1

Capitolo I25
integrali definiti

Contenuti delle sezioni

32 pagine

I250.01 In questo capitolo si introduce uno strumento basilare per l'intera analisi matematica, il calcolo integrale.
Come per il calcolo delle derivate il calcolo degli integrali si può considerare lo studio di trasformazioni di funzioni; e come la derivazione anche l'integrazione si può applicare a tanti generi di funzioni.

In questo capitolo ci si limita a trattare il calcolo integrale nella sua forma più semplice e si introducono solo gli integrali di funzioni-RtR con buone caratteristiche di regolarità.

All'inizio si trattano due entità, le decomposizioni di un intervallo reale e le funzioni a scala, due argomenti preliminari al calcolo integrale che conviene avere subito ben chiari.

Si introduce poi l'integrazione definita delle funzioni reali, operazione che trova una forte motivazione nell'attribuzione di un'area a un'ampia gamma di figure piane la cui frontiera viene determinata da una o più funzioni-RtR; dal calcolo delle aree l'integrazione definita prende anche il nome di quadratura.

Successivamente si affronta il problema dell'antiderivazione, cioè della determinazione delle funzioni-RtR la cui derivata coincide con una funzione reale data; la funzione da determinare viene detta anche primitiva (in contrapposizione con la funzione derivata); inoltre il ruolo delle funzioni primitiveviene detto anche ruolo delle funzioni integrali indefiniti.

Un punto centrale consiste nel cosiddetto teorema fondamentale del calcolo integrale, enunciato che stabilisce il collegamento tra le nozioni di integrale definito, di integrale indefinito e di derivata e che risulta cruciale sia sul piano delle conoscenze generali che su quello dei calcoli effettivi e delle applicazioni.

Si passa poi alle tecniche di calcolo degli integrali indefiniti mediante manipolazioni formali; si tratta di un'attività molto diversificata, in quanto si individua una estesa varietà di collezioni di funzioni in ciascuna delle quali il calcolo degli integrali si applica con modalità peculiari che giungono a organizzarsi in metodi di portata intermedia.

Esaminando queste tecniche si osserva che le primitive delle funzioni di alcuni tipi si possono ottenere come espressioni nelle quali compaiono funzioni note anch'esse attribuibili a tipi definiti.
Accade invece che le antiderivazioni di molti tipi di funzioni-RtR conducono a nuove classi di funzioni specifiche, portando a rilevanti ampliamenti della collezione delle cosiddette funzioni speciali, le funzioni specifiche portatrici di proprietà utili per significative gamme di applicazioni.

I25 a. decomposizioni di un intervallo

I25a.01 Nel seguito incontreremo varie coppie di reali crescenti, cioè coppie di reali $\langle a, b\rangle$ con $a < b$ e più in generale incontreremo multiple di reali crescenti $\big\langle x_0, x_1, ..., x_n\big\rangle$, ossia sequenze di un certo numero $n \in \mathbb{P}$ di numeri reali tra i quali relazioni della forma $x_0 < x_1 < ... < x_n\rangle$.

Sappiamo che a ciascuna coppia di reali crescenti $\langle a, b\rangle$ corrispondono quattro intervalli reali strettamente collegati: [a,b], [a,b), (a,b] e (a,b).
Chiamiamo **intervallo-mns** determinato dalla coppia di reali crescenti $\langle a, b\rangle$ la collezione di questi quattro insiemi di numeri reali.
Questa entità può essere rappresentata da ciascuno dei suoi quattro membri i quali si trasformano tra di loro con la semplice aggiunta o eliminazione di una o due delle estremità.
La specifica "-mns" va considerata l'abbreviazione dell'espressione "modulo a negligible set": in effetti i quattro intervalli reali in quanto sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ differiscono per un insieme finito di loro elementi, caso particolare di insieme di reali al quale non si può attribuire una lunghezza positiva nulla e, come vedremo, da considerare insiemi trascurabili dal punto di vista di valutazioni di elevato interesse applicativo come lunghezze e aree.

I25a.02 Introduciamo la relazione tra insiemi sui quali si possono effettuare valutazioni di estensione espresse da numeri reali nonnegativi aventi caratteristiche ben precise. Questa relazione, che denotiamo con $\sim_{mns}$, è costituita dalle coppie di insiemi i quali differiscono per insiemi sui quali la detta valutazione non riesce ad attribuire valori positivi ma stabilisce di attribuire loro il valore 0.

Come preciseremo in :a la relazione $\sim_{mns}$ è una equivalenza e affermare che due insiemi appartengono ad una stessa classe di $\sim_{mns}$ equivale a dire che essi differiscono solo per sottoinsiemi comuni di valutazione trascurabile.

Se una proprietà degli insiemi di un certo genere è soddisfatta da tutti gli elementi di una classe della equivalenza $\sim_{mfs}$ si tratta di una caratteristica rispetto alla quale gli insiemi che fanno parte della classe presentano differenze inessenziali e quindi per certi sviluppi possono essere scambiati, ovvero in certi discorsi intuitivi possono essere identificati / confusi.

Questa situazione, come vedremo tra breve, si riscontra per vari impieghi degli intervalli reali appartenenti ai quadrupletti che chiamiamo intervalli-mns.

Va anche segnalato che le classi della equivalenza $\sim_{mfs}$ che contengono solo sintervalli di numeri reali si riducono alle quaterne di intervalli costituenti gli intervalli-mns.

I25a.03 Chiamiamo **decomposizione** o **suddivisione** dell'intervallo [a,b] una sequenza crescente di numeri reali che ha come primo componente a e come ultimo b.
Evidentemente una sequenza $\big\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\big\rangle$ è una decomposizione di [a,b] sse valgono le relazioni $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.
Denoteremo con Dcmp[a,b] l'insieme di tali decomposizioni e conveniamo di usare la scrittura

$$\big\langle x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n\big\rangle \in \mathsf{Dcmp}[a,b\,] \ ,$$

per affermare che la sequenza $\big\langle x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n\big\rangle$ costituisce una decomposizione di [a,b].

Si osserva che una decomposizione di [a,b] può essere associata anche ai corrispondenti intervalli [a,b), (a,b] e (a,b). Quindi una decomposizione si può attribuire all'intera classe di equivalenza-mns costituita dai quattro intervalli sopra citati, o, in altri termini, all'insieme-mns che può essere rappresentato da [a,b] o da uno qualsiasi degli intervalli ad esso equivalenti-mns.

Si può porre il problema di estendere la definizione di decomposizione agli intervalli reali illimitati della forma $(-\infty, a]$, della forma $[b, +\infty)$ o anche dell'intero $\mathbb{R}$.
Per ora ci limitiamo a segnalare che si possono definire sia decomposizioni costituite da un numero finito di sottointervalli uno o due dei quali illimitati, sia decomposizioni costituite da successioni numerabili unilatere o bilatere di sottointervalli di ampiezza limitata

I25a.04 Come per ogni sequenza, risulta definita la **lunghezza di una decomposizione**; la precedente decomposizione ha lunghezza $n+1$; la lunghezza di una decomposizione denotata con D la denotiamo con $\mathsf{len}(\mathsf{D})$.

Ogni decomposizione D di un intervallo reale avente lunghezza $\mathsf{len}(\mathsf{D}) = n+1$, cioè ogni sequenza crescente di $n+1$ numeri reali, determina n intervalli consecutivi; questi oggetti qui spesso li chiameremo **sottointervalli della decomposizione**.

In varie considerazioni questi sottointervalli vengono considerati modulo l'appartenenza delle estremità, cioè considerando ininfluente la inclusione o l'esclusione delle proprie estremità.

In effetti a ciascuna delle coppie crescenti $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ possono essere applicate le considerazioni precedenti svolte sulla coppia crescente $\langle a, b \rangle$.
In molti dei discorsi che seguono parleremo di intervalli (e sottointervalli) reali intendendo che si tratti di intervalli-mns (e sottointervalli-mns)

Talora tuttavia conviene fissare l'attenzione su quella che diciamo **partizione standard associata a una decomposizione** di intervallo e che compare nella seguente decomposizione insiemistica di un intervallo chiuso

$$[a,b] = [a, x_1) \dot\cup [x_1, x_2) \dot\cup \cdots [x_{n-1} x_n] .$$

I25a.05 Consideriamo una terna di reali crescenti $\langle a, b, c \rangle$ e due decomposizioni degli intervalli-mns consecutivi $[a,b]$ e $[b, c]$

$$\langle a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \rangle \quad \text{e} \quad \langle b = x_n < x_{n+1} < ... < x_{n+p} = c \rangle .$$

Come per tutte le sequenze finite si possono applicare alle decomposizioni le relazioni essere prefisso, essere suffisso, essere infisso e essere sottosequenza.

Può essere utile, date due decomposizioni, stabilire che l'una è sottosequenza (o sottosequenza propria) dell'altra. Per questi collegamenti si possono usare i termini **sottodecomposizione** e **sottodecomposizione propria**.

I25a.06 Si dice **ampiezza massima di una decomposizione D** di un intervallo reale la massima delle differenze tra due sue ascisse successive, cioè la massima delle ampiezze dei suoi sottointervalli; tale reale positivo lo denotiamo con $maxwid(\mathsf{D})$.

Tra le decomposizioni sono particolarmente maneggevoli quelle che danno sottointervalli di uguale ampiezza e che quindi corrispondono a progressioni aritmetiche dei volori denotati con x_i. Esse sono dette **decomposizioni uniformi** e i relativi sottointervalli sono detti (non del tutto propriamente) congruenti.
Per esempio la decomposizione uniforme di $[a,b]$ con n sottointervalli, ovvero di lunghezza $n+1$, corrisponde alla progressione di $n+1$ reali con valore iniziale a e passo $\frac{b-a}{n}$, cioè alla

$$\left\langle a \ , \ a + \frac{b-a}{n} = \frac{n-1}{n} a + \frac{1}{n} b \ , \ a + 2\frac{b-a}{n} \ , \ ..... \ , \ a + (n-1)\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} a + \frac{n-1}{n} b \ , \ b \right\rangle ;$$

tale decomposizione si denota con $\mathsf{dcmpu}_n[a,b]$.

Coerentemente con quanto è associabile a tutte le sequenze, l'insieme delle componenti della sequenza D si dice **insieme associato a una decomposizione** D, e si denota con $\mathsf{SetY}(\mathsf{D})$.

Ad ogni insieme E di $n+1$ numeri reali è associata una decomposizione dell'intervallo $[\min(E), \max(E)]$, consistente nella sequenza degli elementi di E disposti in ordine crescente; tale decomposizione la denotiamo con $\mathrm{dcmp}(E)$.

Evidentemente $\forall E \in \mathsf{SetF}_{\mathbb{R}} \; \vdots \; \mathsf{SetY}(\mathrm{dcmp}(E)) = E$ e $\forall \mathsf{D} \in \mathsf{Dcmp} \; \vdots \; \mathrm{dcmp}(\mathsf{SetY}(\mathsf{D})) = \mathsf{D}$.

I25a.07 Date due decomposizioni D e D' dell'intervallo $[a,b]$, si dice che la prima è **decomposizione più fine**, in senso lato, della seconda, ovvero che la seconda è **decomposizione più grossolana**, in senso lato, della prima, e si scrive $\mathsf{D} \sqsupseteq \mathsf{D}'$ o equivalentemente $\mathsf{D}' \sqsupseteq \mathsf{D}$, sse $\mathsf{SetY}(\mathsf{D}) \subseteq \mathsf{SetY}(\mathsf{D}')$, cioè sse l'insieme dei reali che determinano la più fine contiene, in senso lato, l'insieme dei reali che determinano la più grossolana.

Per esempio, fissati due interi positivi maggiori di 1 k ed n, la suddivisione uniforme di $[a,b]$ in n intervalli è più grossolana della suddivisione uniforme in $k\,n$ intervalli, ovvero $\mathsf{dcmpu}_n[a,b] \sqsubseteq \mathsf{dcmpu}_{k\,n}[a,b]$. Se $k > 1$ $\mathsf{dcmpu}_n[a,b]$ è più fine in senso stretto e si scrive $\mathsf{dcmpu}_n[a,b] \sqsubsetneq \mathsf{dcmpu}_{k\,n}[a,b]$ o equivalentemente $\mathsf{dcmpu}_{k\,n}[a,b] \sqsupsetneq \mathsf{dcmpu}_k[a,b]$.

La $\langle a < b\rangle$ è la decomposizione più grossolana, ossia la meno fine, di tutte le decomposizioni di $[a,b]$ e da sola costituisce $\mathsf{dcmpu}_1[a,b]$.

È facile vedere che la relazione di maggiore finezza tra decomposizioni è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.
Inoltre si trovano molte coppie di decomposizioni di $[a,b]$ che non sono confrontabili per finezza; un ovvio esempio è dato dalle decomposizioni $\langle 0 < 1 < 3\rangle$ e $\langle 0 < 2 < 3\rangle$; un altro evidente duetto di decomposizioni noncomparabili è costituito da $\mathsf{dcmpu}_2[a,b]$ e $\mathsf{dcmpu}_3[a,b]$.
Quindi ogni insieme $\mathsf{Dcmp}[a,b]$ munito della relazione $\sqsupseteq$ costituisce un insieme parzialmente ordinato nontotalmente ordinato.

