1

Capitolo I27
calcolo di integrali specifici

Contenuti delle sezioni

a. integrazione delle funzioni razionali p. 2
b. integrazione di funzioni razionali di radicali p. 9
c. integrazione di funzioni trascendenti elementari p. 15
d. funzioni definite mediante integrali p. 23
e. integrali ellittici p. 26

30 pagine

I27 0.01 In questo capitolo si sviluppano le tecniche per il calcolo di alcuni tipi di integrali indefiniti.

Si tratta di individuare collezioni di funzioni-RtR che proponiamo di chiamare "collezioni da antiderivazione", per ciascuna delle quali si trova uno specifico meccanismo di manipolazione formale che consente di giungere a una espressione della primitiva di ciascuna funzione della collezione stessa.

In questi sviluppi si trova che per alcune di queste collezioni le funzioni primitive si possono scrivere come espressioni contenenti funzioni note. All'opposto le procedure di antiderivazione di altre collezioni conducono a funzioni specifiche nuove, cioè funzioni che non si sanno esprimere mediante funzioni studiate in precedenza.

In questi casi l'attività di antiderivazione conduce ad arricchire la collezione delle cosiddette funzioni speciali, cioè di funzioni che vengono studiate secondo vari punti di vista, in particolare per migliorare i metodi della manipolazione simbolica delle espressioni matematiche e per potenziare gli strumenti per la valutazione approssimata delle funzioni stesse e quindi per ampliare i procedimenti del calcolo numerico.

Le funzioni speciali vengono utilizzate concretamente in molti campi e le loro proprietà costituiscono, nel loro complesso, una strumentazione di elevata efficacia per affrontare molti problemi della matematica e delle sue applicazioni [I38, W45, W50, W60].
Esse quindi occupano un posto di rilievo nell'apparato matematico-informatico.

I27 a. integrazione delle funzioni razionali

I27 a.01 In questa sezione mostriamo che per ogni funzione razionale, attraverso un ben definito procedimento algoritmico, si riesce a trovare una primitiva fornita da un'espressione nella quale entrano solo le operazioni razionali e le funzioni logaritmo e arcotangente.

Si tratta di calcolare integrali ai quali si può attribuire genericamente la forma

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{N_n(x)}{D_m(x)}\ , \tag{1}$$

dove n ed m sono interi naturali, mentre $N_n(x)$ e $D_m(x)$ denotano, risp., un polinomio di grado n e uno di grado m.
Sbrigativamente chiameremo questi oggetti **integrali razionali**.

Se $n \geq m$, cioè se il grado del numeratore è maggiore o uguale del grado del denominatore, effettuando con il noto algoritmo euclideo la divisione dei due polinomi si ottiene una espressione della forma

$$\int \mathrm{d}x\, Qtn N.D(x) \ + \ \int \mathrm{d}x\, \frac{Rmnd(N,D)}{D_m(x)}\ , \tag{2}$$

con $Qtn_{N,D}(x)$ polinomio quoziente di grado $n-m$ ed $Rmnd_k(x)$ polinomio resto di grado $k < m$.
Ricordiamo anche [B33d01] che si usa scrivere $Q_{n-m} := Qtn(N,D)$ e $R_k := Rmnd(N,D)$.

Il primo integrale si risolve mediante la formula I25e02(2)

$$\int \mathrm{d}x \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \ = \ \sum_{i=0}^{d} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + \mathtt{C}\ . \tag{3}$$

Quindi il problema dell'antiderivazione delle funzioni razionali si riduce al problema più circoscritto dell'integrazione di una funzione razionale $\dfrac{N_n(x)}{D_m(x)}$ con il grado n del numeratore inferiore al grado m del denominatore.
Inoltre, per la linearità dell'integrazione, ci si può ridurre a considerare solo il caso in cui a numeratore e a denominatore si abbiano **polinomi monici**, cioè aventi 1 come coefficiente della maggiore potenza della variabile:

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{N_n(x)}{D_m(x)} \ = \ \int \mathrm{d}x\, \frac{x^n + \cdots}{x^m + \cdots}\ . \tag{4}$$

I27 a.02 L'esame dei vari casi possibili procede considerando i successivi possibili valori per il grado m del numeratore.

Se il denominatore è di primo grado, con un semplice cambiamento di variabile si ricade nel caso in I25e02(3)

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{p}{qx+r} \ = \ \frac{p}{q} \int \mathrm{d}x\, \frac{(qx+r)'}{qx+r} \ = \ \frac{p}{q} \ln|qx+r| + \mathtt{C}\ . \tag{1}$$

Nel caso $m = 2$ si devono considerare tre sottocasi casi in ciascuno dei quali si ottengono espressioni che non è difficile rendere del tutto esplicite.

Per gradi maggiori si possono dare indicazioni esaurienti sul modo di procedere le quali però non consentono di giungere a espressioni chiuse di portata sufficientemente generale, ma consistono in indicazioni algoritmiche di manipolazion simboliche che portano sempre ad espressioni chiuse ma contenenti operandi numerici approssimati che che spesso richiedono calcoli onerosi.

In effetti le considerazioni che seguono delineano una procedura simbolico-numerica la cui implementazione è disponibile in tutti gli odierni sistemi per il calcolo numerico-simbolico.
Questo procedimento in molti casi richiede la determinazione degli zeri reali di un polinomio a coefficienti reali, lavoro che nella massima parte dei casi si riedce ad effettuare solo mediante valutazioni approssimate; queste a loro volta possono consistere in elaborazioni numeriche impegnative e possono presentare problemi di precisione.

I27 a.03 Se il denominatore ha grado 2, cioè ha la forma $D_2(x) = a\,x^2+b\,x+c$, si devono distinguere i tre casi in cui tale binomio $D_2(x)$ possiede due radici reali distinte, possiede due radici reali coincidenti o non possiede radici reali, cioè è irriducibile nel campo dei numeri reali. Questa distinzione si effettuare attraverso il segno del discriminante di $D_2(x)$, $b^2 - 4\,a\,c$.

I27 a.04 Quando il denominatore monico $D_2(x)$ ha due radici reali e distinte si può scrivere nella forma $D_2(x) = (x-r)(x-s)$; in tal caso si ha uno sviluppo della seguente forma:

$$(1) \qquad \int \mathrm{d}x\,\frac{tx+u}{(x-r)(x-s)} \;=\; \int \mathrm{d}x\,\frac{v}{x-r} + \int \mathrm{d}x\,\frac{w}{x-s} \;=\; v\,\ln|x-r| + w\,\ln|x-s| + \mathtt{C}\;.$$

L'espressione della funzione integranda come somma di frazioni con numeratore di grado 0 e denominatore di grado 1 si può sempre ottenere mediante la soluzione di un sistema di due equazioni lineari nelle incognite v e w. Infatti

$$\frac{tx+u}{(x-r)(x-s)} \;=\; \frac{v}{x-r}+\frac{w}{x-s} \quad\Longleftrightarrow\quad (v+w)x - vs - wr \;=\; tx+u \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} v+w = t \\ vs+wr \;=\; -u \end{cases}\;.$$

Il sistema lineare ha come determinante $r-s$, sempre diverso da 0 per la richiesta diversità delle due radici r ed s di $D_2(x)$; quindi ha sempre una soluzione e una sola fornita dalle espressioni

$$v \;=\; \frac{u+tr}{r-s} \quad\text{e}\quad w \;=\; \frac{u+ts}{s-r}\;.$$

In conclusione

$$(2) \qquad \int \mathrm{d}x\,\frac{tx+u}{(x-r)(x-s)} \;=\; \frac{u+t\,r}{r-s}\,\ln|x-r| + \frac{u+t\,s}{s-r}\,\ln|x-s| + \mathtt{C}\;.$$

I27 a.05 Quando il denominatore è il quadrato di un monomio, cioè quando ha la forma $D_2(x) = (x-r)^2$, si può effettuare l'integrazione per sostituzione.

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x\,\frac{t\,x+u}{x^2-2\,r\,x+r^2} \;&=\; \frac{t}{2}\int \mathrm{d}x\,\frac{2\,x-2\,r+2\,r+2\,u/t}{x^2-2\,r\,x+r^2} \\ (1) \qquad &=\; \frac{t}{2}\int \mathrm{d}x\,\left[\frac{\mathrm{D}_x(x^2-2\,r\,x+r^2)}{x^2-2\,r\,x+r^2} + \frac{2\,r+2\,u/t}{(x-r)^2}\right] \;+\; \cdot \\ &\qquad\qquad t\,\ln|x-r| - (t\,r+u)\frac{1}{x-r} \;+\; \mathtt{C} \end{aligned}$$

I27 a.06 Quando il denominatore $D_2(x) = x^2 + r\,x + s$ possiede due radici complesse coniugate non reali, cioè quando il suo discriminante è $r^2 - 4\,s < 0$, si decompone l'integrando in due addendi secondo le espressioni seguenti

$$\frac{t\,x+u}{x^2+r\,x+s} \;=\; \frac{t\,x+t\,r/2+u-t\,r/2}{x^2+r\,x+s} \;=\; \frac{t}{2}\,\frac{2\,x+r}{x^2+r\,x+s} + \frac{u-t\,r/2}{x^2+r\,x+s}\;.$$

Si possono quindi enunciare le seguenti formule:

$$(1) \qquad \int \mathrm{d}x\,\frac{2\,x+r}{x^2+r\,x+s} \;=\; \ln(x^2+r\,x+s) + \mathtt{C}\;,$$

$$(2) \qquad \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x^2 + r\,x + s} \;=\; \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{(x + r/2)^2 + s - r^2/4} \;=\; \frac{1}{\sqrt{s - \frac{r^2}{4}}} \, \arctan \, \frac{x + r/2}{\sqrt{s - \frac{r^2}{4}}} \; .$$

L'ultimo passaggio si ottiene sostituendo la variabile di integrazione x con la $t := \dfrac{x}{\sqrt{s - \frac{r^2}{4}}}$ e utilizzando la formula I25d02(10).

I27 a.07 Se il denominatore è un polinomio di grado maggiore di 2, in linea di principio, in conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra, è possibile fattorizzarlo come prodotto di fattori che sono esclusivamente di primo grado e di secondo grado irriducibili. Quindi la frazione integranda si può scomporre come somma di fattori costituiti da funzioni razionali dei quattro tipi considerati in precedenza. Di conseguenza la primitiva di ogni funzione razionale si può esprimere come combinazione lineare di funzioni dei tipi precedenti.

I calcoli di integrali meno impegnativi può essere opportuno effettuarli in modo sbrigativo con carta e matita. Molti calcoli di questi integrali possono invece essere molto gravosi e per risolvere molti problemi riguardanti applicazioni concrete può essere consigliabile servirsi di uno degli attuali efficienti e affidabili sistemi computazionali.

Il calcolo di integrali specifici fa parte delle attività nelle quali si può porre il problema della adeguata padronanza di appositi strumenti per calcoli automatici.
Per evitare il rischio di errori grossolani spesso conviene affrontare questo problema non individualmente, ma nell'ambito di un gruppo di lavoro.

Quando tuttavia, risulta opportuno o inevitabile affrontare individualmente dei calcoli automatici, possono essere consigliabili controlli manuali campionari della corretta impostazione delle procedure.

Per le attività di calcolo di integrali specifici sono anche disponibili volumi ponderosi che tabulano migliaia di integrali definiti e indefiniti (talora insieme a indicazioni su serie, prodotti infiniti e altre costruzioni di interesse computazionale).
Occorre aggiungere che oggi, in linea di massima,sono decisamente più completi e attendibili gli strumenti software, mentre i volumi di tavole e la letteratura di ricerca servono per argomenti molto specifici e/o studiati più recentemente.
Per questi ultimi argomenti ci si può aspettare una disponibilità a breve termine di strumenti software specifici e in tempi poco più lunghi la loro copertura da parte dei sistemi software di ampia portata.

I27 a.08 Procediamo ora a enunciare formule di integrazione di funzioni razionali più specifiche utilizzabili per la effettuazione di concrete integrazioni manuali. Cominciamo con una formula generale per la decomposizione di una funzione razionale regolare come combinazione lineare di funzioni razionali di sei forme basilari e successivamente presentiamo espressioni per gli integrali indefiniti di tali funzioni razionali basilari.

Cominciamo ricordando che ogni polinomio sui reali $D_m(x)$ di grado m si può fattorizzare algoritmicamente nel seguente modo:

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} : \; D_m(x) \;=\; a_m (x - r_1)^{h_1} \cdots (x - r_H)^{h_H} (x^2 + p_1 x + q_1)^{k_1} \cdots (x^2 + p_K x + q_K)^{k_K} \; ,$$

dove si conviene che :

(a) $H, K \in \mathbb{N}$, $h_1, ..., h_H, k_1, ..., k_K \in \mathbb{P}$ tali che $h_1 + \cdots + h_H + 2k_+ \cdots + 2k_K = m$;

(b) $a_m, r_1, ..., r_H, p_1, q_1, ..., p_K, q_K \in \mathbb{R}$;

(c) $r_1, ..., r_H$ sono diversi tra di loro ;

(d) le coppie $\langle p_1, q_1\rangle, ..., \langle p_K, q_K\rangle$ sono diverse tra di loro ;

(e) sono negativi i discriminanti $p_1{}^2 - 4\,q_1$, ... , $p_K{}^2 - 4\,q_K$.

