Capitolo I29:
integrali curvilinei

Contenuti delle sezioni

21 pagine

I29:**0.01** In questo capitolo si introduce la nozione di integrale curvilineo di seconda specie.

I29:a. nozione di integrale curvilineo

I29:**a.01** Consideriamo l'intervallo $[a, b] \in$ **IntvlR** con $a < b$ e la curva Γ nello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ individuata dalle seguenti equazioni

(1) $$\mathbf{r}(t) \ = \ \big\langle \xi(t), \eta(t), \zeta(t) \big\rangle \qquad \text{per} \qquad a \leq t \leq b \ .$$

Una tale curva si dice **curva regolare a tratti** sse le funzioni $\xi(t)$, $\eta(t)$ e $\zeta(t)$ sono continue insieme alle loro derivate prime nell'intero intervallo $[a, b]$ eccettuati al più i valori di un sottoinsieme finito di $[a, b]$ $\overline{T} :=: \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, ..., \bar{t}_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ nei quali potrebbe mancare qualcuna delle derivate, ma tali per cui

(2) $$\forall t \in [a, b] \setminus \overline{T} \ \ \colon \ \ {\xi'}^2(t) + {\eta'}^2(t) + {\zeta'}^2(t) \ > \ 0 \ .$$

Osserviamo che con semplici modifiche della definizione precedente si possono definire le curve piane regolari a tratti e le curve in generici spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ regolari a tratti. Le prime si possono considerare casi particolari delle tridimensionali nelle quali una variabile, per esempio la $z(t)$ assume valore costante. La definizione in d dimensioni invece si ottiene adattando la precedente a funzioni della forma

$$\mathbf{r}(t) \ = \ \big\langle \xi_1(t), \xi_2(t), ..., \xi_d(t) \big\rangle \ ,$$

alle d funzioni-RtR $\xi_j(t)$ e alle loro derivate.

I29:**a.02** Introduciamo anche le scritture $P_{[a]} := \mathbf{r}(a)$ e $P_{[b]} := \mathbf{r}(b)$ per le due estremità della Γ.

Intendiamo ora introdurre una costruzione del genere integrale di Stjeltjes sopra le curve regolari a tratti.
A tale fine arricchiamo gli oggetti delle nostre considerazioni con due funzioni reali del punto $\mathbf{r}$ appartenente alla curva Γ $f(\mathbf{r})$ che chiediamo sia limitata, e $\phi(\mathbf{r})$; inoltre introduciamo le funzioni aventi com dominio $[a, b]$

$$F(t) \ := \ f(\mathbf{r}(t)) \qquad \text{e} \qquad \Phi(t) \ := \ \phi(\mathbf{r}(t)) \ .$$

Consideriamo poi una suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in m subintervalli

$$\big\langle t_0 := a \ < \ t_1 \ < \ t_2 \ < \ ... \ < \ t_m := b \big\rangle \ ;$$

denotiamo con $\mathbf{t}$ la $(m+1)$-upla $\langle t_0, t_1, ..., t_m\rangle$, con $\mathbf{t}_\Gamma$ la suddivisione indotta dalla $\mathbf{t}$ sulla curva, cioè la suddivisione della Γ determinata dai punti

$$P_0 := \mathbf{r}(t_0) = P_{[a]} := \mathbf{r}(a) \ , \ \ P_1 := \mathbf{r}(t_1) \ , \ \ P_2 := \mathbf{r}(t_2) \ , \ \ ..., \ \ P_m := \mathbf{r}(t_m) = P_{[b]} \ .$$

Denotiamo inoltre con con $MD(\mathbf{t})$ la massima tra le differenze d_j per $j = 1, ..., m$, mentre per gli archi corrispondenti alla suddivisione $\mathbf{t}$ scriviamo $\gamma_j \ := \ \Gamma\big|_{P_{j-1}, P_j}$ per $j = 1, 2, ..., m$.

Denotiamo con $\mathbf{D}(a, b)$ l'insieme delle suddivisioni di $[a, b]$ e con $\mathbf{D}_\Gamma$ l'insieme delle corrispondenti suddivisioni di Γ.

I29:**a.03** Per ogni $j = 1, 2, ..., m$ introduciamo le scritture

$$d_j := t_i - t_{j-1} \ , \ x_j := \xi(t_j) \ , \ y_j := \eta(t_j) \ , \ z_j := \zeta(t_j)$$

(in modo che si possa scrivere $P_j = \langle x_j, y_j, z_j\rangle$) ,

$$\Delta_j\, \phi := \phi(P_j) - \phi(P_{j-1}) \ \ , \ \ f_j^{[i]} := \inf\{P \in \gamma_j :| \ (f(P)\} \ \ , \ \ f_j^{[s]} := \sup\{P \in \gamma_j :| \ (f(P)\} \ \ ,$$

e le m-uple $\vec{f} \ := \ \langle f_1, ..., f_m\rangle$ con $\forall j = 1, ..., m \ \colon \ f_j^{[i]} \leq f_j \leq f_j^{[s]}$.

Definiamo inoltre le costruzioni

$$S^{[i]} := \sum_{j=1}^{m} f_j^{[i]}\, \Delta_j\, \phi \qquad , \qquad S^{[\vec{f}]} := \sum_{j=1}^{m} f_j\, \Delta_j\, \phi \qquad , \qquad S^{[s]} := \sum_{j=1}^{m} f_j^{[s]}\, \Delta_j\, \phi$$

Evidentemente valgono le disuguaglianze $S^{[i]} \le S^{[\vec{f}]} \le S^{[s]}$.

Ricordiamo anche che date due suddivisioni di $[a,b]$ si trova una suddivisione più fine di entrambe e che riducendo progressivamente la massima ampiezza dei sottointervalli $MD(\mathbf{t})$ si ottengono suddivisioni sempre più fini di $(a,b]$.

Inoltre prendendo in considerazione suddivisioni via via più fini la differenza $S^{[s]} - S^{[i]}$, cioè l'intervallo di variabilità delle costruzioni $S^{[\vec{f}]}$ presenta valori noncrescenti.

I29:**a.04** È dunque pienamente sensato chiedersi se esiste il limite per $MD(\mathbf{t})$ tendente a zero della espressione $S^{[\vec{f}]}$.

Se tale limite esiste viene detto **integrale curvilineo** sulla curva Γ di $f\,\mathrm{d}\phi$ e viene denotato con la scrittura $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi$. Possiamo quindi scrivere

$$(1) \qquad \int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;:=_{i\exists}\; \lim_{MD(\mathbf{t})\to 0} \sum_{j=1}^{m} f_j\, \Delta_j\, \phi \ .$$

Questo si può esprimere dicendo che esiste un reale $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi$ tale che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipip) si può determinare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che per ogni suddivisione $\mathbf{t}$ di $[a,b]$ con $MD(\mathbf{t}) < \delta$ si abbia $|\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi - \sum_{j=1}^{m} f_j\, \Delta_j\, \phi < \epsilon$.

Osserviamo esplicitamente che se l'arco di curva Γ si riduce all'intervallo reale $[a,b]$ e se $\phi(x) = x$ l'integrale introdotto si riduce al semplice $\int_a^b \mathrm{d}x\, f(x)$. Abbiamo quindi introdotta una generalizzazione dell'integrale di Riemann.-

I29:**a.05** Diamo ora un enunciato che, servendosi delle notazioni precedenti, giustifica gran parte degli integrali curvilinei di uso comune.

Teorema Se esiste un campo C di $\mathbb{R}^{\times 3}$ al quale appartiene la curva Γ e nel quale le funzioni $f(\mathbf{r})$ e $\phi(\mathbf{r})$ sono continue e la $\phi(\mathbf{r})$ ammette derivate parziali del primo ordine anch'esse continue, allora esiste $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi$.