I25a.08 Date due decomposizioni di un intervallo $\mathsf{D}', \mathsf{D}'' \in \mathsf{Dcmp}[a,b]$ si riesce sempre a trovare una decomposizione più fine di entrambe: basta considerare $\mathrm{dcmp}\left(\mathsf{SetY}(\mathsf{D}') \cup \mathsf{SetY}(\mathsf{D}'')\right)$; tale decomposizione con termine preso dall'informatica viene chiamato merge delle due sequenze numeriche.
Questa decomposizione è la meno fine di quelle che sono più fini sia della D' che della D'', viene chiamata anche **decomposizione giunzione** delle due e si denota con $\mathsf{D}' \vee \mathsf{D}''$.

Per esempio le decomposizioni uniformi di $[0, 12]$ con 4 e 6 sottointervalli sono, risp., $\langle 0 < 3 < 6 < 9 < 12\rangle$ e $\langle 0 < 2 < 4 < 6 < 8 < 10 < 12\rangle$ e la loro giunzione è $\langle 0 < 2 < 3 < 4 < 6 < 8 < 9 < 10 < 12\rangle$.

Più in generale per h e k interi diversi, le due decomposizioni uniformi di $[0, h \cdot k]$ che presentano, risp., h sottointervalli di ampiezza k e k sottointervalli di ampiezza h hanno come giunzione la $\mathrm{dcmp}(S)$, ove S denota l'insieme dei numeri naturali che sono divisori di $h \cdot k$ e multipli di $\mathrm{MCD}(h, k)$.

Date due qualsiasi decomposizioni $\mathsf{D}', \mathsf{D}'' \in \mathsf{Dcmp}[a,b]$ si riesce sempre a trovare una decomposizione meno fine di entrambe: basta considerare $\mathrm{dcmp}(\mathsf{SetY}(\mathsf{D}') \cap \mathsf{SetY}(\mathsf{D}''))$.
Questa decomposizione è la più fine di quelle che sono più grossolane sia della D' che della D'', viene chiamata **decomposizione incontro** delle due e si denota con $\mathsf{D}' \wedge \mathsf{D}''$.
Per esempio le decomposizioni uniformi di $[0, 12]$ con 4 e 6 sottointervalli hanno come incontro la $\langle 0 < 6 < 12\rangle$.

Più in generale le decomposizioni uniformi di $[a,b]$ che presentano, risp., h sottointervalli di ampiezza $\dfrac{b-a}{h}$ e k sottointervalli di ampiezza $\dfrac{b-a}{k}$, hanno come incontro la $\mathsf{dcmpu}_{\mathrm{MCD}(h,k)} iJabJ$.

I25a.09 Una decomposizione di ogni intervallo reale si può raffinare illimitatamente: infatti ogni suo intervallo si può decomporre a sua volta, e in molti modi.

Ci proponiamo ora di precisare un meccanismo di decomposizione degli intevalli reali che ci consente di gestirli piuttosto efficacemente.

Consideriamo un intervallo $\overline{I} = [a,b]$, una sua decomposizione $\mathsf{D} = \big\langle a = x_0, x_1 < ... < x_n = b \big\rangle$ e un reale positivo δ.
Si dice **raffinamento controllato** da δ della D la decomposizione di $\overline{I}$ più fine della D nella quale ogni sottointervallo di ampiezza minore o uguale a δ rimane invariato, mentre ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i\rangle$ con $x_i - x_{i-1} > \delta$ viene decomposto in sottointervalli congruenti in numero di $\left\lceil \dfrac{x_i - x_{i-1}}{\delta} \right\rceil$ (la cui ampiezza è sicuramente inferiore a δ).
La decomposizione così ottenuta si denota con $\boldsymbol{Rfn}_\delta(\mathsf{D})$.

Si osserva che la decomposizione ottenuta applicando $\boldsymbol{Rfn}_\delta$ alla decomposizione minima $\langle a < b\rangle$ è la decomposizione uniforme che presenta $\lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil$ sottointervalli congruenti aventi ampiezza pari a $\dfrac{(b-a)}{\lceil \frac{b-a}{\delta} \rceil}$, inferiore o uguale a $\dfrac{(b-a)}{\frac{b-a}{\delta}} = \delta$.

L'insieme delle decomposizioni di un qualsiasi intervallo-mns $[a,b]$ munito delle operazioni binarie di giunzione e di incontro costituisce un reticolo che denotiamo con $\mathsf{LattDec}[a,b]$.

Questo reticolo è dotato di minimo, $\langle a < b\rangle$, mentre è illimitato superiormente, a causa della illimitata riducibilità della ampiezza dei sottointervalli delle decomposizioni.

La lunghezza delle decomposizioni rende $\mathsf{LattDec}[a,b]$ un reticolo graduato.

Data una decomposizione diversa dalla minima sono individuate tutte le decomposizioni immediatamente meno fini: sono quelle ottenute eliminando ciascuno dei suoi punti interni.
Di ogni decomposizione sono anche individuate tutte le decomposizioni immediatamente più fini: sono quelle ottenute dividendo in due uno dei suoi sottointervalli.

Il poset reticolato criptomorfo a $\mathsf{LattDec}[a,b]$ ha come relazione d'ordine parziale la $\sqsubseteq$ introdotta in a07.

I25a.10 Finora abbiamo introdotto costruzioni di passaggio al limite unilaterale per funzioni la cui variabile si può muovere in un dominio totalmente ordinato. Per le successioni aventi come dominio $\mathbb{N}$ si ha il passaggio al limite per $n \in \mathbb{N}$ e $n \to +\infty$; per le funzioni $f(x)$ aventi come dominio un intervallo $\mathsf{J} := (a,b)$ si effettuano limiti unilaterali che possono riguardare ogni $\overline{x} \in \mathsf{J}$ e l'avvicinarsi della variabile x a $\overline{x}$ da destra oppure da sinistra, ovvero, posto $h := x - \overline{x}$, limiti per $h \to 0+$ oppure per $h \to 0-$.

Ci proponiamo ora di introdurre dei limiti di carattere unilaterale riguardanti funzioni delle decomposizioni di un intervallo anche se l'insieme di queste entità non è totalmente ordinato come i precedenti $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}_+$.
Ora ci intendiamo avvalere della seguente proprietà (1) la quale consente di introdurre un procedimento di passaggio al limite anche per funzioni aventi come dominio un insieme della forma $\mathsf{Dcmp}[a,b]$.
Si tratta del passaggio al limite per decomposizioni con ampiezza massima tendente a 0. Per una tale costruzione si usano scritture della forma

$$(1) \qquad \lim_{maxwid(\mathsf{D})\to 0+} \mathcal{F}(\mathsf{D}, ...) \quad \text{con} \quad \mathsf{D} \in \mathsf{Dcmp}[a,b] \cap ... \,.$$

I25 b. aree reali basilari

I25b.01 Uno scopo di questo capitolo è quello di associare una valutazione chiamata area consistente in un numero reale a ciascuna delle figure piane costituenti una collezione tendenzialmente estesa.

Lo strumento che fornisce questa valutazione, l'integrazione definita o quadratura, nella sua versione più semplice, può vedersi come operazione che associa a una funzione-RtR e a un intervallo appartenente al suo dominio un semplice numero reale.

È facilmente intuibile che sia ragionevole richiedere che questo numero non cambi se si modificano i valori che la funzione assume in un insieme finito di sue ascisse.
Di più richiediamo che non si modifichi l'integrale definito di una funzione anche quando si modificano suoi valori in un sottoinsieme del suo dominio avente misura nulla.

Per controllare questa sorta di indefinitezza che incontreremo anche con l'integrazione definita applicata a funzioni di generi ben più articolati di $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$, servono alcune relazioni di equivalenza.

I25b.02 Le aree, come altre valutazioni di entità esprimibili geometricamente, sono valutazioni spesso molto più semplici degli oggetti ai quali vengono attribuite e che hanno lo scopo di esprimere caratteristiche rilevanti degli oggetti nei modi più semplici, ovvero con elementi facilmente utilizzabili.

Considerazione analoga si può svolgere sulle lunghezze, valutazioni che sono state attribuite a oggetti più elementari delle figure piane come le stringhe, le liste, gli intervalli e i segmenti di spazi, questi ultimi collocabili in ambienti quali $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Considerazioni simili si potranno svolgere per le valutazioni che saranno introdotte per oggetti più elaborati delle figure piane come archi di curve, superfici e figure solide.

Le aree, come tutte le valutazioni, sono caratterizzazioni degli oggetti ai quali si applicano che forniscono informazioni rilevanti mentre trascurano tanti altri loro aspetti.
Ovviamente quindi si trovano molti oggetti molto diversi che hanno la stessa valutazione; in termini di relazioni di equivalenza questi oggetti si possono chiamare equivalutati. In particolare si conoscono figure piane molto diverse che hanno la stessa area.

In seguito ci interesseremo di oggetti equivalutati cercando di chiarire le loro mutue differenze.
Il motivo di questo interesse sta nella utilità di individuare trasformazioni di oggetti che non cambiano la loro valutazione al fine di poter adottare uno stesso lavoro valutativo per interi insiemi di oggetti che presentano collegamenti in qualche modo controllabili; in tal modo si possono realizzare notevoli economie di pensiero.

I25b.03 Le prime valutazioni che richiamiamo sono le lunghezze degli intervalli della retta reale $\mathbb{R}$: dati due reali a e b con $a < b$, vi sono quattro intervalli che hanno a e b come estremià ai quali viene attribuita la stessa lunghezza $b - a$:

$$(a,b) \quad , \quad (a,b] \quad , \quad [a,b) \quad , \quad [a,b] \; .$$

Si osserva che si tratta di quattro insiemi di numeri reali le cui differenze simmetriche sono insiemi finiti.
Accade inoltre che non vi siano altri intervalli reali che con qualcuno dei precedenti insiemi presenta una differenza simmetrica finita e non vuota.
Possiamo quindi individuare una relazione di equivalenza tra intervalli reali che diciamo **uguaglianza modulo un insieme finito** o in breve **uguaglianza-mfs** e dire che i quattro precedenti intervalli costituiscono una classe di equivalenza di tale relazione. Per questo insieme di quattro intervalli usiamo la notazione

$$[\text{a,b}\ ]_{mfs}\ :=\ \{(\text{a,b}\ ), (\text{a,b}\ ], [\text{a,b}\ ), [\text{a,b}\ ]\}\ .$$

Due altre semplici classi di equivalenza della $\sim_{mfs}$ hanno la forma $\{(-\infty, a), (-\infty, a]$ e $\{(b, +\infty), [b, +\infty)\}$.

La precedente nozione si può facilmente arricchire prendendo in esame i vettori applcati di $\mathbb{R}$, oggetti individuati ciascuno da una coppia di numeri reali $\langle a, b\rangle$ per la quale potrebbe essere $a \geq b$.
Questi oggetti si possono chiamare segmenti orientati di $\mathbb{R}$ e si possono distinguere i segmenti orientati aperti o chiusi in ciascuna delle due estremità.
La relazione di uguaglianza-mns si può attribuire anche ai segmenti orientati di $\mathbb{R}$ e le quaterne di segmenti orientati definiti dalla stessa coppia di estremità $\langle a, b\rangle$ si possono considerare elementi di una classe di questa equivalenza.
Questa classe si può denotare con la scrittura $[\langle a, b\rangle]_{mfs}$.

I25b.04 La relazione tra insiemi che presentano una differenza simmetrica finita di può prendere in considerazione per gli insiemi di ogni ambiente.
Per questa relazione usiamo la notazione $\sim_{mfs}$.

Diciamo che tra due insiemi D ed E vale la relazione di **uguaglianza di insiemi modulo un insieme finito di elementi** , detta in breve **uguaglianza-mns**, sse la loro differenza simmetrica è un insieme finito di punti.
Per enunciare che vale la relazione sopra presentata scriviamo $D \sim_{mfs} E$.

(1) Prop.: La relazione $\sim_{mfs}$ è una equivalenza nella classe degli insiemi.

Dim.: : Essa è ovviamente riflessiva e simmetrica. Per la transitività consideriamo tre insiemi D, E ed F tali che valgano $D \sim_{mfs} E$ e $E \sim_{mfs} F$; per ipotesi sono finite le differenze simmetriche $D \ominus E$ ed $E \ominus F$.
Consideriamo la loro unione $G := D \cup E \cup F$ e la sua partizione nei sette insiemi disgiunti $D \cap E \cap F$, $D \setminus (E \cup F)$, $E \setminus (F \cup D)$, $F \setminus (D \cup E)$, $(D \cap E) \setminus F$, $(E \cap F) \setminus D$, $(F \cap D) \setminus E$. Tutti questi insiemi a eccezione di $D \cap E \cap F$ sono finiti in quanto ottenibili come intersezioni degli insiemi finiti per ipotesi $D \ominus E$ ed $E \ominus F$. Basta quindi osservare che

$$F \ominus D\ =\ F \setminus (D \cup E)\ \dot\cup\ (F \cap E) \setminus D\ \dot\cup\ D \setminus (E \cup F)\ \dot\cup\ D \setminus (E \cup F)$$

per affermare che si tratta di una unione di insiemi finiti, ossia di un insieme finito e quindi concludere che $\sim_{mfs}$ è transitiva e in definitiva una equivalenza ▮

Vedremo che questa relazione presenta interesse soprattutto per gli insiemi infiniti con il ruolo di domini di funzioni tendenzialmente regolari, per esempio per i domini di funzioni continue; questa relazione interessa soprattutto per i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^{\times 3}$.