I27 a.09 Dalla fattorizzazione precedente segue la possibilità di decomporre algoritmicamente ogni funzione razionale regolare in una combinazione lineare della forma che segue.

$$
\begin{aligned}
\frac{N_n(x)}{D_m(x)} \;=\; & \frac{a_{1,1}}{x-r_1} + \frac{a_{1,2}}{(x-r_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,h_1}}{(x-r_1)^{h_1}} + \\
& \cdots\cdots\cdots + \frac{a_{H,1}}{x-r_H} + \frac{a_{H,2}}{(x-r_H)^2} + \cdots + \frac{a_{H,h_H}}{(x-r_H)^{h_H}} + \\
& + \frac{b_{1,1}x+c_{1,1}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{b_{1,2}x+c_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{b_{1,k_1}x+c_{1,k_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}} + \\
& \cdots\cdots\cdots + \frac{b_{K,1}x+c_{K,1}}{x^2+p_Kx+q_K} + \frac{b_{K,2}x+c_{K,2}}{(x^2+p_Kx+q_K)^2} + \cdots + \frac{b_{K,k_K}x+c_{K,k_K}}{(x^2+p_Kx+q_K)^{k_K}}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

I coefficienti di questa combinazione lineare, in numero di $h_1+\cdots+h_H+2k_1+\cdots+2k_K = m$, si ottengono ponendo ciascuno degli addendi della somma precedente sotto la forma $\dfrac{T_\alpha(x)}{D_m(x)}$ e uguagliando il polinomio noto $N_n(x)$ e la somma $S(x)$ dei vari $T_\alpha(x)$; $S(x)$ è un polinomio di grado minore o uguale a $n-1$ nel quale le m incognite $a_{1,1}, a_{1,2}, ..., b_{1,1}, c_{1,1}, b_{1,2}, c_{1,2}, ...$ compaiono linearmente.
L'uguaglianza $N_n(x) = S(x)$ equivale quindi al sistema di m equazioni lineari ottenuto uguagliando i coefficienti delle potenze dalla variabile x; tale sistema ammette una e una sola soluzione e la determinazione dei coefficienti della (1) è garantita.

Questo procedimento viene detto **determinazione dei coefficienti**.

I27 a.10 La determinazione delle primitive delle funzioni razionali è dunque riconducibile alla determinazione delle primitive di funzioni razionali con forme ben definite che chiamiamo **funzioni razionali basilari**:

$$
I_h^{[a]} := \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^h} \quad , \quad I_h^{[b]} := \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+p\,x+q)^h} \quad , \quad I_h^{[c]} := \int \mathrm{d}x\, \frac{Bx+C}{(x^2+p\,x+q)^h k} \qquad .
$$

Per il calcolo degli $I_h^{[a]}$ abbiamo già visto che

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x-r} \;=\; \ln|x-r| + \mathtt{C} \quad , \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^h} \;=\; -\frac{1}{(h-1)(x-r)^{h-1}} + \mathtt{C} \qquad \text{per} \quad h = 2, 3, ... \qquad (1)
$$

Per il calcolo degli $I_h^{[b]}$ si osserva che per l'ipotesi sui discriminanti a08(e) $\alpha := \sqrt{q - p^2/4}$ è un numero reale positivo e che

$$
x^2 + p\,x + q \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \;=:\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \alpha^2 \;=\; \alpha^2 \left[1 + \left(\frac{x + p/2}{\alpha}\right)^2\right] .
$$

Questo suggerisce la sostituzione $t := \dfrac{x - p/2}{\alpha}$ per la quale $x = \alpha\, t + \dfrac{p}{2}$ (con $\alpha := q - p^2/4$)
$\mathrm{d}x = \alpha\,\mathrm{d}t$ e $1 + t^2 \;=\; \dfrac{1}{\alpha^2}\,(x^2 + p\,x + q)$, in modo di giungere a

$$
I_h^{[b]} \;=\; \frac{1}{\alpha^{2\,h-1}}\, \overline{J}_h \qquad \text{con} \quad \overline{J}_h := \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^h} \;=\; \alpha^{2\,h-1} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+p\,x+q)^h} \; . \qquad (2)
$$

La valutazione dei $\overline{J}_h$ viene effettuata nel prossimo paragrafo.

Per il calcolo degli $I_h^{[c]}$ si osserva che $B\,x + C \;=\; \dfrac{B}{2}\,(2\,x + p) + \left(C - B\,\dfrac{p}{2}\right)$ e quindi

$$I_h^{[c]} \;=\; \int \mathrm{d}x\,\frac{Bx + C}{x^2 + p\,x + q} \;=\; \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2 + p\,x + q\right)}{(x^2 + p\,x + q)^h} \;+\; \left(C - B\,\frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x + p\,x + q)^h}\;.$$

Ora si applica la stessa sostituzione di variabile considerata in precedenza $t \;:=\; \dfrac{x - p/2}{\alpha}$ ottenendo

$$\begin{aligned} I_h^{[c]} \;&=\; \frac{B}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2 + p\,x + q\right)}{(x^2 + px + q)^h} \;+\; \left(C - B\,\frac{p}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}(x + p/2)}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \alpha^2\right]^h}\;. \\ &=\; \frac{B}{2}\,\frac{1}{\alpha^{2h-2}}\int \frac{d(1 + t^2)}{(1 + t^2)^h} \;+\; \left(C - B\,\frac{p}{2}\right)\,\frac{1}{\alpha^{2h-1}}\overline{J}_h \end{aligned}$$

Per il primo di questi integrali si ricordano le formule

$$\int \mathrm{d}t\,\frac{t}{1 + t^2} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{d(1 + t^2)}{1 + t^2} \;=\; \frac{1}{2}\ln(1 + t^2) + \mathtt{C} \qquad \text{e} \tag{3}$$

$$\int \mathrm{d}t\,\frac{t}{(1 + t^2)^h} \;=\; -\frac{1}{2(h-1)(1 + t^2)^{h-1}} + \mathtt{C} \quad \text{per} \quad h = 2, 3, \ldots\;. \tag{4}$$

In particolare si ottiene

$$I_1^{[c]} \;=\; \frac{B}{2}\,\ln(x^2 + p\,x + q) + \left(C - B\,\frac{p}{2}\right)\arctan\left(\frac{x + p/2}{\alpha}\right)\;. \tag{5}$$

I27 a.11 Occupiamoci ora degli integrali

$$\overline{J}_h \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^2)^h} \quad \text{per} \quad h = 2, 3, \ldots\;. \tag{1}$$

Per $h = 2, 3, \ldots$ consideriamo la decomposizione

$$\frac{1}{(1 + t^2)^h} \;=\; \frac{1}{(1 + t^2)^{h-1}} - \frac{t^2}{(1 + t^2)^h}\;. \tag{2}$$

Integrando i due membri si ottiene $\overline{J}_h = \overline{J}_{h-1} - \displaystyle\int \mathrm{d}t\;\frac{t^2}{(1 + t^2)^h}$.

Il nuovo integrale si può calcolare per parti

$$\int \mathrm{d}t\;\frac{t^2}{(1 + t^2)^h} \;=\; \int t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2(h-1)(1 + t^2)^{h-1}}\right) \;=$$

$$-\frac{t}{2(h-1)(1 + t^2)^{h-1}} + \frac{1}{2(h-1)}\int \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^2)^{h-1}} + \mathtt{C} = -\frac{t}{2(h-1)(1 + t^2)^{h-1}} + \frac{1}{2(h-1)}\overline{J}_{h-1} + \mathtt{C}\;.$$

Dalla (2) seguono quindi le formule di ricorrenza equivalenti

$$\overline{J}_h \;=\; \frac{2h-3}{2h-2}\overline{J}_{h-1} + \frac{t}{2(h-1)(1 + t^2)^{h-1}} \quad , \quad \overline{J}_{h+1} \;=\; \left(1 - \frac{1}{2h}\right)\overline{J}_h + \frac{1}{2h}\,\frac{t}{(1 + t^2)^h}\;. \tag{3}$$

In particolare abbiamo le seguenti espressioni nella t

$$\overline{J}_1 \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} \;=\; \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\,\frac{t}{1 + t^2} + \mathtt{C}\;,$$

$$\overline{J}_2 \;=\; \frac{3}{4}\,\overline{J}_1 + \frac{1}{4}\,\frac{t}{(1 + t^2)^2} \;=\; \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\arctan t + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{t}{1 + t^2} + \frac{1}{4}\,\frac{t}{(1 + t^2)^2}\;.$$

$$\overline{J}_3 \;=\; \frac{5}{6}\,\overline{J}_2 + \frac{1}{6}\,\frac{t}{(1 + t^2)^3} \;=\; \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\arctan t + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\,\frac{t}{1 + t^2} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 6}\,\frac{t}{(1 + t^2)^2} + \frac{1}{6}\,\frac{t}{(1 + t^2)^3}\;.$$

e le espressioni nella x

$$I_1^{[b]} \;=\; \frac{1}{2}\,\arctan\left(\frac{x+p/2}{\alpha}\right) + \frac{1}{2}\,\alpha\,\frac{x+p/2}{x^2+p\,x+q} + \mathtt{C} \quad \text{ove} \quad \alpha \;:=\; \sqrt{q-p^2/4}\;,$$

$$I_2^{[b]} \;=\; \frac{3}{8}\,\arctan\left(\frac{x+p/2}{\alpha}\right) + \frac{3}{8}\,\alpha\,\frac{x+p/2}{x^2+p\,x+q} + \frac{1}{4}\,\alpha^3\,\frac{x+p/2}{(x^2+p\,x+q)^2} + \mathtt{C}\;,$$

$$I_3^{[b]} \;=\; \frac{5}{16}\,\arctan\left(\frac{x+p/2}{\alpha}\right) + \frac{5}{16}\,\alpha\,\frac{x+p/2}{x^2+p\,x+q} + \frac{5}{24}\,\alpha^3\,\frac{x+p/2}{(x^2+p\,x+q)^2} + \frac{1}{6}\,\alpha^5\,\frac{x+p/2}{(x^2+p\,x+q)^3} + \mathtt{C}\;.$$

I27 a.12 (1) Esempio Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-1)}$. Innanzi tutto occorre precisare la decomposizione

$$\frac{1}{x^2(x^2-1)} \;=\; \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x+1} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x}\;.$$

Riducendo le frazioni a secondo membro a minimo comune denominatore si ottiene la equivalente uguaglianza dei numeratori

$$1 \;=\; a_1x^2(x+1) + a_2x^2(x-1) + b(x^2-1) + cx(x^2-1)\;.$$

Questa implica le uguaglianze: $a_1+a_2+c=0$; $a_1-a_2+b=0$; $c=0$; $-b=1$ e quindi $a_1 = \dfrac{1}{2} \;=\; -a_2$; di conseguenza

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-1)} \;=\; \int \mathrm{d}x\,\left[\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2}\right] \;=\; \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \mathtt{C}\;.$$

(2) Esempio Si chiede $\displaystyle\int \mathrm{d}x\;\frac{x^4-1}{x(x^2+x+1)^2}$. Per questo serve precisare la decomposizione

$$\frac{x^4-1}{x(x^2+1+1)^2} \;=\; \frac{a}{x} + \frac{b_1x+c_1}{(x^2+x+1)^2} + \frac{b_2x+c_2}{x^2+x+1}$$

determinando i coefficienti a, b_1, c_1, b_2 e c_2.
Questi si ottengono unificando i denominatori al loro minimo comune denominatore:

$$x^4-1 \;=\; (a+b_2)x^4 + (2a+b_2+c_2)x^3 + (3a+b_1+b_2+c_2)x^2 + (2a+c_1+c_2)x + a\;.$$

Quindi $a=-1$, $b_2=2$, $c_2=0$, $c_1=2$, $b_1=1$ e dunque

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\,\frac{x^4-1}{x(x^2+x+1)^2} \;&=\; -\int\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \mathrm{d}x\,\frac{x+2}{(x^2+x+1)^2} + \int \mathrm{d}x\,\frac{2x}{x^2+x+1} + \mathtt{C}\\
&= -\ln|x| + \frac{1}{4}\,\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right)\\
&\qquad + \frac{3}{2}\left[\frac{3}{8}\,\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{16}\,\frac{x+1/2}{x^2+x+1} + \frac{3\sqrt{3}}{32}\,\frac{x+1/2}{(x^2+x+1)^2}\right]\\
&\qquad + \ln(x^2+x+1) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right) + \mathtt{C}\\
&= -\ln|x| - \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\right) + \ln(x^2+x+1)\\
&\qquad + \frac{9}{16}\,\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{9\sqrt{3}}{32}\,\frac{x+1/2}{x^2+x+1} + \frac{9\sqrt{3}}{64}\,\frac{x+1/2}{(x^2+x+1)^2} + \mathtt{C}
\end{aligned}\;.$$

I27 a.13 La complicata espressione trovata suggerisce alcune considerazioni.