Dim.: Le funzioni $F(t) := f(\mathbf{r}(t))$ e $\Phi(t) := \phi(\mathbf{r}(t))$, per le ipotesi, sono funzioni continue della t variabile in $(a,b]$.
La $\Phi(t)$ possiede la derivata rispetto a t:

$$(1) \qquad \Phi'(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}\phi\, \xi'(t) + \frac{\partial}{\partial y}\phi\, \eta'(t) + \frac{\partial}{\partial z}\phi\, \zeta'(t) \ .$$

Per il teorema degli accrescimenti finiti

$$(2) \qquad \forall j = 1,2,...,m \;\; \vdots \;\; \Delta_j\, \phi \;=\; \Phi'(\bar{t}_j)\,(t_j - t_{j-1}) \;=\; \Phi'(\bar{t}_j)\,\tau_j \ ,$$

per opportuni $\bar{t}_i \in (t_{j-1}, t_j]$ e avendo posto $\tau_j := t_j - t_{j-1}$.
Introduciamo le scritture $\overline{P}_j := \langle \xi(\bar{t}_j), \eta(\bar{t}_j), \zeta(\bar{t}_j)\rangle$ e $\overline{F}_j := F(\bar{t}_j) = f(\overline{P}_j)$ e otteniamo

$$(3) \qquad \begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j\, \Delta_j\, \phi \;&=\; \sum_{j=1}^{m} \overline{F}_j\, \Phi'(\bar{t}_j)\,\tau_j + \sum_{j=1}^{m} [(f_j - \overline{F}_j]\, \Phi'(\bar{t}_j)\,\tau_j \\ &=\; \sum_{j=1}^{m} F(\bar{t}_j)\, \Phi'(\bar{t}_j)\,\tau_j + \sum_{j=1}^{m} [(f_j - \overline{f}_j]\, \Phi'(\bar{t}_j)\,\tau_j \end{aligned} \ .$$

Il primo addendo trovato con una opportuna suddivisione di $[a,b]$ differisce da $\int_a^b \mathrm{d}t\, F(t)\,\Phi'(t)$ meno di un numero positivo prefissato.
In altre parole, scelto un arbitrario $\dfrac{\epsilon}{2} \in \mathbb{R}_+$, si trova un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che ogni suddivisione di $[a,b]$ con $MD < \delta$ implica

$$\left| \int_a^b \mathrm{d}t\, F(t)\,\Phi'(t) \;-\; \sum_{j=1}^{m} F(\bar{t}_j)\,\Phi'(\bar{t}_j\,\tau_j) \right| < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Per le suddette suddivisioni possiamo supporre sia

$$\left| \sum_{j=1}^{m} [(f_j - \overline{f}_j]\,\Phi'(\bar{t}_j)\,\tau_j \right| < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Infatti, denotato con M il massimo della funzione $|\Phi(t)|$ continua in $[a,b]$, si può determinare un $\eta \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni suddivisione D di $[a,b]$ per la quale $maxwid(\mathsf{D}) < \eta$ le ampiezze τ_j si abbia

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_j\,\omega_j \;<\; \frac{\epsilon}{2M} \ ,$$

dove ω_j denota la oscillazione della $F(t)$ nel subintervallo j-esimo.

Dato che $|f_j - \overline{f}_j| \le \omega_j$ si ha

$$\left| \sum_{j=1}^{n} (f_j - \overline{f}_j)\tau_j \right| \le M \left| \sum_{j=1}^{n} \tau_j\,\omega_j \right| \le M\,\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Questa, la (5) e la (4) implicano che per qualunque suddivisione di $[a,b]$ con massima ampiezza dei subintervalli inferiore sia ad ϵche a η si ha

$$\left| \int_a^b F(t)\,\Phi'(t)\,\mathrm{d}t \;-\; \sum_{j=1}^{n} f_j\,\Delta_i\phi \right| < \epsilon \ ▮$$

I29:**a.06** Dalle considerazioni per la dimostrazione precedente si ha che nelle ipotesi enunciate per le funzioni f e ϕ si ha

$$(1) \qquad \int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;=\; \int_a^b \mathrm{d}t\, f[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]\,\frac{\mathrm{d}\phi[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]}{\mathrm{d}t} \ .$$

Conviene ricordare che questa formula vale quando f e ϕ sono funzioni continue di P variabile in Γ e $\Phi(t) := \phi[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]$ ammette derivata rispetto a t continua. Essa consente di esprimere l'integrale curvilineo mediante un integrale di funzione-RtR e questa possibilità giustifica l'uso del sostantivo "integrale" per il nome dato a $\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi$. In effetti possiamo scrivere

$$\mathrm{d}\Phi \;=\; \frac{\mathrm{d}\phi[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \ .$$

Nel seguito assumeremo prevalentemente le suddette ipotesi di continuità delle funzioni f, ϕ, $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi$, $\dfrac{\partial}{\partial y}\phi$ e $\dfrac{\partial}{\partial z}\phi$ in una regione contenente Γ.

Dalla (1), tenendo presente la a05(1), si ottiene la più esplicita

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;=\; & \int_a^b \mathrm{d}t\, f[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]\,\frac{\partial}{\partial x}\phi\,\xi'(t) \\ & + \int_a^b \mathrm{d}t\, f[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]\,\frac{\partial}{\partial y}\phi\,\eta'(t) + \int_a^b \mathrm{d}t\, f[\xi(t),\eta(t),\zeta(t)]\,\frac{\partial}{\partial z}\phi\,\zeta'(t)\end{aligned} \;.$$

I tre addendi dell'espressione trovata si possono considerare tre integrali curvilinei estesi alla curva Γ, come si chiarisce con la seguente riscrittura

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;=\; \int_\Gamma \mathrm{d}x\, f\,\frac{\partial}{\partial x}\phi + \int_\Gamma \mathrm{d}y\; f\,\frac{\partial}{\partial y}\phi + \int_\Gamma \mathrm{d}z\; f\,\frac{\partial}{\partial z}\phi \;.$$

Segnaliamo che gli integrali curvilinei spesso vengono riferiti non a una curva (qui la Γ), ma, dando la curva per sottintesa, ai suoi estremi (qui $P_{[a]}$ e $P_{[b]}$ introdotti in a03].

I29:**a.07** Consideriamo l'esempio nel quale Γ è l'arco dell'elica che proiettata su un piano ortogonale al suo asse Oz fornisce una circonferenza di raggio R. Più precisamente consideriamo la curva

$$x = R\cos t \qquad , \qquad y = R\sin t \qquad , \qquad z = \alpha\, t \qquad \text{per } t \in \Big[0, \frac{\pi}{2}\Big]$$

e le funzioni $f(P) = x^2$, $\phi(P) = x + y + z$.
Dato che $\dfrac{\partial}{\partial x}\phi = \dfrac{\partial}{\partial y}\phi = dpaz\phi = 1$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;&=\; \int_\Gamma f\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma f\,\mathrm{d}y + \int_\Gamma f\,\mathrm{d}z \\ &=\; \int_R^0 \mathrm{d}x\, x^2 + \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\, R^2\cos^2 t\, R\cos t + \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\, R^2\cos^2\,\alpha\, t \\ &=\; \left[\frac{x^3}{3}\right]_R^0 + R^3\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\cos^3 t + \alpha\, R^2\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\,\cos^2 t \\ &=\; -\frac{r^3}{3} + R^3\,\frac{2!!}{3!!} + \alpha\, R^2\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{R^2}{12}\,[4\,R + 3\,\alpha\,\pi] \;.\end{aligned}$$

I29:**a.08** Se come parametro t si adotta la lunghezza s dell'arco di curva a partire da un certo punto al quale si è dato il ruolo di punto iniziale e si assume che in corrispondenza degli estremi $P_{[a]}$ e $P_{[b]}$ si abbia, risp., $s = a$ ed $S = b$, dalla a06(1) si ricava

$$\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;=\; \int_a^b \mathrm{d}s\;\; f[\xi(s),\eta(s),\zeta(s)]\;\frac{\mathrm{d}\phi[\xi(s),\eta(s),\zeta(s)]}{\mathrm{d}s} \;.$$

I29:**a.09** Dato che, sotto le condizioni di derivabilità suddette, gli integrali curvilinei si riducono a integrali ordinari, è ragionevole aspettarsi che per essi valgano proprietà derivate dalle proprietà degli integrali ordinari.