I25b.05 Consideriamo due numeri reali a e b con $a < b$ ai quali assegnamo delle estremità di un intervallo di $\mathbb{R}$.

In varie argomentazioni sopra un tale intervallo reale non importa distinguere se si tratta di un intervallo chiuso, del corrispondente intervallo aperto, oppure di quello aperto-chiuso o del chiuso-aperto.
Chiamiamo quindi insieme di **intervalli modulo appartenenza delle estremità**, (o anche modulo a finite set) ogni insieme della forma

$$[\text{a,b}\ ]_{mfs}\ :=\ \{(\text{a,b}\ ), (\text{a,b}\ ], [\text{a,b}\ ), [\text{a,b}\ ]\}\ .$$

La nozione di classi di insiemi definiti a meno di un insieme finito di loro elementi e la collegata relazione **uguaglianza-mfs** viene utilmente estesa in due stadi.

Diciamo che due insiemi A e B sono **insiemi uguali modulo la loro frontiera** sse differiscono solo per elementi della loro comune frontiera; questa situazione si esprime scrivendo $A =_{mb} B$.

Evidentemente due intervalli definiti a meno delle loro estremità sono un caso particolare di insiemi definiti a meno della loro frontiera.

Definiamo più in generale la relazione tra due insiemi di entità **essere uguali a meno del rispetto della proprietà** P, espressione che abbrevia con l'enunciato "ESs modulo P"
Con una tale locuzione indichiamo l'insieme costituita da E e da tutte le entità che differiscono dalla E solo in quanto non rispettano la proprietà P; questa viene considerata inessenziale in quanto ininfluente per gli obiettivi dello sviluppo corrente.
In altre parole, "E modulo P" riguarda l'entità E e tutte le entità che si possono assimilare ad essa quando si prescinda dal soddisfacimento della proprietà P.

Questo genere di locuzioni lo si incontra in molti sviluppi matematici. In particolare incontreremo l'equivalenza tra insiemi a meno di un insieme differenza di misura nulla.

I25b.06 Procediamo a prendere in considerazioni figure piane che si possono considerare basilari per la assegnazione della loro area e per il contributo che possono dare per l'assegnazione di un'area a moltre altre figure delle quali le basilari si possono considerare componenti secondo determinati tipi di composizioni, in particolare componenti di unioni disgiunte.

Le prime figure c he consideriamo basilari sono i quadrati-hd, ossia i quadrati con lati paralleli agli assi di riferimento e che possono far parte di $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, di $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ o più in generale di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Questi quadrati hanno contorni a ciascuno dei quali si può attribuire un verso antiorario o orario e una coerente area con segno positivo o negativo.

Un poco più generali sono i rettangoli-hd, rettangoli con i lati paralleli agli assi di riferimento; anche questi si possono collocare in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$..

A tutti questi quadrati e rettangoli si può attribuire un'area, sostanzialmente con la unica formula "base per altezza".

Più precisamente distinguiamo i rettangoli con contorno orientato secondo il verso antiorario o positivo ai quali si attribuisce area positiva dai rettangoli con contorno orientato secondo il verso orario o negativo ai quali si attribuisce area negativa.

I25b.07 Si osserva che affiancando due quadrati con lati uguali ed equiversi facendo coincidere due loro rispettivi lati da percorrere in direzioni opposte si ottiene un rettangolo con lo stesso verso e area doppia di uno dei quadrati componenti.

Similmente e più in generale si posono accostare due rettangoli equiversi facendo coincidere due loro rispettivi lati della stessa lunghezza e oppostamente orientati in modo da ottenere un rettangolo equiverso la cui area è la somma delle aree dei rettangoli componenti.

Data una figura piana orientata F con contorno costituito da segmenti e archi di curve coniche (e in particolare di circonferenze) o di altre curve che si sappiano sufficientemente controllare, si possono individuare aggregati di quadratini-hd orientati congruenti che ricoprono o che sono ricoperti dalla F.
Le aree dei questi due aggregati si possono utilizzare per approssimare, risp., per eccesso e per difetto una auspicata area orientata della F.
Similmente si possono utilizzare aggregati di rettangoli orientati

I25b.08 Dei rettangoli-hd equiversi si possono sovrapporre sopra l'asse delle ascisse per ottenere barre verticali e queste si possono affiancare fino ad individuano le cosiddette funzioni a scala, figure che costituiscono evidenti generalizzano gli istogrammi su $\mathbb{Z}$.

Con una ulteriore piccola generalizzazione si possono considerare trapezi rettangoli equiversi con il lato che presenta due angoli retti collocato su Ox e successivamente affiancamenti di questi trapezi con i rispettivi lati verticali della stessa lunghezza e oppostamente orientati. Le figure così ottenute sono dette trapezoidi orientati e vengono a costituire una significativa gamma di figure piane che hanno come contorno una poligonale orientata chiusa e che presentano il vantaggio da poter essere descritte con semplici sequenze di punti-RR.

I25 c. funzioni a scala

I25c.01 Una funzione-RtR $s(x)$ il cui dominio contiene un intervallo $\overline{I}$:= [a,b] nel quale è limitata, cioè una $s(x) \in$ FunBnd[a,b], si dice **funzione a scala** su $\overline{I}$ sse Dcmp[a,b] $\ni \langle x_0 = a < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\rangle$ tale che $\forall i = 1, 2, ..., n-1, n$: $\mathbb{R} \ni v_i$ tale che $x_{i-1} < x < x_i \Longrightarrow s(x) = v_i$.

La decomposizione $\langle x_0 = a < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\rangle$ si dice **decomposizione sostegno della funzione a scala** $s(x)$ e le ascisse x_1, ..., x_{n-1} si dicono **ascisse di salto**.

Una funzione a scala su una decomposizione **D** è funzione a scala anche su ogni decomposizione che sia raffinamento della **D**.

Nella pratica servono solo le funzioni a scala senza valori successivi ripetuti, che comunque si possono ottenere con un semplice procedimento di riduzione controllabile con un semplice algoritmo.
Per alcune argomentazioni conviene invece consentire la coincidenza dei valori successivi.

Per le funzioni a scala si usano anche i termini funzioni a gradini e funzioni a gradinata.
L'insieme delle funzioni a scala sopra un intervallo $\overline{I}$ lo denotiamo con FunStep($\overline{I}$).

Funzioni a scala esprimibili facilmente sono $\lceil x \in [0, 10] \mapsto \lfloor x \rfloor \rceil$ e $\lceil x \in [-100, +100] \mapsto \lceil x^2 \rceil \rceil$.

Più in generale si hanno funzioni a scala maneggevoli della forma

$$\left\lceil x \in \overline{J} \mapsto \lfloor E(x) \rfloor \right\rceil \quad \text{e} \quad \left\lceil x \in \overline{J} \mapsto \lceil E(x) \rceil \right\rceil ,$$

dove $E(x)$ rappresenta una espressione o un algoritmo che trasforma x in un valore reale.

I25c.02 **(1) Eserc.** Dimostrare che le seguenti trasformazioni e composizioni portano da funzioni a scala definite sullo stesso intervallo $\boldsymbol{I}$ a funzioni a scala ancora sopra $\boldsymbol{I}$.

(a) Combinazione lineare e in particolare, somma, differenza e cambiamento di segno.

(b) Prodotti di due funzioni a scala. (c) Passaggio dalla $s(x)$ alla $s(\phi(t))$ con $\phi(t)$ funzione monotona in senso stretto.

(d) Passaggio dalla $s(x)$ alla $S(s(x))$ con $S(y)$ funzione monotona in senso stretto.

I25c.03 Osserviamo esplicitamente che una funzione a scala $s(x)$ in ciascuna delle sue ascisse x_i che separano due loro sottointervalli successivi che portano a valori diversi che denotiamo, risp., con v_{i-1} e v_i possono assumere aut il valore v_{i-1} aut il valore v_i; nel primo caso la $s(x)$ per x_i è continua solo da sinistra, nel secondo continua solo da destra.

In altri termini per ogni ascissa di salto nonnullo x_i si possono avere due cosiddetti punti di salto: $\langle x_i, v_{i-1}\rangle$ e $\langle x_i, v_i\rangle$.
Intendiamo definire costruzioni che si servono di funzioni a scala sulle quali le scelte tra i due suddetti valori alternativi non abbiano influenza.

Si osserva che la equivalenza-mns tra insiemi si applica in particolare alle funzioni in quanto insiemi di coppie.
Ha quindi senso parlare di equivalenza-mns tra due funzioni-RtR e si osserva che due funzioni-RtR equivalenti-mns hanno i rispettivi grafici che differiscono solo in un insieme finito di punti.
In particolare si può porre il problema dell'equivalenza-mns per coppie di funzioni a scala sulla stessa decomposizione; due di tali funzioni presentano valori diversi solo in corrispondenza di un insieme finito di ascisse di salto nonnullo.

Evidentemente ogni intera classe di funzioni di scala equivalenti-mns si può ricavare algoritmicamente da ciascuno dei suoi membri.

Vedremo che per molte argomentazioni conviene concentrare l'attenzione su intere classi di funzioni a scala equivalenti-mns.

I25c.04 L'equivalenza introdotta tra gli insiemi-mns si può applicare in particolare alle generiche relazioni binarie in quanto insiemi di coppie.
Se per due relazioni R e S si stabilisce che $R \sim_{mfs} S$, ne consegue che anche i rispettivi domini e i corrispondenti codomini si trovano nella relazione $\sim_{mfs}$.

Più in particolare l'equivalenza-mns si può applicare proficuamente alle funzioni e per queste può essere utile riformulare le definizioni.

Due funzioni si dicono **funzioni uguali modulo un insieme finito di loro coppie**, in breve si dicono **uguali-mfs**, sse differiscono al più in un insieme finito di coppie, ossia in corrispondenza di un numero finito di elementi dei rispettivi domini.
In particolare per i duetti di funzioni-RtR è significativa la qualifica "uguaglianza modulo un insieme finito di elementi dei domini".

Le classi di equivalenza della $\sim_{mfs}$ verranno chiamate **funzioni definite modulo insiemi finiti di coppie** o, in breve, **funzioni-mfs**.

In particolare possono risultare interessanti le classi di uguaglianza-mfs delle funzioni a scala, oggetti che si possono chiamare **funzioni-mfs a scala**.

I25c.05 Consideriamo quindi un intero positivo n, un intervallo $\overline{I} := [a,b]$, una decomposizione di $\overline{I}$ avente lunghezza $n+1$ $\mathsf{D} = \langle x_0 = a < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b \rangle \in \mathsf{Dcmp}[a,b]$ e una $n+1$-upla di reali $\mathsf{v} = \langle v_0, v_1, v_2, ..., v_n \rangle$ che, per semplicità espositiva, supponiamo priva di valori successivi ripetuti.
Diciamo **funzione-mfs a scala** determinata da $\langle \mathsf{D}, \mathsf{v} \rangle$ l'insieme delle funzioni a scala $s(x) \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ tali che

$$\forall i = 1, 2, ..., n \ , \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i) \ : \ s(x) = v_i \quad \text{e} \quad \forall i = 1, 2, ..., n-1 \ : \ s(x_i) \in \{v_i, v_{i+1}\} \ .$$

Tale insieme di funzioni-mns lo denotiamo con $\mathsf{FunStep}-mns(\mathsf{D}, \mathsf{v})$. Il termine funzione-mns può anche leggersi come "funzione definita a meno di un sottoinsieme finito dei suoi punti".

In questo insieme di funzioni a scala si trovano in particolare le funzioni:

$\dot\cup_{j=1}^{n} \lceil x \in [x_{j-1}, x_j) \mapsto v_j \rceil \,\dot\cup\, \langle b, v_n \rangle$,
funzione continua da destra in $[a,b)$ e continua da sinistra in $b = x_n$ e

$\langle a, v_1 \rangle \,\dot\cup\, \dot\cup_{j=1}^{n} \lceil x \in (x_{j-1}, x_j] \mapsto v_j \rceil$,
funzione continua da destra in a e da sinistra in $(a,b]$.

Si constata che da ciascuna delle funzioni-RtR di una funzione-mfs a scala si possono ricavare algoritmicamente, tutti i restanti membri di questo insieme.

Tutte le sopra definite funzioni a scala fanno parte delle **funzioni unilateralmente continue** in $[a,b]$, funzioni che in ciascun punto di questo intervallo sono continue da sinistra o continue da destra (o continue *tout court*).

La prima delle due funzioni esplicitate la diciamo **prima rappresentante della funzione-mfs** alla quale appartiene.

I25c.06 Sopra le funzioni a scala si dimostrano facilmente gli enunciati che seguono.