In qualche contesto potrebbe essere conveniente fare riferimento ad un'espressione relativamente concisa come $\int \mathrm{d}x \; \dfrac{x^4 - 1}{x(x^2 + x + 1)^2}$ piuttosto che alla espressione chiusa ottenuta con l'integrazione.

Il calcolo simbolico dettagliato di molti integrali se svolto manualmente è oneroso e prono agli errori: in molte applicazioni risulta sostanzialmente doveroso servirsi di uno dei sistemi di calcolo simbolico di ampia portata ed affidabili che si sono resi disponibili a partire dai primi anni 1980.

I metodi di calcolo forniti dall'esame delle definizioni e delle loro conseguenze, e in particolare quelli qui presentati, consentono di rendersi conto delle possibilità dei calcoli automatici, ma attualmente ha senso affrontarli manualmente solo in poche circostanze.

Nell'ambito di un complesso di calcoli applicativi, in genere, l'integrazione simbolica va praticata insieme allo studio di modelli, alla esecuzione di calcoli numerici opportunamente approssimati e alla presentazione di grafici: anche per il complesso delle esigenze è consigliabile l'uso di strumenti automatici i quali oggi offrono anche prestazioni di modellizzazione, di calcolo numerico e di resa grafiche di livello elevato.

I27 b. integrazione di funzioni razionali di radicali

I27 b.01 Premettiamo che qui e nel seguito del capitolo ciascuna delle scritture aventi la forma $\mathcal{R}(a,b,c,...)$ o una delle sue varianti come $\mathcal{R}_m(a,b,c,...)$ o $\mathcal{R}^{[k]}(a,b,c,...)$ denota una funzione razionale nei suoi argomenti.
Inoltre, più in particolare, con scritture della forma $\boldsymbol{P}(a,b,c,...)$ o loro varianti denotiamo funzioni polinomiali e con scritture della forma $\boldsymbol{T}(a,b,c,...)$ o loro varianti denotiamo funzioni trinomiali, ossia polinomi di secondo grado.

I27 b.02 Consideriamo integrali della forma

$$\mathsf{I} := \int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[q_1]{x^{p_1}},\ \sqrt[q_2]{x^{p_2}},\ \ldots,\ \sqrt[q_m]{x^{p_m}}\right) \quad , \tag{1}$$

dove per $i = 1,...,m$ i q_i ed i p_i denotano interi positivi tali che ogni $\dfrac{p_i}{q_i}$ denota una frazione irriducibile.
Il calcolo di questi integrali si riconduce al calcolo di integrali di funzioni razionali effettuando una opportuna sostituzione della variabile. Per questo occorre calcolare $q := \mathrm{mcm}(q_1,...,q_n)$ e gli m interi $d_i := \dfrac{q}{q_i}$, in modo da poter scrivere

$$\sqrt[q_i]{x^{p_i}} \ = \ \sqrt[q]{x^{p_i\, d_i}} \ .$$

Si introduce poi la nuova variabile t tale che sia $x = t^q$ e quindi si abbia $\mathrm{d}x \ = \ \mathrm{d}t\ q\, t^{q-1}$.
Di conseguenza si ha l'espressione

$$\mathsf{I} = \ q \int \mathrm{d}t\, t^{q-1} \mathcal{R}\left(t^q, t^{p_1 d_1},\ \ldots, t^{p_n d_n}\right) \ , \tag{2}$$

che riguarda l'integrale di una funzione razionale della nuova variabile, trattabile con il procedimento presentato in :a .

I27 b.03 Consideriamo più in generale integrali della forma

$$\mathsf{J} := \int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(x,\ \sqrt[q_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}},\ \ldots,\ \sqrt[q_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_m}}\right) \quad , \tag{1}$$

dove supponiamo che per $i = 1,...,n$ i q_i siano interi positivi, le $\dfrac{p_i}{q_i}$ siano frazioni irriducibili e i parametri a, b, c e d siano tali che $ad - bc \neq 0$, cioè tali che la frazione $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ non si riduca a una costante.
Ancora introduciamo $q := \mathrm{mcm}(q_1,...,q_n)$ e per $i = 1,...,n$ gli interi $d_i := \dfrac{q}{q_i}$, in modo da poter scrivere

$$\forall i = 1,2,...,n \ : \quad \sqrt[q_i]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_i}} \ = \ \sqrt[q]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_i\, d_i}} \ .$$

Si introduce poi la nuova variabile t tale che sia $\dfrac{a\,x+b}{c\,x+d} = t^q$ e quindi

$$x = \frac{t^q\, d - b}{-t^q\, c + a} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}x \ = \ q(a\,d - b\,c)\frac{t^{q-1}}{(-t^q\, c + a)^2}\, \mathrm{d}t \ .$$

Di conseguenza si ha

$$\mathsf{J} \ = \ q(a\,d - b\,c) \int \mathrm{d}t\, \mathcal{R}\left(\frac{t^q d - b}{-t^q\, c + a}, t^{p_1\, d_1},\ \ldots, t^{p_n\, d_n}\right) \frac{t^{q-1}}{(-t^q\, c + a)^2} \ . \tag{2}$$

Ancora l'espressione trovata richiede l'integrale di una funzione razionale della nuova variabile calcolabile effettuabile come mostrato in :a .

Osserviamo che se $c = 0$ si hanno integrali della forma

$$\mathsf{I} := \int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(x,\, \sqrt[q_1]{(ax+b)^{p_1}},\, \ldots,\, \sqrt[q_n]{(ax+b)^{p_m}}\right) \quad ,$$

per i quali la formula risolutiva (2), potendosi supporre $d = 1$, si riduce alla

$$\mathsf{I} \;=\; \frac{q\,d}{a} \int \mathrm{d}t\; \mathcal{R}\left(\frac{t^q - b}{-1+a}, t^{p_1 d_1},\, \ldots, t^{p_n d_n}\right) t^{q-1} \quad .$$

I27 b.04 (1) Esempio

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} \;=\; \left\lfloor x = t^6 \;,\; \mathrm{d}x \;=\; \mathrm{d}t\, 6t^5 \right\rfloor = 6 \int \mathrm{d}t\, \frac{t^2}{t-1} \;=\; 6 \int \mathrm{d}t\, (t+1) + 6 \int \mathrm{d}t\, \frac{1}{t-1} + \mathtt{C}$$
$$= \; 3\,t^2 + 6\,t + 6\, \ln|t-1| + \mathtt{C} \;=\; 3\,\sqrt[3]{x} + 6\,\sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + \mathtt{C}$$

(2) Esempio

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x-1} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \quad \left\lfloor \frac{x+1}{x-1} \;=\; t^2 \;,\; x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \;,\; \mathrm{d}x \;=\; -\frac{4\,t}{(t^2-1)^2}\, \mathrm{d}t \right\rfloor$$

$$= \; -2 \int \mathrm{d}t\; \frac{t^2}{t^2-1} \;=\; -2\,t - \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \mathtt{C} = -2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1}\right| + \mathtt{C} \quad .$$

I27 b.05 Occupiamoci ora di integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\; \mathcal{R}\left(x, \sqrt{a\,x^2 + p\,x + q}\right) \;=:\; \int \mathrm{d}x\; \mathcal{R}\left(x, \sqrt{\boldsymbol{T}(x)}\right) \quad . \tag{1}$$

Per essi supponiamo che sia $a \neq 0$, in modo che il trinomio non si riduca a un'espressione lineare nella x caso trattabile come in b02.

Conviene tenere presente che

$$a\,x^2 + b\,x + c \;=\; a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right] \;=\; a\left[\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right] \quad , \tag{2}$$

dove $\Delta := b^2 - 4\,a\,c$, il discriminante del trinomio, serve per distinguere i tipi delle radici dell'equazione $\boldsymbol{T}(x) = 0$:, per le quali, nel campo complesso, abbiamo

$$a\,x^2 + b\,x + c \;=\; a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{ove} \qquad x_{1,2} \;= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \quad .$$

Il caso in cui $\Delta = 0$ corrisponde a due soluzioni coincidenti e quindi consente che la radice del trinomio argomento della funzione razionale possa essere eliminata riconducendo l'integrando ad una semplice funzione razionale della variabile x.

I27 b.06 La razionalizzazione degli integrali b05(1) si può sempre effettuare ed in più modi; quale di questi modi sia il più conveniente dipende da peculiarità delle espressioni utilizzabili per i parametri in gioco.

Una distinzione importante riguarda il segno del coefficiente a.

Se $a > 0$ il trinomio $\boldsymbol{T}(x)$ esprime una parabola con concavità volta verso l'alto.

Se il discriminante risulta $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse Ox e l'integrando esprime una funzione a valori reali per ogni valore della x.

Se $\Delta > 0$ l'equazione $\boldsymbol{T}(x) = 0$ ha due radici distinte e l'integrando esprime due rami di una funzione a valori reali.

Se invece $a < 0$, $\boldsymbol{T}(x)$ esprime una parabola con concavità volta verso il basso e l'integrando esprime una funzione con valori reali nell'intervallo aventi come estremi le due radici sse queste sono reali, cioè sse $\Delta > 0$.

Osserviamo anche che potrebbe essere conveniente studiare l'integrale `b05`(1) nella forma

$$\int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}_1\left(x, \sqrt{\boldsymbol{T}_1(x)}\right) \ , \ \text{con} \quad \boldsymbol{T}_1(x) \ := \ \frac{\boldsymbol{T}(x)}{|a|} \ = \ \pm x^2 + B\,x + C \ .$$

In tal modo si avrebbero formule più semplici di quelle che seguono, ma non applicabili a tutti gli integrandi specifici.

I27 b.07 Supponiamo sia $a > 0$. Introduciamo una nuova variabile di integrazione che esprime la differenza di $\boldsymbol{T}(x)$ da una parabola di forma semplice:

$$t \ := \ \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} - \sqrt{a}\,x \qquad \text{ossia} \qquad \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} \ = \ \sqrt{a}\,x + t \ . \tag{1}$$

alla seconda uguaglianza, elevando al quadrato si ottiene

$$x \ = \ \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a}\,t} \ . \tag{2}$$

Da questa si ottengono

$$\mathrm{d}x \ = \ 2\,\frac{-\sqrt{a}\,t^2 + b\,t - c\sqrt{a}}{(b - 2\,\sqrt{a}\,t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad , \qquad \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} \ = \ \frac{-\sqrt{a}\,t^2 + b\,t - c\sqrt{a}}{b - 2\,\sqrt{a}\,t} \ , \tag{3}$$

uguaglianze che permettono di razionalizzare l'integrale dato. Da questo si ricava un'espressione nella t, variabile che sarà da sostituire con la definizione in (1).

I27 b.08 Ad esempio si chieda di calcolare

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + A}} \ .$$

Introdotto $t \ := \ \sqrt{x^2 + A} - x$, si ottengono

$$x \ = \ \frac{t^2 - A}{2\,t} \quad , \quad \mathrm{d}x \ = \ \frac{t^2 + A}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t \quad , \quad \sqrt{x^2 + A} = \frac{t^2 + A}{2\,t} \ ,$$

e di conseguenza

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + A}} \ = \ \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \ = \ \ln|t| + \mathtt{C} \ = \ \ln|x + \sqrt{x^2 + A}| + \mathtt{C} \ .$$

I27 b.09 Consideriamo il caso $a < 0$ e, per avere un risultato valido in un intervallo reale della x, supponiamo $b^2 - 4\,a\,c > 0$; il trinomio ha le radici reali e lo scriviamo $\boldsymbol{T}(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$. Introduciamo la nuova variabile t ponendo

$$t \ := \ \frac{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}{x - x_1} \ .$$

Da questa seguono

$$a\,(x - x_1)(x - x_2) \ = \ t^2\,(x - x_1) \quad , \quad x \ = \ \frac{t^2\,x_1 - a\,x_2}{t^2 - a} \ ,$$

e quindi la possibilità di razionalizzare l'integrale dato.

