \mathsf{L} \quad \text{oppure} \quad \mathsf{a}_n \to \mathsf{L} \quad \text{per} \quad n \to +\infty$$

sse per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste un intero naturale $\nu = \nu(N)$ tale che $\forall k \in [\nu, +\infty)$ sia $\mathsf{ord}(\mathsf{a}_k - \mathsf{L}) \geq N$.
In parole povere si ha $\lim_{n \to +\infty} \mathsf{a}_n = \mathsf{L}$ sse al crescere dell'indice intero n un numero via via crescente di componenti delle a_n coincide con i coefficienti iniziali della L.

I35:b.06 Consideriamo una successione di sfp1 $^{\searrow}$ $\mathsf{A} = \langle n \in \mathbb{N} :| \mathsf{a}_n \rangle$; si dice che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{a}_n$ **converge alla somma** $\mathsf{S} \in$ **Sfp1** e si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{a}_n = \mathsf{S}$$

sse $\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathsf{a}_i = \mathsf{S}$, ovvero sse per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste un intero naturale $\nu = \nu(N)$ tale che $\forall k \in [\nu, +\infty)$ si ha $\mathsf{ord}\left(\sum_{i=0}^{n} \mathsf{a}_i - \mathsf{L}\right) \geq N$.

I35:b.07 Consideriamo una sfp1 f avente ordine $\mathsf{ord}(\mathsf{f}) \geq 1$; si osserva che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $\mathsf{ord}(\mathsf{a}^h) \geq h$
Una successione di sfp1 che converge alla sfp1 nulla $\mathbf{0}$ si dice **successione di sfp1 infinitesima**. Per la precedente sfp1 f possiamo affermare che la $\langle h \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}^h \rangle$ è una successione di sfp1 infinitesima.
Esempi di successioni infinitesime sono $\langle h \in \mathbb{N} :| \sin^h(X) \rangle$ e $\langle h \in \mathbb{N} :| \sinh^h(X^2) \rangle$.

Prop. Consideriamo una successione di sfp1 $\langle k \in \mathbb{N} :| \mathsf{f}_k \rangle$.

$$\lim_{k\to+\infty} \mathsf{f}_k = \mathbf{0} \iff \lim_{k\to+\infty} \mathsf{ord}(\mathsf{f}_k) = +\infty \ .$$

Dim.: Segue facilmente dalle definizioni ▮

I35:c. Valutazioni delle serie formali e serie di Maclaurin

I35:c.01 Le serie formali di potenze di una variabile formale vengono spesso trattate in stretto parallelismo con le corrispondenti serie numeriche, soprattutto con serie di potenze di una variabile complessa, caso al quale ci limitiamo per semplicità. Le serie di potenze di una variabile complessa, a loro volta, sono in biiezione con le funzioni di $\{\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\}$ aventi come dominio l'insieme dei valori della variabile nelle quali la serie converge; per queste funzioni le serie numeriche costituiscono gli sviluppi in serie di Maclaurin. Nella pratica espositiva in genere queste serie e le corrispondenti funzioni vengono identificate e vengono individuate con le stesse notazioni.

Per chiarire i collegamenti fra serie serie di potenze formali e serie di potenze di una variabile complessa ci serviremo di coppie di lettere come $\langle X, x\rangle$ o $\langle Z, z\rangle$ considerando le maiuscole elementi di **Varf** e le corrispondenti minuscole come variabili in $\mathbb{C}$. Useremo quindi coppie di notazioni come $\left\langle \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \ , \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right\rangle$. Inoltre ci serviremo degli identificatori delle serie e delle funzioni speciali e delle espressioni analitiche contenenti tali identificatori usando coppie di notazioni come $\langle \sin(X) \ , \ \sin(x) \rangle$ o come $\left\langle \frac{\exp(X) - 1}{X} \ , \ \frac{\exp(x) - 1}{x} \right\rangle$.
Ci serviremo inoltre, per opportuni valori di $\overline{x} \in \mathbb{C}$, della funzione **valutazione di una sfp1** in corrispondenza del valore $\overline{x}$, funzione definita da

$$\mathsf{Eval}_{\overline{x}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \right) \ := \ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{x}^n \ .$$

I valori di $\overline{x}$ utilizzabili sono quelli che rendono convergente la serie numerica a secondo membro e dipendono dalla successione $\langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ come visto in I34: . In effetti la funzione valutazione si ottiene con una sostituzione formale della X con la $\overline{x}$ effettuabile sotto condizioni di convergenza che vanno esaminate caso per caso.

Va osservato che la biiezione tra serie formali e serie numeriche rispetta numerose operazioni; prime tra queste vi sono le operazioni algebriche di combinazione lineare e prodotto; tra le altre vi sono quelle di derivazione, di antiderivazione e di composizione tra serie di potenze che dovremo vedere con qualche dettaglio critico.

I35:c.02 Vari importanti esempi di sfp1 si ottengono riprendendo le serie di Maclaurin per le funzioni speciali più note. Queste serie conviene che siano identificate attraverso gli stessi simboli utilizzati nell'analisi infinitesimale, come abbiamo fatto in :a.05 e :a.08 . In questi casi e in altri nei quali la successione dei coefficienti viene individuata da qualche algoritmo ben definito, si usa il termine **serie di potenze formali speciale** (qui abbreviato con *serie speciali*).
Si osserva che quasi tutte le serie speciali si possono collocare in $\mathbb{Q}_{\mathsf{C}}[[X]]$, anche se per molte questioni conviene condurre il loro studio nell'ambito di $\mathbb{C}[[X]]$, cioè nell'insieme delle serie formali sui numeri complesso.

