1

# Capitolo I24
# differenziali di funzioni reali

## Contenuti delle sezioni

a. differenziali e loro raffigurazioni p. 2
b. semplificazioni mediante differenziali p. 7
c. regole di differenziazione p. 12
d. differenziali di ordine superiore p. 13
e. cambiamento di variabile in espressioni contenenti derivate p. 15

17 pagine

---

**I240.01** In questo capitolo viene introdotta la nozione di differenziale limitandosi a considerarla come costruzione da applicare alle sole funzioni-RtR.
In generale i vari tipi di differenziali hanno lo scopo di arricchire il linguaggio della matematica con notazioni in grado di rendere più agevole la presentazione di molte questioni che si incontrano dello studio delle funzioni con buone caratteristiche di continuità.

Va segnalata in particolare la possibilità di servirsi della nozione di differenziale per sviluppi formali semplificati in molti problemi del continuo, in particolare per problemi che si riescono a presentare attraverso visualizzazioni e quindi a trattare con termini geometrici.
Va anche detto che il lingaggio dei differenziali consente di presentare più efficientemente gli sviluppi di una vasta gamma di modelli fisico-matematici.

Le ultime pagine sono dedicate ai problemi della rettificazione e della curvatura delle curve piane sufficientemente regolari, problemi che costituiscono significativi esempi di questioni che traggono vantaggio dal linguaggio dei differenziali.

## I24 a. differenziali e loro raffigurazioni

**I24a.01** Consideriamo una funzione-RtR $f(x)$, un intervallo reale aperto $I$ contenuto nel suo dominio $\mathsf{dom}(f)$ e un $x_0 \in I$.
Si dice che $f(x)$ è una **funzione differenziabile** in $x_0$ sse l'incremento $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ della funzione corrispondente al passaggio della variabile dal cosiddetto valore iniziale $x_0$ al cosiddetto valore variato $x = x_0 + \Delta x \in I$ è ottenibile da un'espressione della forma

(1) $\Delta f = \Delta x \cdot S + \Delta x \cdot \eta(\Delta x)$ con $S \in \mathbb{R}$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \eta(\Delta x) = 0$ ovvero $\eta(h) \in \mathsf{o}_{h\to 0}(1)$ .

Questa costruzione,
In tale caso Il prodotto $\Delta x\, S$ è ottenuto con una costruzione che, come il rapporto incrementale, dipende dalla $f(x)$, da $x_0$ e da $\Delta x$; esso viene chiamato **differenziale della funzione** $f(x)$ relativo //a01
all'ascissa iniziale $x_0$ e all'ascissa variata $x_0 + \Delta x$.

Va subito detto che vi sono molti sviluppi nei quali $x_0$ e $\Delta x$ si possono lasciare sottintesi e in questi casi il differenziale può essere denotato con la semplice scrittura "$\mathrm{d}f$" .
In questi casi risulta accettabile la scrittura semplificata

(2) $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = S + \eta(\Delta x) \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = S \ .$$

Dato che per definizione [I20a03(3))

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) \ ,$$

si può affermare che una funzione-RtR $f(x)$ è differenziabile in corrispondenza di un'ascissa iniziale $x_0$ sse è derivabile per tale ascissa e inoltre risulta che $S = f'(x_0)$ .

Abbiamo dunque introdotto la possibilità della scrittura semplificata

(3) $$\mathrm{d}f = f'(x_0)\, \Delta x \ .$$

Conviene osservare esplicitamente che una funzione differenziabile riferita ad una data ascissa iniziale $x_0$ deve essere anche derivabile e continua in un intorno di tale ascissa.
In altre parole si osserva che la continuità di una funzione è condizione necessaria alla differenziabilità della stessa.

È opportuno osservare anche che la nozione di differenziale introdotta ha carattere bilaterale (si può avere $\Delta x < 0$), ma che non incontreremo difficoltà ad introdurre le due definizioni a carattere unilaterale (duali-LR) di differenziale a destra e di differenziale a sinistra [a06].

**I24a.02** Lo studio dei differenziali delle funzioni-RtR è molto agevolato dalle raffigurazioni geometriche.

Va segnalato che tra queste raffigurazioni si possono distinguere quelle nelle quali $\Delta x$ è positivo o negativo e che le prime servono anche per i differenziali a destra, mentre le seconde servono anche per i differenziali a sinistra. Cominciamo limitandoci a costruzioni nelle quali $\Delta x > 0$

Mentre rinviamo a a04 la descrizione delle situazioni nelle quali la derivata della funzione si annulla in corrispondenza della ascissa iniziale $x_0$, ci curiamo della distinzione tra le funzioni che in corrispondenza dell'ascissa iniziale sono crescenti e quelle che sono decrescenti. Ci curiamo inoltre della distinzione tra le funzioni che in un intorno di $x_0$ presentano la concavità volta verso l'alto e quelle con la concavità volta verso il basso.

Osserviamo anche che per questa casistica bene illustrata dalle raffigurazioni le traslazioni nel piano-RR non portano a situazioni nuove, mentre tra le situazioni sopra introdotte si hanno collegamenti evidenti derivanti dalla dualità-UD e dalla dualità-LR.

In ogni raffigurazione poniamo $P_0 :=\langle x_0, f(x_0)\rangle$, $\Delta x = h := x - x_0$, $P :=\langle x, f(x)\rangle$, $Q :=\langle x_0 + h, f(x_0)\rangle$, $T :=\langle x, x_0 + hf'(x_0)\rangle$; abbiamo inoltre la retta $\boldsymbol{t} := \overline{P_0T}$ che è la tangente al grafico $\{x \in [x_0, x] :| \langle x, f(x)\rangle\}$ e l'angolo di inclinazione della $t$ $\theta := \arctan(f'(x_0)$.

//input pI24a02

I primi due grafici riguardano funzioni crescenti, gli ultimi due funzioni decrescenti: evidentemente questi ultimi si possono ricavare dai primi mediante la trasformazione $\lceil f \mapsto -f \rceil$. Il primo grafico è caratterizzato dall'avere il punto $T$ collocato tra $Q$ e $P$, mentre nel secondo si ha $P$ collocato tra $Q$ e $T$. In altre parole il grafico della prima funzione per $x > x_0$ si trova al di sopra della tangente $\overline{P_0P}$, mentre il grafico della seconda per $x > x_0$ si trova al di sotto della tangente.

Osserviamo anche che le situazioni riguardanti $x < x_0$, cioè $\Delta x < 0$ si ottengono dai precedenti (a meno di inessenziali traslazioni) mediante la dualità-LR cioè per la trasformazione $\lceil x \mapsto -x \rceil$, ovvero per riflessione rispetto a una retta verticale, la $x = x_0$.

**I24a.03** Nei diagrammi che riguardano la casistica dei differenziali conviene mettere a fuoco anche alcuni vettori piani applicati; per questi oggetti ricordiamo la notazione $\langle A, B\rangle$ con $A$ estremità iniziale e $B$ estremità finale, nonché la notazione $B - A$ per il corrispondente vettore applicato all'origine.