(1) Una funzione $s(x)$ è a scala su $[a,b]$ sse l'immagine di tale intervallo è un insieme finito di numeri reali ▮

(2) Ogni combinazione lineare di funzioni a scala sopra un dato intervallo $\overline{I}$ è funzione a scala su $\overline{I}$. Quindi FunStep[a,b] è un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni limitate su [a,b] ▮

(3) Il prodotto di due funzioni a scala su [a,b] è una funzione a scala su [a,b] ▮

(4) $s_1(x), s_2(x) \in$ FunStep[a,b] $\implies$ $\min(s_1(x), s_2(x)), \max(s_1(x), s_2(x)) \in$ FunStep[a,b]

(5) $s(x) \in$ FunStep[a,b] $\implies$ $s^+(x) := \max(s(x), 0), s^-(x) := \max(-s(x), 0) \in$ FunStep[a,b]

(6) Il valore assoluto di una funzione a scala è una funzione a scala ▮

(7) Ogni funzione a scala si può esprimere come combinazione lineare di funzioni indicatrici ▮

(8) Le uniche funzioni a scala continue sono le funzioni costanti ▮

(9) Le funzioni a scala costituiscono un sottoinsieme proprio dell'insieme delle funzioni continue a tratti ▮

I25c.07 Ad una funzione $f(x)$ limitata avente come dominio l'intervallo $\overline{I} :=$ [a,b] e a una decomposizione $\langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < b = x_n \rangle$ di $\overline{I}$ si possono associare le due seguenti funzioni-mfs a scala

(1) $$\dot\cup_{i=1}^{n} \lceil\, x \in (x_{i-1}, x_i) \mapsto \inf_{x\in(x_{i-1},x_i)}(f(x))\, \rceil \qquad \text{e}$$

(2) $$\dot\cup_{i=1}^{n} \lceil\, x \in (x_{i-1}, x_i) \mapsto \sup_{x\in(x_{i-1},x_i)}(f(x))\, \rceil\ .$$

Inoltre alla suddetta $f(x)$ si possono associare tutte le seguenti funzioni-mfs a scala

$$\dot\cup_{i=1}^{n} \lceil\, x \in (x_{i-1}, x_i) \mapsto f(\xi_i)\, \rceil \qquad \forall j = 1, ..., n : \ \xi_j \in (x_{j-1}, x_j)\ .$$

Ciascuna di queste funzioni è maggiorante-mfs della (1) e minorante-mfs della (2).

I25c.08 Consideriamo ora una funzione $g(x)$ limitata avente come dominio l'intervallo $\overline{I} :=$ [a,b] e l'intervallo chiuso contenente il suo codominio $[m, M] := [\inf_{x\in\overline{I}}(g(x))\ ,\ \sup_{x\in\overline{I}}(g(x))]$.

Ad una decomposizione di questo intervallo $\langle m = y_0 < y_1 < \cdots < y_{k-1} < y_k < M \rangle$ si può cercare di associare un'altra coppia di funzioni a scala con dominio $\overline{I}$ nel modo seguente.
Ad ogni sottointervallo $[y_{j-1}, y_j]$ per $j = 1, 2, ..., k$ si associa il sottoinsieme J_j di $\overline{I}$ nel quale si ha $y_{j-1} \leq g(x) \leq y_j$, cioè la controimmagine secondo la funzione $g(x)$ ridotta al dominio $[y_{j-1}, y_j]$; se accade che ciascuno di questi J_j è costituito da un numero finito di sottointervalli, si stabilisce che a ciascuno dei corrispondenti sottointervalli aperti la prima funzione a scala associa il valore y_{j-1} e la seconda fa corrispondere il valore y_j.

Questa costruzione è sicuramente possibile se $g(x)$ è monotona: in tal caso i suddetti sottoinsiemi J_j sono dei semplici sottointervalli che denotiamo con $[\xi_{j-1}, \xi_j]$; se $g(x)$ è nondecrescente $\xi_{j-1} \leq \xi_j$, $g(\xi_{j-1}) = y_{j-1}$ e $g(\xi_j) = y_j$; se viceversa $g(x)$ è noncrescente $\xi_j \leq \xi_{j-1}$, $g(\xi_{j-1}) = y_j$ e $g(\xi_j) = y_{j-1}$.
Di conseguenza le due funzioni a scala hanno, risp., le forme

$$\dot\cup_{j=1}^{k} \lceil\, x \in (\xi_{j-1}, \xi_j) \mapsto y_{j-1}\, \rceil \qquad \text{e} \qquad \dot\cup_{i=1}^{k} \lceil\, x \in (\xi_{j-1}, \xi_j) \mapsto y_j\, \rceil\ .$$

Osserviamo che per qualche funzione si ottengono funzioni a scala improprie, cioè funzioni con il dominio costituito da infiniti sottointervalli in ciascuno dei quali la funzione assume un unico valore.

Osserviamo infine che le costruzioni di questo paragrafo rispettano la relazione $\sim_{mfs}$, cioè due funzioni equivalenti-mns portano alla stessa funzione a scala.

I25 d. aree di trapezoidi e integrali definiti

I25d.01 Consideriamo un intervallo chiuso $\overline{I} = [a,b]$ con $a < b$, ed una funzione-RtR $f(x)$ il cui dominio contiene $\overline{I}$.
In particolare prestiamo attenzione alle funzioni a valori nonnegativi , in quanto le costruzioni che introdurremo per tali funzioni sono visualizzabili con maggiore evidenza.

Chiamiamo **trapezoide** relativo all'intervallo $[a,b]$ e alla funzione-RtR $f(x) \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ l'insieme dei punti del piano

$$\mathsf{trpzd}(f,a,b) \ := \ \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ ¶ \ a \le x \le b \ , \ 0 \le y \le f(x)\} \ .$$

Se la funzione è costante, per esempio se $\forall x \in [a,b] \ : \ f(x) = \overline{y}$, il trapezoide è il rettangolo avente la base di lunghezza $b-a$ e altezza $\overline{y}$, figura la cui area per la definizione elementare misura $(b-a)\,\overline{y}$.

Se la funzione è data da un polinomio di primo grado $f(x) = m\,x + q$ non negativo in $[a,b]$ (con $m\,a+q \ge 0$ e $m\,b+q \ge 0$), allora il trapezoide ha il lato opposto a quello in Ox coincidente con il grafico della $f(x)$; di conseguenza la sua area è $(b-a)\cdot\dfrac{f(a)+f(b)}{2} \ = \ (b-a)\cdot\left[m\,\dfrac{a+b}{2}+q\right]$.

Se si ha una funzione a scala unilateralmente continua, come le due presentate in c02, che assume valori nonnegativi il trapezoide è un **plurirettangolo**, cioè l'affiancamento di rettangoli-hv ciascuno dei quali ha un lato che contribuisce a una decomposizione del segmento $\overline{\langle a,0\rangle\,\langle b,0\rangle}$ e l'area di questa figura è $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i(x_i - x_{i-1})$.

Se la funzione è data da una poligonale con i vertici esprimibili come $\big\langle x_i, y_i\big\rangle$ per $i = 0,1,2,...,n$ con $x_0 = a$ e $x_n = b$ ed aventi le ordinate y_i nonnegative, il corrispondente trapezoide è l'unione di una famiglia finita di trapezi rettangoli con le basi verticali e la sua area è data da un'espressione che estende prevedibilmente la precedente relativa al trapezio, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\,\frac{y_{i-1}+y_i}{2}$.

I25d.02 Le aree considerate in precedenza si ottengono con considerazioni di semplice geometria elementare, cioè basata solo su oggetti geometrici lineari e senza ricorrere alla nozione di limite.

Con questo genere di considerazioni si possono attribuire aree con segno a figure caratterizzate da contorni dati da poligonali chiuse orientate.

Ci proponiamo ora di determinare procedimenti per la definizione e il calcolo di aree di maggiore portata in due direzioni. Limitandoci ai trapezoidi definiti sopra intendiamo attribuire un'area nonnegativa a un insieme esteso di trapezoidi, ovvero ai trapezoidi individuati da un insieme esteso di funzioni del genere $\lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$.

Inoltre intendiamo attribuire aree dotate di segno a figure del piano cartesiano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ i cui contorni sono determinati da funzioni-RtR che possono assumere valori negativi; vogliamo anche che la definizione di queste aree sia coerente con l'area con segno definita per le figure con contorni lineari, a sua volta riconducibile all'area di poligonali chiuse con i vertici in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Queste definizioni e i relativi procedimenti di calcolo conducono alla nozione di integrale. Questa è una nozione multiforme che si intreccia con quella di misura, cioè con l'assegnazione di un significativo valore numerico (che può essere reale, ma non solo) a una figura caratterizzabile in termini geometrici, tipicamente a un insieme di punti di uno spazio metrico, insieme al quale si richiedono opportune caratteristiche di regolarità.

La nozione di integrale è stata sviluppata in più modi da parte di matematici importanti (Pietro Mengoli, Augustin Cauchy, Bernhard Riemann, Gaston Darboux , Thomas Joannes Stieltjes , Henry Lebesgue , ...).

Questi sviluppi presentano differenze che riguardano le costruzioni, la portata e l'incisività e la loro presentazione richiede parecchie distinzioni.
In questo capitolo prenderemo in considerazione solo il procedimento che conduce al cosiddetto integrale di Riemann di funzioni-RtR, costruzione che spesso viene chiamata integrale di Cauchy-Riemann o anche integrale di Mengoli-Cauchy-Riemann-Darboux.

I25d.03 Innanzi tutto diamo una estensione della nozione di trapezoide che coinvolge funzioni-RtR che possono assumere valori negativi.
Quando interviene una $f \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ la nozione di trapezoide non può ridursi a quella di un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con una frontiera formata da un segmento orizzontale, due segmenti verticali e da una curva facente parte del grafico di una funzione-RtR. Serve invece una figura caratterizzata da un contorno orientato con opportune caratteristiche di regolrità.

Per evitare difficoltà nella definizione del contorno, in un primo momento consideriamo solo funzioni $f(x)$ continue.

Per una funzione $f(x)$ a valori nonnegativi e continua, la figura è costituita dall'insieme

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;]\!|\; a \leq x \leq b \;,\; 0 \leq y \leq f(x)\} \;.$$

Il suo contorno conveniamo che inizi in $\langle a, 0\rangle$, procede in orizzontale fino a $\langle b, 0\rangle$, poi in verticale fino a $\langle b, f(b)$, successivamente percorra da sinistra a destra il grafico della funzione fino a $\langle a, f(a)$ e infine ritorni a a $\langle a, 0\rangle$ muovendosi in verticale.
Abbiamo quindi fornito solo un arricchimento formale alla nozione data in d01.

Per una funzione $f(x)$ a valori nonpositivi e continua la figura è costituita dall'insieme

$$\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;]\!|\; a \leq x \leq b \;,\; f(x) \leq y \leq 0)\} \;.$$

Il suo contorno si può definire in modo coerente con quello del caso precedente. Ora però il secondo tratto si muove verso il basso (se non si riduce a un punto) e il quarto tratto va verso l'alto (se non si riduce a un punto).

L'elemento distintivo tra i due casi sta nel fatto che un punto mobile che percorre il primo contorno si sposta avendo i punti più vicini dell'insieme delimitato sempre sulla sua sinistra; viceversa un punto che percorre il secondo contorno si sposta avendo i punti più vicini dell'insieme delimitato sempre sulla sua destra.

Nel caso della funzione a valori nonnegativi si attribuisce al contorno il **verso positivo** o **verso antiorario** e all'area un valore positivo; nel caso della funzione nonpositiva al contorno si attribuisce il **verso negativo** o **verso orario** e all'area un valore negativo.

Segnaliamo il caso della funzione $\lceil x \in [a,b] \mapsto 0 \rceil$ nel quale la figura si riduce al segmento $\overline{\langle a, 0\rangle\ \langle b, 0\rangle}$, il percorrere il suo contorno si riduce allo spostarsi sul segmento prima verso destra e poi verso sinistra, Questa figura si può considerare il limite di rettangoli con base $\Big\langle \langle a, 0\rangle, \langle b, 0\rangle \Big\rangle$ e altezza $h \in \mathbb{R}_+$ per h tendente a 0.
Per mantenere la continuità dell'area al variare dei rettangoli alla sua area si assegna il valore 0.

I25d.04 Per una funzione continua che può assumere valori reali di ogni segno si comincia con il definire il contorno in stretta coerenza con le definizioni precedenti: esso inizia in $\langle a, 0\rangle$, procede sull'asse Ox fino a $\langle b, 0\rangle$, poi in verticale giunge fino a $\langle b, f(b)\rangle$ quindi segue il grafico (continuo) della funzione fino a $\langle a, f(a)\rangle$ e infine ritorna a a $\langle a, 0\rangle$ muovendosi in verticale.

Ora il grafico della funzione può intersecare l'asse Ox in uno o più punti: per esempio nel caso della funzione $\sin x$ definita nell'intervallo $[-\pi/2, 5/2\pi]$ si assumono valori 0 nei punti $\langle 0,0\rangle$, $\langle \pi,0\rangle$ e $\langle 2\pi,0\rangle$; nel caso della funzione $x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ con dominio $[0,1]$ il diagramma interseca Ox in infiniti punti, negli zeri di tale funzione.

Per una funzione continua con valori sia positivi che negativi si deve partire dal percorso che ancora facciamo iniziare con il tratto da $\langle a,0\rangle$ a $\langle b,0\rangle$ e facciamo proseguire di conseguenza.

Questo contorno costituisce una curva chiusa intrecciata, cioè tale che un punto mobile che lo percorre trova i più vicini punti della figura che delimita sia alla sua sinistra, che alla sua destra.

Il contorno di un tale trapezoide generale si decompone in contorni che costituiscono curve chiuse semplici costituite da un segmento dell'asse delle ascisse e da una porzione del grafico della funzione le cui ordinate sono o tutte nonnegative o tutte nonpositive e da un segmento verticale; nel primo caso la curva semplice ha verso positivo, nel secondo verso negativo.