I35:c.03 Le serie di potenze speciali presentano numerose varianti e una elevata gamma di collegamenti. Alcune varianti e alcuni collegamenti si ottengono mediante semplici modifiche dell'argomento, che conviene considerare nell'ambito del campo complesso, e attraverso altre manipolazioni elementari. Insieme a queste relazioni conviene considerare anche alcune proprietà di simmetria che si ottengono con procedimenti simili.

Si dimostrano dunque facilmente le uguaglianze che seguono

$$\forall h \in \mathbb{P} : \ (X^h)^* = 1 + X^h + X^{2h} + X^{3h} + \cdots + X^{nh} + \cdots \ ,$$
$$\forall h \in \mathbb{P} : \ \big((-X)^h\big)^* = 1 - X^h + X^{2h} - X^{3h} + \cdots + (-1)^n X^{nh} + \cdots \ ,$$
$$(X^*)^2 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + \cdots + (n+1)X^n + \cdots \ ,$$
$$\cosh(X) := \frac{\exp(X) + \exp(-X)}{2} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \cdots = \cosh(-X) \ ,$$
$$\sinh(X) := \frac{\exp(X) - \exp(-X)}{2} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \cdots = -\sinh(X) \ ,$$
$$\cos(X) = \cosh(iX) = \frac{\exp(iX) + \exp(-iX)}{2} = \cos(-X) \ ,$$
$$\sin(X) = \frac{\exp(iX) - \exp(-iX)}{2i} = \sin(-X) \ ,$$
$$\exp(iX) = \cos(X) + i\sin(X) \qquad , \qquad \exp(X) = \cos(-iX) + i\sin(-iX) \ ,$$
$$\sin^2(X) + \cos^2(X) = 1 \qquad , \qquad \cosh^2(X) - \sinh^2(X) = 1 \ .$$

I35:d. Inversione delle serie formali di potenze

I35:d.01 In queste sezioni denotiamo con il semplice "·" il prodotto di due sfp1b.

Data una sfp1 $\mathbf{a}$, è importante stabilire se esista o meno una sfp1 $\mathbf{b}$ tale che $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{1}$; se tale sfp1 esiste è unica: infatti se fosse $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}=\mathbf{1}$, grazie alla commutatività dei coefficienti delle serie formali, sarebbe $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}'\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}\cdot\mathbf{b}$, cioè sarebbe $\mathbf{b}'=\mathbf{b}$. La sfp1 così individuata viene chiamata **inversa [moltiplicativa]** della $\mathbf{a}$ e si scrive $\mathbf{b}=\mathbf{a}^{-1}$ oppure $\mathbf{b}=\dfrac{1}{\mathbf{a}}$.
È utile e semplice distinguere le sfp1 che sono dotat di inversa moltiplicativa da quelle che non lo sono.

Prop. La serie $\mathbf{a}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$ è invertibile sse ha ordine 0, cioè sse $a_0\neq 0$; inoltre l'inversa di una serie di $\mathbb{Q}_{\mathsf{C}}[[X]]$ appartiene a questo stesso insieme.

Dim.: La dimostrazione è costruttiva e consiste nell'individuare concretamente la serie $\mathbf{b}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nX^n$ tale che sia $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{1}$.
Essa esiste sse è risolubile il sistema di equazioni

(1) $$a_0b_0=1\ ,\ a_0b_1+a_1b_0=0\ ,\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0\ ,\ \ldots\ ,\ a_0b_n+\cdots+a_nb_0=0\ .$$

Questo è possibile sse a_0 è invertibile in $\boldsymbol{R}$: in tal caso semplici manipolazioni portano alle seguenti espressioni risolutive

(2) $$b_0=\frac{1}{a_0}\ ,\ b_1=-\frac{1}{a_0}a_1b_0\ ,\ b_2=-\frac{1}{a_0}\left(a_1b_1+a_2b_0\right)\ ,\ \ldots\ ,\ b_n=-\frac{1}{a_0}\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i}\ .$$

Queste garantiscono anche l'appartenenza a $\mathbb{Q}_{\mathsf{C}}$ dei coefficienti della serie inversa ▮

I35:d.02 Il più semplice esempio di inversione di una sfp1 si ricava dalle sequenti constatazioni

$$X^*(1-X)\ =\ \left(1+X+X^2+X^3+\cdots+X^n+\cdots\right)\ ,$$
$$-X(1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}+\cdots)\ =\ \mathbf{1}\ .$$

Si trova quindi la **serie geometrica formale**

$$(X^*)^{-1}=1-X\qquad\text{ovvero}\qquad\frac{1}{1-X}=X^*\ .$$

Varianti della serie geometrica si ottengono facilmente

$$(-X)^*=\frac{1}{1+X}=1-X+X^2-X^3+\cdots+(-1)^nX^n+\cdots$$
$$\frac{1}{1\pm X^2}=1\mp X^2+X^4\mp X^6+\cdots+(\mp1)^nX^{2n}+\cdots$$
$$\frac{1}{(1-X)^2}=(X^*)^2=1+2X+3X^2+4X^3+\cdots+(n+1)X^n+\cdots$$

Un altro esempio riguarda la **serie formale di Fibonacci**, serie che genera la successione di Fibonacci (D20:d.02) :

$$\mathsf{Fib}(X):=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathsf{Fib}_nX^n=X+X^2+2X^3+3X^4+5X^5+8X^6+13X^7+\cdots\ .$$

Per essa si trova

$$(1-X-X^2)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\mathsf{Fib}_nX^n=X$$

e quindi si può scrivere

$$\frac{X}{1-X-X^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{Fib}_n X^n \ .$$

I35:d.03 Gli esempi precedenti riguardano serie inverse con i coefficienti dati da espressioni molto semplici. Nella maggior parte degli altri casi le equazioni c.04(2) non portano a coefficienti b_n esprimibili mediante formule semplici. In taluni di questi casi le serie inverse sono trattabili come successioni di coefficienti numerici le cui proprietà sono ottenute con studi specifici (in genere di natura combinatoria).