I27 b.10 Un'altro possibile procedimento di razionalizzazione è attuabile quando $c > 0$. In tal caso si introduce

$$t \;:=\; \frac{1}{x}\left(\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}-\sqrt{c}\right) \qquad \text{ossia} \qquad \sqrt{a\,x^2+b\,x+c} \;=\; t\,x+\sqrt{c}\;.$$

Da queste si ottengono

$$x \;=\; \frac{2\,\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}\;\;,\;\; \mathrm{d}x \;=\; \frac{\sqrt{c}\,t^2-b\,t+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\;\;,\;\; \sqrt{a\,x^2+b\,x+c} \;=\; \frac{\sqrt{c}\,t-b\,t+a\,\sqrt{c}}{a-t^2}$$

e quindi la razionalizzazione dell'integrale in esame grazie alla possibilità di trasformarlo nell'integrale di una funzione razionale della t.

I27 b.11 Diamo alcuni esempi con gli sviluppi formali che seguono.

(1) Sia $a > 0$. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}} \;=\; \sqrt{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(a\,x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4\,a\,c-b^2}{2}}}$

$$= \;\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\mathrm{d}\left(a\,x+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(a\,x+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4\,a\,c-b^2}{2}}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{a}}\,\ln\left|a\,x+\frac{b}{2}+\sqrt{a^2\,x^2+a\,b\,x+a\,c}\right|+\mathtt{C}$$

(2)
SupponiamoRm $a < 0$ e $b^2-4\,a\,c > 0$. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}} \;=\; -1\sqrt{-a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{b^2-4\,a\,c}{4}-\left(a\,x+\frac{b}{2}\right)^2}}$

$$= \;\frac{-1}{\sqrt{-a}}\int \frac{\mathrm{d}\left(a\,x+\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\frac{b^2-4\,a\,c}{4}-\left(a\,x+\frac{b}{2}\right)^2}} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{-a}}\,\arcsin\frac{2\,a\,x+b}{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}+\mathtt{C}$$

I27 b.12

(1)
$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\,\sqrt{x^2+c} \;&=\; \left\lfloor\!\right\rfloor \text{ integrando per parti } \left\lfloor\!\right\rfloor \;=\; x\,\sqrt{x^2+c}-\int \mathrm{d}x\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2+c}}\\ &=\; x\,\sqrt{x^2+c}-\int \mathrm{d}x\,\frac{x^2+c}{\sqrt{x^2+c}}+c\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+c}}\\ &=\; x\,\sqrt{x^2+c}-\int \mathrm{d}x\,\sqrt{x^2+c}+c\,\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+\mathtt{C}\end{aligned}\quad .$$

Quindi, portando a sinistra l'integrale richiesto

$$\int \mathrm{d}x\,\sqrt{x^2+c} \;=\; \frac{1}{2}\left(x\,\sqrt{x^2+c}+c\,\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|\right)+\mathtt{C}\;.$$

(2) Sia $c > 0$ e chiediamo che per $0 < x \le c$ si calcoli $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x}$.

Introduciamo la variabile $t \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ tale che $x = c\,\sin t$ e di conseguenza.

$$\mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x} \;=\; \mathrm{d}t\cdot c\,\cos t\,\frac{\sqrt{c^2-c^2\,\sin^2 t}}{c\,\sin t} \;=\; \mathrm{d}t\,c\,\frac{\cos^2 t}{\sin t} \;=\; \mathrm{d}t\,c\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} \;=\; \mathrm{d}t\,\frac{c}{\sin t}-\mathrm{d}t\,c\,\sin t\;.$$

Dunque

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x} \;=\; c\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}-c\int \mathrm{d}t\,\sin t \;=\; \left\lfloor\!\right\rfloor D_t\,\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| = \frac{1}{\sin t}\left\lfloor\!\right\rfloor \;=\; c\,\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+c\,\cos t+\mathtt{C}\;.$$

Torniamo alla variabile x osservando che $c\cos t = \sqrt{c^2-x^2}$ e che

$$\tan\frac{t}{2} = \frac{\sin t/2}{\cos t/2} = \frac{2\sin t/2\cos t/2}{2\cos^2 t/2} = \frac{\sin t}{1+\cos t} = \frac{x/c}{1+\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}} = \frac{x}{c+\sqrt{c^2-x^2}}\,.$$

per concludere che

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{c^2-x^2}}{x} = c\ln\frac{x}{c+\sqrt{c^2-x^2}} + \sqrt{c^2-x^2} + \mathtt{C} \quad \text{per} \quad 0<x\le c\,.$$

(3) Si chiede di calcolare $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\sqrt{\frac{x+k}{x}}$. Si osserva che

$$\mathrm{d}x\sqrt{\frac{x+k}{x}} = \mathrm{d}x\,\frac{x+k}{\sqrt{x^2+k\,x}} = \mathrm{d}x\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{x^2+k\,x}} + \frac{p}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k\,x}} = \mathrm{d}\left(\sqrt{x^2+k\,x}\right) + \frac{p}{2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+k\,x}}\,.$$

Pertanto

$$\int \mathrm{d}x\sqrt{\frac{x+k}{x}} = \sqrt{x^2+k\,x} + \frac{p}{2}\ln\left|x+\frac{p}{2}+\sqrt{x^2+k\,x}\right| + \mathtt{C}\,.$$

I27 b.13 Risultano utili anche i seguenti esempi.

(1) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = \left\lfloor x =: \sinh t\,,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t\cosh t\,,\ t = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\rfloor =$
$\displaystyle\int \mathrm{d}t\,\frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t} = \int \mathrm{d}t\left(1+\frac{1}{\sinh^2 t}\right) = t - \frac{\cosh t}{\sinh t} + \mathtt{C} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \mathtt{C}\,.$

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\,x\sqrt{x^2-4x+3} &= \int \mathrm{d}x\,x\sqrt{x^2-4x+4-1} = \left\lfloor t := x-2\right\rfloor\\ &= \int \mathrm{d}t\,(t+2)\sqrt{t^2-1} = \left\lfloor t =: \frac{u}{2}+\frac{1}{2u},\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{d}u - \frac{1}{2u^2}\mathrm{d}u\right\rfloor\\ &= \int \mathrm{d}u\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{2u}+2\right)\left(\frac{u}{2}+\frac{1}{2u}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2u^2}\right) = \dots.\end{aligned} \tag{2}$$

(3) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{-x^2+2x+15}}{(x-1)^3} = \int \mathrm{d}x\,\frac{\sqrt{-x^2+2x-1+16}}{(x-1)^3} = \left\lfloor t := \frac{(x-1)}{4},\ \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{4}\right\rfloor =$
$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{4}\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3} = \left\lfloor u := \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}\right\rfloor = 2\int \mathrm{d}u\,\frac{u^2}{(u^2-1)^3} = \dots..$

I27 b.14 Proponiamoci ora la determinazione dei cosiddetti **integrali binomi**, integrali della forma

$$\mathsf{BI}_{m,n,p} := \int \mathrm{d}x\,x^m(a+bx^n)^p \qquad \text{ove} \quad m,n,p\in\mathbb{Q} \quad \text{e} \quad a,b\in\mathbb{R}_{nz}\,. \tag{1}$$

Quando p è un numero intero si ha un caso particolare degli integrali trattati in b02. In tal caso si introducono $m =: \frac{p_1}{q_1}$, $n =: \frac{p_2}{q_2}$, $q := \mathrm{mcm}(q_1,q_2)$, $d_1 = \frac{q}{q_1}$, $d_2 = \frac{q}{q_2}$ e la variabile $t := \sqrt[q]{x}$ in modo da ottenere $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\,q\,t^{q-1}$, fino a ottenere

$$\mathsf{BI}_{p_1/q_1,p_2/q_2,p} := \int \mathrm{d}t\ t^{q-1}t^{p_1 d_1}\left(a+bt^{p_2 d_2}\right)^p\,, \tag{2}$$

cioè, semplicemente, un integrale di un polinomio.

I27 b.15 Vediamo come questi integrali possono essere espressi in termini finiti anche quando assume un valore intero una delle due espressioni $\frac{m+1}{n}$ e $\frac{m+1}{n}+p$.

Quando è intero $\dfrac{m+1}{n}$, introduciamo $p =: \dfrac{p_3}{q_3}$ con p_3 e q_3 interi e la nuova variabile di integrazione t tale che sia $x = \left(\dfrac{t^{q_3}-a}{b}\right)^{1/n}$ e quindi $\mathrm{d}x = \dfrac{q_3\, t^{q_3-1}}{nb}\left(\dfrac{t^{q_3}-a}{b}\right)^{-1+1/n}$. Si ottiene di conseguenza

$$\mathsf{BI}_{m,n,p_3/q_3} = \frac{q_3}{nb}\int \mathrm{d}t\; t^{p_3+q_3-1}\left(\frac{t^{q_3}-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} , \tag{1}$$

cioè un integrale di una funzione razionale nella t.

I27 b.16 Quando è intero $\dfrac{m+1}{n} + p$, si introducono ancora gli interi p_3 e q_3 tali che sia $p = \dfrac{p+3}{q_3}$ e la nuova variabile di integrazione t tale che sia $x = \left(\dfrac{t^{q_3}-b}{a}\right)^{-1/n}$ e quindi $\mathrm{d}x = -\dfrac{q_3\, t^{q_3-1}}{n\, a}\left(\dfrac{t^{q_3}-b}{a}\right)^{-1-1/n}$. Di conseguenza si giunge a

$$\mathsf{BI}_{m,n,p_3/q_3} = -\frac{q_3}{n\, a}\int \mathrm{d}t\; t^{p_3+q_3-1}\left(\frac{t^{q_3}-b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1} , \tag{1}$$

cioè ancora un integrale di una funzione razionale nella t.

Occorre segnalare che Chebyshev ha dimostrato che quando nessuna delle tre espressioni p, $\dfrac{m+1}{n}$ e $P + \dfrac{m+1}{n}$ fornisce un valore intero l'integrale dato non si può esprimere mediante funzioni algebriche e trascendenti elementari.

I27 c. integrazione di funzioni trascendenti elementari

I27 c.01 Ricordiamo che per funzioni trascendenti elementari intendiamo le funzioni esponenziali, le funzioni logaritmiche loro inverse, le funzioni trigonometriche ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, ...) con le loro inverse e le funzioni iperboliche ($\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$, ...) con le corrispondenti inverse.

Segnaliamo inoltre che tutte queste funzioni si possono vantaggiosamente studiare come funzioni di variabile complessa, anche se questo comporta alcune complicazioni associate alla nozione di funzione analitica [I38].

In questo ambito le funzioni trigonometriche e le funzioni iperboliche si vengono a confondere e ciascuna di esse si può utilmente considerare come combinazione lineare di funzioni esponenziali grazie a formule come

$$\cos x \;=\; \frac{\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x} + \mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh x \;=\; \frac{\mathsf{e}^{x} - \mathsf{e}^{-x}}{2} \quad .$$

Le funzioni trascendenti elementari compaiono in moltissime espressioni di interesse applicativo e risulta di grande utilità riuscire ad effettuare al meglio i calcoli che le riguardano.

Con la antiderivazione tutti gli integrali con integrandi razionali si possono esprimere con funzioni razionali e con le funzioni $\ln t$ ed $\arctan t$.

Purtroppo invece non si conoscono procedimenti generali per il calcolo degli integrali indefiniti che riguardano le funzioni trascendenti elementari.

Sono tuttavia ampiamente studiati metodi che consentono di trattare manualmente guidati da algoritmi significativi insiemi piuttosto estesi di integrali aventi come integrandi funzioni trascendenti elementari e in particolare funzioni trigonometriche.

I27 c.02 Il passaggio cruciale di ciascuna di queste calcoli consiste nella individuazione di una sostituzione della variabile di integrazione in grado di condurre a integrali di funzioni razionali.

Tutti gli integrali che mediante sostituzione si possono ricondurre ad integrali di funzioni razionali devono potersi porre nella forma $\int \mathrm{d}x\; \mathcal{R}(f(x))\, f'(x)$, dove ancora $\mathcal{R}$ denota una funzione razionale che nella pratica conviene esprimere come quoziente di due polinomi.
Introdotta la variabile $t := f(x)$, essendo $\mathrm{d}t \;=\; f'(x)\mathrm{d}x$, si viene ricondotti al calcolo di $\int \mathrm{d}t\; \mathcal{R}(t)$.

Conviene osservare che tutte le trascendenti elementari i cui integrali si possono ricondurre a integrali di integrandi razionali sono collegate, eventualmente nel campo complesso, alle funzioni esponenziali, funzioni per le quali la differenziazione non porta a nuovi tipi di funzioni: $\mathrm{d}\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;=\; \mathrm{d}x\;\alpha\,\mathsf{e}^{\alpha x}$.

Procediamo dunque a presentare alcuni di questi procedimenti di razionalizzazione.

I27 c.03 Gli integrali della forma $\int \mathrm{d}x\, \cos x\, \mathcal{R}(\sin x)$ mediante la trasformazione $t := \sin x$, per la quale $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x\, \cos x$, sono ridotti agli integrali razionali $\int \mathrm{d}t\; \mathcal{R}(t)$.