(1) Prop.: Se si inverte il senso di percorrenza della curva l'integrale curvilineo cambia di segno:

$$\int_{\ominus\Gamma} f\,\mathrm{d}\phi \;=\; -\int_\Gamma f\,\mathrm{d}\phi \;\blacksquare$$

(2) Prop.: Se si bipartisce la curva Γ sulla quale si effettua l'integrazione si ha l'additività dell'operatore di integrazione curvilinea; supposto che l'estremità finale della curva Γ_1 coincida con l'estremità iniziale delle Γ_2:

$$\int_{\Gamma_1\oplus\Gamma_2} f\,\mathrm{d}\phi \;=\; \int_{\Gamma_1} f\,\mathrm{d}\phi + \int_{\Gamma_2} f\,\mathrm{d}\phi \;.$$

Dim.: l'operazione di passaggio al limite dell'integrale complessivo può ridursi a prendere in esame le sole suddivisioni che toccano il punto di collegamento delle curve parziali ▮

(3) Prop.: L'operatore di integrazione curvilinea è lineare nella funzione integranda:

$$f(P) = \alpha_1 f_1(P) + \alpha_2 f_2(P) \implies \int_\Gamma f \, \mathrm{d}\phi = \alpha_1 \int_\Gamma f_1 \, \mathrm{d}\phi + \alpha_2 \int_\Gamma f_2 \, \mathrm{d}\phi \ \blacksquare$$

(4) Prop.: Se la funzione $\Phi(t) := f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]$ è monotona rispetto ai valori della variabile t ai quali corrisponde la Γ, in conseguenza del teorema della media, per qualche $\overline{f}$ compreso tra estremo inferiore ed estremo superiore della $f(P)$ si ha:

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}\phi = \int_a^b \mathrm{d}t \, f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \, \Phi'(t) = \overline{f} \int_a^b \mathrm{d}t \, \Phi'(t) = \overline{f} \, [\phi(P_{[b]}) - \phi(P_{[a]}] \ \blacksquare$$

I29:**a.10** Quando non solo la funzione f, ma anche la funzione ϕ soddisfa le condizioni di derivabilità e continuità, hanno senso sia l'integrale $\int_\Gamma f \, \mathrm{d}\phi$ che $\int_\Gamma \phi \, \mathrm{d}f$. In queste condizioni si può estendere l'operazione di integrazione per parti.

(5) Prop.: Se nella regione C sono continue le due funzioni $f(P)$ e $\phi(P)$ insieme alle derivate parziali $\frac{\partial}{\partial x}\phi$, $\frac{\partial}{\partial y}\phi$, $\frac{\partial}{\partial z}\phi$, $\frac{\partial}{\partial x}f$, $\frac{\partial}{\partial y}f$ e $\frac{\partial}{\partial z}f$, allora vale la **formula di integrazione curvilinea per parti**

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}\phi = [f \, \phi]_{P_{[a]}}^{P_{[b]}} - \int_\Gamma \phi \, \mathrm{d}f \ .$$

Dim.: Basta esprimere il primo membro con l'integrale sulla variabile t, applicare a esso l'integrazione per parti ed esprimere sinteticamente quanto trovato:

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}\phi = [f[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \, \phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \mathrm{d}t \, \phi[\xi(t), \eta(t), \zeta(t)] \, \frac{\mathrm{d}f \, [\xi(t), \eta(t), \zeta(t)]}{\mathrm{d}t} \ \blacksquare$$

Nel caso in cui Γ sia una curva chiusa, cioè quando $P_{[b]} = P_{[b]}$, abbiamo

$$[f \, \phi]_{P_{[a]}}^{P_{[b]}} = f(P_{[b]}) \, \phi(P_{[b]}) - f(P_{[a]} \, \phi(P_{[a]}) = 0 \ ;$$

Di conseguenza

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}\phi = -\int_\Gamma \phi \, \mathrm{d}f \qquad \text{ossia} \qquad \int_\Gamma \mathrm{d}\,(f \, \phi) = 0 \ .$$

I29:b. area di regione delimitata da circuiti semplici

I29:**b.01** Ricordiamo che una curva piana chiusa nonintrecciata viene detta anche **circuito piano** o **curva di Jordan**. Si abbia dunque una curva di Jordan che denotiamo con Γ definita dalle equazioni parametriche $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$ per t variabile nell'intervallo reale $[a, b]$ e quindi con $\xi(b) = \xi(a)$ ed $\eta(b) = \eta(a)$. Chiediamo inoltre che la curva abbia tangente in ciascuno dei suoi punti ovvero che per ogni t le funzioni $\xi(t)$ e $\eta(t)$ siano derivabili e sia $\xi^2(t) + \eta^2(t) > 0$. In tal caso si dice che Γ è un **circuito piano regolare**. Nel seguito spesso riteniamo implicita la specificazione "piano".

Ricordiamo anche il teorema sulle regioni interna ed esterna rispetto un circuito regolare.

(1) Teorema (**teor. di Jordan**) Consideriamo un circuito piano regolare Γ con le caratteristiche sopraddette. Esso tripartisce il piano nell'insieme dei propri punti, in una regione limitata e in una regione illimitata.

I punti della regione limitata sono detti **punti interni** al circuito, mentre i punti della regione illimitata sono detti **punti esterni** al circuito. Mentre due punti interni alla Γ si possono collegare con una curva regolare che non interseca la Γ e la stessa proprietà vale per i duetti di punti esterni, un punto interno e un punto esterno non si possono collegare nel modo suddetto.

I29:**b.02** Un circuito regolare può essere percorso nel verso positivo o antiorario sse un mobile che lo percorre lascia alla sua immediata sinistra punti interni a Γ; all'opposto, può essere percorso nel verso negativo od orario sse un mobile che lo percorre lascia alla sua immediata destra i punti interni a Γ.
Ad un circuito regolare nonorientato a se stante si attribuisce come orientazione canonica la antioraria.

Ogni retta tangente alla Γ può essere arricchita da una orientazione; di solito conviene che la tangente sia orientata in modo da avere senso di percorrenza concorde con quello dei punti della curva adiacenti al punto di tangenza. Ad ogni tangente di un circuito regolare orientato canonicamente si attribuisce come orientazione canonica quella concorde con l'orientazione canonica del circuito. Quindi la tangente orientata alla Γ in un punto P lascia alla immediata sinistra di P punti interni al circuito. con l'orientasi assegna quella normalmente viene orientata

La retta ortogonale alla tangente nel punto P si dice dn retta normale a Γ in P. Essa può essere arricchita con una orientazione canonica tale che i suoi punti immediatamente successivi a P siano interni al circuito.

Come per i circuiti in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 3 in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ alla regione interna di un circuito regolare orientato canonicamente si attribuisce area positiva, mentre si attribuisce area negativa alla regione interna di un circuito orientato nel verso orario.

Le attribuzioni precedenti si possono applicare anche ai circuiti regolari a tratti, cioè ai circuiti che possono presentare punti nei quali viene meno la derivabilità continua delle funzioni $\xi(t)$ ed $\eta(t)$.