Un esempio di questa situazione è dato dalla serie della secante, inversa della serie $\cos(X)$, espressa da

$$\sec(X) := \frac{1}{\sin(X)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{Eul_{2n}}{(2n)!} X^{2n} = 1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{24}X^4 + \frac{61}{720}X^6 + \frac{277}{8064}X^8 + \cdots \ ,$$

dove con Eul_m si denota il numero di Eulero di indice m, componente di una successione speciale di interi ([[Numeri di Eulero]]), successione che si può considerare definita dalla relazione precedente.

In altri casi le serie inverse si sanno trattare solo attraverso elenchi finiti di coefficienti ottenuti con calcoli effettivi specifici che nel tempo possono venire arricchiti utilizzando particolari procedure e implementazioni software.

I35:d.04 Possiamo arricchire l'elenco delle sfp1 speciali con le seguenti espressioni.

Serie della secante iperbolica $\operatorname{sech}(X) := \dfrac{1}{\cosh(X)}$

Serie della tangente $\tan(X) := \dfrac{\sin(X)}{\cos(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}(-4)^k(4^k-1)}{(2n)!} X^{2k-1}$

Serie della tangente iperbolica $\tanh(X) := \dfrac{\sinh(X)}{\cosh(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}4^k(4^k-1)}{(2n)!} X^{2k-1}$

I35:e. Derivazione e antiderivazione delle serie formali di potenze

I35:e.01 Data una sfp1 $\mathsf{a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ si definisce come sua **derivata formale** la sfp1

$$D_X\mathsf{a} := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n X^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}(n+1)X^n \ .$$

La trasformazione D_X viene chiamata **derivazione formale**; essa estende la derivazione dei polinomi formali dal finito all'infinito numerabile.

Si mostra facilmente che questa trasformazione è un operatore $\boldsymbol{R}$-lineare del modulo delle sfp1:

$$\forall \mathsf{a},\mathsf{b} \in \mathsf{Sfp1} \ , \ \forall \alpha,\beta \in R \quad : \quad D_X(\alpha\mathsf{a}+\beta\mathsf{b}) = \alpha D_X(\mathsf{a}) + \beta D_X(\mathsf{b}) \ .$$

In effetti si potrebbe definire la derivazione formale chiedendo che esso sia un operatore lineare sul modulo delle sfp1 e che la sua azione sul generico vettore della base $\{k \in \mathbb{N} :| X^k\}$ sia data dalla $D_X(X^k) := kX^{k-1}$.

I35:e.02 Alcuni esempi

$$D_X \frac{1}{1-X} = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + \cdots + (n+1)X^n + \cdots = \frac{1}{(1-X)^2} \ ;$$

$$D_X \exp(X) = \exp(X) \qquad , \qquad D_X \sin(X) = \cos(X) \qquad , \qquad D_X \cos(X) = -\sin(X) \ ;$$

$$D_X \sinh(X) = \cosh(X) \qquad , \qquad D_X \cosh(X) = \sinh(X) \ .$$

I35:e.03 La derivazione formale gode di una vasta gamma di proprietà che corrispondono a quelle dalla derivazione del calcolo infinitesimale.

Vale la regola della derivazione del prodotto

$$D_X(\mathsf{a}(X) \cdot \mathsf{b}(X)) = D_X(\mathsf{a}(X)) \cdot \mathsf{b}(X) + \mathsf{a}(X) \cdot D_X(\mathsf{b}(X)) \ .$$

Per la derivazione dell'inversa e del quoziente si trova

$$D_X \frac{1}{\mathsf{g}(X)} = -\frac{D_X \mathsf{g}(X)}{\mathsf{g}(X)^2} \qquad , \qquad D_X \frac{\mathsf{f}(X)}{\mathsf{g}(X)} = \frac{D_X \mathsf{f}(X) \cdot \mathsf{g}(X) - \mathsf{f}(X) \cdot D_X \mathsf{g}(X)}{\mathsf{g}(X)^2} \ .$$

Applicando questa regola si trova, ad esempio,

$$D_X \tan(X) = 1 + \tan^2(X) = \frac{1}{\cos^2(X)} \qquad , \qquad D_X \tanh(X) = \frac{1}{\cosh^2(X)} \ .$$

I35:e.04 Si dice **antiderivata** della $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathsf{Sfp1}$ ogni spf1 della forma

$$c + a_0 X + \frac{a_1}{2} X^2 + \frac{a_2}{3} X^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \cdots \ ,$$

ove c è un qualsivoglia elemento di R. Si osserva subito che la derivata di ciascuna delle antiderivate di una sfp1 a coincide con tale serie formale.

Anche l'antiderivazione gode delle proprietà corrispondenti a quelle dell'antiderivazione fra funzioni di variabile complessa.