Vengono quindi individuate più figure del piano a ciascuna delle quali si attribuisce un'area avente come valore un numero reale.
Dopo aver osservato che tutte queste figure sono casi particolari dei primi due tipi di trapezoidi trattati, caratterizzati dalle ordinate delle ascisse estreme uguali a 0, si attribuisce area positiva alle figure con contorno positivo e area negativa alle figure con contorno negativo.

Inoltre si stabilisce di attribuire all'intero trapezoide l'area data dalla somma algebrica delle aree parziali.

I25d.05 Si pone anche il problema di attribuire un'area alle figure delimitate da una funzione che all'interno dell'intervallo chiuso che costituisce il suo dominio presenta una infinità numerabile di zeri. In questo caso si stabilisce di cercare di attribuire al corrispondente trapezoide come area la somma di una serie i cui termini sono le infinite aree parziali. La effettiva possibilità di attribuire un'area dipende, prevedibilmente, dalle caratteristiche quantitative della funzione e delle serie che ne derivano.

Queste indicazioni consentono di attribuire facilmente un'area con segno alle figure associate a funzioni date da poligonali e da funzioni a scala a valori senza restrizioni di segno. Quest'ultimo caso, quando la decomposizione dell'intervallo $\overline{I}$ riguarda interi consecutivi ed i valori sono numeri interi porta a una semplice somma algebrica di numeri interi, cioè a un processo computazionale elementare e basilare.

Si osserva che la definizione del contorno data all'inizio del paragrafo consente di prescindere dalla richiesta $a < b$; nel caso $b < a$ il contorno inizia con un segmento dell'asse Ox orientato da destra a sinistra e comprende una porzione del grafico della funzione percorso da sinistra verso destra.

Si mantiene la richiesta di attribuire area positiva // negativa alle figure semplici con il contorno percorso tenendo a sinistra // destra i punti più vicini della figura.

I25d.06 Cominciamo ora a trattare dettagliatamente il trapezoide $\mathsf{trpzd}(f,a,b)$ con a e b finiti e $a < b$ relativo a una funzione $f(x) \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ alla quale chiediamo solo di essere limitata.
Ad esso si associamo due numeri reali che per talune funzioni f, coincidono.

Consideriamo una decomposizione $\mathsf{D} = \langle x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \rangle$ di $[a,b]$ e per ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ denotiamo, risp., con m_i ed M_i l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori che ivi assume la $f(x)$.
Se la funzione f è continua o monotona è possibile scrivere più semplicemente

$$m_i = \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (f(x)) \quad \text{e} \quad M_i = \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} (f(x)) \ .$$

Per ogni $\mathsf{D} \in \mathsf{Dcmp}[a,b]$ sono definite le somme

$$\mathsf{SumRinf}(f,\mathsf{D}) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad \text{e} \quad \mathsf{SumRsup}(f,\mathsf{D}) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \;.$$

Esse sono dette, risp., **somma di Riemann inferiore** e **somma di Riemann superiore** relative alla funzione f e alla decomposizione D;

la prima fornisce l'area del plurirettangolo determinato dalla D e dagli estremi inferiori m_i, la seconda l'area del plurirettangolo determinato dalla D e dagli estremi superiori M_i.

La funzione limitata f è dotata di un estremo inferiore che denotiamo con m e di un estremo superiore che denotiamo con M. Evidentemente, essendo $\forall i,j = 1,...,n \;\vdots\; m \le m_i \le M_j \le M$, valgono le seguenti disuguaglianze

$$m(b-a) \;\le\; \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \;\le\; \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \;\le\; M\,(b-a) \;.$$

Nel caso sia $f \in \lceil\, [a,b\,] \longmapsto \mathbb{R}_{0+} \rceil$ si ha anche la disuguaglianza $0 \le m(b-a)$.

I25d.07 Se si confrontano le somme inferiori e le somme superiori relative a due decomposizioni D' e D'' con $\mathsf{D}' \sqsubseteq \mathsf{D}''$, si trova facilmente che

$$\mathsf{SumRinf}(f,\mathsf{D}') \le \mathsf{SumRinf}(f,\mathsf{D}'') \le \mathsf{SumRsup}(f,\mathsf{D}'') \le \mathsf{SumRsup}(f,\mathsf{D}') \;.$$

Quindi l'insieme delle somme inferiori corrispondente all'insieme delle decomposizioni di $[a,b\,]$ è limitato superiormente, mentre l'insieme delle somme superiori è limitato inferiormente. Di conseguenza il primo insieme possiede estremo superiore e il secondo possiede estremo inferiore.

Tali numeri sono chiamati, risp., **integrale inferiore** e **integrale superiore** della funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a,b\,]$ e si scrivono

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\; f(x) \;:=\; \sup_{\mathsf{D}\in\mathsf{Dcmp}[a,b]} \mathsf{SumRinf}(f,\mathsf{D}) \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\; f(x) \;:=\; \inf_{\mathsf{D}\in\mathsf{Dcmp}[a,b]} \mathsf{SumRsup}(f,\mathsf{D}) \;.$$

Quando questi due numeri coincidono si dice che forniscono l'**integrale definito secondo Riemann** della funzione f nell'intervallo $[a,b\,]$; tale numero reale viene denotato con la scrittura

$$\int_a^b \mathrm{d}x\; f(x) \;.$$

Le funzioni dotate di questo integrale si dicono **funzioni integrabili secondo Riemann** in $[a,b\,]$; il loro insieme si denota con **FunIntgl**$[a,b\,]$.

La scrittura $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x$ che precede la epressione della funzione da integrare si può considerare come una funzione che a ogni elemento di **FunIntgl**$[a,b\,]$ associa un numero reale. In modo più pertinente una funzione che agisce su funzioni come la precedente viene detta **funzionale** che agisce su funzioni-RtR per ottenere da ciascuna di esse un numero reale.

I25d.08 **Teorema** Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a,b\,]$

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\; f(x) \;=\; \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\; f(x) \;,$$

ossia $f(x)$ è integrabile su tale intervallo.

Dim.: Osserviamo preliminarmente che $f(x)$, essendo continua in un intervallo chiuso, è anche limitata, uniformemente continua e dotata di minimo e massimo.

Per la continuità uniforme, fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall\, x', x'' \in [a,b\,] \quad : \quad |x'' - x'| < \delta \implies |f(x'') - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}\ .$$

Consideriamo quindi la decomposizione di $[a,b\,]$ $\boldsymbol{Rfn}_\delta(\langle a < b\rangle)$: si tratta della decomposizione uniforme costituita da sottointervalli di ampiezza non supriore a δ. Per ciascun sottointervallo $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ scriviamo $m_i := \min_{x \in I_i}(f(x))$, $M_i := \max_{x \in I_i}(f(x))$ e denotiamo con $x_{i,-}$ un'ascissa tale che $f(x_{i,-}) = m_i$ e con $x_{i,+}$ un'ascissa tale che $f(x_{i,+}) = M_i$.

Con tali notazioni si trova

$$\mathsf{SumRsup}(f, \mathsf{D}(\epsilon)) - \mathsf{SumRinf}(f, \mathsf{D}(\epsilon)) \;=\; \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$=\; \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i,+}) - f(x_{i,-})]\ (x_i - x_{i-1}) \;\le\; \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \;=\; \epsilon\ .$$

La disuguaglianza trovata, per l'arbitrarietà di ϵ esprime l'integrabilità enunciata ▮

Sono quindi integrabili su qualsiasi intervallo chiuso contenuto nel loro dominio tutte le funzioni polinomiali, le funzioni seno e coseno, la funzione $\tanh(x)$, le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmo con basi positive arbitrarie.

Inoltre le composizioni ottenute con formule ben formate dalle precedenti sono integrabili su tutti gli intervalli chiusi nei quali risulta assicurata la limitatezza delle funzioni fornite dalle composizioni.

I25d.09 **Teorema** Se $f(x)$ è una funzione-RtR limitata e monotona in $[a,b\,]$

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ f(x) \;=\; \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ f(x)\ ,$$

ossia $f(x)$ è integrabile su tale intervallo.

Dim.: Scelto un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), poniamo $\delta := \dfrac{\epsilon}{|f(b) - f(a)|}$ e individuiamo la decomposizione di $[a,b\,]$ $\boldsymbol{Rfn}_\delta(\langle a < b\rangle)$ costituita da sottointervalli congruenti di ampiezza sicuramente inferiore o uguale a δ ed esaminiamo la differenza tra le corrispondenti somme di Riemann.

Nel caso in cui la $f(x)$ è nondecrescente in $[a,b\,]$ si ha

$$\mathsf{SumRsup}(f, \mathsf{D}(\epsilon)) - \mathsf{SumRinf}(f, \mathsf{D}(\epsilon)) \;=\; \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})$$

$$\le\; \mathit{maxwid}(\mathsf{D}(\epsilon)) \cdot \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})] \;=\; \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)}\ [f(b) - f(a)] \;=\; \epsilon\ .$$

La disuguaglianza trovata, per l'arbitrarietà di ϵ esprime l'integrabilità enunciata.

Per la dimostrazione nel caso di funzione noncrescente nel precedente sviluppo si devono scambiare gli $f(x_i)$ con gli $f(x_{i-1})$ ma si giunge alla stessa disuguaglianza e conseguentemente all'integrabilità enunciata ▮

Si osserva che le due situazioni precedenti sono l'una la duale-UD dell'altra.

I25d.10 **(1) Prop.**: Le funzioni a scala sono integrabili secondo Riemann.

Dim.: Consideriamo funzioni a scala $s(x)$ sostenute dalla decomposizione

$$\mathsf{D} \; = \; \langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \rangle \; .$$

Cominciamo a considerare la funzione a scala

$$s_1(x) \; := \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} \; \lceil x \in [x_{j-1}, x_j) \mapsto v_j \rceil \; \dot{\cup} \; \langle b, v_n \rangle \; ,$$

continua da destra in [a,b) e continua da sinistra in $\langle b, v_n \rangle$. Scelto $\epsilon \in (0, maxwid(\mathsf{D}))$ (idap), tra le somme di Riemann consideriamo le due sostenute dalla decomposizione

$$\Lambda(\epsilon) \; := \big\langle x_0 < x_1 - \epsilon < x_1 < \cdots < x_{n-1} - \epsilon < x_{n-1} < x_n \big\rangle \quad , \text{ cioè}$$

$$\mathsf{SumRinf}(s_1, \Lambda(\epsilon)) \; = \; \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, v_i - \epsilon\, H \quad \text{con } H := \sum_{i=1}^{n-1} \max(0, v_i - v_{i+1}) \quad \text{ e}$$

$$\mathsf{SumRsup}(s_1, \Lambda(\epsilon)) \; = \; \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, v_i + \epsilon\, K \quad \text{con } K := \sum_{i=1}^{n-1} \max(0, v_{i+1} - v_i) \quad .$$

Per l'arbitrarietà di ϵ questo prova che l'estremo superiore delle suddette somme di Riemann inferiori e l'estremo inferiore delle suddette somme di Riemann coincidono e quindi la funzione è integrabile e vale l'uguaglianza

$$\int_a^b \mathrm{d}x \;\; s_1(x) \; = \; \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, v_i \; .$$

Per le altre funzioni a scala unilateralmente continue valgono considerazioni che differiscono dalle precedenti solo per la scelta della decomposizione $\Lambda(\epsilon)$ che deve contenere sottointervalli di ampiezza ϵ nei quali deve trovarsi la discontinuità e quindi conducono alla stessa conclusione.

Anche per le altre funzioni a scala appartenenti alla stessa funzione-mns valgono considerazioni poco diverse. Per la generica funzione a scala $s(x)$ sostenuta dalla decomposizione D che presenta i valori $s(x_i) = w_i$ per $i = 0, 1, ..., n$ si considera la decomposizione

$$\Lambda(\epsilon) \; := \big\langle x_0 < x_0 + \epsilon < x_1 - \epsilon < x_1 < x_1 + \epsilon < \cdots < x_{n-1} - \epsilon < x_{n-1} < x_{n-1} + \epsilon < x_n - \epsilon < x_n \big\rangle$$

che in ogni $[x_{i-1}, x_i]$ presenta un sottosottointervallo iniziale e uno finale che si prendono carico delle discontinuità; in tal caso per le parti delle somme di Riemann che tengono conto delle discontinuità si pone

$$H \; := \; \sum_{i=1}^{n} \max(0, v_i - w_{i-1}) \; + \; \max(0, v_i - w_i) \;\; \text{e} \;\; K \; := \; \sum_{i=1}^{n} \max(0, w_{i-1} - v_i) + \max(0, w_i - v_i) \; .$$

Ancora la differenza tra le due somme di Riemann è $\epsilon\,(H + K)$ e quindi segue la coincidenza di integrale inferiore e integrale superiore ▮

I25d.11 La dimostrazione precedente consente di affermare che l'integrale di Riemann è un funzionale che presenta un unico valore per le funzioni a scala appartenenti alla stessa funzione-mfs. Questa affermazione si può generalizzare ampliando in misura notevole l'insieme delle funzioni-RtR alle quali si può applicare l'integrale di Riemann.

(1) Prop.: Se la funzione-RtR $f(x)$ è definita e integrabile sull'intervallo $\overline{I} \; := $ [a,b], ogni $g(x)$ equivalente-mfs alla $f(x)$ è integrabile e il suo integrale coincide con $\mathcal{I} := \displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x \;\; f(x)$.

