1

Capitolo I21
funzioni reali derivabili

Contenuti delle sezioni

20 pagine

I210.01 In questo capitolo sviluppiamo le proprietà primarie possedute dalle funzioni di una variabile reale a valori reali che sono sufficientemente regolari, cioè che possiedono buone doti di continuità e derivabilità.

Le proprietà qui esaminate costituiscono la base dei procedimenti che meglio consentono di studiare l'andamento delle funzioni reali. I risultati che si ottengono sono di grande utilità pe5r lo studio del comportamento delle varie funzioni-RtR e in particolare le funzioni di interesse empirico utilizzate per organizzare dati sperimentali e le cosiddette funzioni speciali, funzioni definite da espressioni o da equazioni nelle quali possono intervenire operazioni algebriche, passaggi al limite, derivazioni e integrazioni.

La prima proprietà esaminata è il teorema di Rolle, teorema facilmente visualizzabile; segue il teorema del valor medio che costituisce una sorta di generalizzazione dl precedente.

Un arricchimento ulteriore è ottenuto con il teorema sul rapporto degli incrementi di due funzioni-RtR e un passo ulteriore giunge al teorema sugli incrementi di tre delle funzioni sulle quali si focalizza il capitolo.

A questo punto si sono ottenuti strumenti che consentono di formulare le regole di de l'Hopital, regole che risultano di notevole utilità per ampliare sostanzialmente la gamma delle formule di derivazione delle funzioni-RtR.

Con il complesso delle conoscenze così acquisite si possono ottenere le formule di Taylor e di MacLaurin per la approssimazione mediante polinomi e quindi per lo sviluppo in serie delle nostre funzioni quando sufficientemnte regolari.
Queste formule forniscono una solida base per lo studio delle funzioni collocate nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e aprono la strada per gli ulteriori procedimenti dell'analisi infinitesimale costituenti il calcolo differenziale e il calcolo integrale, metodologie applicabili anche per funzioni e figure geometriche che si estendono in tre e più dimensioni.

I21 a. teorema di Rolle

I21a.01 Teorema (teorema di Rolle)
Consideriamo l'intervallo aperto nonvuoto $I := (a,b)$ e il corrispondente chiuso $\overline{I} := [a,b]$.
Consideriamo inoltre una funzione $f \in \lceil [a,b] \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ con le seguenti proprietà

[a] è continua in $[a,b]$,
[b] è dotata di derivata finita o infinita in (a,b) e
[c] soddisfa la $f(a) = f(b)$.

In tali condizioni $(a,b) \ni \xi$, ascissa nella quale la derivata della $f(x)$ si annulla, cioè tale che $f'(\xi) = 0$.

Dim.: Se la funzione è costante, come punto ξ della tesi si può scegliere qualsiasi elemento di I.

Se la funzione $f(x)$ non è costante il teorema di Weierstrass sulle funzioni continue in un dominio chiuso e limitato [I17b06] assicura che la funzione è dotata di almeno un punto di minimo e di almeno un punto di massimo; denotiamo tali punti-RR, risp., con $\langle x_m, m\rangle$ e $\langle x_M, M\rangle$.
Dovendo essere $m < M$, x_m ed x_M sono ascisse distinte di $\overline{I}$ e almeno una di esse deve appartenere a I, perché se entrambe coincidessero con un estremo si entrerebbe in conflitto con [c].

Se accade che $a < x_m < b$, per il teorema di Weierstrass deve esistere un punto in (a,b) che denotiamo con ξ nel quale la funzione assume il valore minimo, $f(\xi) = m$.
Considerando i rapporti incrementali sinistro e destro della $f(x)$ relativi all'ascissa iniziale ξ abbiamo:

$$\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} \quad \begin{cases} \leq 0 & \text{per} \quad h < 0 \\ \geq 0 & \text{per} \quad h > 0 \end{cases} .$$

Per l'ipotesi di derivabilità [b] i limiti dei due precedenti rapporti incrementali devono esistere e coincidere e di conseguenza devono essere uguali a 0.