Spesso interessa la particolare antiderivata di una serie formale di ordine maggiore o uguale ad 1 che ha lo stesso ordine della serie di partenza; chiamiamo tale serie formale **antiderivata -00**. Abbiamo quindi una trasformazione di $\mathsf{Sfp1}_{\geq 1}$ in se, la antiderivazione-00, per la quale useremo una notazione che ricalca quella delle antiderivate delle funzioni reali integrabili che si annullano per $x = 0 \in \mathbb{R}$; scriviamo cioè

$$\int_0^X dT \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \ := \ a_0 X + \frac{a_1}{2} X^2 + \frac{a_2}{3} X^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} X^{n+1} + \cdots \ .$$

I35:e.05 Si vede facilmente che la valutazione della derivata di una sfp1 a fornisce la funzione derivata della valutazione della a.
Di conseguenza le valutazioni delle antiderivate di una sfp1 a forniscono le funzioni antiderivate della valutazione della a.
Da queste considerazioni segue la possibilità di stabilire nuovi collegamenti fra serie formali.

I35:e.06 Si osserva che $D_X(\text{ln1p}(X)) = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - \cdots + (-1)^n X^n = \dfrac{1}{1+X}$; questo rende opportuno definire come **serie formale logaritmica**:

$$\ln(1+X) := \int_0^X dT\, \frac{1}{1+T} = X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \cdots = \text{ln1p}(X) .$$

Da questa, applicando la sostituzione $X \to -X$, si ottiene

$$\ln(1-X) = -X - \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{4}X^4 - \cdots ;$$

inoltre combinando le due espressioni precedenti

$$\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right) = 2X + \frac{2}{3}X^3 + \frac{2}{5}X^5 + \cdots = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^{2k+1}}{2k+1} .$$

Dalla osservazione che $D_X(\arctan(X)) = \dfrac{1}{1+X^2}$, passando alla antiderivata-00, si ottiene la **serie formale dell'arcotangente**

$$\arctan(X) = X - \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} - \frac{X^7}{7} + \cdots + (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{2k+1} + \cdots .$$

I35:e.07 Consideriamo la funzione binomiale $f(x) := (1+x)^\alpha$ per α reale qualsiasi ed x reale > 1; per la sua derivata n-esima si trova $D_x{}^n f(x) = \alpha^{\underline{n}}(1-x)^{\alpha-n} = n!\binom{\alpha}{n}(1-x)^{\alpha-n}$, espressione nella quale compaiono il fattoriale decrescente (B13e07) $\alpha^{\underline{n}} := \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ e il **coefficiente binomiale generalizzato** $\binom{\alpha}{n} := \dfrac{\alpha^{\underline{n}}}{n!}$. La precedente espressione porta allo sviluppo di Maclaurin della funzione binomiale e, senza preoccuparsi delle sue condizioni di convergenza, alla **serie binomiale formale**, definibile per ogni α numero complesso

$$(1+X)^\alpha = 1 + \alpha X + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}X^2 + \binom{\alpha}{3}X^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}X^n + \cdots .$$

I35:e.08 La serie binomiale fu introdotta da [[Isaac Newton]] per il calcolo delle radici aritmetiche k-esime attraverso alcuni suoi interessanti casi particolari.

Per $\alpha = \dfrac{1}{2}$ si ottiene

$$(1)\quad \sqrt{1+X} = (1+X)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}X^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}X^3 - \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}X^n + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}X + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}X^n .$$

Similmente per $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ si ottiene

$$(2)\quad \frac{1}{\sqrt{1+X}} = (1+X)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}X + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}X^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}X^3 - \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}X^n + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}X^n .$$

Inoltre per $\alpha = \dfrac{1}{k}$ si ottiene

(3) $$\sqrt[1/k]{1+X} \;=\; (1+X)^{1/k} \;=\; 1 - \frac{1}{k}X + \binom{1/k}{2}X^2 + \cdots + \binom{1/k}{n}X^n + \cdots \ .$$

Per il calcolo effettivo delle radici k-esime conviene valutare i coefficienti binomiali servendosi della formula di ricorrenza $\dbinom{1/k}{n+1} = -\dfrac{kn-1}{k(n+1)}\dbinom{1/k}{n}$.

I35:e.09 Dalla osservazione della derivata della funzione arcoseno e dallo sviluppo di Maclaurin per questa funzione ottenibile dalla :e.07(2), si ottiene

$$D_X \arcsin(X) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-X^2}} \;=\; 1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}X^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}X^6 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}X^{2n} + \cdots \ .$$

Passando alla antiderivata-00 si ottiene la serie formale dell'arcoseno

$$\arcsin(X) \;=\; X + \frac{1}{2}\frac{X^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{X^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{X^7}{7} + \cdots + \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{X^{2k+1}}{2k+1} + \cdots \ .$$

I35:f. Composizione delle serie formali di potenze

I35:f.01 Consideriamo due sfp1, la prima $\mathsf{a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{a}_n X^n$ qualsiasi e la seconda, $\mathsf{b} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathsf{b}_n X^n$, di ordine maggiore o uguale ad 1. Sappiamo che la successione delle potenze della b $\searrow$ $\langle n \in \mathbb{N} :| \ \mathsf{b}^n \rangle$ è una successione infinitesima. Si può quindi prendere in considerazione la serie formale ottenuta dalla combinazione lineare infinita delle sue potenze intere naturali determinata dalla serie formale a

$$\mathsf{a}_0 + \mathsf{a}_1\mathsf{b} + \mathsf{a}_2\mathsf{b}^2 + \cdots + \mathsf{a}_n\mathsf{b}^n + \cdots \ .$$

Questa serie di serie formali converge ad una nuova serie formale che viene chiamata **composizione formale** e denotata $\mathsf{a}(\mathsf{b}(X))$. come sinonimo generico useremo anche il termine **composizione di due sfp1** Si osserva che dai coefficienti delle due serie che si compongono si possono ricavare mediante espressioni polinomiali i coefficienti della composizione formale.