Esempi:

(a) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \cos x\, \sin^3 x \;=\; \int \mathrm{d}t\; t^2 \;=\; \frac{1}{4}\, t^4 + \mathtt{C} \;=\; \frac{1}{4}\, \sin^4 x + \mathtt{C}$.

(b) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \cot x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\cos x}{\sin x} \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \ln|t| + \mathtt{C} \;=\; \ln|\sin x| + \mathtt{C}$.

(c) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\frac{1+\sin x}{1+\sin^2 x}\cos x \;=\; \int \mathrm{d}t\,\frac{1+t}{1+t^2} \;=\; \int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+\int \mathrm{d}t\,\frac{t}{1+t^2}+\mathtt{C}$

$\displaystyle\qquad\qquad = \arctan t+\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+\mathtt{C} \;=\; \arctan(\sin x)+\frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)+\mathtt{C}\;.$

Ai precedenti integrali si riconducono anche gli integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}(\sec x) \;=\; \int \mathrm{d}x\,,\mathcal{R}\left(\frac{1}{\sin x}\right)\;.$$

I27 c.04 Gli integrali della forma $\displaystyle\int \mathrm{d}x\;\sin x\,\mathcal{R}(\cos x)$ adottando la trasformazione $t := \cos x$ e la conseguente $\mathrm{d}t \;=\; -\mathrm{d}x\,\sin x$, sono ridotti agli integrali razionali $\displaystyle -\int \mathrm{d}t\;\mathcal{R}(t)\;.$

Per esempio $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\tan x \;=\; \int \mathrm{d}x\,\frac{\sin x}{\cos x} \;=\; -\int\frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \ln|t|+\mathtt{C} \;=\; \ln|\cos x|+\mathtt{C}\;.$

Ai precedenti integrali si riconducono anche gli integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}(\csc\,x) \;=\; \int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}\left(\frac{1}{\cos\,x}\right)\;.$$

I27 c.05 Gli integrali della forma $\displaystyle\int \mathrm{d}x\;\mathcal{R}(\tan x)$ applicando la trasformazione $t := \tan x$, per la quale $\displaystyle\mathrm{d}t \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \;=\; (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$, ossia $\displaystyle\mathrm{d}x \;=\; \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, sono ridotti agli integrali razionali della forma $\displaystyle -\int \mathrm{d}t\;\frac{\mathcal{R}(t)}{1+t^2}\;.$

Esempi:

(a) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\,\cos x} \;=\; \int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,\frac{\cos x}{\sin x} \;=\; \int \mathrm{d}\,\tan x\,\frac{1}{\tan x} \;=\; \int\frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \ln|t|+\mathtt{C}=\ln|\tan x|+\mathtt{C}\;.$

(b) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a\,\sin^2 x+b\,\cos^2 x} \;=\; \int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,\frac{1}{a\,\tan^2 x+b} \;=\; \int\frac{\mathrm{d}t}{a\,t^2+b}\;.$

Questo integrale razionale va calcolato in dipendenza dei particolari valori dei parametri a e b.

(c) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\tan^3 x \;=\; \int \mathrm{d}x\,(1+\tan^2 x)\,\frac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x} \;=\; \int \mathrm{d}t\,(t^3+t^5) \;=\; \frac{t^4}{4}+\frac{t^6}{6}+\mathtt{C}\;.$

Osserviamo che ai precedenti integrali si riconducono anche gli integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}(\cot\,x) \;=\; \int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}\left(\frac{1}{\tan\,x}\right)\;.$$

I27 c.06 Gli integrali delle funzioni razionali di $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ e $\tan x$ si possono ridurre a integrali di funzioni razionali servendosi delle identitá trigonometriche

$$\sin^2 x \;=\; \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x} \qquad , \qquad \cos^2 x \;=\; \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

e della sostituzione $t := \tan x$ con la conseguente $\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{d}x\,\left(1+\tan^2 x\right)$. Si ha dunque la formula di razionalizzazione

$$\int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}\left(\sin^2 x,\cos^2 x,\tan\,x\right) \;=\; \int \mathrm{d}t\;\frac{1}{1+t^2}\,\mathcal{R}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\,,\,\frac{1}{1+t^2}\,,\,t\right)\quad.$$

I27 c.07 I casi in cui la funzione integranda sia il prodotto di una potenza intera positiva di $\sin x$ per una potenza intera positiva di $\cos x$ si trattano piuttosto agevolmente.

Distinguendo i casi relativi alla parità o disparità delle potenze delle due funzioni si hanno i seguenti sviluppi:

$$\int \mathrm{d}x\, \sin^{2k+1} x\, \cos^m x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \sin x\, (1-\cos^2 x)^k \cos^m x = \left\lfloor\!\!\left\lfloor\, t := \cos x \,\right\rfloor\!\!\right\rfloor \;=\; -\int \mathrm{d}t\, (1-t^2)^k\, t^m \;,$$

$$\int \mathrm{d}x\, \sin^m x\, \cos^{2k+1} \;=\; \int \mathrm{d}x\, \cos x\, \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \;=\; \left\lfloor\!\!\left\lfloor\, t := \sin x \,\right\rfloor\!\!\right\rfloor \;=\; \int \mathrm{d}t\, t^m\, (1-t^2)^k \;,$$

$$\int \mathrm{d}x\, \sin^{2h} x\, \cos^{2k} x \;=\; \left\lfloor\!\!\left\lfloor\, \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ u := 2x \,\right\rfloor\!\!\right\rfloor$$
$$= \frac{1}{2^{h+k+1}} \int \mathrm{d}u\, (1-\cos u)^h\, (1+\cos u)^k \;.$$

L'integrale ottenuto porta a una combinazione lineare di integrali della forma $\displaystyle\int \mathrm{d}x\, \cos^m x$, casi particolari di quelli che stiamo studiando, e riguardanti potenze sostanzialmente dimezzate.
Per questi è utile tenere presenti le due formule che seguono

$$\int \mathrm{d}x\ \cos^{2p} x \;=\; \frac{1}{4} \int \mathrm{d}u\, (1+\cos u)^p \quad ,$$

$$\int \mathrm{d}x\, \cos^{2p+1} x \;=\; \int \mathrm{d}x\, \cos x\, (1-\sin^2 x)^p \;=\; \int \mathrm{d}t\, (1-t^2)^p \quad ,$$

questo essendo il semplice integrale di un polinomio.

I27 c.08 Consideriamo i casi più generali degli integrandi dati dal prodotto di una potenza razionale di $\sin x$ per una potenza razionale di $\cos x$. Per essi:

$$\int \mathrm{d}x\, \sin^u x\, \cos^v x \;=\; \left\lfloor\!\!\left\lfloor\, w := \sin x \;,\; \cos x \;=\; \sqrt{1-w^2} \;,\; \mathrm{d}x\, \cos x \;=\; \mathrm{d}w \,\right\rfloor\!\!\right\rfloor \;=\; \int dw\, w^u\, (1-w^2)^{\frac{v-1}{2}} \;,$$

cioè si ottengono integrali binomi. Per quanto visto in b12 e b13, dato che $\dfrac{u+1}{2} + \dfrac{v-1}{2} = \dfrac{u+v}{2}$, si conclude che l'integrale in esame si può razionalizzare sse è un intero uno dei numeri

$$\frac{v-1}{2} \qquad , \qquad \frac{u+1}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{u+v}{2} \;.$$

Si osserva che la razionalizzazione è garantita quando sia u che v sono numeri interi.

I27 c.09 Per integrali di funzioni razionali nella $\sin x$ e/o nella $\cos x$, in alternativa alle manipolazioni precedenti, possono essere preferibili manovre che si basano sulle identitá trigonometriche

$$\sin x \;=\; \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad , \qquad \cos x \;=\; \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \tag{1}$$

e sulla sostituzione $t := \tan\dfrac{x}{2}$, dalla quale segue $\mathrm{d}t \;=\; \mathrm{d}x\, \dfrac{1}{2}\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)$.
In tal modo si giunge a integrali di funzioni razionali della forma

$$\int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}(\sin x, \cos x) \;=\; \int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right) = \int \mathrm{d}t\, \mathcal{R}\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} \;. \tag{2}$$

Esempi:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \;=\; \int \mathrm{d}t\, \frac{2t}{1+t^2}\, \frac{1+t^2}{2t} \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \;=\; \ln|t| + \mathtt{C} \;=\; \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \mathtt{C} \;. \tag{3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} \;=\; \int \frac{\mathrm{d}(x+\pi/2)}{\sin(x+\pi/2)} \;=\; \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \;+\; \mathtt{C} \;. \tag{4}$$

I27 c.10 Esaminiamo altri esempi.

$$\begin{aligned}(1)\qquad \int \mathrm{d}x\,\frac{1}{\sin x+\cos x} &= \left\lfloor t:=\tan\frac{x}{2},\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\right\rfloor = \int \mathrm{d}t\,\frac{2}{-t^2+2t+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-1+\sqrt{2}\right|-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-1-\sqrt{2}\right|+\mathtt{C} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\tan^2\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+\mathtt{C}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\qquad \int \mathrm{d}x\ \frac{1}{a\cos x+b\sin x+c} &= 2\int \mathrm{d}t\ \frac{1}{1+t^2}\,\frac{1+t^2}{a(1-t^2)+b\,2t+c(1+t^2)}\\ &= 2\int\frac{\mathrm{d}t}{(c-a)t^2+2bt+c+a}\end{aligned}$$

L'integrale al quale si è giunti va calcolato in base ai valori specifici dei parametri.

$$\begin{aligned}(3)\qquad \int \mathrm{d}x\,\frac{\cos^2 x+\tan x}{\sin^4 x} &= \left\lfloor t:=\tan x,\ \mathrm{d}t=(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x\right\rfloor =\\ &= \int \mathrm{d}t\,\frac{1}{t}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4} = \ln|t|-\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{3t^3} = -\ln|\cot x|-\frac{1}{2}\cot^2 x-\frac{1}{3}\cot^3 x+\mathtt{C}\end{aligned}\ .$$

I27 c.11 Per il calcolo di integrali delle forme

$$\int \mathrm{d}x\,\cos\,\alpha x\,\sin\,\beta x \quad , \quad \int \mathrm{d}x\,\cos\,\alpha x\,\cos\,\beta x \quad , \quad \int \mathrm{d}x\,\sin\,\alpha x\,\sin\,\beta x$$

risultano utili le seguenti formule di scomposizione

$$\cos\,ax\,\cos\,bx=\frac{1}{2}\,[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x]\ ,$$

$$\sin\,ax\,\sin\,bx=\frac{1}{2}\,[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x]\ ,$$

$$\cos\,ax\,\sin\,bx=\frac{1}{2}\,[\sin(a+b)x-\sin(a-b)x]\ .$$

Mentre quando $a=\pm b$ gli integrali si riducono a casi più semplici già visti, nel caso sia $a\neq\pm b$ abbiamo

$$\int \mathrm{d}x\,\cos\,ax\,\cos\,bx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a+b)x}{a+b}+\frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right]+\mathtt{C}\ ,$$

$$\int \mathrm{d}x\,\cos\,ax\,\cos\,bx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(a-b)x}{a-b}-\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right]+\mathtt{C}\ ,$$

$$\int \mathrm{d}x\,\cos\,ax\,\cos\,bx = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a-b)x}{a-b}-\frac{\cos(a+b)x}{a+b}\right]+\mathtt{C}\ .$$

I27 c.12 Si voglia calcolare $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a\,\sin\,x+b\,\cos\,x}$ limitandosi a valori della variabile per i quali il denominatore sia sempre $a\,\sin\,x+b\,\cos\,x\neq 0$.

Un procedimento consiste nel considerare $\langle a,b\rangle$ come la coppia di coordinate cartesiane di un punto del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e nell'esprimere queste mediante le coordinate polari $r:=\sqrt{a^2+b^2}$ e $\theta:=\arctan\,\dfrac{b}{a}$.
Essendo $a\,\sin\,x+b\,\cos\,x = r\,(\sin\,x\,\cos\theta+\cos\,x\,\sin\theta) = r\,\sin(x+\theta)$ si ha

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a\,\sin\,x+b\,\cos\,x} = \frac{1}{r}\int\frac{d(x+\theta)}{\sin(x+\theta)}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\ln\tan\,\frac{x+\theta}{2}+\mathtt{C}\ .$$

I27 c.13 Un'altra formula trigonometrica consente di ricondurre a un caso precedente il seguente integrale, che ancora ci limitiamo a richiedere per valori della x per i quali il denominatore non si annulla.