Quelli che interessano maggiormente sono i vettori applicati orizzontali e verticali ottenuti come proiezioni (con segno) sugli assi orientati $\mathsf{Ox}$ e $\mathsf{Oy}$ di vettori applicati aventi come estremità punti scelti tra $P_0$, $P$, $Q$ e $T$.

Questi vettori orizzontali e verticali risulta conveniente esprimerli come multipli dei versori $\mathsf{i} = \langle 1, 0\rangle$ e $\mathsf{j} = \langle 0, 1\rangle$. Inoltre ci riserviamo di identificare ciascuno dei vettori applicati con il corrispondente vettore applicato all'origine del riferimento cartesiano.

Si hanno dunque le relazioni vettoriali che seguono.

$$P - Q = \Delta y\,\mathbf{i} \quad , \quad T - Q = h \tan\theta\,\mathbf{j} = f'(x_0)\,h\,\mathbf{j} = \mathrm{d}f\ \mathbf{j} \quad \text{e} \quad P - T = h\,\eta(h)\,\mathbf{j}\ .$$

Questi elementi forniscono la interpretazione geometrica del differenziale, come proiezione su $\mathsf{Oy}$ di $T - Q$, cioè del segmento orientato compreso tra le intersezioni della tangente in $P_0$ $\boldsymbol{t}$ e della orizzontale $y = f(x_0)$ con la retta verticale passante per il punto variato $P$.

A sua volta il segmento orientato $P - T$ compreso tra le intersezioni del diagramma

$$\{x \in \mathsf{dom}(f) :| \langle x, f(x)\rangle\}$$

e della tangente in $P_0$ $\boldsymbol{t}$ con la verticale per il punto variato $P$ esprime $h\,\eta(h)$, contributo che al tendere a 0 di $\Delta x$ risulta infinitesimo di ordine superiore a quello dell'incremento della funzione $\Delta f$.

**I24a.04** Completiamo la gamma delle illustrazioni geometriche dei differenziali con i casi in cui $f'(x_0) = 0$ , ossia con le seguenti figuere:

//input pI24a04

Osserviamo che i primi due schemi sono duali-UD (scambiati da una riflessione rispetto a una retta orizzontale) e che il terzo con il quarto sono duali-LR (scambiati da una riflessione dello stesso genere o da una riflessione rispetto a una retta verticale).

Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice **funzione che assume un valore stazionario** per una data ascissa $x_0$ sse il suo differenziale relativo a tale ascissa iniziale è nullo.
Equivalentemente si dice **punto stazionario della funzione** $f(x)$ una sua coppia $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ per la quale si ha $f'(x_0) = 0$ .

Queste locuzioni rispecchiano il fatto che

$$\Delta f \;=\; \Delta x\, \eta(\Delta x) \quad \text{con} \quad \eta(x) \in \mathsf{o}(1) \;,$$

cioè il fatto che per $\Delta x$ tendente a 0 l'incremento della funzione è infinitesimo di ordine superiore all'incremento $\Delta x$ della variabile indipendente. Va segnalato che spesso risulta vantaggioso esprimere sbrigativamente la precedente condizione scrivendo $\Delta f = \Delta x\, \mathsf{o}(1))$,

Se per un'ascissa $x_0$ la funzione è differenziabile e non presenta un valore stazionario si ha

(1) $$\Delta f \;=\; f'(x_0)\, \Delta x + \Delta x\, \eta(\Delta x) \;=\; \lfloor_{\mathsf{N}} \text{ con } \lim_{h\to 0} \eta(h) = 0 \rfloor_{\mathsf{N}} \;=\; \mathrm{d}f \;+ \Delta x\, \mathsf{o}(1) \;\sim_{\Delta x \to 0}\; \mathrm{d}f \;.$$

Dunque nella gran parte dei casi il differenziale di una funzione-RtR è la parte principale dell'incremento della funzione rispetto a $\Delta x$ assunto come infinitesimo campione. In altre parole il differenziale della funzione è un infinitesimo dello stesso ordine dell'incremento della variabile indipendente.

Per le funzioni più regolari e di uso più comune, ed escludendo le funzioni costanti, le ascisse di valore stazionario sono isolate; quindi nei casi di maggiore interesse nel calcolo dei limiti si può sostituire l'incremento $\Delta f$ con il differenziale $\mathrm{d}f$ .

La relazione $\Delta f \;\sim_{\Delta x\to 0}\; \mathrm{d}f \;= f'(x_0)\, \Delta x$ consente di affermare che la differenziabilità di una funzione (continua) equivale alla sua approssimabilità lineare.

**I24a.05** Vogliamo ora introdurre un'altra accezione del termine differenziale che risulterà assai significativa e di portata molto ampia.

Questa accezione in generale riguarda trasformazioni che possono agire su funzioni di varia natura, ma qui ci limitiamo a trattare trasformazioni che operano su funzioni-RtR. In vista della definizione formale del termine piuttosto elaborata, introduciamo altre notazioni.

Con il simbolo $\mathsf{FDrvbl}$ (senza specificazione di alcun intervallo) intendiamo l'insieme delle funzioni-RtR che sono derivabili in almeno un intervallo reale.

Per ogni $f(x) \in \mathsf{FDrvbl}$ denotiamo con $\mathsf{DrvbltIS}(f)$ l'insieme degli intervalli della retta reale per i quali la $f(x)$ è derivabile (il digramma $\mathsf{IS}$ sta per *interval set*).

Chiamiamo **differenziale** una trasformazione "d" applicabile alle funzioni-RtR che quando agisce su una $f(x)$ in corrispondenza di un'ascissa iniziale $x_0$ e di un'ascissa variata $x$ entrambe appartenenti ad un intervallo aperto nel quale la $f(x)$ è derivabile fornisce $f'(x_0)(x - x_0)$. In formula

$$\mathrm{d} \;:=\; \ulcorner\, f \in \mathsf{FDrvbl} \;,\; x, x_0 \in (\mathrm{a,b}\,) \in \mathsf{DrvbltIS}(f) \;\;\mapsto\;\; f'(x_0)(x - x_0) \,\urcorner \;.$$

**I24a.06** Anche la nozione di differenziale, come la nozione di derivata, si può considerare nozione bilatera: le relazioni della sua definizione sono invarianti per riflessione del grafico della $f(x)$ rispetto alla retta verticale $x = x_0$.

Come per la nozione di derivata, anche per quella di differenziale risulta utile introdurre due costruzioni con prestazioni più ridotte ma applicabili in più situazioni, in particolare quando l'ascissa iniziale della costruzione è un estremo di un intervallo massimale nel quale la funzione è derivabile.