I35:f.02 Si osserva che $\mathsf{ord}\,(\mathsf{a}(\mathsf{b}(X))) = \mathsf{ord}(\mathsf{a}) \cdot \mathsf{ord}(\mathsf{b})$; ad esempio se $\mathsf{a} = a_2X^2 + a_3X^3 + \cdots$ e $\mathsf{b} = b_3X^3 + b_4X^4 + \cdots$, si ha $\mathsf{a}(\mathsf{b}(X)) = a_2{b_3}^2X^6 + \cdots$.

$$\ln(1+\sin(X)) \;=\; \sin(X) - \frac{\sin^2(X)}{2} + \frac{\sin^3(X)}{3} - \cdots \;=\; x - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \cdots$$

$$\exp(\exp(X)-1) \;=\; 1 + X + X^2 + \frac{5}{6}X^3 + \frac{5}{8}X^4 + \cdots$$

I35:f.03 La composizione delle serie formali è un'operazione binaria parziale bilineare che fornisce un'altra struttura algebrica per le serie formali. Se ci si limita alle sfp1 di ordine maggiore o uguale ad 1 la composizione si può definire per ogni coppia di sfp1 e si ottiene una struttura di anello. Questo prodotto viene detto anche **prodotto -c**. Mentre lo zero di questo anello è la serie nulla, l'unità è la serie x, corrispondente alla successione $\langle 0, 1, 0, 0, ...\rangle$.

È di grande interesse stabilire se una sfp1 di ordine 1 a è dotata di una sfp1 che costituisce la sua inversa per il prodotto -c, serie che denotiamo con a^{-1_c} cioè le serie tali che $\mathsf{a}\left(\mathsf{a}^{-1_c}\right)$. Questa serie viene detta **serie inversa composizionale** o con termine sincopato, **serie inversa -c**.

I35:f.04 Vale la regola della derivazione di una composizione di sfp1:

$$D_X(\mathsf{a}(\mathsf{b})) = (D_X\mathsf{a})(\mathsf{b}) \cdot D_X(\mathsf{b}) \ .$$

I35:g. Altri esempi di serie formali di potenze

I35:g.01 Molte interessanti serie formali di potenze si ottengono mediante manipolazioni piuttosto semplici di serie elementari introdotte in precedenza.

$$\exp(-X^2) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{X^{2k}}{k!}$$

$$\frac{\sin X}{X} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k+1)k!}$$

Passando alle antiderivate si hanno le seguenti sfp1

$$\int_0^X dT\ \exp(-T^2) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

$$\int_0^X dT\ \frac{\sin T}{T} \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

I35:g.02 Altre serie sono le corrispondenti di serie di funzioni inverse -c di funzioni trigonometriche e di funzioni iperboliche.

Serie dell'arcoseno

$$\arcsin(X) \ := \ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(2k)!}{(2k)!!(2k+1)}X^{2k+1}$$

Serie dell'arcotangente

$$\arctan(X) \ := \ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}X^{2k+1}$$

Serie dell'area di seno iperbolico

$$\operatorname{arsinh}(X) \ := \ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{(2k)!!(2k+1)}X^{2k+1}$$

Serie dell'area di tangente iperbolica

$$\operatorname{artanh}(X) \ := \ \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}X^{2k+1}$$

I35:g.03 Introduciamo la seguente **serie di Bell**

$$\frac{X}{\exp(X)-1} \;=:\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{Bell}_n}{n!} X^n \ ,$$

dove per ogni $n \in \mathbb{N}$ il valore denotato con Bell_n viene detto n-esimo **numero di Bell**. Sviluppando questa definizione per questi numeri si trovano molte notevoli proprietà.

Diamo altri due esempi di serie speciali

Serie di Bessel

$$J_0(X) \;:=\; \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{((2k)!!)^2}$$

Serie di Lambert

$$W_0(X) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} X^n$$

I35:g.04 Molte serie formali speciali si ottengono come casi particolari di una famiglia di serie dipendenti da due gruppi di parametri.

Se a, b, e c sono numeri complessi non nulli e non negativi, si dice **serie ipergeometrica di Gauss** relativa ai parametri a, b e c la sfp1b

$${}_2F_1(a,b;c;X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{\overline{n}} b^{\overline{n}}}{n! c^{\overline{n}}} X^n$$

Alcune funzioni ipergeometriche speciali sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\log(1+X) \;&=\; X \cdot {}_2F_1(1,1;2;-X) \ ; \\
\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+X}{1-X}\right) \;&=\; X \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};X^2\right) \ ; \\
\arcsin(X) \;&=\; X \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};X^2\right) \ ; \\
\arccos(X) \;&=\; X \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-X^2\right) \ .
\end{aligned}$$

Vi sono inoltre i seguenti polinomi speciali:

Polinomi di Jacobi

$$Pjcb_n^{(\alpha,\beta)}(X) \;:=\; \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_2F_1\left(-n, 1+\alpha+\beta+n; \alpha+1; \frac{1-X}{2}\right) \ .$$

Polinomi di Gegenbauer

$$\mathsf{C}\mathrm{ggb}_n^{(\alpha)}(X) \;:=\; \frac{(2\alpha)^{\overline{n}}}{n!}\, {}_2F_1\left(-n, 2\alpha+n; \alpha+\frac{1}{2}; \frac{1-X}{2}\right) \ .$$

Polinomi di Legendre

$$Plgdr_n(X) \;:=\; {}_2F_1\left(-n, n+1, 1; \frac{1-X}{2}\right) = C_n^{(1/2)}(X) \ .$$

Polinomi di Chebyshev di prima e seconda specie

$$Tchb_n(X) \;:=\; {}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-X}{2}\right) = C_n^{(0)}(X) \ ;$$

$$Uchb_n(X) \;:=\; (n+1)\; {}_2F_1\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1-X}{2}\right) = (n+1)\; C_n^{(1)}(X) \;.$$