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+b\,\cos\,x} &= \int \frac{d(2\xi)}{a+b\,\cos\,2\xi} = 2\int \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\sin^2\xi+\cos^2\xi)+b(\cos^2\xi-\sin^2\xi)} \\ &= 2\int \frac{\mathrm{d}\xi}{(a-b)\sin^2\xi+(a+b)\cos^2\xi}\end{aligned} \tag{1}$$

Questo integrale si può razionalizzare con il procedimento visto in c07 ottenendo

$$\left\lfloor t := \tan\xi\ ,\ \mathrm{d}\xi\ =\ \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right\rfloor\quad 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\frac{1+t^2}{(a-b)t^2+(a+b)}\ =\ 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(a-b)\,t^2+(a+b)}\ . \tag{2}$$

Ad un integrale della forma precedente si riconduce anche il seguente, più generale dei precedenti.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{A\,\sin\,x+B\,\cos\,x+C}\ =\ \left\lfloor R := \sqrt{A^2+B^2}\ ,\ \Theta := \arctan\,\frac{A}{B}\right\rfloor =\ \int \frac{\mathrm{d}x}{C+R\,\cos(x-\Theta)}\ . \tag{3}$$

I27 c.14 Consideriamo ancora gli integrali della forma $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\sin^p x\,\cos^q x$ osservando che si possono trattare sia mediante il procedimento descritto in c08 che con quello di c09 .

Un'altra via talora vantaggiosa chiede che le potenze del seno e del coseno siano espresse, grazie alle formule di Eulero, come combinazioni lineari di seni e coseni di multipli interi dell'angoli x in modo da condurre a combinazioni lineari di integrali delle forme discusse in c11 .

Per ogni $p\in\mathbb{P}$ abbiamo

$$\begin{aligned}2^p\,\cos^p x\ &=\ (\mathsf{e}^{\mathsf{i}\,x}+\mathsf{e}^{-\mathsf{i}\,x})^p\ =\ \sum_{h=0}^{p}\binom{p}{h}\,\mathsf{e}^{(p-h)\,\mathsf{i}\,x}\,\mathsf{e}^{-h\,\mathsf{i}\,x}\ = \\ &\binom{p}{0}\,\left[\mathsf{e}^{p\,\mathsf{i}\,x}+\mathsf{e}^{-p\,\mathsf{i}\,x}\right]+\binom{p}{1}\,\left[\mathsf{e}^{(p-1)\,\mathsf{i}\,x}+\mathsf{e}^{-(p-1)\,\mathsf{i}\,x}\right]+\binom{p}{2}\,\left[\mathsf{e}^{(p-2)\,\mathsf{i}\,x}+\mathsf{e}^{-(p-2)\,\mathsf{i}\,x}\right]+\ \ldots\end{aligned} \tag{1}$$

A questo punto occorre distinguere se p è pari, uguale a $2\,r$, o dispari, uguale a $2\,r+1$.

$$2^{2r-1}\,\cos^{2r}x\ =\ \sum_{h=0}^{r}\binom{2r}{h}\,\cos(2r-2h)x\ ; \tag{2}$$

$$2^{2r}\,\cos^{2r+1}x\ =\ \sum_{h=0}^{r}\binom{2r+1}{h}\,\cos(2r+1-2h)x\ . \tag{3}$$

Similmente per ogni $q\in\mathbb{P}$ e distinguendo se q è pari, uguale a $2\,s$, o dispari, uguale a $2\,s+1$, si trovano le formule

$$(-1)^s\,2^{2s-1}\,\sin^{2s}x\ =\ \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{2r}{h}\,\sin(2s-2k)x\ ; \tag{4}$$

$$(-1)^s\,2^{2s}\,\sin^{2s+1}x\ =\ \sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{2s+1}{k}\,\sin(2s+1-2k)x\ . \tag{5}$$

Queste formule consentono di scomporre gli integrali in esame in una combinazione lineare di integrali della forma trattata in c11 .

Per esempio, dato che

$$\sin^2 x\,\cos^3 x\ =\ \frac{1-\cos\,2x}{2}\,\frac{\cos\,3x+3\,\cos\,x}{4}\ =\ \frac{-\cos\,5x-\cos\,3x+2\,\cos\,x}{16}\ ,$$

si ottiene

$$(6)\qquad \begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \sin^2 x\,\cos^3 x\ &=\ -\frac{1}{16}\int \mathrm{d}x\ \cos 5\,x-\frac{1}{16}\int \mathrm{d}x\ \cos 3\,x+\frac{1}{8}\int \mathrm{d}x\ \cos x\\ &=\ -\frac{\sin 5\,x}{80}-\frac{\sin 3\,x}{48}+\frac{\sin x}{8}+\mathtt{C}\end{aligned}\ .$$

I27 c.15 Trasformazioni molto semplici consentono di razionalizzare integrali con alcuni tipi di integrandi che coinvolgono funzioni esponenziali. Per queste abbiamo

$$(1)\qquad \int \mathrm{d}x\,\mathcal{R}(\mathtt{e}^x)\ =\ \Big\lfloor_{\mathtt{N}}\, t:=\mathtt{e}^x\quad,\quad x=\ln t\quad,\quad \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}\,\Big\rfloor_{\mathtt{N}}=\int \mathrm{d}t\ \frac{\mathcal{R}(t)}{t}\ .$$

I27 c.16 Conveniamo ancora di denotare polinomi nella variabile x attraverso scritture come $\boldsymbol{P}(x)$ e come sue varianti della forma $\boldsymbol{P}_\alpha(...)$.

Per gli integrali di un prodotto di un polinomio per una funzione esponenziale reale serve la seguente formula:

$$\int \mathrm{d}x\,\mathtt{e}^{\alpha x}\,\boldsymbol{P}(x)\ =\ \Big\lfloor_{\mathtt{N}}\ \text{integrando per parti}\ \Big\rfloor_{\mathtt{N}}\ =\ \frac{1}{\alpha}\,\boldsymbol{P}(x)\,\mathtt{e}^{\alpha x}-\frac{1}{\alpha}\int \mathrm{d}x\,\mathtt{e}^{\alpha x}\,\boldsymbol{P}'(x)\ .$$

Questa riconduce il problema alla integrazione di un integrando simile, ma con un polinomio di grado diminuito di 1. Applicando ripetutamente questa manovra di riduzione del grado del fattore polinomiale, se m denota il grado di $\boldsymbol{P}(x)$, si ottiene la seguente formula risolutiva:

$$\int \mathrm{d}x\,\mathtt{e}^{\alpha x}\,\boldsymbol{P}(x)\ =\ \frac{\mathtt{e}^{\alpha x}}{\alpha}\left[\boldsymbol{P}(x)-\frac{\boldsymbol{P}'(x)}{\alpha}+\frac{\boldsymbol{P}''(x)}{\alpha^2}-...+(-1)^m\,\frac{\boldsymbol{P}^{(m)}(x)}{\alpha^m}\right]+\mathtt{C}\ .$$

Infatti le manovre di riduzione procedono fino all'ultima derivata nonnulla del polinomio dato, cioè fino all'addendo $\dfrac{m!\,p_0}{\alpha^m}$, ove p_0 denota il termine costante di $\boldsymbol{P}(x)$.

Ad integrali del tipo precedente si possono ricondurre gli integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\,\boldsymbol{P}(x,\mathtt{e}^{\alpha x})\ ,$$

in quanto il polinomio integrando, se m è il suo grado nel suo secondo argomento, si scompone nella somma di espressioni della forma $\boldsymbol{P}_k(x)\,\mathtt{e}^{k\alpha x}$, con $k=0,1,2,...,m$.

I27 c.17 Si possono risolvere coppie di integrali concernenti il prodotto di un polinomio nella variabile di integrazione x per le funzioni aventi la forma $\sin\alpha x$ oppure la forma $\cos\alpha x$.
Per questo serve la seguente coppia di uguaglianze ottenute da una integrazione per parti:

$$(1)\qquad \int \mathrm{d}x\,\boldsymbol{P}(x)\,\cos\alpha x\ =\ \boldsymbol{P}(x)\,\frac{\sin\alpha x}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int \mathrm{d}x\,\sin\alpha x\,\boldsymbol{P}'(x)\ ,$$

$$(2)\qquad \int \mathrm{d}x\,\boldsymbol{P}(x)\,\sin\alpha x\ =\ \boldsymbol{P}(x)\,\frac{\cos\alpha x}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}\int \mathrm{d}x\,\cos\alpha x\,\boldsymbol{P}'(x)\ .$$

Queste due formule portano a una coppia di integrali simili, ma relativi a un polinomio avente grado $deg(\boldsymbol{P}(x))-1$.
Esse quindi si possono applicare ripetutamente fino ad arrivare alla coppia di integrali delle semplici funzioni seno e coseno. Le formule conclusive forniscono, risp.,

$$(3)\qquad \int \mathrm{d}x\ \boldsymbol{P}(x)\,\cos\alpha x\ =\ \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\left[\boldsymbol{P}(x)-\frac{\boldsymbol{P}^{(2)}}{\alpha^2}+\frac{\boldsymbol{P}^{(4)}}{\alpha^4}-\ \ldots\right]+\mathtt{C}\ ,$$

$$\int \mathrm{d}x\, \boldsymbol{P}(x)\, \sin\alpha x \;=\; -\frac{\cos\alpha x}{\alpha}\left[\frac{\boldsymbol{P}^{(1)}}{\alpha}(x) - \frac{\boldsymbol{P}^{(3)}}{\alpha^3} + \frac{\boldsymbol{P}^{(5)}}{\alpha^5} - \;\ldots\right] + \mathtt{C}\;. \tag{4}$$

Anche in queste formule le somme si concludono quando si ottengono come derivate dei polinomi nulli.

I27 c.18 Arricchiamo le formule precedenti per affrontare il calcolo di integrali concernenti prodotti di una potenza della variabile di integrazione x, di un'esponenziale e di una funzione seno e/o coseno. Ancora procediamo con coppie di integrali e di loro riduzioni fornite da coppie di uguaglianze ottenute con operazioni di integrazione per parti le quali permettono di passare a espressioni simili ma relative a un fattore polinomiale il cui grado si abbassa di uno.

Iniziamo con le sguenti osservazioni:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x\right) \;&=\; \mathrm{d}x\,\mathsf{e}^{\alpha x}(\alpha\,\cos\beta x - \beta\,\sin\beta x)\;,\\ \mathrm{d}\left(\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x\right) \;&=\; \mathrm{d}x\,\mathsf{e}^{\alpha x}(\beta\,\cos\beta x + \alpha\,\sin\beta x)\;.\end{aligned}$$

Da queste due relazioni lineari si ricavano le due espressioni

$$\mathrm{d}x\,\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x \;=\; \frac{\beta\,\mathrm{d}(\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x) + \alpha\,\mathrm{d}(\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}x\,\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x \;=\; \frac{\alpha\,\mathrm{d}(\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x) - \beta\,\mathrm{d}(\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;. \tag{2}$$

Queste implicano

$$\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\beta\,\sin\beta x + \alpha\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;, \tag{3}$$

$$\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\alpha\,\sin\beta x - \beta\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;, \tag{4}$$

Vanno utilizzate anche le seguenti uguaglianze riguardanti derivate parziali [I29]:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;=\; x\,\mathsf{e}^{\alpha x}\;,\quad \frac{\partial^2}{\partial^2\alpha}\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;=\; x^2\,\mathsf{e}^{\alpha x}\;,\quad \ldots\;,\quad \frac{\partial^k}{\partial^k\alpha}\,\mathsf{e}^{\alpha x} \;=\; x^k\,\mathsf{e}^{\alpha x}\;.$$

Di conseguenza derivando (3) e (4) n volte rispetto alla variabile α si ottengono le relazioni:

$$x^n\,\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x \;=\; {D_\alpha}^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\beta\,\sin\beta x + \alpha\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,D_\alpha^n\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\beta\,\sin\beta x + \alpha\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;, \tag{5}$$

$$x^n\,\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x \;=\; {D_\alpha}^n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\alpha\,\sin\beta x - \beta\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,D_\alpha^n\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\alpha\,\sin\beta x - \beta\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;. \tag{6}$$

Integrando membro a membro si ottengono le formule richieste

$$\int \mathrm{d}x\,x^n\,\mathsf{e}^{\alpha x}\,\cos\beta x \;=\; {D_\alpha}^n\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\beta\,\sin\beta x + \alpha\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;, \tag{7}$$

$$\int \mathrm{d}x\,x^n\,\mathsf{e}^{\alpha x}\,\sin\beta x \;=\; {D_\alpha}^n\,\frac{\mathsf{e}^{\alpha x}(\alpha\,\sin\beta x - \beta\,\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\;. \tag{8}$$

I27 c.19 Si possono avere notevoli semplificazioni nei casi di integrandi eprimibili mediante le funzioni $\sinh x := \dfrac{\mathsf{e}^x - \mathsf{e}^{-x}}{2}$ e $\cosh x := \dfrac{\mathsf{e}^x + \mathsf{e}^{-x}}{2}$ e mediante loro polinomi, come nei casi rappresentati dalle uguaglianze seguenti

$$\int \mathrm{d}x\,\sinh x\,\mathcal{R}(\cosh x) \;=\; \left\lfloor\, t := \cosh x\;,\; \mathrm{d}t \;=\; \mathrm{d}x\,\sinh x \,\right\rfloor \;=\; \int \mathrm{d}t\,\mathcal{R}(t)\;, \tag{1}$$

$$\int \mathrm{d}x \, \cosh x \, \mathcal{R}(\sinh x) \;=\; \lfloor_{\mathsf{N}} \, t := \sinh x \;,\; \mathrm{d}t \;=\; \mathrm{d}x \, \cosh x \, \rfloor_{\mathsf{N}} \;=\; \int \mathrm{d}t \, \mathcal{R}(t) \;. \tag{2}$$

Trasformazioni simili possono essere adottate per integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x \, \mathcal{R}(\mathsf{e}^x) \;=\; \int \mathrm{d}x \, \frac{\mathcal{R}(\mathsf{e}^x)}{\mathsf{e}^x} \mathsf{e}^x ,$$

I27 d. funzioni definite mediante integrali

I27 d.01 I procedimenti di integrazione visti in questo capitolo riguardano integrali che si dicono **integrali espressi in forma chiusa elementare**, ossia espressi come composizioni razionali di funzioni algebriche e di trascendenti elementari.