Consideriamo la funzione $f(x)$ definita in un intervallo contenente $x_0$ e $x_0+\Delta x$ e derivabile a destra in $x_0$; si dice **differenziale a destra** della $f(x)$ relativo all'ascissa di partenza (o di riferimento) $x_0$ e all'ascissa incrementata $x_0+\Delta x(>x_0)$ il numero reale

(1) $$\mathrm{d}_+f \;:=\; f'_+(x_0)\,\Delta x\;.$$

Per la dualità-LR, consideriamo la funzione $f(x)$ definita in un intervallo contenente $x_0$ e $x_0-\Delta x$ e derivabile a sinistra in $x_0$; si dice **differenziale a sinistra** della $f(x)$ relativo all'ascissa di partenza $x_0$ e all'ascissa decrementata $x_0-\Delta x(<x_0)$ l'espressione

(2) $$\mathrm{d}_-f \;:=\; f'_-(x_0)\,\Delta x\;.$$

Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo aperto $I=(a,b)$ si dice differenziabile in tale intervallo sse è derivabile con derivata finita in tutti i suoi punti, cioè sse $\forall x\in I\;:\;\exists f'(x)\in\lceil I\longmapsto\mathbb{R}\rceil$ .

Si dice invece differenziabile in un intervallo chiuso $[a,b]$ sse è differenziabile in $(a,b)$, è differenziabile a destra in $a$ e differenziabile a sinistra in $b$.

Prevedibili le definizioni di funzione differenziabili in intervalli della forma $(a,b]$ e $(a,b]$.

**I24a.07** I differenziali unilaterali, cioè i differenziali a destra e i differenziali a sinistra, consentono di introdurre altre coppie di nozioni, unilaterali collegate dalla dualità-LR, in particolare quelle di funzioni con valori stazionari e con punti stazionari a destra e a sinistra.

Con le nozioni unilaterali si può trattare la differenziabilità di funzioni che presentano punti angolosi e per funzioni definite in intervalli chiusi a destra e/o a sinistra.

Può essere utile avere presenti anche i diagrammi riguardanti differenziali a destra e a sinistra di funzioni distinguendo se esse sono crescenti o decrescenti e distinguendo se esse presentano la concavità volta verso l'alto o verso il basso.

**I24a.08** Se si considera in particolare la funzione identità $f(x)=x$, per il suo differenziale relativo all'incremento della variabile indipendente $\Delta x$, quale che sia l'ascissa iniziale $x_0$, si trova $\mathrm{d}x=\Delta x$.

Questa uguaglianza esprime un fatto geometricamente ovvio; per il diagramma della funzione $y=x$ l'incremento della variabile indipendente è un infinitesimo dello stesso ordine dell'incremento della variabile indipendente.

Sul piano formale questa uguaglianza consente di sostituire $\Delta x$ con $\mathrm{d}x$ in molte formule concernenti differenziali. Abbiamo in particolare

(1) $$\mathrm{d}f \;=\; f'(x)\,\mathrm{d}x\quad.$$

A prima vista questa sostituzione formale produce un alleggerimento trascurabile; vedremo invece che essa, insieme ad altre notazioni semplificate che stiamo per introdurre, apre la possibilità di servirsi di formule concernenti differenziali che presentano vantaggi di concisione e maneggevolezza in numerose occasioni.

Giungeremo alla possibilità di adottare notazioni abbreviate che riguardano limiti e infinitesimi che devono essere utilizzate con cautela, ma che portano vari vantaggi a ogni presentazione tendenzialmente ampia, soprattutto per lo sviluppo di modelli fisico-matematici e di conseguenza per la presentazione di modelli che riguardano una molteplicità di applicazioni geometriche, meccaniche, fisiche, tecnologiche, economiche, ... .

In particolare risulta spesso molto comodo denotare la derivata di una funzione (derivabile) con la notazione proposta da Leibniz

(2) $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \;=\; f'(x) \;=\; \mathrm{D}_x\, f(x)\ .$$

Un altro elemento di semplificazione diventa disponibile quando la funzione $f(x)$ si può considerare sottintesa, cioè in un ambito espositivo nel quale la $f(x)$ è la funzione-RtR della quale si tratta esclusivamente o che costituisce la funzione protagonista.
In queste circostanze in luogo di $\Delta f$ e di $\mathrm{d}f$ diventa lecito scrivere, risp., $\Delta y$ e $\mathrm{d}y$ .

Va segnalato che queste identificazioni aprono la possibilità di dispone di formule maneggevoli, a partire dalla seguente:

(3) $$y'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\ \ .$$

## I24 b. semplificazioni mediante differenziali

**I24b.01** In questa sezione procediamo a esaminare gli aspetti dei differenziali di funzioni-RtR in intervalli dei loro domini nei quali sono dotate di derivata finita al fine di delineare le basi di un formalismo che si serve delle notazioni mediante differenziali per disporre di un complesso di strumenti espositivi che contribuiscono a costituire costituire un linguaggio agile ed efficace per molti aspetti dell'analisi infinitesimale.
In effetti a questo proposito diventa lecito di parlare di un linguaggio del **calcolo differenziale**.

Va anche segnalato che saranno definiti differenziali più generali che costituiscono la base per un calcolo differenziale applicabile a funzioni con domini e codomini in ambienti più complessi del campo $\mathbb{R}$.
Vedremo ch questo calcolo differenziale generalizzato assume notevole rilevanza in quanto consente semplificazioni espositive in molti contesti applicativi, a cominciare dalla fisica classica.

I primi ambienti più compositi di $\mathbb{R}$ riguardano le funzioni dei generi $\lceil \mathbb{R}^{\times d} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ e $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times d} \rceil$ con domini riconducibili a intervalli, rettangoli, cuboidi, sfere.
Si ottengono in tal modo risultati applicabili a curve e superfici sufficientemente regolari, in gran parte di elevato interesse applicativo.

Altri sviluppi prendono in esame il comportamento infinitesimale di più funzioni differenziabili di variabili in domini multidimensionali ed a valori in codomini di natura simile.

Altri studi si occupano di funzioni composte; tra queste l'esempio pù semplice riguarda una funzione-RtR differenziabile $f(x)$ e una seconda funzione differenziabile $x = \phi(t)$ che esprime la dipendenza della $x$ da un'altra variabile $t$.

Sviluppi ancora più generali riguardano funzioni tra spazi metrici o tra spazi funzionali alle quali comunque si richiedono buone caratteristiche di regolarità.

**I24b.02** In termini di prospettiva possiamo dire che il linguaggio dei differenziali è uno strumento di grande efficacia per descrivere situazioni che meritano di essere chiamate **scenari differenziali**.

Nelle prossime pagine procediamo alla presentazione dei più semplici scenari differenziali collocabili nel semplice $\mathbb{R}$. Si tratta di situazioni riguardano una o più funzioni-RtR da considerare in relazione a un'ascissa iniziale $x_0$ e a un'ascissa variata $x = x_0 + \Delta x$ che, per quanto osservato in a09, può scriversi $x = x_0 + \mathrm{d}x$ .