I35:g.05 Si dice **serie ipergeometrica confluente** o **serie di Kummer** relativa ai parametri a e c la sfp1b

$${}_1F_1(a;c;X) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{\overline{n}}}{n!c^{\overline{n}}} X^n$$

Alcune funzioni ipergeometriche confluenti speciali sono le seguenti:

$$\mathrm{erf}(X) \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X dT \exp(-T^2) \;=\; \frac{2X}{\sqrt{\pi}}\; {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -X^2\right) \;;$$

Vi sono inoltre i seguenti polinomi speciali:

Polinomi associati di Laguerre

$$L_n^\alpha(X) \;:=\; \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\; {}_1F_1(-n; \alpha+1; X) \;.$$

Polinomi di Laguerre

$$L_n \;:=\; L_n^0 \;=\; \frac{1_n}{n!}\; {}_1F_1(-n; 1; X) \;.$$

Polinomi di Hermite

$$\mathsf{Hrmt}_{2k}(X) \;:=\; (-2)^k (2k-1)!!\; {}_1F_1\left(-k; \frac{1}{2}; X^2\right) \;=\; (-4)^k k! L_k^{(-1/2)}(X^2) \;;$$

$$\mathsf{Hrmt}_{2k+1}(X) \;:=\; (-1)^k 2^{k+1} (2k+1)!! X\; {}_1F_1\left(-k; \frac{3}{2}; X^2\right) \;=\; (-4)^k k! X L_k^{(1/2)}(X^2) \;;$$

I35:g.06 Le serie precedenti fanno parte di sottofamiglie della estesa famiglia delle **serie ipergeometriche**. Queste sono serie che dipendono primariamente da due interi naturali p e q e da due insiemi di parametri complessi, risp., di p e q elementi. Denotiamo i parametri del primo insieme con a_1, a_2, ..., a_p ed i parametri del secondo con b_1, b_2, ..., b_p. Definiamo quindi come serie ipergeometrica caratterizzata dai suddetti parametri come

$${}_pF_q(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; X) \;:=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{a_1}^{\overline{n}} {a_2}^{\overline{n}} \ldots {a_p}^{\overline{n}}}{{b_1}^{\overline{n}} {b_2}^{\overline{n}} \ldots {b_q}^{\overline{n}}} \frac{z^n}{n!}$$

Semplici serie ipergeometriche, diverse da quelle già incontrate, sono le seguenti

$$\exp(X) =_0 F_0(;;X) \qquad , \qquad (1-X)^k =_1 F_0(-k;;X)$$

$$\cosh(X) =_0 F_1\left(;\frac{1}{2};\frac{X^2}{4}\right) \qquad , \qquad \sinh(X) = X\; {}_0F_1\left(;\frac{3}{2};\frac{X^2}{4}\right)$$

$$\mathrm{artanh}(X) \;=\; X\; {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1; 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; X^2\right) \;=\; X\; {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; X^2\right)$$

Osserviamo esplicitamente che permutando i parametri di ciascuno dei due gruppi non cambia la serie.

I35:g.07 Delle serie ipergeometriche sono state studiate proficuamente anche molte generalizzazioni (v. [[Basic hypergeometric series]], [[Elliptic hypergeometric series]].

I35:h. Serie formali di potenze di più variabili

I35:h.01 Le serie formali di potenze in una variabile si generalizzano in modo diretto nelle serie formali di potenze in più variabili, espressioni che consentono di individuare e controllare le successioni a più indici e che costituiscono generalizzazioni dei polinomi formali in più variabili.

Cominciamo definendo **serie di potenze in due variabili formali** X e Y sull'anello commutativo $\boldsymbol{R}$ **nella forma base** le espressioni della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p} X^n Y^p$$

nella quale ogni $A_{n,p}$ denota un'espressione o un algoritmo in grado di fornire un elemento (costruibile) dell'anello che in genere denotiamo con $a_{n,p}$. Si intende che la coppia degli indici n e p può essere sostituita da una qualsiasi altra coppia di lettere. Denotiamo con **Sfp2b** il loro insieme.
Diciamo poi successione doppia ordinariamente generata dalla precedente serie la matrice di profilo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\lceil n, p \in \mathbb{N} \not\mid\!\!\rangle\ a_{n,p} \rceil$ di profilo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con entrate in R. È naturale estendere la definizione della funzione *ogenseq* ponendo

$$\mathit{ogenseq}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p} X^n Y^p\right) \ :=\ \lceil n, p \in \mathbb{N} \not\mid\!\!\rangle\ a_{n,p} \rceil$$

e la sua relazione inversa **Ogf**. Diciamo più genericamente **serie di potenze in due variabili formali** X e Y ogni espressione riconducibile alle precedenti e denotiamo con
Definiamo come dn funzioni generatrici in due variabili le classi di equivalenza canoniche della funzione *ogenseq* e denotiamo con **FunGen2** il loro insieme e con $\boldsymbol{R}$**[[**X, Y**]]** l'insieme delle loro manifestazioni nelle variabili X e Y.
Si definisce come **supporto** di una **a** $\in$ **FunGen2**, e si denota con **Supp**(**a**), il sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie di indici interi naturali per le quali $a_{n,p} \neq 0$. I polinomi formali di due variabili, chiaramente, sono tutte e sole le funzioni generatrici in due variabili aventi supporto finito.