Vi sono invece integrali indefiniti che portano a funzioni primitive per le quali si dimostra impossibile trovare espressioni in forma chiusa elementare.

Talune di queste funzioni presentano grande interesse teorico e applicativo e vanno considerate funzioni speciali con peculiarità che è opportuno studiare da vari punti di vista.

Qui introduciamo alcune di queste funzioni senza analizzarle in modo esauriente, ma limitandoci a enunciare qualche loro proprietà che non dimostriamo e a segnalare qualche loro applicazione.

In effetti uno studio approfondito delle funzioni speciali richiede vari strumenti che saranno introdotti più oltre, in particolare le funzioni analitiche [I38] e il calcolo infinitesimale di funzioni di più variabili [I41, I44, ...].

I27 d.02 Si dice **funzione degli errori** la funzione definita come

$$\operatorname{erf} x \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}t \;\mathsf{e}^{-t^2} \;. \tag{1}$$

Come ogni funzione definita come integrale da 0 ad x di una funzione pari, la erf x è una funzione dispari, cioè $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$.

Questa funzione gioca un ruolo molto importante nella teoria delle probabilità. Per questo va segnalato che è finito il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{erf} x \;=\; \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \;\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathsf{e}^{-t^2} \;=\; 1 \;, \tag{2}$$

proprietà che consente di servirsi della $\operatorname{erf}(x)$ come funzione di distribuzione.

In effetti la importante **funzione di distribuzione normale** relativa alla media μ e alla deviazione standard σ si definisce con un integrale improprio [I26b] e si collega alla $\operatorname{erf}(x)$ mediante la seguente relazione

$$NrmD_{\mu,\sigma} \;:=\; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \;\mathsf{e}^{-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \;=\; \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right) \;. \tag{3}$$

Un'altra funzione speciale strettamente collegata alla funzione degli errori è la cosiddetta **funzione degli errori complementare**

$$\operatorname{erfc} x \;:=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \mathrm{d}t\, \mathsf{e}^{-t^2} \;=\; 1 - \operatorname{erf} x \;. \tag{4}$$

I27 d.03 Si dicono **integrali di Fresnel** le funzioni

$$\operatorname{Ci}(x) \;:=\; \int_0^x \mathrm{d}t \;\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{Si}(x) \;:=\; \int_0^x \mathrm{d}t \;\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\,t^2\right) \;. \tag{1}$$

Queste funzioni sono state introdotte in ottica da Augustin-Jean Fresnel per studiare secondo il modello ondulatorio fenomeni di interferenza.

Evidentemente si tratta di funzioni dispari, cioè $\forall x \in \mathbb{R} \,:\, \operatorname{Ci}(-x) = -\operatorname{Ci}(x)\;,\; \operatorname{Si}(-x) = -\operatorname{Si}(x)$.
Inoltre si trova $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Ci}(x) \;=\; \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Si}(x) \;=\; \dfrac{1}{2}$.

Talvolta vengono definiti come integrali di Fresnel le seguenti varianti

$$\mathrm{Ci}_1(x) \;:=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}\,\tau\ \cos^2(\tau^2) \;=\; \mathrm{Ci}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\right) \qquad \text{e} \tag{2}$$

$$\mathrm{Si}_1(x) \;:=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \mathrm{d}\,\tau\ \sin^2(\tau^2) \;=\; \mathrm{Si}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x\right). \tag{3}$$

Altre funzioni collegate per omotetia di Ci e Si sono

(4)

$$\mathrm{Ci}_2(x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{d}\,\theta\,\frac{\cos\,\theta}{\sqrt{\theta}} \;=\; \mathrm{Ci}\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Si}_2(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{d}\,\theta\,\frac{\sin\,\theta}{\sqrt{\theta}} = \mathrm{Si}\left(\sqrt{\frac{2\,x}{\pi}}\right)\ .$$

I27 d.04 Enunciamo anche un teorema in conseguenza del quale si possono individuare funzioni antiderivate date da espressioni di una particolare forma o al contrario è possibile stabilire che certe funzioni antiderivate non possono essere fornite da espressioni relativamente semplici.

(1) Teorema (**teorema di Liouville**) Siano $r(x)$ ed $s(x)$ funzioni razionali (che potrebbero anche assumere valori complessi), dove $r(x)$ non è costante e dove $s(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con $p(x)$ e $q(x)$ polinomi coprimi.

Se $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,\mathsf{e}^{r(x)}\,s(x)$ è dato da una espressione chiusa mediante funzioni elementari, deve avere la forma $\mathsf{e}^{r(x)}\,T(x) + \mathtt{C}$ con $T(x)$ funzione razionale.

Se l'antiprimitiva è esprimibile nella forma $\mathsf{e}^{r(x)}\,\dfrac{p(x)}{q(x)}$, deve valere l'uguaglianza

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\mathsf{e}^{r(x)}\,\frac{p(x)}{q(x)}\right] \;=\; \mathsf{e}^{r}(x)\,Q(x),\ \text{ossia }\ \mathsf{e}^{r(x)}\left[\frac{p(x)}{q(x)}\,r'(x) + \frac{p'(x)\,q(x) - p(x)\,q'(x)}{q(x)^2}\right] \;=\; \mathsf{e}^{r(x)}\,T(x).$$

Queste condizioni comportano l'uguaglianza

$$\left[p'(x) + r'(x)\,p(x) - T(x)\,q(x)\right]\,q(x) \;=\; p(x)\,q'(x)\ . \tag{1}$$

Dunque $\mathsf{e}^{r(x)}\,s(x)$ ha una primitiva data da espressione mediante funzioni elementari sse esistono due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ coprimi che rientrano nelle predette.

I27 d.05 Un esempio negativo: la funzione $\mathsf{e}^{\alpha\,x^2}$ non possiede antiderivata esprimibile elementarmente. Infatti la d04(1) avrebbe la forma

$$\left[p'(x) + 2\alpha\,p(x) - q(x)\right]\,q(x) \;=\; p(x)\,q'(x)\ ,$$

ma questa uguaglianza non ha soluzioni.

Infatti se $\overline{x}$ fosse uno zero di molteplicità $m > 0$ di $q(x)$ avremmo $q(x) = (x-\overline{x})^m\,v(x)$ con $v(\overline{x}) \neq 0$; quindi sarebbe $q'(x) = (x-\overline{x})^{m-1}\,[m\,v(x) + (x-\overline{x})\,v'(x)]$ e di conseguenza per il primo membro della uguaglianza in esame $\overline{x}$ sarebbe zero di molteplicità $m-1$ per il secondo membro ($\overline{x}$ non può essere zero di $p(x)$ polinomio coprimo con $q(x)$), mentre sarebbe zero di molteplicità superiore o uguale ad m per il primo membro.

Supposto alternativamente $q(x)$ costante, si arriverebbe all'equazione $p'(x) + 2\alpha\,x\,p(x) = q(x)$, ma anche questa equazione è priva di soluzioni poiché il primo membro è un polinomio di grado maggiore o uguale ad 1, mentre il secondo è una costante.

Ne consegue che la primitiva va studiata come funzione non esprimibile elementarmente; in effetti sono numerose le funzioni speciali definite come antiderivate.

I27 d.06 Altri integrali che utilizzando il teorema di Liouville, si dimostrano non esprimibili con funzioni elementari, sono i seguenti.

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{\sin\, x}{x} \quad , \quad \int \mathrm{d}x\, \frac{\cos\, x}{x} \quad , \quad \int_1^x \mathrm{d}t\, \frac{\mathsf{e}^t}{t} \ .$$

Segnaliamo inoltre la **funzione logaritmo integrale**, un'altra funzione speciale definita mediante un integrale improprio:

$$\mathrm{li}(x) \ := \ \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \ .$$

I27 e. integrali ellittici

I27 e.01 Ricordiamo che per curva piana algebrica si intende una curva esprimibile come insieme dei punti $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ che soddisfano un'equazione della forma $\mathcal{Q}(x,y)=0$, dove $\mathcal{Q}$ denota un polinomio in due variabili.

Esempi ben noti di curve algebriche sono le coniche, in particolare le ellissi, le parabole e le iperboli [G50] .

Nello studio di queste curve si incontrano integrali della forma $\int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right)$, ove $\boldsymbol{P}(x)$ denota un polinomio nella variabile di integrazione; tali integrali sono chiamati **integrali abeliani**.

Se $\boldsymbol{P}(x)$ ha grado minore o uguale a 2, come si è visto in b05, l'integrale si può esprimere mediante funzioni elementari. Si dimostra invece impossibile esprimere questi integrali mediante funzioni elementari quando $\boldsymbol{P}(x)$ ha grado maggiore o uguale a 3.

Ci proponiamo ora di dimostrare che tutti gli integrali della forma precedente con $\boldsymbol{P}(x)$ polinomio di terzo o quarto grado, funzioni chiamate da Legendre **integrali ellittici**, sono esprimibili mediante tre tipi di integrali che pertanto assumono grande importanza nello studio delle curve algebriche.

Limitiamoci inoltre a segnalare che ancor più impegnativo è lo studio degli integrali della forma precedente con $\boldsymbol{P}(x)$ di grado superiore al quarto, costruzioni chiamate **integrali iperellittici**.

I27 e.02 si osserva che il calcolo degli integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right) =: \mathsf{I} \qquad \text{con} \qquad \boldsymbol{P}(x) = c_3\, x^3 + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0 \ , \tag{1}$$

polinomio di grado 3, si può ricondurre al calcolo dell'integrale simile con il polinomio di quarto grado mediante la sostituzione della variabile $z := \dfrac{1}{x}$. Questa infatti conduce a

$$\mathsf{I} \;=\; \int -\left(\frac{\mathrm{d}z}{z^2}\right) \mathcal{R}\left(\frac{1}{z}, \frac{\sqrt{c_4\, z + c_3\, z^2 + c_2\, z^3 + c_1\, z^4}}{z^2}\right) \ . \tag{2}$$

I27 e.03 Gli integrali ellittici della forma e02(1) con il polinomio dotato di una radice doppia, diciamo della forma $\boldsymbol{P}(x) = (x-x_1)^2\,(d_2\, x^2 + d_1\, x + d_0)$, si riducono alla forma $\int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left((x-x_1)\sqrt{d_2\, x^2 + d_1\, x + d_0}\right)$ e quindi sono razionalizzabili con i procedimenti presentati in b06-b11.

Restano quindi da trattare i casi nei quali $\boldsymbol{P}(x)$ possiede 4 radici diverse.

I27 e.04 All'integrando di e02(1) si possono dare le forme che seguono

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right) \;&=\; \frac{\boldsymbol{P}_N\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right)}{\boldsymbol{P}_D\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right)} \;=\; \frac{\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}{\mathcal{C}(x) + \mathcal{D}(x)\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \\
&= \frac{\left(\mathcal{A}(x) + \mathcal{B}(x)\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right)\left(\mathcal{A}(x) - \mathcal{B}(x)\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right)}{C^2(x) - D^2(x)\,\boldsymbol{P}(x)} \qquad (1) \\
&= \frac{\mathcal{A}(x)\,\mathcal{C}(x) - \mathcal{B}(x)\,\mathcal{D}(x)\,\boldsymbol{P}(x)}{C^2(x) - D^2(x)\,\boldsymbol{P}(x)} + \frac{\mathcal{B}(x)\,\mathcal{C}(x) - \mathcal{A}(x)\,\mathcal{D}(x)\,\boldsymbol{P}(x)}{C^2(x) - D^2(x)\,\boldsymbol{P}(x)}\,\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \\
&= \frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{F}(x)} + \frac{\mathcal{G}(x)}{\mathcal{F}(x)}\,\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}
\end{aligned}$$

dove $\mathcal{A}(x)$, $\mathcal{B}(x)$, $\mathcal{C}(x)$, $\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{E}(x)$, $\mathcal{F}(x)$ e $\mathcal{G}(x)$ denotano polinomi nella x. Di conseguenza per l'integrale richiesto abbiamo

$$\int \mathrm{d}x\, \mathcal{R}\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right) \;=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{F}(x)} + \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{G}(x)}{\mathcal{F}(x)}\, \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\ . \tag{2}$$

Il primo dei due integrali nel secondo membro si calcola come descritto in :a .

