1

Capitolo I28
integrali di Stieltjes

Contenuti delle sezioni

a. introduzione degli integrali di Stieltjes p. 2
b. funzioni a variazione limitata p. 6

6 pagine

I280.01 In questo capitolo si introducono gli integrali di Stieltjes, chiamati anche integrali di Riemann-Stieltjes, come estensioni degli integrali di Riemann che rispetto a questi costituiscono degli strumenti di valutazione più incisivi.
In particolare l'integrazione di Stieltjes consente di unificare vari procedimenti statistici che si applicano a distribuzioni discrete e continue.

L'introduzione degli integrali di Stieltjes serve anche a preparare l'introduzione degli integrali di Lebesgue, i quali costituiscono strumenti valutativi ancora più prestanti degli integrali di Riemann-Stieltjes.

I28 a. introduzione degli integrali di Stieltjes

I28a.01 Per molti problemi si incontrano famiglie di integrali monodimensionali, propri e impropri, ai quali conviene dare la forma $\int_a^b \mathrm{d}x\, w(x)\, f_\lambda(x)$ nella quale a $w(x)$ si attribuisce un ruolo che viene detto ruolo di "funzione peso" o di "funzione densità".
La presentazione delle funzioni integrande come prodotto di due distinti fattori consente una classificazione più agevole e significativa delle quantità espresse dagli integrali.
In molti casi la funzione peso attribuisce una sorta di diversa importanza ai diversi punti dell'intervallo di integrazione e i diversi integrali di una famiglia si possono attribuire a diversi fenomeni forniti dalle $f_\lambda(x)$ che si svolgono in un unuico ambiente espresso dalla $w(x)$.
vengfab considerar la funzione integranda .

Una tale famiglia di integrali, per esempio, consente di esprimere le masse di lastre aventi forme trapezioidali le cui larghezze sono date dalle $f_\lambda(x)$ e il cui spessore dipende dalla coordinata x ed è dato da $w(x)$.
Altri integrali di questa forma si utilizzano in molti settori della fisica, nel calcolo delle probabilità e nella statistica.

Integrali impropri di grande interesse hanno le seguenti forme

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathsf{e}^{-x} L(x) \qquad , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathsf{e}^{-x^2} H(x) \ ,$$

dove $L(x)$ e $H(x)$ denotano polinomi con specifiche proprietà.

Se $w(x)$ è integrabile e $g(x) := \int_a^x \mathrm{d}t\, w(t)$, si può scrivere $\int_a^b \mathrm{d}x\ \ w(x) f(x) = \int_a^b \mathrm{d}x\ \ f(x)\, \mathrm{d}g\,(x)$.
Questo integrale si può considerare ottenuto come limite di somme della forma

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,[g(x_i) - g(x_{i-1})] \quad \text{con} \quad \xi \in [x_{i-1}, x_i]$$

all'infittirsi della decomposizione $\langle x_0 = a < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n \rangle$.
Queste somme si riducono alle somme di Riemann nel caso sia $g(x) = x$ e quindi $\mathrm{d}g\,(x) = \mathrm{d}x$.

I28a.02 Vogliamo ora introdurre un tipo di integrale basato su somme della precedente forma $(*)$ che abbia portata più ampia dell'integrale di Riemann; questo si ottiene indebolendo la richiesta di differenziabilità e quindi di continuità della funzione $g(x)$.

Consideriamo due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ con $f(x)$ limitata; per $g(x)$ non facciamo richieste specifiche, ma per agevolare la comprensione iniziale può essere utile limitarsi a pensare che essa sia monotona e in particolare nondecrescente.

Alla decomposizione $\Delta = \langle x_0 = a < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n \rangle$ di $[a,b]$ associamo le espressioni

$$\mathsf{stj}(\Delta, f, g) \ := \ \sum_{i=1}^n m_i [g(x_i) - g(x_{i-1})] \quad \text{con} \quad m_i := \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ ,$$

$$\mathsf{Stj}(\Delta, f, g) \ := \ \sum_{i=1}^n M_i [g(x_i) - g(x_{i-1})] \quad \text{con} \quad M_i := \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \ .$$

Esse sono chiamate, risp., **somma inferiore di Stieltjes** e **somma superiore di Stieltjes** riguardanti la **funzione integranda** $f(x)$ e la **funzione integratrice** $g(x)$.

I28a.03 (1) Prop.: Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ con le caratteristiche suddette, e due decomposizioni di $[a,b]$ Δ' e Δ'', per le corrispondenti somme di Stieltjes si ha $stj(\Delta', f, g) \leq Stj(\Delta'', f, g)$.