I29:**b.03** Diciamo **multicircuito piano regolare a tratti** un sistema costituito da un certo numero $m + 1$ di circuiti regolari a tratti Γ_0, Γ_1,...,Γ_m tali che Γ_1, ... Γ_m sono contenuti nella regione interna di Γ_0, sono reciprocamente esterni (e quindi privi di punti comuni). Per questo multicircuito adottiamo la notazione $\overline{\Gamma} := \langle\Gamma_0, \Gamma_1, ..., \Gamma_m$.
Come orientazione canonica del multicircuito attribuiamo a Γ_0 l'orientazione positiva e ai circuiti restanti la negativa. Per il multicircuito canonicamente orientato adottiamo la notazione $\overrightarrow{\overline{\Gamma}}$.
Diciamo regione interna del multicircuito l'insieme dei punti interni a Γ_0 ed esterni a Γ_1, ..., Γ_m.
Al multicircuito attribuiamo come area l'area attribuita al circuito Γ_0 diminuita delle aree attribuite ai circuiti $\ominus\Gamma_j$ per $j = 1, 2, ..., m$.

Vogliamo ora estendere a un multicircuito come il precedente la costruzione di un integrale curvilineo. Consideriamo due funzioni f e ϕ le quali sono continue insieme alle derivate $\frac{\partial}{\partial x}\phi$ e $\frac{\partial}{\partial y}\phi$ in una regione C della quale fa parte Γ_0 e quindi della quale fanno parte i Γ_j. Diciamo **integrale curvilineo per multicircuito** di $f\,\mathrm{d}\phi$ su $\overrightarrow{\Gamma}$

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma}} f\,\mathrm{d}\phi \;:=\; \int_{\Gamma_0} f\,\mathrm{d}\phi \;-\; \sum_{j=1}^{m} \int_{\Gamma_j} f\,\mathrm{d}\phi \;.$$

I29: b.04 Area di regione interna di curva convessa.
Area di triangolo

I29: b.05 Area di regione interna di curva regolare a tratti.

I29: b.06 Area di regione interna di multicircuito.

I29: b.07 Area di regione interna di circuito possibilmente intrecciato e area di multicircuito generale.

I29:c. quadrature mediante integrali curvilinei

I29:**c.01** Consideriamo nel piano una circonferenza γ, un suo diametro (orizzontale) AB la cui lunghezza scriviamo $2\,r$, la retta τ tangente a γ in B, un punto C di tale tangente, la semiretta $\sigma := \overrightarrow{AC}$ e il punto D seconda intersezione di γ con σ. Individuiamo poi il punto P della σ tale che AP sia congruente on DC.
Il luogo dei punti P al variare del punto P sulla τ si dice **cissoide** di parametro r.

Per studiare questa curva ci serviamo di coordinate polari che di coordinate cartesiane. Per la coppia di coordinate polari $\langle\rho,\theta\rangle$ assumiamo A come polo e poniamo $\rho := AP$ e $\theta := \angle BAP$. Per la coppia di coordinate cartesiane $\langle x,y\rangle$ assumiamo A come origine e poniamo $\mathsf{Ox} := \overrightarrow{AB}$ e come asse verticale la retta tangente della circonferenza in A.
Si trovano facilmente le relazioni che seguono.

$$\angle DBC \;=\; \theta \quad , \quad |BD| \;=\; 2\,r\,\sin\theta \quad , \quad |CD| \;=\; 2\,r\,\sin\theta\,\tan\theta \;=\; \frac{2\,r\,\sin^2\theta}{\cos\theta} \;.$$

Quindi la cissoide è caratterizzata dall'equazione polare

$$(1) \qquad \rho \;=\; 2\,r\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \;.$$

Passando alle coordinate cartesiane abbiamo

$$(2) \qquad \rho^2\,\rho\,\cos\theta \;=\; 2\,r\,(\rho\,\sin\theta)^2 \qquad , \qquad (x^2+y^2)\,x \;=\; 2\,r\,y^2$$

e quindi la caratterizzazione mediante coordinate cartesiane

$$y^2 \;=\; \frac{x^2}{2\,r-x}$$

e la caratterizzazione parametrica

$$(3) \qquad x \;=\; 2\,r\,\frac{t^2}{1+t^2} \qquad , \qquad y \;=\; 2\,r\,\frac{t^3}{1+t^2} \;.$$

Per quest'ultima va notato che $y = t\,x$.

I29:**c.02** Le equazioni trovate e la simmetria della definizione dicono che la cissoide trovata è invariante per la riflessione $\ulcorner y \mapsto -y \urcorner$, cioè è simmetrica rispetto all'asse Ox e che la tangente τ è asintoto della curva per $\theta \to -\pi/2$ e per $\theta \to +\pi/2$.
Si osserva anche che alla cissoide appartengono anche i punti $\langle r,-r\rangle$ ed $\langle r,r\rangle$, punti corrispondenti a $\theta = \pm\,\pi/4$, ovvero a $t = \pm 1$.
Si nota che per $-\pi/4 < \theta < \pi/4$, ovvero per $-1 < t < 1$, il punto P ha ascissa inferiore al punto D ; viceversa per $|\theta| > \pi/4$ il punto P presenta ascissa superiore a quella del punto D. Accade invece che per $|tet| = \pi/4$ i due punti coincidono.

I29:**c.03** Calcoliamo l'area del triangolo curvilineo delimitato dalla curva e dal segmento verticale EF le cui estremità hanno ascissa uguale ad x e quindi ordinate uguali a $-t$ e $+t$.
Per questo conviene servirsi della formula $Area \;=\; \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Gamma \mathrm{d}t\;x^2$.
Per la nostra cissoide abbiamo

$$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{AE}\mathrm{d}t\,x^2 + \frac{1}{2}\int_{EF}\mathrm{d}t\,x^2 + \frac{1}{2}\int_{FA}\mathrm{d}t\,x^2 \;.$$

Da qui si ricava

$$Area \;=\; r^2 \left[6 \arctan t - \frac{2\,t\,(3+5\,t^2)}{(1+t^t)^2} \right] \;.$$

Per $t \to +\infty$ il secondo addendo della espressione trovata tende a 0 e si ha

$$\lim_{t\to+\infty} Area \;=\; 6\,r^2\,\frac{\pi}{2} \;=\; 3\,\pi\,r^2 \;;$$

Dunque l'area della regione illimitata compresa tra curva e la retta $x = 2\,r$ è finita e pari al triplo dell'area della cerchio che la genera.

I29:**c.04** Ricordiamo che il folium di Cartesio relativo al parametro $a \in \mathbb{R}_+$ è caratterizzato dalle equazioni parametriche

$$x \;=\; \frac{3\,a\,t}{1+t^3} \qquad , \qquad y \;=\; \frac{3\,a\,t^2}{1+t^3} \;.$$

Questa curva è simmetrica rispetto alla retta diagonale $y = x$ e presenta un cappio con nodo doppio nell'origine, punto relativo a $t = 0$ e punto diametralmente opposto in $V := \left\langle \frac{3}{2}\,a \;,\; \frac{3}{2}\,a \right\rangle$, punto relativo a $t = 1$.
Cerchiamo l'area di questo cappio. Questa area è facilmente ottenibile dall'area della regione compresa tra l'arco di folium inferiore con estremità in O e V e la sua corda costituita dal segmento OV della diagonale principale.
Lungo la corda si ha $\dfrac{y}{x} \;=\; t = 1$; quindi $\displaystyle\int_{\overrightarrow{OV}} \mathrm{d}t\,x^2 \;=\; 0$.
L'area cercata quindi è data da

$$Area \;=\; \int_0^1 \mathrm{d}t\,x^2 \;=\; 3\,a^2 \int_0^1 \mathrm{d}t\,\frac{3\,t^2}{(1+t^3)^2} \;=\; 3\,a^2 \int_0^1 \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2} \;=\; \frac{3}{2}\,a^2 \;.$$