Per quanto riguarda il secondo, occorre decomporre il quoziente di polinomi con un'espressione della seguente forma [a08, a09]

$$\frac{\mathcal{G}(x)}{\mathcal{F}(x)} \;=\; f_n\, x^n + f_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + f_1\, x + f_0 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{h=0}^{H_k} \frac{e_{k,h}}{(x - x_k)^h}\ . \tag{3}$$

Dunque bisogna affrontare il problema del calcolo degli integrali delle seguenti forme

$$\mathsf{H}_h \;:=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{x^h}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \quad \text{con} \quad h \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \mathsf{K}_h \;:=\; \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^h\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \quad \text{con} \quad h \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad r \in \mathbb{C}\ . \tag{4}$$

I27 e.05 Mostriamo che per qualsiasi $h \in \mathbb{N}$ l'integrale H_h si può esprimere come combinazione lineare dei primi quattro integrali, cioè di H_0, H_1, H_2 e H_3.

Scrivendo $\boldsymbol{P}(x) = p_4\, x^4 + p_3\, x^3 + p_2\, x^2 + p_1\, x + p_0$, abbiamo la catena di uguaglianze

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right) \;=\; k\, x^{k-1}\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)} + \frac{x^k\, \boldsymbol{P}(x)}{2\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \;=\; \frac{2\, k\, x^{k-1}\, \boldsymbol{P}(x) + x^k\, \boldsymbol{P}'(x)}{2\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \;= \tag{1}$$

$$(k+2)\, p_4\, \frac{x^{k+3}}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} + \left(k + \frac{3}{2}\right)\, p_3\, \frac{x^{k+2}}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} + (k+1)\, p_2\, \frac{x^{k+1}}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\, p_1\, \frac{x^k}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} + k\, p_0\, \frac{x^{k-1}}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\ .$$

Passando agli integrali indefiniti otteniamo

$$x^k\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)} \;=\; (k+2)\, p_4\, \mathsf{H}_{k+3} + \left(k + \frac{3}{2}\right)\, p_3\, \mathsf{H}_{k+2} + (k+1)\, p_2\, \mathsf{H}_{k+1} + k\, p_1\, \mathsf{H}_{k-1}\ .$$

Osserviamo che questa formula potrebbe ridursi per k piccolo e nel caso in cui $p_4 = 0$, cioè per integrali con $\boldsymbol{P}(x)$ di terzo grado. In ogni caso essa dice dice che il calcolo di ogni integrale H_h si può ridurre al calcolo di al più 4 integrali H_j con $j < h$, cioè l'asserto del paragrafo.

I27 e.06 Mostriamo ora come per ogni $h = 2, 3, 4, \ldots$ un integrale della forma

$$\mathsf{M}_h \;:=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}_h(x)}{(x-r)^h\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\ ,$$

nella quale $\mathcal{M}_h(x)$ denota un polinomio nella x, si può esprimere mediante integrali di forma simile M_j con $j < h$.

Consideriamo per primo il caso in cui r non è radice di $\boldsymbol{P}(x)$. Denotiamo con $\mathcal{Q}(x)$ il quoziente di $\boldsymbol{P}(x)$ ed $x - r$ e con ρ il corrispondente resto (diverso da 0), cioè scriviamo

$$\rho \;:=\; \boldsymbol{P}(x) - (x-r)\, \mathcal{Q}(x)\ .$$

Di conseguenza

$$\rho \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}_h(x)}{(x-r)^h\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \;=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}{(x-r)^h} - \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\, \mathcal{Q}(x)}{(x-r)^{h-1}\, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\ .$$

Mentre il secondo degli integrali ottenuti ha la forma richiesta, il primo può essere integrato per parti:

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\mathcal{Q}(x)}{(x-r)^{h-1}\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \;=\; -\frac{(x-r)^{h+1}}{h-1}\,\mathcal{M}(x)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)} + \frac{1}{2(h-1)}\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\boldsymbol{P}'(x) + 2\boldsymbol{P}(x)\mathcal{M}'(x)}{(x-r)^{h-1}\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\;,$$

ottenendo una funzione elementare e un integrale della forma voluta.

Consideriamo ora il caso in cui r è radice (semplice) di $\boldsymbol{P}(x)$. Per questo polinomio si può quindi scrivere

$$\boldsymbol{P}(x) \;=\; (x-r)^2\,\mathcal{Q}(x) + c\,(x-r)\;,$$

con $c \in \mathbb{C}_{nz}$. Da questa uguaglianza segue la relazione tra integrali

$$c\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)}{(x-x_1)^h\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \;=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}{(x-x_1)^{h+1}} \;-\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\mathcal{Q}(x)}{(x-x_1)^{h-1}\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\;.$$

Mentre il secondo integrale ottenuto ha la forma voluta, per il primo, introdotto $\boldsymbol{P}_1(x) := \dfrac{\boldsymbol{P}(x)}{x-x_1}$, si ottiene

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}{(x-x_1)^{h+1}} \;=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\sqrt{\boldsymbol{P}_1(x)}}{(x-x_1)^{h+1/2}} \;=\; \text{integrando per parti} \;=$$

$$-\frac{\mathcal{M}(x)\,\sqrt{\boldsymbol{P}_1(x)}}{(h-1/2)\,(x-x_1)^{h+1/2}} \;+\; \frac{1}{2\,h+1}\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\boldsymbol{P}_1{}'(x) + 2\,\mathcal{M}'(x)\,\boldsymbol{P}_1(x)}{(x-x_1)^{h-1/2}\,\sqrt{\boldsymbol{P}_1(x)}} \;=$$

$$-\frac{\mathcal{M}(x)\,\sqrt{\boldsymbol{P}_1(x)}}{(h-1/2)\,(x-x_1)^{h+1/2}} \;+\; \frac{1}{2\,h+1}\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{M}(x)\,\boldsymbol{P}_1{}'(x) + 2\,\mathcal{M}'(x)\,\boldsymbol{P}_1(x)}{(x-x_1)^{h-1}\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\;.$$

Ripetendo questa manovra si trova che ogni integrale della forma J_h si esprime con funzioni elementari e integrali della forma

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{N}(x)}{(x-x_1)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\;.$$

Per un integrale di questa forma, introdotto il polinomio $\mathcal{N}_1(x) := \dfrac{\mathcal{N}(x)}{x-r} + \nu$, si ottiene

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{N}(x)}{(x-x_1)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} \;=\; \int \mathrm{d}x\, \frac{\mathcal{N}_1(x)}{\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}} + \nu\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_1)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\;.$$

Dato che il primo dei precedenti integrali si esprime mediante gli integrali I_h, si può concludere che ogni integrale del tipo J_h si può esprimere mediante funzioni elementari, mediante integrali I_h e mediante integrali della forma

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_1)\,\sqrt{\boldsymbol{P}(x)}}\;.$$

I27 e.07 Mostriamo ora come ogni polinomio di quarto grado di cui sono note le quattro radici diverse

$$\boldsymbol{P}(x) \;=\; p_4\,(x-x_1)\,(x-x_2)\,(x-x_3)\,(x-x_4)\;,$$

introducendo una opportuna nuova variabile t si può porre sotto la forma

$$(1-k\,t^2)\,(1-k^2\,t^2)\;.$$

Come nuova variabile assumiamo quella data dalla sostituzione lineare

$$t \;:=\; \frac{A\,x+B}{x+D} \;=\; t(x) \qquad \text{per cui} \qquad x \;=\; \frac{-t\,D+B}{t-A}\;.$$

Scegliendo i parametri A, B e D in modo che sia

$$t(x_1) = 1 \ , \quad t(x_2) = -1 \ , \quad t(x_3) + t(x_4) = 0 \ .$$

Questo equivale alla risoluzione del sistema di equazioni in A, B e D

$$A\,x_1 + B = x_1 + D \ \ , \ \ A\,x_2 + B = -x_2 - D \ \ , \ \ \frac{A\,x_3 + B}{x_3 + D} + \frac{A\,x_4 + B}{x_4 + D} \ = \ 0 \ \ , \quad \text{ossia}$$

$$A\,(x_1{+}x_2){+}2\,B = x_1{-}x_2 \ \ , \ \ A\,(x_1{-}x_2) = 2\,D{+}(x_1{+}x_2) \ \ , \ \ 2\,x_3\,x_4\,A{+}(x_3{+}x_4)(B{+}A\,D){+}2\,B\,D \ = \ 0 \ .$$

cosa sempre fattibile senza difficoltà.

I27 e.08 Le considerazioni dei precedenti paragrafi d02-d07 consentono di affermare che tutti gli integrali della forma d05(1) $\displaystyle\int \mathrm{d}x \ \mathcal{R}\left(x, \sqrt{\boldsymbol{P}(x)}\right)$ si possono esprimere mediante funzioni elementari fornite da integrali ottenibili per razionalizzazione e da integrali delle seguenti forme

$$\int \mathrm{d}t \ \frac{t^h}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \quad \text{per} \quad h = 0, 1, 2, 3 \qquad \text{e} \qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{(t-r)\,\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}}$$

Ma, servendosi della nuova variabile $u := t^2$ sono razionalizzabili con procedimenti visti in d03 anche gli integrali relativi ad $h = 1$ e 3:

$$\int \mathrm{d}t \ \frac{t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \ = \ \frac{1}{2} \int \ \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u)(1-k^2\,u)}} \ ,$$

$$\int \mathrm{d}t \ \frac{t^3}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \ = \ \frac{1}{2} \int \ \frac{\mathrm{d}u\ u}{\sqrt{(1-u)(1-k^2\,u)}} \ .$$

Ultime riduzioni delle forme di integrali essenziali per esprimere quelli della forma d05(1) vengono dagli sviluppi che seguono:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}t\ t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \ &= \ -\frac{1}{k^2} \int \frac{\mathrm{d}t\ (1-k^2\,t^2)}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} + \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \\
&= \ -\frac{1}{k^2} \int \mathrm{d}t \ \frac{\sqrt{1-k^2\,t^2}}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{k^2} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2\,t^2)}} \ , \\
\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-r)\,\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \ &= \ \int \frac{\mathrm{d}t\,(t+r)}{(t^2-r^2)\,\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \\
&= \ \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t^{\,2}(t+r)}{(t^2-r^2)\,\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} + r \int \frac{\mathrm{d}t\,(t+r)}{(t^2-r^2)\,\sqrt{(1-t^2)(1-k^2\,t^2)}} \ .
\end{aligned}$$

I27 e.09 Le proprietà dimostrate consentono di affermare che tutti gli integrali ellittici si possono esprimere mediante i seguenti tre tipi di integrali per i quali utilizziamo i nomi assegnati loro da Legendre :

(1) $$\boldsymbol{Ei}_k^{(1)}(x) \ := \ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (\textbf{integrale ellittico di prima specie})$$

(2) $$\boldsymbol{Ei}_k^{(2)}(x) \ := \ \int \frac{\mathrm{d}x\,x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (\textbf{integrale ellittico di seconda specie})$$

(3) $$\boldsymbol{Ei}_{h,k}^{(3)}(x) \ := \ \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (\textbf{integrale ellittico di terza specie})$$

Il numero k viene chiamato **parametro degli integrali ellittici** e quando occorre rimanere tra gli integrali di funzioni reali si deve chiede $0 \leq k \leq 1$.

I27 e.10 È utile presentare gli integrali ellittici in diverse forme chiamate forme di Legendre ottenibili con la sostituzione $x =: \sin\phi$, dove $0 \leq \phi \leq \dfrac{\pi}{2}$.

(4) $$\boldsymbol{Ei}_k^{(1)}(\phi) := \int \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$ (**integrale ellittico di prima specie nella forma di Legendre**)

(2) $$\boldsymbol{Ei}_k^{(2)}(\phi) := \frac{1}{k^2}\int \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} - \frac{1}{k^2}\int d\phi\ \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$$

integrale ellittico di seconda specie nella forma di Legendre

(3) $$\boldsymbol{Ei}_{h,k}^{(3)}(\phi) := \int \frac{\mathrm{d}\phi}{(1+h\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$ **integrale ellittico di terza specie nella forma di Legendre** .

I27 e.11 Notevole importanza ha anche l'integrale

(1) $$\int \mathrm{d}\phi\ \sqrt{1-k^2\ \sin^2\phi}$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php