I35:h.02 Sopra **FunGen2**, servendosi delle serie formali nella forma base, si definiscono in modo prevedibile la combinazione $\boldsymbol{R}$-lineare termine a termine (ovvero la somma termine a termine e la moltiplicazione termine a termine per un elemento di R) ed il prodotto di Cauchy.
Se $\alpha, \beta \in R$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p} X^n Y^p$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} B_{n,p} X^n Y^p \in$ **FunGen2** si definiscono la combinazione lineare

$$\alpha \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p} X^n Y^p \ +\ \beta \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} B_{n,p} X^n Y^p \ :=\ \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\alpha \cdot A_{n,p} + \beta \cdot B_{n,p}\right) X^n Y^p \ ;$$

e il prodotto di Cauchy

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} A_{n,p} X^n Y^p \cdot \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{r=0}^{+\infty} B_{q,r} X^q Y^r \ :=\ \sum_{s=0}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s}\sum_{p=0}^{t} A_{n,p} B_{s-n,t-p}\right) X^s Y^t \ .$$

Si vede facilmente che queste operazioni fanno di **FunGen2** un'algebra su R.

Su **FunGen2** si può definire una topologia che costituisce un arricchimento di quella introdotta per **FunGen1** in modo da ottenere l'algebra topologica delle funzioni generatrici di due variabili.

I35:h.03 In modo stretamente simile si possono definire le serie formali di potenze e le funzioni generatrici in tre e più variabili. Le definizioni per un numero generico d di variabili saranno riprese più avanti, in quanto richiedono alcune precisazioni notazionali. Per le tre variabili diamo per definite notazioni come **Sfp3b**, $Sfptr$ e **FunGen3**. e le estensioni delle funzioni *ogenseq* e **Ogf**.

Esempi di funzioni generatrici su due variabili di evidente utilità si ottengono da sfp1 sostituendo la variabile formale con qualche semplice espressione di due variabili formali. Elaborando queste entità formali si ritrovano molte formule dell'analisi e della trigonometria, ma con una portata più ampia

$$\exp(X+Y) \;=\; 1+X+Y+\frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2)+\cdots+\frac{1}{s!}\sum_{n=0}^{s}\binom{s}{n}X^nY^{s-n}+\cdots \;=\; \exp(X)\exp(Y)\ ,$$

$$\sin(X+Y) \;=\; X+Y-\frac{1}{3!}(X^3+3X^2y+3XY^2+Y^3)+\cdots \;=\; \sin(X)\cos(Y)-\cos(X)\cos(Y)\ .$$

Sviluppi analoghi si possono effettuare con funzioni generatrici su tre e più variabili formali per giungere ad identità nelle quali compaiono vari parametri.

I35:h.04 La generica serie formale di potenze di due variabili da cui si è partiti si può riscrivere in due modi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}A_{n,p}X^nY^p=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}A_{n,p}Y^p\right)X^n=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}A_{n,p}X^n\right)Y^p\ .$$

Le due nuove espressioni mostrano, risp., che ogni spf2 nelle variabili X e Y si può anche considerare come spf1 nella variabile X sull'anello commutativo delle serie di $\boldsymbol{R}[[Y]]]$ e come spf1 nella variabile Y sull'anello commutativo delle serie di $\boldsymbol{R}[[X]]]$. Dalle definizioni delle combinazioni lineari e del prodotto di Cauchy in :h.02 si deduce facilmente che queste tre algebre su anelli sono isomorfe: questo fatto si può esprimere scrivendo

$$\boldsymbol{R}[[X,Y]] \;\longleftrightarrow_{alg}\; (\boldsymbol{R}[[Y]])[[X]] \;\longleftrightarrow_{alg}\; (\boldsymbol{R}[[X]])[[Y]]\ .$$

Grande importanza rivestono le funzioni generatrici di successioni di polinomi come quelle che seguono.

Funzione generatrice dei polinomi di Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1+T^2-2TX}}=\sum_{n=0}^{+\infty}T^nP_n(X) \quad \text{ove} \quad P_n(X):=\frac{1}{(2n)!!}{D_X}^n\left[(X^2-1)^n\right]\ ;$$

Funzione generatrice dei polinomi di Laguerre

$$\frac{1}{1-T}\exp\left(-\frac{XT}{1-T}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}T^nL_n(X) \quad \text{ove} \quad L_n(X):=\frac{\exp(X)}{n!}{D_X}^n\left[X^n\exp(-X)\right)\ ;$$

Funzione generatrice dei polinomi di Hermite

$$\exp(2XT-T^2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathsf{Hrmt}_n(X)\frac{T^n}{n!} \quad \text{ove} \quad \mathsf{Hrmt}_n(X):=(-1)^n\exp(X^2){D_X}^n\left[\exp(-X^2)\right]\ ;$$

I35:h.05 In generale si possono considerare serie formali su un numero intero positivo arbitrario di variabili.

Consideriamo un intero $d\in[2:+\infty)$ e l'insieme delle funzioni costruibili $\{\mathbb{N}^{\times d}\longmapsto_{\mathsf{C}} R\}$, funzioni chiamate anche successioni a d indici.

Su tale insieme si definiscono la somma termine a termine ed il prodotto di Cauchy.

Munendo **Sfpd** di queste operazioni e della combinazione $\boldsymbol{R}$-lineare si ottiene un'algebra chiamata **algebra delle serie formali di potenze di d variabili**.

I35:h.06 Limitiamoci a segnalare che vengono studiate proficuamente anche serie formali in una successione di variabili formali X_1, X_2, ..., X_ν, ...