I29:**c.05** Studiamo ora gli integrali curvilinei sopra curve piane regolari a tratti individuate da espressioni nelle coordinate polari ρ e θ. Anche queste, come le coordinate cartesiane x e y vanno considerate funzioni di un parametro t che varia in un intervallo $[a,b]$
Così come scriviamo $x = \xi(t)$ e $y = \eta(t)$, usiamo notazioni come $\rho = \mathcal{R}(t)$ e $\theta = \Theta(t)$ per distinguere le espressioni nella variabile t ($\mathcal{R}$ e Θ) dai valori che esse forniscono (ρ e θ).
Dato che $x = \rho\,\cos\theta$ e $x = \rho\,\cos\theta$, abbiamo

(1) $$\mathrm{d}x \;=\; \cos\theta\,\mathrm{d}\rho - \rho\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}y \;=\; \sin\theta\,\mathrm{d}\rho + \rho\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \;.$$

Se è opportuno porre in evidenza le funzioni e le espressioni che le individuano scriviamo invece

(2) $$\mathrm{d}\xi \;=\; \cos\Theta\,\mathrm{d}\mathcal{R} - \mathcal{R}\,\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}y \;=\; \sin\Theta\,\mathrm{d}\mathcal{R} + \mathcal{R}\,\cos\Theta\,\mathrm{d}\Theta \;.$$

Si può anche considerare che le espressioni come la (1) siano semplificazioni formali delle espressioni del tipo (2) nelle quali si confondono i valori delle coordinate dalle espressioni che consentono il calcolo.
Dalle relazioni precedenti si ottiene

(3) $$x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}x \;=\; \rho^2\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{ovvero} \qquad \xi\,\mathrm{d}\xi - \eta\,\mathrm{d}x \;=\; \mathcal{R}^2\,\mathrm{d}\Theta \;;$$

quindi per l'area della regione delimitata dal multicircuito $\overrightarrow{\Gamma}$ abbiamo l'espressione

(4) $$Area(\overrightarrow{\Gamma}) \;=\; \frac{1}{2} \int_{\overrightarrow{\Gamma}} \mathrm{d}\theta\,\mathcal{R}^2 \;.$$

I29:**c.06** Si richieda l'area di un cosiddetto **settore polare piano**, triangolo curvilineo avente come vertici A, B e C, come lati AB ed AC due segmenti rettilinei e il lato BC esprimibile come arco di curva data con una coordinata radiale. Per semplicità assumiamo che il vertice A sia l'origine O, i vertici siano forniti, risp., dalle coordinate polari $\langle\rho_B,\theta_B\rangle$ e $\langle\rho_C,\theta_C\rangle$ e che la curva $B\frown C$ sia espressa dall'equazione $\rho=\mathcal{R}(\theta)$ per $\theta\in[\theta_B,\theta_C]$. Abbiamo

$$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{OB} \mathrm{d}\theta\,\mathcal{R}(\theta)+\frac{1}{2}\int_{B\frown C} \mathrm{d}\theta\,\mathcal{R}(\theta)+\frac{1}{2}\int_{CO} \mathrm{d}\theta\,\mathcal{R}(\theta)\ .$$

Ma il primo e il terzo addendo sono integrali su regioni di area nulla (per essi $\mathrm{d}\theta=0$) e quindi

(1) $$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{\theta_b}^{\theta_c} \mathrm{d}\theta\,\mathcal{R}(\theta)\ .$$

In particolare l'area di una regione delimitata da una curva chiusa che contiene l'origine e si può esprimere con un'equazione polare $\rho=\mathcal{R}(\theta)$ per $\theta\in[0,2\,\pi]$ abbiamo

(2) $$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{0}^{2\,\pi} \mathrm{d}\theta\,\mathcal{R}(\theta)\ .$$

Si osserva che se abbiamo una curva esprimibile da un'equazione in coordinate polari $\rho=\mathcal{R}(\theta)$ per θ che corre in un intervallo più ampio di $\langle 0,2\,\pi\rangle$ l'integrale della forma precedente fornisce l'area di una figura con porzioni calcolate più volte, tante quante volte il raggio vettore che va dal polo alla curva le ha ricoperte.

Si osserva anche che la espressione (1) si può ottenere come limite delle somme di triangolini delimitati da due lati di lunghezza $\overline{\rho}$ e $\overline{\rho}+\mathrm{d}\rho$ e da un arco di lunghezza $\rho\,\mathrm{d}\theta$ e quindi avente area data, a meno di infinitesimi superiori a $\mathrm{d}\theta$, pari a $\frac{1}{2}Rcl\,\mathcal{R}\,\mathrm{d}\theta$.

I29:**c.07** Si consideri la dn cardioide data dall'equazione $\rho\;=\;\mathcal{R}(\theta)\;=\;2\,a\,(1+\cos\,\theta)$. Dato che

$$\mathcal{R}^2=4\,a^2\,(1+2\,\cos\theta+\cos^2\theta)=4\,a^2\left(1+2\,\cos\,\theta+\frac{1+2\,\cos\,\theta}{2}\right)=4\,a^2\left(\frac{3}{3}+2\,\cos\,\theta+\frac{1}{2}\,\cos\,2\,\theta\right)\ ,$$

abbiamo

$$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\mathrm{d}\theta\mathcal{R}^2 \;=\; 2\,a^2\,3\,\pi+4\,[\sin\,\theta]_{-\pi}^{+\pi}+\frac{1}{2}\,[\sin\,2\,\theta]_{-\pi}^{+\pi} \;=\; 6\,\pi\,a^2\ .$$

I29:**c.09** Si richieda l'area della lemniscata di Bernoulli,

(1) $$\mathcal{R}^2 \;=\; 2\,c^2\,\cos\,2\theta\ .$$

Abbiamo quindi

(2) $$Area \;=\; c^2\ .$$

I29:**c.08** Vogliamo ora trattare tre spirali, curve che si esprimono naturalmente mediante le coordinate polari.

La **spirale di Archimede** è data dall'equazione $\rho\;=\;a\,\theta$; Quindi l'area compresa tra la curva e il raggio vettore di anomalia θ è data da

(1) $$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\theta}\mathrm{d}\theta\,a^2\,\theta^2 \;=\; a^2\,\frac{\theta^3}{6} \;=\; \frac{1}{6}\,\rho^2\,\theta\ .$$

Si osserva che questa area vale un terzo dell'area del settore circolare di raggio ρ e di ampiezza angolare θ. L'area della prima spira si ottiene ponendo $\theta\;=\;2\,\pi$ e quindi è $\dfrac{4}{3}\,\pi^3\,a^2$.

I29:**c.10** Ricordiamo che la **spirale iperbolica** è caratterizzata dall'equazione $rho\;=\;\dfrac{a}{\theta}$, che presenta un punto asintotico nell'origine relativo a $\theta\to 0$ e che per $\theta\to 0$ tende asintoticamente all'asse Ox.