Il caso in cui $a < x_M < b$ è il duale-UD del precedente: la argomentazione relativa si ottiene applicando la precedente alla funzione $-f(x)$, possibilità consentita dall'invarianza dell'insieme **FunRtR** rispetto alla permutazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} := \lceil y \in \mathbb{R} \mapsto -y \rceil$.
Sia nel caso $a < x_m < b$ che nel caso $a < x_M < b$ abbiamo (almeno) una ascissa ξ per la quale $f'(\xi) = 0$

▮

I21a.02 Un punto del piano-RR nel quale una funzione-RtR $f(x)$ presenta la derivata nulla si dice **punto stazionario della funzione**.
Per ricordare il teorema di Rolle può essere utile chiamarlo "teorema che garantisce l'esistenza di almeno un punto stazionario nell'intervallo in cui la funzione è definita".

Il teorema è stato enunciato da Michel Rolle nel 1691, ma limitatamente alle funzioni reali polinomiali.

I21a.03 Osserviamo alcune possibilità per le coppie $\langle$ funzione-RtR , intervallo del suo dominio $\rangle$ alle quali il teorema si applica.

La funzione $\lceil x \in (-1,1) \mapsto \sqrt{1-x^2} \rceil$ presenta un unico massimo per $x = 0$.

La funzione $\lceil x \in (-1,1) \mapsto x^2 - 1 \rceil$ possiede un unico minimo per $x = 0$.

La funzione $y = \sin x$ nell'intervallo $[0,\pi]$ presenta un unico massimo per $x = \dfrac{\pi}{2}$, nell'intervallo $[0,2\pi]$ presenta il suddetto massimo e un solo minimo in corrispondenza dell'ascissa $x = \dfrac{3}{2}\pi$; per ogni intervallo $[0,k\pi]$ possiamo affermare che la $\sin x$presenta $\left\lceil\dfrac{k}{2}\right\rceil$ massimi e $\left\lfloor\dfrac{k}{2}\right\rfloor$ minimi.

La funzione $y = \cos x$ nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ possiede un solo massimo, mentre nell'intervallo $\left[-\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$ possiede due massimi ($x = 0$ e $x = 2\pi$) e tre minimi ($x = -\pi, x = \pi, x = 2\,\pi$).

Si trovano anche funzioni non costanti che in un intervallo finito possiedono un'infinità numerabile di punti intermedi stazionari; questo accade alle funzioni

$$F_1 \;:=\; \ulcorner\, x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right] \;\mapsto\; x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \,\urcorner \;\dot{\cup}\; \langle 0,0\rangle \quad \text{e}$$

$$F_2 \;:=\; \ulcorner\, x \in \left(-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right] \setminus \{0\} \;\mapsto\; x^4 \sin^4 \frac{1}{x} \,\urcorner \;\dot{\cup}\, \langle 0,0\rangle \quad .$$

Per gli insiemi delle ascisse di questi insiemi di punti stazionari sono significativi i punti di accumulazione.
Per la prima delle due funzioni precedenti, F_1, si ha un punto di accumulazione nella estremità iniziale dell'intervallo; per la seconda, F_2, nel punto medio dell'intervallo; in entrambi i casi questi corrispondono al fatto che la componente $\frac{1}{x}$ della funzione sia divergente.

È garantita l'esistenza di almeno un punto intermedio stazionario anche per funzioni che hanno derivata infinita in qualche punto. Questo è il caso della funzione

$$\ulcorner\, x \in \left[-m\pi, n\pi\right] \mapsto \mathrm{sign}(\sin x)\sqrt{|\sin x|}\,\urcorner \qquad \text{con} \qquad m, n \in \mathbb{P}\ .$$

Questa funzione ha come derivata $+\infty$ per le ascisse $x \in 2\mathbb{Z}\,\pi$, $-\infty$ per le ascisse $x \in (2\mathbb{Z}+1)\,\pi$ e punti stazionari per le ascisse $\xi \in (\mathbb{Z}+1/2)\,\pi$.

I21a.04 È opportuno osservare che se cade una delle tre ipotesi [a], [b] e [c] di a01 può non esistere alcuna ascissa ξ di punto stazionario.

Per una funzione con andamento rettilineo $\ulcorner\, x \in [a,b\,] \mapsto x \,\urcorner$ con $a < b$ e per una funzione con andamento parabolico $\ulcorner\, x \in [0, b] \mapsto x^2 \,\urcorner$ con $b > 0$ valgono [a] e [b] ma non [c] e si tratta di funzioni sempre crescenti.
Situazioni analoghe si presentano per altre funzioni polinomiali da considerate definite solo in particolari intervalli chiusi.