Questa $\mathrm{d}x$ può essere descritta a livello intiuitivo come variabile reale che assume valori che si discostano poco dallo zero e che risulta comodo chiamare "variabile infinitesima". (ma anche secondo una teoria elaborata chiamata "analisi non standard")
Il discostarsi poco va associato al fatto che le funzioni coinvolte nello scenario per i valori accettabili di $\mathrm{d}x$ sono "sufficientemente regolari"; a sua volta la sufficiente regolarità delle funzioni va espressa in termini di derivate oppure facendo riferimento ad insiemi di funzioni della collezione $\mathbf{o}_{\mathrm{d}x \to 0}$.

**I24b.03** Rivolgiamo l'attenzione a una funzione $f(x)$ che si intende sottoporre a differenziazione.
Il differenziale di una tale funzione lo facciamo dipendere, come al solito, da una ascissa iniziale $x_0$ e da una variazione $\mathrm{d}x$ e quindi può denotarsi con $\mathrm{d}f\,(x_0, \mathrm{d}x\,)$.

Per vari scopi può essere opportuno trattare la dipendenza di questo differenziale dall'ascissa iniziale individuandola con la semplice lettera $x$ e in tal caso questa entità va denotata con la scrittura $\mathrm{d}f\,(x, \mathrm{d}x\,)$.
Si pone allora la necessità di evitare le ambiguità che possono venire dalla prevalente adozione della notazione $f(x)$ per individuare la funzione a cui si presta l'attenzione.

Una notevole semplificazione delle notazioni consiste nel ritenere lecito sottintendere la dipendenza di $\mathrm{d}f$ sia dall'ascissa iniziale $x$ che dalla variazione $\mathrm{d}x$, ossia di ritenere lecito sottacere questa dipendenza senza incorrere in ambiguità; questa ulteriore convenzione semplificativa porta a denotare il differenziale della $f(x)$ semplicemente con $\mathrm{d}f$.

In questo quadro per il differenziale della $f(x)$ si può usare l'espressione $\mathrm{d}f \;=\; f'(x)\,\mathrm{d}x$ .

Nell'ambito di quanto si è supposto giustificabile diventa lecita la notazione di Leibniz per la derivata della $f(x)$ $\mathrm{D}_x f(x) \;=\; \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ .

**I24b.04** Se in uno scenario differenziale entra una sola funzione-RtR della $x$, si può adottare $y(x)$ come sinonimo di $f(x)$, trattare come equivalenti $\mathrm{d}f$ e $\mathrm{d}y$ e quindi scrivere $\mathrm{D}_x f(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ .

Uno scenario nel quale entrano più funzioni-RtR che si riferiscono a una sola variabile indipendente $x$ ($f(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$, ...) risulta sostenibile senza difficoltà se ci si limita a esaminarle in quanto definite nello stesso intervallo $I$ e riferite ad una stessa ascissa iniziale e a una stessa ascissa variata.
In queste circostanze risulta sensato porsi il problema di stabilire le relazioni tra i rispettivi differenziali in quanto "infinitesimi" do ordini comparabili.

In molte di queste circostanze risulta conveniente attribuire importanza primaria a una funzione $f(x)$, considerare una sua variazione $\mathrm{d}x$ da lasciare indeterminata riservandoci la possibilità di considerarla "arbitrariamente piccola" e di attribuirle il ruolo di infinitesimo di riferimento per sistematiche considerazioni sulle variazioni corrispondenti dei valori delle altre funzioni in esame.

Per i differenziali delle funzioni in un tale scenario si possono quindi considerare del tutto lecite scritture come

$$\mathrm{d}f \;=\; f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad , \qquad \mathrm{d}g \;=\; g'(x)\,\mathrm{d}x \qquad , \qquad \mathrm{d}\phi \;=\; \phi'(x)\,\mathrm{d}x \qquad ,.. \quad .$$

**I24b.05** Molte curve nel piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vengono individuate con **coppie di equazioni parametriche**, coppie di funzioni in una variabile che varia in un determinato intervallo; a queste funzioni di solito si danno le forme generiche $x = x(t)$ e $y = y(t)$, con $t \in H$.
Quando queste funzioni sono differenziabili in $H$ si possono sviluppare i cosiddetti studi differenziali delle curve piane.

Una coppia di espressioni $x = x(t)$ e $y = y(t)$ si può interpretare efficacemente come descrizione del tracciamento della curva da parte di un tracciatore mobile che con lo scorrere del tempo nell'intervallo temporale $I$ effettua la traiettoria determinata dalle coordinate $x(t)$ e $y(t)$.

In genere si vuole che questa curva sia abbastanza regolare e questo comporta che per ogni $t$ sia $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \;>\; 0$ .
Consideriamo in particolare che sia $x'(t) \neq 0$; questa condizione, sufficiente per la verifica della precedente disuguaglianza, data una curva, potrebbe essere soddisfatta restringendo l'intervallo $H$ di variabilità della $t$.

In genere conviene dare della curva una interpretazione cinematica, cioè conviene pensare $t$ come la variabile temporale, in movimento in una sola direzione della proiezione sull'asse $\mathsf{Ox}$ del punto mobile sulla curva $P(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ .
La immaginazione di questo movimento garantisce che la curva, o una sua porzione, si possa esprimere come il diagramma di una funzione da $\mathsf{Ox}$ in $\mathsf{Oy}$, cioè di una funzione data da un'espressione della forma $y = f(x)$.

In effetti $x'(t) \neq 0$ implica l'esistenza di una funzione inversa della $x = x(t)$ che possiamo scrivere genericamente $t = t(x)$. Di conseguenza si ha $y = y(t) = y(t(x))$, espressione riconducibile alla forma $y = f(x)$.

Grazie alle regole di derivazione delle funzioni composte e delle funzioni inverse si ottiene

$$\mathrm{D}_x f(x) \;=\; D_t\, y(t) \cdot \mathrm{D}_x\, t(x) \;=\; \frac{D_t\, y(t)}{D_t\, x(t)} \;=\; \frac{D_t\, y(t)\mathrm{d}t}{D_t\, x(t)\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;.$$

Si ha quindi che il quoziente dei differenziali $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ esprime la variazione della $y$ indotta dalla variazione della $x$, sia quando $x$ ha il ruolo della variabile indipendente, sia quando la $x$ e la $y$ sono entrambe dipendenti da una terza variabile $t$.

Anche queste possibilità contribuiscono ad attribuire maneggevolezza alla notazione dei differenziali risalente a Leibniz.

**I24b.06** Un altro interessante scenario differenziale vede la funzione $x = \phi(t)$ differenziabile nella $t$ variabile indipendente in un intervallo reale $H$ e la funzione $y = f(x)$ differenziabile nella variabile $x$ che si muove in un intervallo $I \subseteq \phi(H)$.

In casi come questo la variabile $x$ viene chiamata **variabile subordinata** e anche variabile intermedia.

Nelle condizioni presentate è lecito e interessante esaminare le funzioni alle quali diamo la forma $y = F(t) \;:=\; f(\phi(t))$ .