Dunque l'area del settore compreso tra i raggi vettori aventi come prima estremità l'origine e come seconda estremità il punto $\langle \rho_j, \theta_j \rangle$ per $j = 1, 2$ è data da

$$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta\, \frac{a^2}{2}\; \left[-\frac{1}{\theta}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \;=\; \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\right) \;.$$

Per $\theta_2 \to +\infty$ quest'area tende a $\frac{a^2}{2\,\theta_1}$: si tratta dell'area coperta dal raggio vettore quando la sua anomalia cresce da un valore $\theta_1 > 0$ a $+\infty$ percorrendo un numero infinito di spire che avvolgono l'origine

I29:**c.11** Dato che la **spirale logaritmica** è retta dell'equazione $\rho \;=\; \mathrm{e}^{k\,\theta}$ per $\theta \in \mathbb{R}$ e che l'origine è suo punto asintotico per $\theta \to -\infty$, l'area compresa tra i raggi vettori aventi come prima estremità l'origine e come seconda estremità il punto $\langle \rho_j, \theta_j \rangle$ per $j = 2, 1$ è fornita da

$$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{\theta_2}^{\theta_1} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{2\,k\,\theta} \;=\; \frac{1}{4\,k}\left(\mathrm{e}^{2\,k\,\theta_1} - \mathrm{e}^{2\,k\,\theta_2}\right) \;=\; \frac{1}{4\,k}\left({\rho_1}^2 - {\rho_2}^2\right) \;.$$

Si osserva che per $\theta_2 \to -\infty$ l'area tende ad $\dfrac{1}{4\,k}\,{\rho_1}^2$; questo è il valore dell'area coperta dal raggio vettore per θ che decresce da θ_1 a $-\infty$ percorrendo una sequenza infinita di spire che avvolgono sempre più strettamente l'origine.

I29:**c.12** Consideriamo una regione coperta da un segmento di lunghezza variabile retto dal parametro t per $t \in [t_A, t_D]$ il quale si muove in modo tendenzialmente regolare, cioè con le coordinate delle estremità che hanno andamento monotono, e assume per $t = t_A$ la posizione AB e per $t = t_D$ la posizione DC. Il circuito orientato positivamente Γ che delimita questa regione è costituito da $\overrightarrow{AB}$, dall'arco descritto da $\langle \xi_1(t), \eta_1(t) \rangle$ per t che varia da t_A a t_D, da $\overrightarrow{CD}$ e dall'arco descritto da $\langle \xi_2(t), \eta_2(t) \rangle$ per t che varia da t_D a t_A.

L'area delimitata da Γ è data da

$$Area \;=\; I_{AB} + I_{BC} + I_{CD} + I_{DA} \qquad \text{dove}$$

(1) $$I_{AB} \;=\; Area(\Delta(OAB)) \;=\; y_B\,x_A - y_A\,x_B \;\;,\;\; I_{BC} \;=\; \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_D} \mathrm{d}t\,\left(\xi_1\,\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}t} - \eta_1\,\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t}\right) \;\;,$$
$$I_{CD} \;=\; y_D\,x_C - y_C\,x_D \;\;,\;\; I_{DA} \;=\; \frac{1}{2}\int_{t_D}^{t_A} \mathrm{d}t\,\left(\xi_2\,\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}t} - \eta_2\,\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t}\right) \;.$$

Si osserva che

$$\int_{t_A}^{t_D} \mathrm{d}t\,\left(\xi_2\,\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}t} + \eta_1\,\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} - \xi_1\,\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}t} - \eta_2\,\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t}\right) \;=\; \int_{t_A}^{t_D} d(\xi_2\,\eta_1 - \xi_1\,\eta_2) \;=\;$$
$$x_D\,y_C - x_C\,y_D - x_A\,y_b + y_A\,x_B \;=\; -I_{AB} - ICD \;.$$

Di conseguenza

$$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_D} \mathrm{d}t\,\left(\xi_1\,\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}t} - \eta_1\,\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t} - \xi_2\,\frac{\mathrm{d}\eta_1}{\mathrm{d}t} - \eta_1\,\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}t} + \xi_1\,\frac{\mathrm{d}\eta_2}{\mathrm{d}t} + \eta_2\,\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}t}\right) \;.$$

ossia abbiamo la cosiddetta **formula di quadratura di regione piana tracciata da segmento**.

(2) $$Area \;=\; \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_D} \mathrm{d}t\,\left[(\xi_1 - \xi_2)\,\frac{d(\eta_1 + \eta_2)}{\mathrm{d}t} - (\eta_1 - \eta_2)\,\frac{d(\xi_1 + \xi_2)}{\mathrm{d}t}\right] \;.$$

Introdotti i punti mobili sui due archi $P_1(t) := \langle \xi_1(t), \eta_1(t) \rangle$ e $P_2(t) := \langle \xi_2(t), \eta_2(t) \rangle$ la formula precedente si può scrivere in forma vettoriale

$$(3) \qquad Area \ = \ \frac{1}{2} \int_{t_A}^{t_D} \mathrm{d}t \left| (P_2 - P_1) \wedge \left(\frac{dP_1}{\mathrm{d}t} + \frac{dP_2}{\mathrm{d}t} \right) \right| \ .$$

I29:d. volumi di solidi di rotazione

I29:**d.01**

$$V \;=\; \pi \int_a^b \mathrm{d}z\; r^2(z)\;.n$$

I29:**d.02**

$$V \;=\; \pi \left(\int_a^b \mathrm{d}z\; {r_2}^2(z) + \int_b^a \mathrm{d}z\, {r_1}^2(z) \right) = \pi \int_\Gamma r^2(z)\;.$$

I29:**d.03** Si consideri la cicloide nel piano Oxz data dalle equazioni parametriche

$$z \;=\; R\,(t - \sin\, t) \qquad \text{e} \qquad r \;=\; R\,(-cos\, t) \qquad \text{per } t \in [0, 2\,\pi]\;.$$

Si chiede il volume del solido generato dal trapezoide delimitato da un arco della cicloide $O^\frown A(t)$ per un dato $t \in [0, 2\,\pi]$.

I29:**d.04** Consideriamo ora solidi di rotazione generati da settori espressi mediante coordinate polari.

$$Vol \;=\; \pi \int_{\overrightarrow{OB}} \mathrm{d}t\, r^2 + \pi \int_{B^\frown A} \mathrm{d}t\, r^2 + \pi \int_{\overrightarrow{AO}} \mathrm{d}t\, r^2\;.$$

$$Vol \;=\; \frac{2}{3}\,\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta\, \rho^3\, \sin\,\theta\;.$$

I29:**d.05** Si chiede il volume *Vol* della figura tridimensionale generata dal campo piano delimitato dalla **cardioide** caratterizzata dall'equazione $\rho \;=\; 2\,a\,(1 + \cos\theta)$ mediante una rotazione di $2\,\pi$ intorno al suo asse.

$$Vol \;=\; 16\,\frac{4}{3}\,\pi\, a^2\;.$$

I29:**d.06** Si richiede il volume *Vol* della figura 3D generata da un cappio della **lemniscata** mediante una rotazione intorno al suo asse trasverso. Dato che l'equazione della lemniscata avente la distanza tra i fuochi uguale a $c\sqrt{2}$ è

$$\rho^2 \;=\; c^2\, \cos\, 2\,\theta \;=\; c^2\,(2\, \cos^2\, \theta - 1)\;,$$

il volume richiesto è dato da

$$\begin{aligned} Vol \;&=\; \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\theta\, c^3\,(2\,\cos^2\,\theta - 1)^{3/2}\, \sin\,\theta \;=\; \lfloor_{\mathsf{N}}\, u := \sqrt{2}\, \cos\,\theta\;,\; \mathrm{d}u \;=\; \sqrt{2}\, \sin\,\theta\, \mathrm{d}\theta\, \rfloor_{\mathsf{N}} \\ &=\; \frac{\sqrt{2}}{3}\,\pi\, c^3 \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}u\; (u^2 - 1)^{3/2} \end{aligned}\;.$$

L'integrale in $\mathrm{d}u$ si ottiene con due integrazioni per parti:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}u\; (u^2-1)^{3/2} \;&=\; \int \mathrm{d}u\; u^3 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} \;=\; \frac{u^4}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{4} \int \mathrm{d}u\; u \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \\ &=\; \frac{u^4}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{8}\,u^2 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{1/2} + \frac{3}{8} \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-1}} \\ &=\; \frac{u^4}{4} \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{3/2} - \frac{3}{8}\,u^2 \left(1 - \frac{1}{u^2}\right)^{1/2} + \frac{3}{8}\, \ln \left| u + \sqrt{u^2-1} \right| + \mathtt{C} \end{aligned}\;.$$

Questa formula consente di rispondere alla richiesta.