Dim.: Basta dimostrare la cosa per una $g(x)$ che differisce dalla $f(x)$ in un solo $\overline{x} \in$ [a,b]: il caso generale si ottiene come reiterazione dell'enunciato con la portata così ridotta.

La dimostrazione si basa sul confronto di somme di Riemann di $f(x)$ con somme di Riemann di $g(x)$ e per questo basta considerare somme relative a decomposizioni dell'intervallo $[a,b]$ nelle quali compare come componente l'ascissa $\overline{x}$.

Consideriamo quindi una decomposizione $\mathsf{D} = \langle a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\rangle$ e un qualsiasi punto interno x_j con $1 \leq j \leq n-1$.

Scelto un arbitrario $\epsilon \in (0, maxwid(\mathsf{D}))$ (idap), consideriamo una decomposizione di $[a,b]$ della forma $\mathsf{D} = \langle x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n\rangle$ avente una componente coincidente con l'ascissa $\overline{x}$ la cui posizione denotiamo con j che chiediamo appartenga a $[2, n-2]$ (cioè $x_j = \overline{x}$) e con le due ascisse adiacenti $x_{j-1} = x_j - \epsilon$ e $x_{j+1} = x_j + \epsilon$.

Occorre confrontare le somme di Riemann relative alla decomposizione $\mathsf{D}(\epsilon)$ per la $f(x)$, con quelle per la $g(x)$. Queste sono, risp.,

$$\textsf{SumRinf}(f, \mathsf{D}) - \epsilon\,[\max(0, m_j - g(\overline{x})) + \max(0, m_{j+1} - g(\overline{x}))] \quad \text{e}$$
$$\textsf{SumRsup}(f, \mathsf{D}) + \epsilon\,[\max(0, g(\overline{x}) - M_j) + \max(0, g(\overline{x}) - M_{j+1})\ .$$

Ancora i coefficienti di ϵ sono limitati, dato che sono limitate la $f(x)$ e la $g(x)$; quindi l'arbitrarietà di ϵ comporta la coincidenza dell'estremo superiore delle $\textsf{SumRinf}(g, \mathsf{D})$ con l'estremo inferiore delle $\textsf{SumRsup}(g, \mathsf{D})$ e con la corrispondente quantità per la $f(x)$, cioè con $\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)$.

Nei casi $\overline{x} = a$ e $\overline{x} = b$ nella dimostrazione si devono solo cambiare, semplificandole, le differenze tra le somme di Riemann della $g(x)$ e quelle della $f(x)$, differenze che presentano un solo fattore moltiplicativo della ϵ ▮

I25d.12 L'enunciato precedente consente di affermare che l'integrale di Riemann è un funzionale che presenta un unico valore per tutte le funzioni integrabili di una classe di funzioni che differiscono solo per un insieme finito di valori. Quindi l'integrale definito si può considerare anche come un funzionale che associa numeri reali alle (più comprensive) funzioni-mfs.

Le conclusioni dei precedenti paragrafi d08, d09, d10 e d11 si possono estendere anche a garantire l'integrabilità di funzioni-RtR noncontinue, nonmonotone e non a scala.

Si possono quindi enunciare le seguenti relazioni di inclusione stretta

(1)
$$\mathsf{FunCnt}[a,b] \subset \textsf{FunIntgl}[a,b] \quad , \quad \textsf{FunMntn}[a,b] \subset \textsf{FunIntgl}[a,b] \quad , \quad \mathsf{FunStep}[a,b] \subset \textsf{FunIntgl}[a,b]\ .$$

Queste relazioni costituiscono indicazioni a favore della ampiezza dell'insieme delle funzioni-RtR integrabili.

I25d.13 **(1) Lemma**: Consideriamo la funzione-RtR $f(x)$ definita e limitata sull'intervallo reale $\overline{I} := [a,b]$ e sia c un numero reale positivo.

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ c \cdot f(x) \ = \ c \cdot \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ f(x) \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ c \cdot f(x) \ = \ c \cdot \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ f(x)\ .$$

Dim.: La proprietà di omogeneità dell'asserto discende dalla evidente omogeneità delle somme di Riemann per ogni D decomposizione di $\overline{I}$, cioè dalle relazioni

$$\textsf{SumRinf}(c \cdot f, \mathsf{D}) \ = \ c \cdot \textsf{SumRinf}(f, \mathsf{D}) \quad \text{e} \quad \textsf{SumRsup}(c \cdot f, \mathsf{D}) \ = \ c \cdot \textsf{SumRsup}(f, \mathsf{D})\ ▮$$

(2) Teorema Se c è un numero reale ed $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ c\, f(x) \ = \ c \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)\ ▮$$

Questa uguaglianza si può leggere anche come proprietà del funzionale $\int_a^b \mathrm{d}x \,_\mid$ applicabile a una parte delle funzioni-RtR.

I25d.14 **(1) Prop.**: Consideriamo due funzioni limitate $f(x)$ e $g(x)$ definite su [a,b].

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ \ [f(x)+g(x)] \ = \ \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ f(x) + \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ g(x)\ ,$$
$$\overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ \ [f(x)+g(x)] \ = \ \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ f(x) + \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x\ g(x)$$

Dim.: L'asserto discende dalla evidente additività delle somme di Riemann valida per ogni decomposizione **D**, cioè dalla

$$\mathsf{SumRinf}(f+g,\mathsf{D}) \ = \ \mathsf{SumRinf}(f,\mathsf{D}) + \mathsf{SumRinf}(g,\mathsf{D}) \quad \text{e dalla}$$
$$\mathsf{SumRsup}(f+g,\mathsf{D}) \ = \ \mathsf{SumRsup}(f,\mathsf{D}) + \mathsf{SumRsup}(g,\mathsf{D}) \ \blacksquare$$

(2) Teorema Se $f(x)$ e $g(x)$ sono integrabili in [a,b] lo è anche la loro somma e si ha

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ \ [f(x)+g(x)] \ = \ \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_a^b \mathrm{d}x\ g(x)\ \blacksquare$$

Questa uguaglianza si può leggere anche come proprietà di additività del funzionale $\int_a^b \mathrm{d}x \,_\mid$.

I25d.15 Va segnalato che nella scrittura qui preferita per l'integrale definito $\int_a^b \mathrm{d}x$ la variabile x rappresenta un attore puramente strumentale per la costruzione che esprime. Gli elementi formali con questa caratteristica sono chiamati **variabili saturate** o variabili mute.

Tale segno potrebbe essere sostituito da un qualsiasi altro simbolo disponibile. Conseguentemente una scrittura come la $\int_a^b \mathrm{d}x\ \ f(x)$ è del tutto equivalente a scritture come $\int_a^b \mathrm{d}t\ \ f(t)$, $\int_a^b \mathrm{d}\xi\ \ f(\xi)$, $\int_a^b \mathrm{d}\overline{x}\ f(\overline{x})$ e $\int_a^b \mathrm{d}y_3\ f(y_3)$.

La considerazione sulla x variabile saturata vale anche per la scrittura per gli integrali definiti usata più comunemente, scrittura della forma $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con il differenziale della variabile di integrazione collocato a destra.

I25d.16 Può essere utile avere presente un altro procedimento per introdurre gli integrali definiti di funzioni reali $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ che si serve di una sorta di decomposizione della funzione integranda in una parte nonnegativa e in una nonpositiva:

$$f(x) \ = \ f_+(x) + f_-(x) \quad \text{con} \quad f_+(x) := \max(0, f(x)) \ \text{ e } \ f_-(x) := \min(0, f(x) \ \text{ per ogni } \ x \in [a,b\ ]\ .$$

Questo procedimento inizia definendo l'integrale di Riemann per funzioni-RtR nonnegative e attribuendogli il significato di area con valore nonnegativo. Di queste nozioni di integrale e di area per le quali non parla di segno si possono dimostrare varie proprietà avvantaggiandosi della loro interpretazione geometrica.

Successivamente per una funzione-RtR $f(x)$, alla quale si chiede solo di assumere valori reali limitati si definiscono la parte nonnegativa $f_+(x)$ e la nonpositiva $f_-(x)$ e si osserva che sono chiaramente definiti gli integrali della forma $\int_a^b \mathrm{d}x\ \ f_+(x)$ e $\int_a^b \mathrm{d}x\ \ (-f_-(x))$.

A questo punto si può definire come integrale di una funzione-RtR come

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \ := \ \int_a^b \mathrm{d}x\ f_+(x) - \int_a^b \mathrm{d}x\ (-f_-(x))$$

e si estendono formalmente a questa costruzione le proprietà trovate in precedenza.

In particolare l'uguaglianza d13(2) per le funzioni positive o nulle viene dimostrata per costanti moltiplicative nonnegative e successivamente, prescindendo dalla interpretazione geometrica elementare, può essere estesa a tutte le costanti reali.

I25d.17 Le funzioni integrabili in un intervallo costituiscono uno spazio vettoriale e l'integrazione sopra questo intervallo, $\int_a^b \mathrm{d}x$, risulta essere un funzionale lineare per tale spazio.

I25d.18 **(1) Prop.**: Consideriamo due intervalli reali consecutivi [a,b] e $[b,c]$; accade che

$$\int_a^c \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) + \int_b^c \mathrm{d}x\ f(x)$$

Dim.: Segue dalla possibilità di considerare solo somme di Riemann relative a decomposizioni di $[a,c]$ che contengono l'ascissa "intermedia" b ▮

Inoltre si osserva che l'integrale è invariante per ogni traslazione della variabile indipendente.

Se h e k sono due numeri reali con $h < k$, si definisce

$$\int_k^h \mathrm{d}x\ f(x) \ := \ -\int_h^k \mathrm{d}x\ f(x) \ .$$

Di conseguenza l'integrazione definita si può associare a una qualsiasi coppia di numeri reali $\langle a, b\rangle$.

Si osserva inoltre che la proprietà (1) risulta valida quali che siano le posizioni relative di a, b e c, cioè vale per una qualsiasi terna $\langle a, b, c\rangle$ di numeri reali.
Questa proprietà viene detta **additività dell'integrale sugli intervalli di integrazione**.

Conviene ricordare a questo punto la coerenza dell'integrale con le aree con segno preannunciata in d05.

I25d.19 La precedente proprietà suggerisce di cercare di estendere la costruzione consistente nella integrazione secondo Riemann delle funzioni definite in un interrvallo decomponibile in una sequenza di sottointervalli successivi in ciascuno dei quali la funzione è continua.

Si definisce **funzione continua a pezzi** nell'intervallo $\overline{I} :=$ [a,b] ogni funzione a valori reali $p(x)$ definita in tale insieme per la quale esista una decomposizione $\mathsf{D} = \langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\rangle \in$ Dcmp[a,b] tale che $\forall n = 1, 2, ..., n \ :\ p(x) \in \mathsf{FunCnt}(x_{i-1}, x_i)$.
La decomposizione $\mathsf{D} = \langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\rangle$ si dice **sostegno della funzione continua a pezzi** $p(x)$.

L'insieme delle funzioni continue a pezzi sull'intervallo [a,b] si denota con FunCntp[a,b] e più specificamente l'insieme delle funzioni continue a pezzi aventi come sostegno la decomposizione $\mathsf{D} = \langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\rangle$ si denota con FunCntp(D).

Evidentemente tutte le funzioni continue sull'intervallo $\overline{I} :=$ [a,b] e tutte le funzioni a scala su $\overline{I}$ sono casi particolari di funzioni continue a pezzi. Dato che esistono funzioni continue su un intervallo che non sono funzioni a scala su tale insieme e che le funzioni a scala non costanti non sono continue, valgono le seguenti relazioni di inclusione forte:

(1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$: FunCnt[a,b] $\subset$ FunCntp[a,b] ;

$$(2) \qquad \forall \mathsf{D} \in \mathsf{Dcmp} \ \vdots \ \ \mathsf{FunStep}(\mathsf{D}) \subset \mathsf{FunCntp}(\mathsf{D}) \ .$$

Un esempio di funzione continua a pezzi che non è continua e non è a scala è data dalla funzione $\mathrm{mant}(x) := x - \lfloor x \rfloor$, la funzione a denti di sega, definibile su un qualsiasi intervallo reale $\overline{I} := [a,b\,]$.

I25d.20 Prop. Le funzioni continue a pezzi in un intervallo reale ivi sono anche integrabili. Più precisamente

$$\forall p(x) \in \mathsf{FunCntp}\langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \rangle \quad \vdots$$
$$p(x) \in \mathbf{FunIntgl}[a,b\,] \ \text{ e } \ \int_a^b \mathrm{d}x \ p(x) \ = \ \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \mathrm{d}x \ p(x) \ .$$

Dim.: Delle somme di Riemann della funzione $p(x)$ si possono considerare solo quelle relative alle decomposizioni Λ di $[a,b\,]$ che contengono tutte le ascisse componenti della decomposizione $\mathsf{D} = \langle a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \rangle$.

Queste decomposizioni più fini della D si riducono a giustapposizioni di decomposizioni relative agli n sottointervalli $[x_{i-1}, x_i]$. Di conseguenza le somme di Riemann inferiori e le superiori si riducono a somme sugli sottointervalli di somme ridotte relative ai singoli sottointervalli.