Dalla differenziabilità della $f$ e della $\phi$, cioè dalla loro derivabilità finita, per la proprietà della derivazione delle funzioni composte seguono la differenziabilità della $F(t)$ e la più precisa espressione

$$\forall t \in H \;\vdots\; \mathrm{d}y \;=\; F'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f'(x)\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; f'(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

Abbiamo quindi che il differenziale $\mathrm{d}y$ della funzione reale di una variabile reale $y = f(x)$ viene fornito dall'espressione $f'(x)\,\mathrm{d}x$ sia quando si considera la $x$ variabile indipendente, sia quando essa si considera subordinata in quanto funzione di un'altra variabile, la $t$, alla quale si assegna il ruolo di unica variabile indipendente.

Nel primo caso $\mathrm{d}x$ esprime l'incremento infinitesimo di riferimento indipendente da $x$, nel secondo si ha l'espressione $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$, alla quale si può dare anche la forma $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$ che manifesta la dipendenza da $t$ e da $\mathrm{d}t$; ora è questa $\mathrm{d}t$ ad assumere il ruolo di infinitesimo di riferimento.

A proposito di differenziale di funzione composta va sottolineata la maneggevolezza dei differenziali in uno sviluppo della forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \;,$$

espressione che rende particolarmente facile ricordare la regola della derivazione di una funzione di funzione.

**I24b.07** Proponiamo ora uno scenario differenziale nel quale compaiono ancora le precedenti $x = \phi(t)$ differenziabile rispetto alla $t \in H$ e $y = f(x)$, funzione differenziabile nella variabile $x \in I \subseteq \phi(H)$.

Aggiungiamo anche la possibilità di esprimere la $x$ in funzione di un'altra variabile attraverso la funzione $x = \psi(u)$ differenziabile per la $u$ appartenente a un intervallo $K$.

Di conseguenza l'espressione $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ si può intrerpretare non solo intendendo che sia $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$, ma anche pensando che sia $\mathrm{d}x = \psi'(u)\,\mathrm{d}u$.

Qui si intravvede l'economia di pensiero che si può realizzare esaminando in un primo momento le caratteristiche della espressione $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ e successivamente tenendo conto sia delle le proprietà derivanti dall'espressione $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$ che di quelle ricavabili dalla $\mathrm{d}x = \psi'(u)\,\mathrm{d}u$.

La precedente duplice interpretazione della identità formale $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ si può chiamare **invarianza della forma del differenziale** di fronte a cambiamenti della variabile indipendente.

Le precedenti considerazioni si estendono facilmente a catene di funzioni differenziabili $x = \phi(t)$, $y = f(x)$, $z = g(y)$, $w = \psi(z)$ ... . Reiterando semplicemente le considerazioni e le formula precedenti si trovano formule di facile interpretazione e uso come

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\ .$$

**I24b.08** Come esempio della versatilità consentita dai differenziali consideriamo l'equazione di stato dei gas perfetti [`Ideal gas law (we)`]

$$p\cdot V = R\cdot T\ ,$$

nella quale si tratta di una mole di gas che occupa un volume $V$ a una temperatura assoluta $T$ ed esercita una pressione $p$, dove $R$ denota la cosiddetta costante universale dei gas.
Se si misura la pressione in Pascal, il volume in metri cubi e $T$ in gradi Kelvin si ottiene sperimentalmente $R \approx 8.314\,462\,618 ...\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.
Pensiamo che $p$, $V$ e $T$ possano variare con il solo vincolo di ubbidire alla relazione data e differenziamo i due membri della relazione stessa ottenendo

$$V\cdot\mathrm{d}p + p\cdot\mathrm{d}V = R\cdot\mathrm{d}T\ .$$

Questa relazione mantiene la sua validità in tutte le circostanze operative che seguono.

(a) Si consente a $T$ di variare con una certa libertà e si considera che la pressione sia espressa da una $p(T)$ e il volume da una $V(T)$; in tal caso si hanno le variazioni infinitesime $\mathrm{d}p = p'(t)\,\mathrm{d}T$ e $\mathrm{d}V = V'(T)\,\mathrm{d}T$.

(b) Se si consente a $V$ di variare, cioè se $\mathrm{d}V$ è arbitrario (ma entro ragionevoli limiti), si hanno le variazioni infinitesime $\mathrm{d}p = p'(V)\,\mathrm{d}V$ e $\mathrm{d}T = T'(V)\,\mathrm{d}V$.

(c) Se $p$ ha il ruolo della variabile indipendente si hanno le variazioni infinitesime $\mathrm{d}V = V'(p)\,\mathrm{d}p$ e $\mathrm{d}T = T'(p)\,\mathrm{d}p$.

(d) Si considerano $p$, $V$ e $T$ differenziabili nel tempo o, in astratto, rispetto a un qualsiasi parametro osservabile $t$, allora in relazione a una variazione arbitraria $\mathrm{d}t$ si hanno le variazioni infinitesime $\mathrm{d}p = p'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}V = V'(t)\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}T = T'(t)\,\mathrm{d}t$.

In tutte le circostanze le relazioni trovate hanno validità in considerazioni di limite, cioè per variazioni infinitesime della variabile indipendente di turno.

**I24b.09** Un primo giudizio complessivo sul linguaggio del calcolo differenziale si può proporre anche dopo le poche precedenti considerazioni iniziali.

L'uso dei differenziali si può vedere come tramite tra due visioni dei processi esaminati dall'analisi infinitesimale.
Una visione che si può definire cinematica e parla di variabili indipendenti e dipendenti che si muovono nei rispettivi ambiti di variabiità condizionandosi deterministicamente. Le argomentazioni riguardano le modalità secondo le quali le grandezze variabili risultano condizionate.

Di questi processi può risultare utile anche una visione più statica secondo la quale si utilizzano solo fotografie degli accennati processi dalle quali certe proprietà si possono ottenere attraverso pose che possono essere esaminate con tutta l'attenzione che si ritiene necessaria.

Con i differenziali si hanno delle formule che si presentano come elementi statici sui quali risulta agevole meditare, ma che sottintendono non poche convenzioni che corrono il rischio di essere dimenticate, ma che invece devono essere ben riconosciute per non incorrere in fraintendimenti.

Può essere utile sottolineare che i differenziali si propongono come semplificazioni che possono agevolare comprensioni di prima mano e che non dovrebbero far trascurare le convenzioni e i sottendimenti che li condizionano.

## I24 c. regole di differenziazione

**I24c.01** Si può sospettare che la nozione di differenziale aggiunga ben poco a quella di derivata.
In effetti i differenziali sono utili quando consentono esposizioni che presentano un rilevante numero di passaggi più concisi.

Un argomento a favore dell'uso dei differenziali invece delle derivate sostiene che con essi rimane libera la scelta della variabile indipendente e questo rende possibile esprimere molti sviluppi con un linguaggio infinitesimale semplificato.