I29:**d.07** Consideriamo la **spirale logaritmica** data dall'equazione $\rho = \mathrm{e}^{k\,\theta}$ e il suo arco che ha per estremità i punti di anomalia 0 e $\overline{\theta}$ per un particolare $\overline{\theta} \in (0, \pi)$.
Si chiede il volume *Vol* della figura 3D generata dal settore delimitato dal suddetto arco e dai corrispondenti raggi vettori, settore fatto ruotare di $2\,\pi$ intorno all'asse polare orizzontale. Le considerazioni precedenti portano a

$$Vol \;=\; \frac{2}{3}\,\pi\,\int_0^{\overline{\theta}} d\theta\,\mathrm{e}^{3\,k\,\theta}\,\sin\,\theta \;=\; \frac{2}{3}\,\pi\,\left[\frac{\mathrm{e}^{2\,k\,\theta}\,(3\,k\,\sin\theta - \cos\,\theta}{9\,k^2+1}\right]_0^{\overline{\theta}} \;=\; \frac{2}{3}\,\pi\,\frac{\mathrm{e}^{2\,k\,\theta}\,(3\,k\,\sin\theta - \cos\,\theta) + 1}{9\,k^2+1}\;.$$

I29:e. integrali definiti dipendenti da un parametro

I29:**e.01** Consideriamo gli intervalli reali $\mathsf{X} := [x_1, x_2]$ e $\mathsf{Y} := [y_1, y_2]$ il rettangolo piano $\mathsf{R} := \mathsf{X} \times \mathsf{Y} = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ e la funzione $f(x, y)$ del genere $\{\mathsf{R} \longmapsto \mathbb{R}\}$ continua.
Per ogni valore $y \in \mathsf{Y} = [y_1, y_2]$ esiste l'integrale $J(y) := \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x, y)$. Questa costruzione evidentemente definisce una funzione del genere $\{\mathsf{J} \longmapsto \mathbb{R}\}$.
Simmetricamente per ogni valore $x \in \mathsf{X} = [x_1, x_2]$ esiste l'integrale $I(x) := \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y\; f(x, y)$ e anche questa costruzione definisce una funzione; essa appartiene al genere $\{\mathsf{I} \longmapsto \mathbb{R}\}$. Queste funzioni si dicono **integrali dipendenti da un parametro reale**.

La continuità della funzione $f(x, y)$ implica la continuità degli integrali dipendenti da un parametro.

(1) Prop.: Le funzioni $J(y)$ e $I(x)$ sono continue.

Dim.: ▮

I29:**e.02** Prp Se la funzione $f(x, y)$, oltre che continua, è derivabile rispetto al parametro y e se anche la funzione $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}$ è continua in R, allora $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ è integrabile e $\mathsf{I}(y)$ è derivabile rispetto alla y e vale la cosiddetta **regola di Leibniz per la derivazione sotto il segno di integrale**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x, y) \;=\; \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y) \ .$$

Dim.: Consideriamo il generico $y \in \mathsf{Y}$ e il valore variato $y + \Delta y$; chiaramente

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \ .$$

Per il teorema degli accrescimenti finiti

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y + \theta\, \Delta y) \quad \text{con} \;\; 0 < \theta < 1 \qquad \text{e quindi}$$

$$\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y) + \eta \quad \text{con} \;\; \eta \;:=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y + \theta\, \Delta y) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y) \qquad \text{e}$$

$$\frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} \;-\; \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y) \;=\; \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\; \eta \ .$$

La supposta continuità di $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y)$ in R implica che, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (ipap) esiste $\delta \in \mathbb{R}$ tale che per $|\Delta y| < \delta$ sia $|\eta| < \dfrac{\epsilon}{x_2 - x_1}$. Quindi per $\Delta y| < \delta$ si ha

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y) \;-\; \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y} \right| \;=\; \left| \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\;\, \eta \right| \;<\; \frac{\epsilon}{x_2 - x_1}\,(x_2 - x_1) \;=\; \epsilon \ .$$

Abbiamo quindi che $\displaystyle\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y + \Delta y) - I(y)}{\Delta y}$ esiste e vale $\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\;\, \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(x, y)$, cioè vale l'enunciato ▮

I29:**e.03** **Prop.** Vale la formula di derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathrm{d}x\, f(x, y) \;=\; \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \mathrm{d}x\, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \;+\; \beta'(y)\, f(\beta(y), y) - \alpha'(y)\, f(\alpha(y), y) \ .$$

Dim.: ▮

I29: e.04

I29: e.05

I29: e.06

I29: e.07

I29:f. lavoro di una forza espresso da un integrale curvilineo

I29:**f.01** Si abbia una forza espressa da un vettore costante $\vec{F}$ il cui modulo scriviamo $F := |\vec{F}|$ ed un segmento rettilineo $\overrightarrow{AB}$ la cui lunghezza denotiamo con s. Denotiamo con θ l'angolo formato dai vettori $\vec{F}$ e $\overrightarrow{AB}$ che vogliamo appartenere ad $\mathbb{R}^{\times 3}$.
Definiamo **lavoro** eseguito dalla forza $\vec{F}$ applicata ad un punto P che si sposta del segmento $\overrightarrow{AB}$ lo scalare

(1) $$F\, s\, \cos\theta \;=\; \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}\ .$$

Consideriamo la situazione più generale che vede la forza dipendere dal punto di applicazione, cioè sia data da una funzione $\vec{F}(P)$ e sia applicata al punto P che si sposta sopra una curva Γ tra le sue estremità A che denotiamo ancora, risp., con A e con B.
Alla curva Γ chiediamo che sia regolare a tratti e che sia espressa da equazioni parametriche della forma

$$x=\xi(t)\quad,\quad y\;=\;\eta(t)\quad,\quad z\;=\;\zeta(t)\quad \text{per}\quad t\in[a,b]\ .$$

Scriviamo poi $P(t) := \langle\xi(t),\eta(t),\zeta(t)\rangle$ ed $\eta(P(t)) \;:=\; \angle(\vec{F}(P), tang_\Gamma(P))$; osserviamo anche che $P(a)=A$ e $P(b)=B$.

La curva Γ è rettificabile.

$$\mathcal{L} \;=\; \int_\Gamma \mathrm{d}s\ F(P)\,\cos\theta(P)\ .$$

I29:**f.02** Consideriamo le tre componenti cartesiane di $\vec{F}$, F_x, F_y ed F_z.

(1) $$\mathcal{L} \;=\; \int_\Gamma \mathrm{d}s\,\left(F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+F_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) \;=\; \int_\Gamma \mathrm{d}s\,(F_x\,\mathrm{d}x\,+F_y\,\mathrm{d}y\,+F_z\,\mathrm{d}z\,)\ .$$

Abbiamo inoltre l'equivalente espressione vettoriale

(2) $$\mathcal{L} \;=\; \int_\Gamma \vec{F}\cdot dP \qquad \text{per} \qquad dP := \langle\mathrm{d}x\,,\mathrm{d}y\,,\mathrm{d}z\,\rangle\ .$$

Le formule precedenti esprimono il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}(P)$ che dipende solo dal punto in cui viene applicata quando tale punto percorre un dato arco.