I35:i. Serie formali di Laurent e serie formali di grado superiore limitato

I35:i.01 In molte considerazioni sulle sfp risulta utile servirsi di potenze negative, come accade nell'analisi, in particolare nello studio delle funzioni di variabile complessa. Una situazione del genere si è incontrata in :d.02: non potendosi considerare tra le sfp1 la $\dfrac{1}{X}$ e la $\dfrac{1-X-X^2}{X}$ si è giunti ad individuare l'inversa della serie di Fibonacci facendo riferimento ad una modifica della definizione di serie inversa, non alla più significativa $\dfrac{1-X-X^2}{X} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} F_n X^n = \mathbf{1}$.

I35:i.02 Consideriamo le successioni bilatere costruibili di elementi dell'anello commutativo R, cioè funzioni del genere $\{\mathbb{Z} \longmapsto_{\mathsf{C}} R\}$. Questo insieme munito della combinazione R-lineare costituisce uno spazio vettoriale su R. Si dice **serie bilatera di potenze formali in forma base** nella variabile $X \in$ **Varf** un'espressione della forma $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n X^N$ dove ciascuno degli A_n denota un'espressione o un algoritmo che fornisce un elemento $a_n \in R$. Come sinonimo del termine "serie bilatera" useremo anche il termine "serie -Z". Similmente a quanto fatto per le sfp1, per le serie -Z formali di potenze possiamo introdurre le notazioni **SZfp1b** e szponb, introdurre le più generali **serie -Z formali di potenze**, la sigla **sZfp1** che abbrevia tale termine, le notazioni **SZfp1** e sZfpon, la generazione ordinaria di sequenze bilatere, estendere la funzione *ogenseq*, introdurre le funzioni -Z generatrici, cioè le classi di equivalenza di sZfp1 e la relazione **Ogf**, estendere la funzione supporto alle funzioni -Z generatrici. Le operazioni di somma termine a termine e la moltiplicazione termine a termine per un valore di R fanno di **SZfp1** uno spazio vettoriale su $\boldsymbol{R}$.

Si pone il problema di introdurre per queste serie di potenze o per una parte di esse un prodotto alla Cauchy tra suoi elementi per ottenere un'algebra su R che estenda l'algebra delle sfp1 e che consenta di individuare procedimenti costruttivi di portata paragonabile a quelli che si trovano per le sfp1.
Una estensione del prodotto di Cauchy a tutte le sZfp1 non è possibile, in quanto richiede la valutazione di una serie di elementi di R e quindi introduce un problema di convergenza che vogliamo evitare, in quanto porta a distinzioni tra serie che risulta in conflitto con la caratteristica peculiare delle serie formali di potenze. In effetti un prodotto di Cauchy si può introdurre per due sottoinsiemi significativi di **SZfp1** che costituiscono due suoi spazi vettoriali.

I35:i.03 Una sZfp1 f si dice **di grado limitato inferiormente** sse il suo supporto è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato inferiormente; in tal caso il minimo di $\mathsf{Supp}(\mathsf{f})$ si dice **grado inferiore** di f e si scrive *deginf*(f); se la serie -Z non ha grado limitato inferiormente si pone *deginf*$(\mathsf{f}) = -\infty$.
Simmetricamente sZfp1 f si dice **di grado limitato superiormente** sse il suo supporto è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato superiormente; in tal caso il massimo di $\mathsf{Supp}(\mathsf{f})$ si dice **grado superiore** di f e si scrive *degsup*(f); se la serie -Z non ha grado limitato superiormente si pone *degsup*$(\mathsf{f}) = +\infty$.
Denotiamo inoltre con **SZfp1Dinf** l'insieme delle sZfp1 di grado limitato inferiormente e con **SZfp1Dsup** l'insieme delle sZfp1 di grado limitato superiormente. È chiaro che questi due sottoinsiemi di **SZfp1** costituiscono due suoi sottospazi.

Su ciascuno dei due sottospazi si può definire il prodotto di Cauchy, dato da una somma finita e quindi per il quale non si pongono problemi di convergenza. Si ottengono quindi due algebre di serie -Z formali di potenze alle quali si possono applicare varie proprietà e costruzioni viste per le sfp1.

Le serie -Z formali di potenze di grado limitato inferiormente si dicono anche **serie formali di Laurent**.
Le serie -Z che sono sia di grado limitato inferiormente che di grado limitato superiormente, cioè le serie -Z con supporto finito, si dicono **polinomi formali di Laurent**. I polinomi formali formano un sottospazio dello spazio dei polinomi di Laurent. Altro sottospazio di polinomi di Laurent è costituito dai polinomi formali aventi supporto finito costituito da interi minori o uguali a 0.
L'insieme dei polinomi di Laurent su $\boldsymbol{R}$ si denota con $\boldsymbol{R}[X, X^{-1}]$. Questa scrittura dice che questo insieme di espressioni costituisce la chiusura dell'insieme di entità simboliche $\{X, X^{-1}\}$ rispetto alle operazioni di combinazione $\boldsymbol{R}$-lineare e di prodotto di Cauchy.

I35:i.04 Due polinomi di Laurent sono

$$\mathsf{a} := 2X^{-3} + X^{-1} + 5 - 2X + 3X^2 - 5X^4 \qquad \text{e} \qquad \mathsf{b} := -3X^{-2} + X + X^2 - 4X^3 + 2X^5;$$

una loro combinazione lineare è

$$\mathsf{a} + 2\mathsf{b} = 2X^{-3} - 6X^{-2} + X^{-1} + 5 + 5X^2 - 8X^3 - 5X^4 + 4X^5 \ ,$$

mentre il loro prodotto di Cauchy è

$$-6X^{-5} - 3X^{-3} - 13X^{-2} + 8X^{-1} - 16 + 6X + 18X^2 - 19X^3 + 13X^4 - 7X^5 - 9X^6 + 26X^7 - 10X^9 \ .$$