**I24c.02** Le formule e le regole di differenziazione sono direttamente ricavabili dalle formule e dalle regole di derivazione.
In effetti tutte le funzioni elementari sono differenziabili, cioè sono dotate di derivata finita all'interno dei rispettivi domini di definizione.

Risulta comunque opportuno disporre di una tabella delle formule e delle regole della differenziazione che sia agevole da consultare per seguire gli sviluppi che si servono di differenziali.

$\forall c \in \mathbb{R} \;:\; \mathrm{d}c = 0$ , $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;:\; \mathrm{d}(x^\alpha) = \alpha\, x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x$ , in particolare $\mathrm{d}\sqrt{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$

$\forall b \in \mathbb{R}_+ \;:\; \mathrm{d}(b^x) = b^x \ln b\, \mathrm{d}x$ , in particolare $\mathrm{d}(\mathsf{e}^x) = \mathsf{e}^x \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}(\log_b |x|) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x \log b}$ , in particolare $\mathrm{d}(\ln|x|) = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$\mathrm{d} \sin x \;=\; \cos x\, \mathrm{d}x$ , $\mathrm{d} \cos x \;=\; -\sin x\, \mathrm{d}x$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ k \in \mathbb{Z} :| \left(k + \dfrac{1}{2}\pi\right)\right\} \;:\; \mathrm{d} \tan x \;=\; \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \;=\; (1 + \tan^2 x)\, \mathrm{d}x$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k \in \mathbb{Z} :| \, k\,\pi\} \;:\; \mathrm{d} \cot x \;=\; -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \;=\; -(1 + \cot^2 x)\mathrm{d}x$

$\mathrm{d} \sec x = \sec x \cdot \tan x\, \mathrm{d}x$ , $\mathrm{d} \csc\, x = -\csc\, x \cdot \cot x\, \mathrm{d}x$

$\mathrm{d} \cosh x = \sinh x\, \mathrm{d}x$ , $\mathrm{d} \cosh x = \sinh x\, \mathrm{d}x$ , $\mathrm{d} \tanh x = \dfrac{\mathrm{d}x}{(\cosh x)^2}$

$\mathrm{d} \arcsin x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ , $\mathrm{d} \arccos x = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$ , $\mathrm{d} \arctan x = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$\mathrm{d}\,\mathrm{arcsec}\, x = \dfrac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ , $\mathrm{d}\,\mathrm{arccsc}\, x = -\dfrac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ , $\mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\, x = -\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$\mathrm{d} \arcsin \dfrac{x}{a} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ , $\mathrm{d} \arccos \dfrac{x}{a} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ , $\mathrm{d} \arctan \dfrac{x}{a} = \dfrac{a\,\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$

$\mathrm{d} \ln\left|\tan \dfrac{x}{2}\right| \;=\; \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ , $\mathrm{d} \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right| \;=\; \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ , $\mathrm{d} \ln|\sin x| \;=\; \cot x\, \mathrm{d}x$ , $\mathrm{d} \ln|\cos x| \;=\; -\tan x\, \mathrm{d}x$

**I24c.03** Consideriamo le funzioni reali differenziabili $u$, $v$ $f$, $\phi$ e $\psi$ e gli opportuni domini di definizione delle loro composizioni.

$\mathrm{d}(c\,u) \;=\; c\,\mathrm{d}u$ , $\mathrm{d}(u \pm v) \;=\; dfu \pm \mathrm{d}v$ , $\mathrm{d}(u \cdot v) \;=\; \mathrm{d}u \cdot v + u \cdot \mathrm{d}v$

$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) \;=\; \dfrac{\mathrm{d}u \cdot v - \mathrm{d}v \cdot u}{v^2}$ , $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{u}\right) \;=\; -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$ , $\mathrm{d}\,[f(x)]^n \;=\; n\,[f(x)]^{n-1}\, f'(x)\, \mathrm{d}x$

$y = f(x)\ ,\ x = \phi(y) \implies \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} \;=\; \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}f}$

$y = \psi(u)\ ,\ u = \phi(x) \implies \mathrm{d}y \;=\; \psi'(u)\,\mathrm{d}u \;=\; \psi'(u)\,\phi'(x)\,\mathrm{d}x$

## I24 d. differenziali di ordine superiore

**I24d.01** Come l'operazione derivazione, anche la differenziazione nelle opportune condizioni può essere effettuata due o più volte.

Dunque, oltre ai differenziali definiti in precedenza, che per distinguerli da quelli che stiamo introducendo chiamiamo differenziali del primo ordine, si possono introdurre anche differenziali del secondo, del terzo, ... , dell'$n$-esimo ordine.

Facciamo riferimento a una sola funzione-RtR $f(x)$ differenziabile in un certo intervallo $I$; il suo differenziale $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ è funzione di $x$ variabile in $I$ e di $\mathrm{d}x$ che in quanto segue va considerato fissato.
Se la $f(x)$ per un'ascissa $x_0 \in I$ ammette derivata seconda finita, allora esiste il differenziale della funzione $f'(x)$ per il quale si trova $\mathrm{d}\,f'(x) = f''(x)\,\mathrm{d}x$ .

Diciamo **differenziale secondo** o **differenziale di ordine 2** della funzione $f(x)$ corrispondente all'ascissa iniziale $x_0$ nel quale la $f(x)$ possiede derivata seconda finita e all'incremento $\mathrm{d}x$ della variabile indipendente il differenziale del differenziale $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ . Esso viene denotato con $\mathrm{d}^2\,y$ e viene ottenuto, rispettando la costanza di $\mathrm{d}x$ come

(1) $$\mathrm{d}^2\,y \;:=\; \mathrm{d}(\mathrm{d}y) \;=\; \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x) \;=\; f''(x_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = f''(x_0)\,\mathrm{d}x^{\,2}\ .$$

Ricordiamo che tradizionalmente si adotta la convenzione di denotare con $\mathrm{d}x^{\,2}$ il quadrato del differenziale della variabile $x$, ossia $(\mathrm{d}x\,)^2$, mentre si conviene di denotare con $\mathrm{d}(x^2)$ il differenziale della funzione $x^2$.

Proseguendo può accadere che la $f(x)$ ammetta il differenziale secondo per ogni ascissa $x \in I$ e in tal caso si ottiene una funzione nelle due variabili $x$ e $\mathrm{d}x$ che si denota con la scrittura

$$\mathrm{d}^2\,y \;=\; f''(x)\,\mathrm{d}x^{\,2}\ .$$

Va osservato che, confrontando questa espressione con la (1), la scrittura $\mathrm{d}^2\,y$ solo nel secondo contesto individua una entità che varia con la $x$.
Questo dice che le espressioni contenenti differenziali, a causa del loro carattere di elementi semplificativi, vanno interpretate prestando mpolta attenzione al contesto.