Dim.: Premettiamo che date due decomposizioni di $[a,b]$, Δ_1 e Δ_2 con $\Delta_1 \sqsubseteq \Delta_2$ si ha evidentemente $\mathsf{stj}(\Delta_1, f, g) \leq \mathsf{stj}(\Delta_2, f, g)$ e $\mathsf{Stj}(\Delta_2, f, g) \leq \mathsf{Stj}(\Delta_1, f, g)$.
La giunzione delle due decomposizioni dell'ipotesi $\Delta := Dltprm \vee \Delta''$ è più fine di ciascuna delle due date. Quindi dalle definizioni segue

$$s(\Delta', f, g) \leq \mathsf{stj}(\Delta, f, g) \leq \mathsf{Stj}(\Delta, f, g) \leq S(\Delta'', f, g) \;\blacksquare$$

L'insieme delle somme inferiori di Stieltjes è limitato superiormente e l'insieme delle somme superiori di Stieltjes è limitato inferiormente. Esistono quindi l'estremo superiore delle somme inferiori e l'estremo inferiore delle somme superiori Questi numeri reali vengono detti, risp., **integrale inferiore e integrale superiore di Stieltjes** della funzione integranda $f(x)$ rispetto alla funzione integratrice $g(x)$ su $[a,b]$ e per essi si usano le notazioni

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}g \;:=\; \sup_{\Delta \in \mathsf{Dcmp}[a,b]} \mathsf{stj}(\Delta, f, g) \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}g \;:=\; \inf_{\Delta \in \mathsf{Dcmp}[a,b]} \mathsf{stj}(\Delta, f, g) \;;$$

Quando l'integrale inferiore di Stieltjes coincide con l'integrale superiore, si dice che la funzione $f(x)$ è **funzione integrabile secondo Stieltjes** rispetto alla funzione $g(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ tale valore si dice **integrale di Stieltjes** della f rispetto alla g su $[a,b]$ e si denota con una delle notazioni

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g \;=\; \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}g\,(x).$$

Osserviamo ancora che la notazione $\mathrm{d}g$ potrebbe non denotare il differenziale della $g(x)$, in quanto tale funzione potrebbe non essere differenziabile.

I28a.04 La prima questione che si pone per la integrabilità alla Stieltjes è la individuazione dell'insieme delle coppie di funzioni-RtR alle quali è applicabile. Un primo enunciato utile a questo proposito è il seguente.

(1) Prop.: Consideriamo l'intervallo $\overline{I} := [a,b]$, una funzione $f(x)$ limitata in $\overline{I}$ e una funzione $g(x)$ monotona in $\overline{I}$. La $f(x)$ è integrabile su $\overline{I}$ rispetto alla $g(x)$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) si trova una decomposizione Δ di $\overline{I}$ tale che sia $S(\Delta, f, g) - s(\Delta, f, g) < \epsilon$.

I28a.05 Teorema Se $f(x)$ è continua nell'intervallo $\overline{I} := [a,b]$ e $g(x)$ è monotona su $\overline{I}$, allora esiste $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}g$.

Dim.: Scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), in forza della continuità uniforme nell'intervallo chiuso della $f(x)$ (implicata dalla sua continuità) esiste $\delta = \delta_\epsilon \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni $x', x'' \in \overline{I}$ con $|x'' - x'| < \delta$ vale la disuguaglianza $|f(x'') - f(x')| < \epsilon$.
Consideriamo quindi una decomposizione $\Delta = \langle x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n \rangle$ di $\overline{I}$ di ampiezza massima inferiore a δ; supposta $g(x)$ nondecrescente e posto si ha

$$\begin{aligned} S(\Delta, f, g) - s(\Delta, f, g) \;&=\; \sum_{i=1}^{n} \left[\max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) - \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \right] [g(x_i) - g(x_{i-1}] \\ &<\; \epsilon \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - g(x_{i-1}] \;=\; \epsilon \, [g(b) - g(a)] \;. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si può applicare e04(1) e ottenere l'asserto. Se la $g(x)$ fosse noncrescente si avrebbe ▮

Se la $f(x)$ non è continua l'integrale può non esistere.

I28a.06 Il teorema precedente si applica in particolare quando $g(x)$ è una funzione monotona a scala; in tal caso siano $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k$ i suoi punti di discontinuità e denotiamo con $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k$ i rispettivi salti (tutti positivi o tutti negativi). Consideriamo una decomposizione dell'intervallo di integrazione che presenta intervalli tanto piccoli che nessuno di essi contiene due ascisse di discontinuità. Nelle somme di Stieltjes i fattori $g(x_i) - g(x_{i-1})$ sono diversi da 0 solo per gli intervalli contenenti uno ξ_j; di conseguenza le somme inferiori e le superiori contengono solo k addendi e sono date da espressioni, risp., della forma $\sum_{j=1}^{k} m_j\, \sigma_j$ e $\sum_{j=1}^{k} M_j\, \sigma_j$. Al limite per l'ampiezza massima della decomposizione tendente a 0, grazie alla continuità della $f(x)$ le due somme di Stieltjes tendono, l'una dal basso, l'altra dall'alto, allo stesso limite e consentono di affermare

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\, \sigma_j \ .$$

Se la funzione integratrice $g(x)$ è una funzione monotona a scala con una infinità numerabile di salti $\langle \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_k, ... \rangle$, deve essere $\sum_{j=1}^{+\infty} \sigma_j$ convergente, e si ottiene

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \sum_{j=1}^{+\infty} f(\xi_j) \sigma_j \ .$$

I28a.07 **Teorema** Se $f(x)$ è monotona nell'intervallo $\overline{I} := [a,b]$ e $g(x)$ è monotona e continua in $\overline{I}$, allora esiste $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$.