I29:**f.03** Consideriamo un campo di forze $\vec{F}(P)=\langle F_x,F_y,F_z\rangle$ definito per tutti i punti di una regione tridimensionale connessa R, cioè in una $\mathsf{R}\subseteq\mathbb{R}^{\times 3}$ tale che per ogni duetto $\{A,B\}$ di suoi punti interni si possa passare dall'uno all'altro percorrendo una poligonale di suoi punti interni.
Il campo si dice **campo di forze conservativo** sse esiste una funzione scalare $\mathcal{U}(x,y,z)$ tale che si abbia

(1) $$\forall P=\langle x,y,z\rangle\in Intrn(\mathsf{R}) \;\;\vdots\;\; F_x=\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{U}\;\;,\;\;F_y=\frac{\partial}{\partial y}\mathcal{U}\;\;,\;\;F_z=\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{U}\ .$$

Questa funzione si chiama **energia potenziale**.

Ricordiamo che si dice **gradiente** di una funzione [I30f01] scalare Φ del punto di una certa regione la funzione vettoriale definita in ciascuno dei punti interni della regione

$$\mathrm{grad}\,\Phi \;:=\; \mathsf{e}_x\frac{\partial}{\partial x}\Phi+\mathsf{e}_x\frac{\partial}{\partial y}\Phi+\mathsf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\Phi\ .$$

Il gradiente è un operatore differenziale lineare, cioè applicato a una combinazione lineare di funzioni opportune fornisce la stessa combinazione lineare dei gradienti delle due funzioni.
Servendosi dell'operatore gradiente la (1) si può riscrivere

$$\forall P = \langle x, y, z \rangle \in Intrn(\mathsf{R}) \quad \vdots \quad \vec{F} \ = \ \mathrm{grad}\,\mathcal{U} \ .$$

I29:**f.04**

$$\int_{A \frown B} F_x \, \mathrm{d}x \ + F_y \, \mathrm{d}y \ + F_z \, \mathrm{d}z \ \ = \ \mathcal{U}(B) - \mathcal{U}(A) \ .$$

I29:**f.05** Ci proponiamo di individuare una condizione necessaria per la quale il valore di un integrale curvilineo sia indipendente dal cammino di integrazione.
L'integrando deve essere un differenziale esatto.

I29:**f.06** Le considerazioni e gli enunciati precedenti possono essere generalizzati senza difficoltà a funzioni definite in regioni di spazi $\mathbb{R}^{\times d}$ con d intero positivo qualsiasi.

I29:g. differenziali esatti

I29:**g.01** Consideriamo una regione connessa R di $\mathbb{R}^{\times 3}$ e tre funzioni $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$ $Z(x,y,z)$ continue insieme alle loro derivate parziali prime in ogni punto interno di R.
Se $X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$ è un differenziale esatto esiste una funzione $\mathcal{U}(x,y,z)$ avente R come dominio e tale che si abbia

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} = X \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = Y \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial z} = Z$$

e di conseguenza

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \;,\; \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \;,\; \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z} \;,\; \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} \;,\; \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} \;,\; \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z}$$

Essendo continue le derivate parziali $\dfrac{\partial X}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial Y}{\partial x}$, il criterio di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione implica $\dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x}$. Similmente si ottengono altre due uguaglianze concernenti le altre derivate parziali; complessivamente dunque

(1) $$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \;.$$

Se denotiamo con ***Exctdiff*** l'insieme dei differenziali esatti abbiamo

(2) Prop.: $X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z \;\in\; \boldsymbol{Exctdiff} \;\Longrightarrow\; \dfrac{\partial X}{\partial y} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} \;,\; \dfrac{\partial Y}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} \;,\; \dfrac{\partial X}{\partial z} = \dfrac{\partial Z}{\partial x}$.

I29:**g.02** L'implicazione precedente in generale non si può invertire.
Consideriamo un semplice esempio: come regione R assumiamo l'intero $\mathbb{R}^{\times 3}$ privato della retta (verticale) che soddisfa le equazioni $x = 0$ e $y = 0$, nonché le funzioni

$$X = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad Y = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad Z = 0 \;,$$

funzioni non definite nei punti della retta esclusa dal dominio. Si verifica senza difficoltà che esse soddisfano le uguaglianze g01(1). Tuttavia se si assegna il ruolo di Γ alla circonferenza di raggio 1 nel piano Oxy, cioè si considera la curva

$$x = \cos t \quad , \quad y = \sin t \quad , \quad zz = 0 \qquad \text{per } 0 \le t \le 2\pi \;,$$

si ottiene

$$\int_\Gamma (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^{2\pi} -\sin t\; d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \cos t\; d(\sin t) \;=\; 2\pi \;.$$

Osserviamo che l'esempio esaminato può essere inquadrato in considerazioni sopra differenziali esatti nel piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; l'integrale calcolato riguarda un circuito che racchiude l'origine del piano Oxy, punto nel quale le funzioni X e Y non sono definite.

I29:**g.03** Accade che le uguaglianze g01(1) sono in grado di garantire l'esattezza del corrispondente differenziale $X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z$ quando valgono in una regione con caratteristiche diverse da quella trattata in g02 .

Ricordiamo che un insieme S connesso appartenente a uno spazio topologico si dice **insieme semplicemente connesso** sse dati due suoi punti A e B tutti i cammini da A a B appartenenti ad S si possono trasformare gli uni negli altri mediante modifiche continue.

Non sono semplicemente connessi gli insiemi che "presentano dei buchi", come la regione piana compresa tra due circonferenze concentriche aventi raggi diversi, come una sfera dotata di manici, come un anello toroidale e come lo spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ privato di una retta come visto in g02 .
Sono invece semplicemente connessi i sottoinsiemi convessi di uno spazio metrico, o più in generale i sottoinsiemi di uno spazio metrico convessi rispetto a un loro punto (cioè tali che ogni loro altro punto è collegabile al punto privilegiato attraverso un segmento rettilineo costituito da punti interni.
Gli insiemi semplicemente connessi del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sono le regioni ottenibili da un cerchio per deformazione continua, mentre gli insiemi semplicemente connessi dello spazio $\mathbb{R}^{\times 3}$ sono le regioni ottenibili da una sfera per deformazione continua.

I29:**g.04** **Teorema**

$$\mathcal{U}(P) \;=\; \int_{P_0 \frown P} (X\,\mathrm{d}x \;+ Y\,\mathrm{d}y \;+ Z\,\mathrm{d}z\,) + \mathtt{C}$$

I29:**g.05** Il teorema precedente si estende senza difficoltà ai differenziali esatti di uno spazio $\mathbb{R}^{\times d}$ per d intero positivo qualsiasi.
Si devono prendere in esame funzioni della forma $X_j(x_1, x_2, ..., x_d)$ per $j = 1, 2, ..., d$ e differenziali della forma $X_1\,\mathrm{d}x_{\,1} + X_2\,\mathrm{d}x_{\,2} + \cdots + X_d\,\mathrm{d}x_{\,d}$. Tra le derivate delle funzioni X_j si hanno le $\dfrac{d(d-1)}{2}$ uguaglianze

$$\frac{\partial X_h}{\partial x_k} \;=\; \frac{\partial X_k}{\partial x_h} \qquad \text{per} \quad k = 2, 3, ..., d \quad \text{e} \quad h = 1, ..., k-1 \;.$$

Si ottiene allora la formula

$$\mathcal{U}(P) \;=\; \mathcal{U}(P_0) + \int_{P_0 \frown P} (X_1\,\mathrm{d}x_{\,1} + X_2\,\mathrm{d}x_{\,2} + \cdots + X_d\,\mathrm{d}x_{\,d}) \;.$$

I29:**g.06** Si hanno formule particolarmente semplici per la funzione potenziale quando la regione ha forma tale che si trovi un suo punto P_0 dal quale ogni altro punto si possa raggiungere con segmenti rettilinei nei quali cambia una sola coordinata.

`Testi dell'esposizione in http://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e in http://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/`