**I24d.02** La ripetizione del processo di differenziazione può essere effettuata quante volte si vuole: in tal modo si ottengono

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}^2\,f \;:=\; \mathrm{d}(\mathrm{d}f\,) = \mathrm{d}(f'(x)\,\mathrm{d}x\,) \;=\; f''(x_0)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}x \;= f''(x_0)\,\mathrm{d}x^{\,2}\\
&\mathrm{d}^3\,f \;=\; f^{(3)}(x_0)\,\mathrm{d}x^{\,3}\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&\mathrm{d}^n\,f \;=\; f^{(n)}(x_0)\,\mathrm{d}x^{\,n}
\end{aligned}$$

Da queste uguaglianze si ottengono le seguenti notazioni di Leibniz per le derivate successive

(2) $$f'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\quad,\quad f''(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}^2\,f}{\mathrm{d}x^{\,2}}\quad,\quad f'''(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^{\,3}}\quad,\quad \ldots\quad,\quad f^{(n)} \;=\; \frac{\mathrm{d}^n\,f}{\mathrm{d}x^{\,n}}\quad,\quad \ldots$$

Vale inoltre il seguente enunciato

**(1) Prop.**: Una funzione $f(x)$ ammette differenziale di ordine $n$ in corrispondenza dell'ascissa $x_0$ sse in $x_0$ ammette finita la derivata $n$-esima ▮

**I24d.03** **Esempi** Nel seguito consideriamo $n, k \in \mathbb{N}$ supponiamo

$\mathrm{d}^n\, \mathsf{e}^x \;=\; \mathsf{e}^x\, \mathrm{d}x^{\,n}$ ,

$\mathrm{d}^{4\,k} \sin x \;=\; \sin x\, \mathrm{d}x^{\,4\,k}$ , $\mathrm{d}^{4\,k+1} \sin x \;=\; \cos x\, \mathrm{d}x^{\,4\,k+1}$ ,

$\mathrm{d}^{4\,k+2} \sin x \;=\; -\sin x\, \mathrm{d}x^{\,4\,k+2}$ , $\mathrm{d}^{4\,k+3} \sin x \;=\; -\cos x\, \mathrm{d}x^{\,4\,k+3}$

$\mathrm{d}^{2\,k} \sinh x \;=\; \sinh x$ , $\mathrm{d}^{2\,k+1} \sinh x \;=\; \cosh x$ , $\mathrm{d}^{2\,k} \cosh x \;=\; \cosh x$ , $\mathrm{d}^{2\,k+1} \cosh x \;=\; \sinh x$

$\mathrm{d}^n\, \dfrac{1}{x} \;=\; (-1)^n\, \dfrac{n!}{x^{n+1}}\, \mathrm{d}x^{\,n}$ , $\mathrm{d}^n\, \ln(1+x) \;=\; (-1)^{n-1}\, \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}\, \mathrm{d}x^{\,n}$

**I24d.04** Consideriamo ora due funzioni componibili $y = f(x)$ e $x = \phi(t)$ e conveniamo che $t$ sia variabile in un intervallo $H$ mentre $x$ sia variabile in un intervallo $I \subseteq H$. Supponiamo inoltre che le funzioni siano derivabili con derivate finite quante volte può essere richiesto.
In tali condizioni si possono calcolare i differenziali di diversi ordini della funzione composta $y(\phi(t))$.

Dato che ora $\mathrm{d}x$ non va considerato fisso, ma varia in funzione di $t$ e $\mathrm{d}t$, per i differenziali di ordine maggiore o uguale a 2 non valgono le espressioni c02(1),(2) trovate in precedenza.

Servendosi delle regole di differenziazione di b02 si trovano le espressioni che seguono.

$\mathrm{d}^2 f \;=\; \mathrm{d}(\mathrm{d}y) \;=\; \mathrm{d}(f'(x)\, \mathrm{d}x) \;=\; (\mathrm{d}f'(x))\mathrm{d}x + f'(x)\, \mathrm{d}(\mathrm{d}x) \;=\; f''(x)\, \mathrm{d}x^{\,2} + f'(x)\, \mathrm{d}^2 x$

$\mathrm{d}^3 f \;=\; f'''(x)\, \mathrm{d}x^{\,3} + 3\, f''(x)\, \mathrm{d}^2 + f'(x)\, \mathrm{d}^3 x$

Quindi per i differenziali di ordine superiore viene meno il principio di invarianza della forma del differenziale primo vista in b07.

Inoltre non valgono le semplici espressioni delle derivate di ordine superiore mediante i differenziali presentate in d02(2).

In particolare se $x$ non è la variabile indipendente, ma una variabile subordinata, si trovano espressioni come la

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^{\,2}} \;=\; f''(x) + \frac{f'(x)\, \mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}x^{\,2}} \;.$$

Anche i simboli $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^{\,n}}$ vanno interpretati nel loro contesto; essi esprimono derivate solo se $x$ ha il ruolo della variabile indipendente.

## I24 e. cambiamento di variabile in espressioni contenenti derivate

**I24e.01 Prop.** Sia $n \in \mathbb{P}$ e consideriamo due funzioni $x(t)$ e $y(t)$ definite in un intervallo chiuso $\overline{H} = [c, d]$ e ivi dotate di derivate finite fino all'ordine $n$.
Supponiamo che in $\overline{H}$ sia $x'(t) \neq 0$, ossia che $x(t)$ sia strettamente crescente oppure strettamente decrescente; scriviamo $a := x(c)$, $b := x(d)$ quando $x(t)$ è crescente e $a := x(d)$, $b := x(c)$ quando decrescente.
Introduciamo inoltre $\overline{I} := [a,b]$ e denotiamo con $t = \phi(x)$ la funzione inversa della $x(t)$; si osserva che questa è una funzione del genere $\lceil \overline{I} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \overline{H} \rceil$ e che è monotona in senso stretto .
Nella situazione descritta la funzione composta $y = F(x) := y(\phi(x))$ definita in $\overline{I}$, in tale intervallo ammette finite le derivate rispetto alla $x$ degli ordini primo, secondo, ... , $n$-esimo.

**Dim.**: Per la regola sulla derivata della funzione inversa si ha $\phi'(x) = \dfrac{1}{x'(t)}$ e, grazie alla regola sulla derivata di una funzione composta. risulta $F'(x) = y'(t) \cdot \phi'(x) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ (per ipotesi $x'(t) \neq 0$).
La derivata seconda si ottiene derivando la precedente espressione

$$F''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{y'(t)}{x'(t)} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{[x'(t)]^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{[x'(t)]^3} .$$

Si è quindi ottenuta per $F''(x)$ una espressione razionale nelle derivate $x'(t)$, $y'(t)$, $x''(t)$ e $y''(t)$.
Chiaramente si può proseguire con le derivazioni della $F(x)$ fino alla $F^{(n)}(x)$ ottenendo via via espressioni razionali nelle derivate precedenti delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$, espressioni che a denominatore presentano una potenza della $x'(t)$, funzione per la quale, come già ricordato, si è chiesto essere diversa da 0 ▮

**I24e.02** Va notato che le formule precedenti forniscono le derivate richieste a partire dalle funzioni $x(t)$ e $y(t)$ senza richiedere la determinazione esplicita della funzione inversa $t = \phi(x)$.
Questo porta due vantaggi: si evita di eseguire l'operazione di inversione che spesso è tutt'altro che facile; le espressioni ottenute sono indipendenti dalle peculiarità della $t$ e sono utilizzabili per diverse scelte per questa variabile.