Per ciascune delle coppie di somme di Riemann relative a ciascun sottointervallo la continuità della funzione garantisce la convergenza con l'infittirsi della decomposizione di sottointervallo; da queste segue l'integrabilità della $p(x)$ sull'intero intervallo e la formula enunciata ▮

Per esempio per la funzione a denti di sega, se $h, k \in \mathbb{Z}$ con $h < k$ si ha $\displaystyle\int_h^k \mathrm{d}x \ \mathrm{mant}(x) \ = \ \frac{k-h}{2}$.

Similmente a quanto segnalato per le funzioni-mfs a scala, anche due funzioni continue a pezzi che differiscono in un insieme finito di ascisse del dominio hanno lo stesso integrale definito. In altre parole i valori che una funzione continua a pezzi assume nei suoi punti di discontinuità non influiscono sul suo integrale definito.

I25d.21 (1) Lemma: Se nell'intervallo $[a,b\,]$ la funzione $f(x)$ è definita, nonnegativa e limitata, allora valgono le disuguaglianze

$$0 \leq \underline{\int_a^b} \mathrm{d}x \ f(x) \leq \overline{\int_a^b} \mathrm{d}x \ f(x) \ .$$

Dim.: Anche in questo caso la proprietà discende dalla analoga per le somme di Riemann:

$$0 \leq \mathbf{SumRinf}(f, \mathsf{D}) \leq \mathbf{SumRsup}(f, \mathsf{D}) \ ▮$$

(2) Prop.: Se nell'intervallo $[a,b\,]$ la funzione $f(x)$ è definita, nonnegativa e integrabile, allora

$$\int_a^b \mathrm{d}x \ f(x) \geq 0 \ ▮$$

(3) Prop.: Consideriamo le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite, nonnegative e integrabili nell'intervallo $[a,b\,]$.

$$\forall x \in [a,b\,] \ \ \vdots \ \ f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b \mathrm{d}x \ f(x) \leq \int_a^b \mathrm{d}x \ g(x) \ ▮$$

(4) Prop.: Se nell'intervallo $[a,b\,]$ la funzione $f(x)$ è integrabile, allora

$$\left| \int_a^b \mathrm{d}x \ f(x) \right| \ \leq \ \int_a^b \mathrm{d}x \ |f(x)| \ ▮$$

I25d.22 **Teorema** (**teorema della media per gli integrali**)
Se $f(x)$ è una funzione continua in [a,b], in questo intervallo esiste un ξ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{d}x\ \ f(x) = f(\xi) \ ▮$$

I25d.23 Per definire meglio la portata della integrazione secondo Riemann si osserva che le funzioni-RtR illimitate non sono integrabili secondo Riemann.

I25 e. antiderivate e integrali indefiniti

I25e.01 Procediamo ora ad esaminare l'operazione inversa della derivazione. Consideriamo per questo un intervallo reale $[a,b]$ e una funzione $f \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$.

Si dice **funzione primitiva** della $f(x)$, o anche **antiderivata** della $f(x)$, ogni funzione $F \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ tale che per ogni $x \in [a,b]$ sia $F'(x) = f(x)$. Se una tale funzione $F(x)$ esiste, ovviamente, deve essere derivabile e quindi deve essere continua.

Si osserva subito che data una funzione derivabile $f(x)$ non risulta determinata un sua unica primitiva: infatti se $F'(x) = f(x)$, per ogni $\mathtt{C} \in \mathbb{R}$ anche $F(x) + \mathtt{C}$ ha come derivata la $f(x)$. Si dice anche che la funzione primitiva va considerata una **funzione determinata modulo una costante additiva arbitraria**.
Equivalentemente si dice che se si trovano due funzioni primitive aventi come derivata la $f(x)$, queste devono avere differenza costante:

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \Longrightarrow F(x) - G(x) = \mathtt{C} \text{ per qualche } \mathtt{C} \text{ costante reale.}$$

Un altro enunciato equivalente è il seguente:

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \implies \ulcorner \forall c, d \in \mathsf{dom}(F) = \mathsf{dom}(G) \;\vdots\; F(d) - F(c) = G(d) - G(c) \urcorner .$$

Diciamo **famiglia additiva di funzioni reali** di dominio D ogni insieme di funzioni del genere $\lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ avente la forma $\{\mathtt{C} \in \mathbb{R} :| f(x) + \mathtt{C}\}$.
Possiamo quindi dire che la collezione degli insiemi delle funzioni primitive delle varie funzioni-RtR derivabili coincide con la collezione delle famiglie additive di funzioni-RtR.

I25e.02 Da alcuni risultati del cap. I20 si ricava la tabella di antiderivate che segue; in essa i simboli $\mathtt{C}$ e $\mathtt{C}_1$ vengono usati per rappresentare costanti che si possono scegliere come si vuole in $\mathbb{R}$ ed esclusivamente per questo ruolo; inoltre a denota un numero reale, n un numero intero diverso da -1 e b un reale positivo diverso da 1.

(1) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; a \;=\; a\,x + \mathtt{C} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$

(2) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; x^n \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathtt{C} \quad \text{con } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(3) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; \frac{1}{x} \;=\; \ln|x| + \mathtt{C}$

(4) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; \mathrm{e}^x \;=\; \mathrm{e}^x + \mathtt{C}$

(5) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; b^x \;=\; \frac{1}{\ln b} b^x + \mathtt{C} \quad \text{con } b \in (0,1) \cup (1,+\infty) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$

(6) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; \sin x \;=\; -\cos x + \mathtt{C}$

(7) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; \cos x \;=\; \sin x + \mathtt{C}$

(8) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; (\sec x)^2 \;=\; \int \mathrm{d}x\; \frac{1}{(\cos x)^2} \;=\; \tan x + \mathtt{C}$

(9) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; (\csc x)^2 \;=\; \int \mathrm{d}x\; \frac{1}{(\sin x)^2} \;=\; -\cot x + \mathtt{C}$

(10) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\; \frac{1}{1+x^2} \;=\; \arctan x + \mathtt{C}$

(11) $\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \arcsin x + \mathtt{C}$

(12) $\int \mathrm{d}x \, \sec x \, \tan x \;=\; \sec x + \mathtt{C}$

(13) $\int \mathrm{d}x \, \csc \, x \cot x \;=\; -\csc \, x + \mathtt{C}$

(14) $\int \mathrm{d}x \;\tan x \;=\; \ln|\cos x| + \mathtt{C} \;=\; \ln|\sec x| + \mathtt{C}_1$

(15) $\int \mathrm{d}x \;\cot x \;=\; \ln|\sin x| + \mathtt{C} \;=\; \ln|\csc \, x| + \mathtt{C}_1$

(16) $\int \mathrm{d}x \, \sec x \;=\; \ln|\sec x + \tan x| + \mathtt{C}$

(17) $\int \mathrm{d}x \, \csc \, x \;=\; \ln|\csc \, x + \cot x| + \mathtt{C}$

(18) $\int \mathrm{d}x \;\sinh x \;=\; \cosh x + \mathtt{C}$

(19) $\int \mathrm{d}x \;\cosh x \;=\; \sinh x + \mathtt{C}$

(20) $\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{(\sinh x)^2} \;=\; \tanh x + \mathtt{C}$

(21) $\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{(\cosh x)^2} \;=\; \coth x + \mathtt{C}$

I25e.03 vari altri risultati si ottengono dalla osservazione che anche l'operatore di antiderivazione è lineare, come lo è l'operatore di derivazione, cioè dalla

$$\forall h \in \mathbb{R}_{nz} \; : \; \int \mathrm{d}x \; f(h\,x) \;=\; \frac{1}{h} \int \mathrm{d}u \; f(u) \; .$$

(1) $\forall k \in \mathbb{R}_{nz} \;\; : \;\; \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x^2+k^2} \;=\; \frac{1}{k} \arctan \frac{x}{k} + \mathtt{C}$ per $k \in \mathbb{R}_{nz}$ e

(2) $\forall k \in \mathbb{R}_{nz} \;,\; |x| < k \;\; : \;\; \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{k^2-x^2}} \;=\; \arcsin \frac{x}{k} + \mathtt{C}$ per $k \in \mathbb{R}_{nz}$ e $|x| \geq |k|$

(3) $\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x\sqrt{x^2-k^2}} \;=\; \mathrm{arcsec} \frac{x}{k} + \mathtt{C}$ per $k \in \mathbb{R}_{nz}$ e $|x| \geq |k|$

(3) $\int \mathrm{d}x \;\cos \alpha x \;=\; \frac{1}{\alpha} \sin \alpha \, x + \mathtt{C}$ per $\alpha \in \mathbb{R}_{nz}$

I25e.04 Consideriamo una funzione $f \in$ **FunIntgl**[a,b]; per ogni $x_0 \in$ [a,b], si dice **funzione integrale** della $f(x)$ a partire da x_0 la funzione

(1) $$\ulcorner x \in [a,b] \;\mapsto\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \;\, f(t) \urcorner \; .$$

Di solito questa funzione, quando si può considerare implicito che x denota la sua variabile indipendente che corre in un opportuno dominio, si individua con la semplice scrittura $\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \;\, f(t)$.

(2) Teorema La funzione integrale di una funzione integrabile sopra un intervallo [a,b] in tale insieme è derivabile e la sua derivata coincide con la stessa funzione integranda; in formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t \;\, f(t) \;=\; f(x) \; .$$

Dim.: Per ogni h reale nonnullo tale che $x_0 + h \in [a,b]$ si può considerare il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \mathrm{d}t\;\, f(t) \;=\; \frac{1}{h}\, h\, f(\xi) \;=\; f(\xi)\ ,$$

dove, per il teorema di Lagrange, ξ appartiene all'intervallo $[x_0, x_0+h]$ se $h > 0$ o all'intervallo $[x_0 - |h|, x_0]$ se $h < 0$. Passando al limite per $h \to 0$ si ottiene l'enunciato ▮

I25e.05 Teorema teorema fondamentale del calcolo integrale

Se $f \in$ **FunCnt**$[a,b] \subset$ **FunIntgl**$[a,b]$ e $F(x)$ è una sua primitiva, allora

$$\int_a^b \mathrm{d}x\;\, f(x) \;=\; F(b) - F(a)\ .$$

Dim.: Consideriamo una decomposizione di $[a,b]$ $\mathbf{D} := \langle a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\rangle$; allora

$$F(b) - F(a) \;=\; \sum_{j=1}^{n} F(x_j) - F(x_{j-1})\ .$$

Applicando il teorema di Lagrange [I21b01] agli n intervalli di questa decomposizione, si ottiene per ciascuno di essi una uguaglianza della forma

$$F(x_j) - F(x_{j-1}) \;=\; (x_j - x_{j-1})\, F'(\xi_j) \;=\; (x_j - x_{j-1})\, f(\xi_j)$$

per opportune ascisse $\xi_j \in [x_j, x_{j-1}]$. Si trova quindi che $F(b) - F(a)$, somma dei primi membri della relazione precedente, è compresa tra la somma di Riemann inferiore e la somma di Riemann superiore corrispondenti alla decomposizione $\mathbf{D}$, cioè

$$\mathbf{SumRinf}(f,\mathbf{D}) \;\le\; F(b) - F(a) \;\le\; \mathbf{SumRsup}(f,\mathbf{D})\ .$$

Dato che la $f(x)$, grazie alla sua continuità su $[a,b]$, è integrabile su questo intervallo, il valore $F(b) - F(a)$ è l'elemento separatore per i due insiemi delle somme inferiori e delle somme superiori, cioè coincide con l'integrale della $f(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ ▮

I25e.06 Teorema

Il calcolo degli integrali definiti di funzioni di cui si conoscono le primitive si riconduce al calcolo dei valori che tali primitive assumono negli estremi dell'intervallo di integrazione; in formula

$$(*) \qquad \int_a^b \mathrm{d}x\;\, F'(x) \;=\; [F(x)]_a^b\ .$$

Per esempio $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\; x^2 \;=\; \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3}$ e più in generale

$$\int_a^b \mathrm{d}x\; x^n \;=\; \left[\frac{x^{n+1}}{n}\right]_a^b \;=\; \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\ .$$

I25 f. calcolo di integrali per decomposizione lineare e per sostituzione

I25f.01 Il calcolo di integrali definiti e indefiniti è una attività di grande importanza a causa della vasta gamma delle sue applicazioni all'interno della matematica e di tutte le discipline che richiedono valutazioni quantitative (fisica, chimica, biologia, tecnologie, economia, climatologia, ...).

Si tratta anche di un'attività impegnativa, in quanto non si conoscono metodi di portata tanto ampia da coprire gran parte delle richieste.
La problematica del calcolo effettivo di integrali definiti e indefiniti va piuttosto considerata una problematica aperta.

Vi sono ben definiti insiemi di funzioni per le quali si conoscono metodi esaurienti e ai più semplici di questi sono dedicati i paragrafi finali del capitolo.
Per molti altri tipi di integrali servono procedimenti più specifici e più laboriosi che richiedono di ricorrere a particolari settori della matematica, anche decisamente astratti; come esempi citiamo la teoria delle funzioni analitiche, la teoria delle serie formali di potenze, la teoria delle equazioni differenziali, la teoria delle equazioni integrali e funzionali, l'analisi funzionale, la geometria differenziale, la combinatorica.

Questi studi hanno condotto a estese raccolte di formule di integrali definiti e indefiniti e alla implementazione di complesse procedure di calcolo simbolico, iniziate intorno al 1970 e che attualmente si possono considerare altamente attendibili. Queste procedure sono anche molto efficaci, in quanto possono essere incorporate in sistemi di software applicativo anche molto articolati che possono essere utilizzati per risolvere impegnativi problemi pratici e per governare importanti processi produttivi e di controllo ambientale.