Dim.: La monotonia e la continuità di $g(x)$ permettono di individuare per ogni intero positivo n la suddivisione $\Delta_n := \langle x_0, x_1, ..., x_n \rangle$ determinata da una decomposizione uniforme di cod(g), cioè tale che sia $g(x_i) - g(x_{i-1}) = \dfrac{g(b) - g(a)}{n}$. Supposto, per semplificare una prima visualizzazione, che $f(x)$ sia nondecrescente, si ha

$$\begin{aligned} \mathsf{Stj}(\Delta_n, f, g) - \mathsf{stj}(\Delta_n, f, g) &= \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\, [g(x_i) - g(x_{i-1})] \\ &= \frac{g(b) - g(a)}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \frac{1}{n} [g(b) - g(a)]\, [f(b) - f(a)] \end{aligned} .$$

Fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), se si prende $n = \left\lceil \dfrac{[g(b) - g(a)]\, [f(b) - f(a)]}{\epsilon} \right\rceil$ la differenza tra le somme superiore e inferiore risulta minore di ϵ e questo comporta l'asserto ▮

Se la $g(x)$ non è continua l'integrale può non esistere. Per esempio consideriamo le funzioni
$f(x) = g(x) := -1$ sse $x \in [-1, 0)$ $\quad$ 1 sse $x \in [0, 1]$.

I28a.08 Per l'integrale di Stieltjes si dimostrano proprietà analoghe a quelle dell'integrale di Riemann.

Consideriamo quindi l'intervallo $\overline{I} := [a,b]$, le funzioni $f(x)$, $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ integrabili secondo Stieltjes rispetto alle funzioni integratrici $g(x)$, $g_1(x)$ e $g_2(x)$ su $\overline{I}$ ed i numeri reali c_1 e c_2.

(1) $\displaystyle\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,\mathrm{d}g = c_1 \int_a^b f_1\,\mathrm{d}g + c_2 \int_a^b f_2\,\mathrm{d}g$

(linearità nei confronti della funzione integranda)

(2) $\displaystyle\int_a^b f\, d(c_1 g_1 + c_2 g_2)\ \mathrm{d}g = c_1 \int_a^b f\ \mathrm{d}g_1 + c_2 \int_a^b f\ \mathrm{d}g_2$

(linearità nei confronti della funzione integratrice)

(3) $\displaystyle\int_a^b f\ \mathrm{d}g = \int_a^b f\ dg = \int_a^b f\ \mathrm{d}g \qquad \text{dove} \quad a < c < b$

(additività rispetto all'intervallo di integrazione)

(4) $\displaystyle f_1 < f_2, g \text{ nondecrescente} \implies \int_a^b f_1\,\mathrm{d}g \le \int_a^b f_2\ \mathrm{d}g$

(5) $\displaystyle\left|\int_a^b f\ \mathrm{d}g\right| \le \int_a^b |f|\,\mathrm{d}g$

I28a.09 Teorema Se $f(x)$ è continua nell'intervallo $\overline{I} := [a,b]$ e $g(x)$ è continua, derivabile e monotona in $\overline{I}$, allora vale l'uguaglianza

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x \ .$$

I28 b. funzioni a variazione limitata

I28b.01 Una funzione-RtR viene detta **funzione a variazione limitata** in un intervallo $\overline{I}$ sse la sua cosiddetta variazione totale in $\overline{I}$ ha un valore finito.

A sua volta per definire la variazione totale di una $f(x)$ occorre considerare una generica decomposizione di $\overline{I} \searrow \mathsf{D} :=: \langle a = x_0, x_1, ...x_n = b\rangle$ definire la variazione totale su Δ della $f(x)$ come $\sum_i^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, per definire la sua variazione totale come limite superiore delle variazioni totali sulle decomposizione per la massima ampiezza delle decomposizioni tendente a 0.

L'insieme delle funzioni a variazione limitata in $\overline{I}$ si denota con $\mathsf{FunBV}[\overline{I}]$.

Si osserva che una funzione monotona a tratti ha come variazione totale la somma delle variazioni totali relative ai vari intervalli di monotonia, ciascuna data dal valore assoluto della differenza dei valori assunti dalla funzione nelle estremità degli intervalli di monotonia. Quindi le funzioni monotone a tratti sono funzioni a variazione limitata.

Si dimostra che una funzione-RtR è a varuiazione limitata sse si può esprimere come differenza di due funzioni monotone.

`L'esposizione in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php`