Queste formule consentono di risolvere il problema della trasformazione di un'espressione nella variabile indipendente $t$ nella equivalente in una variabile $x$ che con la prima si trova in biiezione.
Se $x(t)$ e $y(t)$ sono date da espressioni di cui si sanno determinare tutte le espressioni delle derivate necessarie (eventualmente rivolgendosi a un sistema `CAS (we)` in grado di fornire espressioni con centinaia di operandi), è garantito che la trasformazione si può effettuare algoritmicamente.

Si possono quindi organizzare produzioni di espressioni di questo genere da parte di strumenti software ormai iampiamente disponibili.

**I24e.03** Vediamo ora come la determinazione delle espressioni in `d01` si riesce ad effettuare più speditamente servendosi delle notazioni dei differenziali.

$$\mathrm{d}y = F'(x)\,\mathrm{d}x \implies F'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} ;$$

$$F''(x) = \frac{\mathrm{d}\,F'(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}^2 x\, \mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^{\,2}} \cdot \frac{1}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x\, \mathrm{d}^2 y - \mathrm{d}^2 x\, \mathrm{d}y}{\mathrm{d}\,x^3} ;$$

$$F'''(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}\,F''(x)}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{1}{\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{d}\,\frac{\mathrm{d}x\;\mathrm{d}^2\,y-\mathrm{d}^2\,x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x^{\,3}}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{d}x^{\,5}}\;\left[\mathrm{d}x^{\,2}\,\mathrm{d}^3\,y-\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}^3\,x-3\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}^2\,x\,\mathrm{d}^2\,y+3\,\mathrm{d}y\;(\mathrm{d}^2\,x)^2\right]$$
.

Si osserva che se $x=t$ tutti i differenziali superiori al primo della $x$ e della $y$ sono nulli e si riottengono le espressioni $f^{(k)}(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}^k\,y}{\mathrm{d}x^{\,k}}$ per $k=1,2,...,n$.

Osserviamo anche che queste formule possonoi essere usate scegliendo nei momenti più opportuni delle attività di calcolo la scelta della variabile indipendente, ricordando ancora che se $x=x(t)$ e $y=y(t)$ per ogni ordine $k=1,2,...,n$ si hanno le uguaglianze $\mathrm{d}^kx=x^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t^{\,k}$ e $\mathrm{d}^ky=y^{(k)}(t)\,\mathrm{d}t^{\,k}$.

Nel caso in cui si sceglie come variabile indipendente la stessa $x$ si deve porre $\mathrm{d}^2x=0$, $\mathrm{d}^3x=0$, $\mathrm{d}^4x=0$, ... e quindi si trovano ancora le espressioni

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\;,\;F''(x)=\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}\,x^2}F'''(x)=\frac{\mathrm{d}^3\,y}{\mathrm{d}\,x^3}\;,\;.\;.\;.\;\;,$$

**I24e.04** Le formule precedenti opportunamente adattate consentono di ottenere le derivate delle funzioni inverse di molte funzioni-RtR date.

Sia $y=f(x)$ una funzione invertibile e derivabile $n$ volte nell'intervallo $[a,b\,]$; esiste quindi la sua funzione inversa $x=\Phi(y)$ e anch'essa ammette le derivate fino a quella di ordine $n$.

Le formule che forniscono queste derivate a partire dalla $f(x)$ si possono ottenere dalle precedenti scambiando i ruoli della $x$ e della $y$, assegnando a $\Phi(y)$ il ruolo della $F$ e tenendo conto che $\mathrm{d}^2\,x=\mathrm{d}^3\,x=...=0$ in quanto la $x$ per funzioni ricavate dalla $f(x)$ fa da variabile indipendente.

Procedendo in tal modo si ottengono le formule che seguono.

$$\Phi'(y) \;=\; \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}$$

$$\Phi''(y) \;=\; -\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}y^{\,3}} \;=\; -\frac{\mathrm{d}^2\,y}{\mathrm{d}x^{\,2}}:\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 \;=\; -\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^3}$$

$$\Phi^{(3)}(y) \;=\; \frac{1}{\mathrm{d}y^{\,5}}\;\left(-\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y\;\mathrm{d}^3\,y+3\,\mathrm{d}x\;(\mathrm{d}^2\,y)^2\right)$$
$$= -\;\frac{f^{(3)}(x)}{\left(f'(x)\right)^4}+3\;\frac{\left(f''(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^5} \;=\; \frac{-f'(x)\,f^{(3)}(x)+3\;[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}$$

**I24e.05** Come esempio consideriamo la curva espressa dalle equazioni parametriche

$$\forall t\;\in\mathbb{R}\;\;:\;\;x\;=\;t^3+t^2+t+1\quad,\quad y\;=\;t^3-t^2+t-1\;.$$

Evidentemente $x'(t)\;=\;3t^2+2t+1\;>\;0$ per ogni $t$ e quindi esiste la $t\;=\;\phi(x)$ funzione inversa della $x(t)$ e si può disporre costruttivamente (eventualmente in modo approssimato) della funzione $y=F(x):=y(\phi(x))$ in ogni intervallo chiuso di $\mathbb{R}$.

Cerchiamo le espressioni delle derivate della $F(x)$ nel parametro $t$ senza cercare di eliminarlo determinando esplicitamente la $\phi(x)$.

Per questo possono servire espressioni nella $t$ dei differenziali individuabili con facilità:

$$\mathrm{d}x\;=\;(3\,t^2{+}2\,t{+}1)\,\mathrm{d}t\quad,\quad \mathrm{d}y\;=\;(3\,t^2{-}2\,t{+}1)\,\mathrm{d}t\quad,\quad \mathrm{d}^2\,x\;=\;(6\,t{+}2)\,\mathrm{d}t^{\,2}\quad,\quad \mathrm{d}^2\,y\;=\;(6\,t{-}2)\,\mathrm{d}t^{\,2}\;.$$

Si ottengono quindi senza difficoltà le prime derivate della $F(x)$

$$F'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \frac{3\,t^2-2\,t+1}{3\,t^2+2\,t+1} \qquad , \qquad F''(x) \;=\; \frac{4(3\,t^2-1)}{(3\,t^2+2\,t+1)^3}\;\ldots\ldots\;.$$

Queste espressioni forniscono facilmente interessanti proprietà della $F(x)$: in particolare si trova che la funzione è sempre crescente perché è sempre $F'(x)>0$ e che la derivata seconda è negativa sse $|t|<\frac{1}{\sqrt{3}}$, è nulla sse $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ed è positiva sse $|t|>\frac{1}{\sqrt{3}}$.