Occorre aggiungere che numerosi problemi di integrazione si sanno affrontare solo con metodi e procedimenti di calcolo approssimato e molti di questi sono implementati in routines costituenti componenti basilari dei cosiddetti sistemi di *software numerico*.

Infine si deve segnalare il crescente sviluppo di strumenti di calcolo in grado di contribuire ad affrontare elaborazioni impegnative alternando procedimenti simbolici e calcoli approssimati, in particolare rivolti alle integrazioni.

Questi strumenti software spesso sono implementati in sistemi hardware in grado di effettuare calcoli in parallelo; in particolare sono disponibili sistemi con elevate prestazioni grafiche (animazioni) attualmente cruciali per l'interazione uomo-macchina.

I25f.02 La integrazione per decomposizione lineare si basa sopra uguaglianze della seguente semplice forma

$$\int \mathrm{d}x \, \sum_{i=1}^{m} a_i \, f_i(x) \; = \; \sum_{i=1}^{m} a_i \int \mathrm{d}x \;\, f_i(x) \; ,$$

esprimente la linearità dell'operatore di integrazione. Questa regola porta in particolare alla formula di integrazione dei polinomi

$$\int \mathrm{d}x \, \sum_{i=0}^{m} a_i \, x^i \; = \; \sum_{i=0}^{m} a_i \, \frac{x^{i+1}}{i+1} + \mathtt{C} \; .$$

Questa decomposizione viene utilizzata in singoli manovre di molti procedimenti di integrazione.

I25f.03 Il metodo della **integrazione per sostituzione della variabile di integrazione** si basa sulla possibilità di esprimere la variabile della funzione integranda come funzione dotata di derivata continua di una nuova variabile in biiezione con essa.

La scelta della nuova variabile accennata viene condotta in modo da garantire che l'integrale che si dovrà calcolare sia esprimibile nella nuova variabile e abbia caratteristiche che consentano di applicare manovre di integrazioni note o in qualche modo più maneggevoli.

I casi più semplici sono quelli delle trasformazioni $\lceil x \mapsto x+h \rceil$ e $\lceil x \mapsto x\,h \rceil$ con $h \in \mathbb{R}_{nz}$ e di altre trasformazioni esprimibili con funzioni note della x.

I25f.04 Prop. (**regola di sostituzione**) Consideriamo $f(x)$ funzione-RtR integrabile su $[a,b]$, $\phi(t)$ funzione derivabile con derivata continua, e quindi integrabile, e diversa da 0 in un intervallo $[\alpha,\beta]$ tale che $\phi(\alpha)=a$ e $\phi(\beta)=b$.

Si osserva che queste richieste garantiscono che in $[a,b]$ la $\phi(t)$ sia invertibile, e che si abbiano le uguaglianze $\alpha=\phi^{-1}(a)$, $\beta=\phi^{-1}(b)$, ovvero che sia $\mathsf{cod}(\phi)=\mathsf{dom}(f)$; inoltre la $\phi(t)$ ha la derivata $\phi'(t)$ integrabile nell'intervallo $[\alpha,\beta]$.

Per queste funzioni vale la formula

$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \ = \ \int_\alpha^\beta \mathrm{d}t\ f(\phi(t))\,\phi'(t)\ .$$

Dim.: Si considerano la funzione $x=\phi(t)$ e una primitiva $F(x)$ della $f(x)$; si trattano la $f(x)$ e la $F(x)$ come funzioni composte della variabile t e si applica alla $F(\phi(t))$ la derivazione rispetto alla t ottenendo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\phi(t)) \ = \ F'(\phi(t))\cdot\phi'(t) \ = \ f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\ .$$

Si ha quindi che il fatto che $F(x)$ sia primitiva della $f(x)$ equivale al fatto che la funzione della t $F(\phi(t))$ sia primitiva della $f(\phi(t))\cdot\phi'(t)$ ▮

I25f.05 Procediamo ora a presentare alcuni esempi cominciando dalle semplici sostituzioni che fanno intervenire una nuova variabile ottenuta con una trasformazione lineare.

Se k è un reale nonnullo e δ, a e b reali qualsiasi,

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathrm{d}x\ \sin(k\,x+\delta) \ &= \ \lfloor_{\mathsf{N}}\ t := k\,x+\delta,\ \mathrm{d}t \ = \ k\,\mathrm{d}x\ \rfloor_{\mathsf{N}} \ = \ \int_{k\,a+\delta}^{k\,b+\delta} \mathrm{d}t\ \frac{1}{k}\sin t \ = \ \frac{1}{k}\,[-\cos(k\,x+\delta)]_a^b \\ &= \ k\,[\cos(k\,a+\delta)-\cos(k\,b+\delta)]\end{aligned}\ .$$

Spesso i meccanismi della sostituzione si applicano assieme ad altre proprietà, in particolare insieme ad altre identità. Per esempio il calcolo per sostituzione dei due integrali che seguono si serve di specifiche identità (nel caso trigonometriche) per le funzioni da elaborare, della linearità dell'integrale e di risultati precedenti.

$$\int \mathrm{d}x\ \sin^2 x \ = \ \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ (1-\cos 2\,x) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2\,x\right)+\mathtt{C}\ ,$$

$$\int \mathrm{d}x\ \cos^2 x \ = \ \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\ (1+\cos 2\,x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+\mathtt{C}\ .$$

I25f.06 La integrazione per sostituzione può applicarsi facilmente anche quando la funzione che collega le due variabili è un polinomio.

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \mathrm{d}x\; x\cos(x^2+1) &= \frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{d}x\;\; \cos(x^2+1)2x = \\
& \lfloor_{\mathrm{N}}\, u := x^2+1, \mathrm{d}u\, = \mathrm{d}x\; 2\,x\;,\;\; x\in [0,2] \Longrightarrow u \in [1,5]\,{}_{\mathrm{N}}\rfloor \\
&= \;\frac{1}{2}\int_1^5 \mathrm{d}u\;\cos\,u \;\;=\;\; \frac{1}{2}(\sin\,5 - \sin\,1)\;.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mathrm{d}x\;\sqrt{1-x^2} \;\;&=\;\; \lfloor_{\mathrm{N}}\, x =: \sin\,t,\;\; \mathrm{d}x \;\;=\;\mathrm{d}t\;\;\cos\,t,\;\; x\in [0,1] \;\;\Longrightarrow\;\; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]{}_{\mathrm{N}}\rfloor \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\,\sqrt{1-\sin^2 t}\;\cos\,t \;\;=\;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\;\;\cos^2\,t \;\;=\;\; \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t \;\;=\;\; \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

I25f.07

$$
\int \mathrm{d}x\;\;\tan\,x \;\;=\;\; \int \mathrm{d}x\;\frac{\sin\,x}{\cos\,x} \;\;=\;\; \lfloor_{\mathrm{N}}\, t := \cos\,x,\;\; \mathrm{d}t\; = -\sin\,x\,\mathrm{d}x\;\;{}_{\mathrm{N}}\rfloor \;\;=\;\; -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} \;\;=\;\; -\ln|\cos\,x| + \mathtt{C}\;.
$$

Il risultato precedente è un caso particolare del seguente, valido per domini della x nei quali $g(x)$ è diversa da 0 e tale che l'integrale a primo membro esista:

$$
\int \mathrm{d}x\;\frac{g'(x)}{g(x)} \;\;=\;\; \lfloor_{\mathrm{N}}\, t := g(x),\;\; \mathrm{d}t \;\;=\;\; \mathrm{d}x\;\,g'(x)\,{}_{\mathrm{N}}\rfloor \;\;=\;\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \;\;=\;\; \ln|g(x)| + \mathtt{C}\;.
$$

Altri casi particolari:

$$
\int \mathrm{d}x\;\frac{\sinh\,x}{\cosh\,x} \;\;=\;\; \lfloor_{\mathrm{N}}\, t := \cosh\,x,\;\; \mathrm{d}t \;\;=\;\; \mathrm{d}x\;\;\sinh\,t\,{}_{\mathrm{N}}\rfloor \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \;\;=\;\; \ln(\cosh\,t) + \mathtt{C}\;.
$$

I25f.08 Sia r un parametro reale diverso da -1 e $g(x)$ una funzione reale adeguatamente regolare.

$$
\int \mathrm{d}x\;\;[g(x)]^r\,g'(x) \;\;=\;\; \lfloor_{\mathrm{N}}\, t := g(x),\;\; dt = g'(x)\,\mathrm{d}x\;\;{}_{\mathrm{N}}\rfloor \;=\; \int \mathrm{d}t\,t^r \;\;=\;\; \frac{t^{r+1}}{r+1} + \mathtt{C} \;\;=\;\; \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + \mathtt{C}\;.
$$

I25 g. calcolo di integrali per parti

I25g.01 Prop. (**regola di integrazione per parti**) Se si hanno due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ derivabili nell'intervallo [a,b] valgono le uguaglianze equivalenti:

(1)
$$\int \mathrm{d}x\ f(x)\,g'(x) \ = \ f(x)\,g(x) - \int \mathrm{d}x\ f'(x)\,g(x)\ ,$$

(2)
$$\int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)\,g'(x) \ = \ [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \mathrm{d}x\ f'(x)g(x)\ .$$

Dim.: Il prodotto delle due funzioni si può derivare:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\,g(x)\big) \ = \ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)\right)\ g(x) + f(x)\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g(x)\right)\ .$$

Si osserva che $f(x)$ e $g(x)$ in [a,b] sono continue e integrabili, e con esse i due prodotti nel secondo membro della relazione precedente. Passando alle primitive si ottengono le uguaglianze enunciate ▮

I25g.02 Per applicare le formule trovate occorre scegliere opportunamente i due fattori che forniscono la funzione integranda: in particolare è necessario, ma non sufficiente, scegliere come $g(x)$ una funzione di cui si conosce la primitiva; inoltre è opportuno scegliere come $f(x)$ una funzione la cui derivata porti a un nuovo integrale che si sappia risolvere o almeno che si presenti come più maneggevole di quello dato.

Per esempio

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ x\ \sin x \ &= \ \lfloor_{\scriptscriptstyle N}\, f(x) := x,\ g'(x) = \sin x,\ g(x) = -\cos x\,{}_{\scriptscriptstyle N}\rfloor \ = \ -x\ \cos x - \int \mathrm{d}x\ (-\cos x) \\ &= \ -x\ \cos x + \sin x + \mathtt{C}\end{aligned}\ .$$

I25g.03 Conveniamo di considerare intervalli d'integrazione relativi a valori positivi della variabile indipendente x.

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}x\ \ \ln x \ &= \ \lfloor_{\scriptscriptstyle N}\, f(x) := \ln x,\ g(x) = x,\ g'(x) = 1\,{}_{\scriptscriptstyle N}\rfloor \ = \ x \ln x - \int \mathrm{d}x\ x \cdot \frac{1}{x} \ = \ x\ \ln x - \int \mathrm{d}x \\ &= \ x\ \ln x - x + \mathtt{C}\end{aligned}\ .$$

I25g.04

$$\begin{aligned}\mathcal{I} \ = \ \int \mathrm{d}x\ \mathtt{e}^x \sin x \ &= \ \mathtt{e}^x \sin x - \int \mathrm{d}x\ \mathtt{e}^x \cos x \ = \ \mathtt{e}^x \sin x - \left[\mathtt{e}^x \cos x - \int \mathrm{d}x\ \mathtt{e}^x\,(-\sin x)\right] \\ &= \ \mathtt{e}^x\,(\sin x - \cos x) - \mathcal{I}\end{aligned}\ ;$$

La relazione trovata si può considerare una equazione nella incognita $\mathcal{I}$ immediatamente risolvibile:

$$\mathcal{I} \ = \ \frac{1}{2}\,\mathtt{e}^x\,(\sin x - \cos x)\ .$$

I25g.05 Alla regola di sostituzione conviene dare anche la forma che segue.

(1) Prop.: Consideriamo una funzione $\psi(x)$ e intervalli d'integrazione per i quali si ha $\psi'(x) \neq 0$. Allora

$$\int \mathrm{d}x\ f(\psi(x)) \ = \ \lfloor_{\scriptscriptstyle N}\, u := \psi(x),\ \mathrm{d}u \ = \ \mathrm{d}x\ \psi'(x)\,{}_{\scriptscriptstyle N}\rfloor = \int \mathrm{d}u\ f(u)\,\phi(u)\ , \quad \text{con} \quad \phi(u) \ := \ \frac{1}{[\psi'(x)]_{x\to\psi'(u)}}$$ ▮

Altre forme fanno riferimento a una generica trasformazione invertibile alla quale si sottopone la variabile di integrazione, trasformazione che genericamente denotiamo con $\mathcal{T}(x)$.

Abbiamo già visto le modifiche degli integrali comportate da omotetie; risulta conveniente anche considerare le variazioni indotte dalle traslazioni.

Consideriamo una funzione integrabile $f(x)$ e un qualsiasi $\delta \in \mathbb{R}$; introduciamo inoltre la funzione $\overline{f}(\overline{x}) := f(\overline{x} - \delta)$. Allora:

$$\int \mathrm{d}x \; f(x) \; = \; \int \mathrm{d}(x+\delta) \, \overline{f}(x+\delta) \; .$$