Valgono [a] e [c] ma cade [b] per $x = 0$ per funzioni come

$$\ulcorner\, x \in [a,b\,] \mapsto |x| \,\urcorner \quad \text{e} \quad \ulcorner\, x \in [a,b\,] \mapsto |\sqrt{|x|} \,\urcorner \quad \text{con } a < 0 \text{ e } b > 0\ ;$$

queste funzioni sono decrescenti per $x < 0$ e crescenti per $x > 0$.

Valgono le proprietà [b] e [c] ma cade la [a] per funzioni come $\ulcorner\, x \in [-1/2, 1/2] \mapsto \mathrm{mant}(x) \,\urcorner$ e $\ulcorner\, x \in [-1, 1] \mapsto x + \mathrm{sign}(x) \,\urcorner$, funzioni discontinue per $x = 0$ e crescenti altrove.

I21 b. teorema del valor medio di Cavalieri-Lagrange

I21b.01 Teorema (teorema del valor medio)
Consideriamo l'intervallo aperto $I := (a,b)$, il corrispondente chiuso $\overline{I} := [a,b]$ e la funzione $f \in \lceil \overline{I} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ continua in $\overline{I}$ e dotata di derivata, finita o infinita, in I; allora $I \ni \xi$ tale che

$$(1) \qquad f'(\xi) \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \text{ossia} \qquad f(b)-f(a) \;=\; f'(\xi)(b-a)\ .$$

Dim.: Se fosse $f(a) = f(b)$ si ricadrebbe nel teorema di Rolle. In caso contrario si considera la retta passante per $\langle a, f(a)\rangle$ e per $\langle b, f(b)\rangle$ espressa dalla funzione $g(x) := f(a) + (x-a)\,\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Si considera poi la funzione che esprime la distanza con segno del diagramma della $f(x)$ dalla retta $g(x)$

$$F(x) := f(x) - g(x) \;=\; f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ .$$

Questa funzione soddisfa le condizioni di validità del teorema di Rolle e quindi si trova un $\overline{x} \in I$ tale che $F'(\overline{x}) = 0$; questa uguaglianza si riscrive $0 = f'(\overline{x}) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ e questa uguaglianza equivale alla tesi ▮

Per ricordare questo enunciato può essere presentarlo con la frase: "Il rapporto incrementale della $f(x)$ relativo a due ascisse a e b è uguale alla derivata della funzione per un'ascissa intermedia".

Questo importante enunciato è noto anche come **teorema dell'incremento finito** e come **teorema di Cavalieri-Lagrange**; in effetti esso è stato enunciato da Bonaventura Cavalieri nel 1635 e successivamente perfezionato da Giuseppe Lodovico Lagrange .

I21b.02 È utile riformulare il teorema in termini geometrici come segue.

All'interno dell'intervallo $[a,b]$ esiste un'ascissa ξ tale che la tangente al diagramma della funzione nel punto $\langle \xi, f(\xi)\rangle$ è parallela alla corda che ha per estremi i punti $\langle a, f(a)\rangle$ e $\langle b, f(b)\rangle$.

Per l'equivalenza di questo enunciato con quello in b01 conviene osservare che il rapporto incrementale ed $f'(\xi)$ sono, risp., il coefficiente angolare della corda passante per i punti $\langle a, f(a)\rangle$ e $\langle b, f(b)\rangle$ e il coefficiente angolare della tangente alla $y = f(x)$ nel punto $\langle \xi, f(\xi)\rangle$.

Conviene anche tenere presente che le equazioni di queste rette, se denotiamo con $\langle X, Y\rangle$ il punto corrente della corda e con $\langle \mathcal{X}, \mathcal{Y}\rangle$ il punto corrente della tangente, sono

$$Y(X) \;=\; f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(X-a) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Y}(\mathcal{X}) \;=\; f(\xi) + f'(\xi)(\mathcal{X}-\xi)\ .$$

Va segnalata anche la simmetria di queste formule rispetto allo scambio dei due estremi dell'intervallo; esse quindi si possono utilizzare anche quando $b < \xi < a$.

I21b.03 È utile riscrivere la conclusione del teorema b01(1) in una terza forma.

Sostituendo gli estremi dell'intervallo a e b con x_0 e $x_0{+}h$ e introducendo il parametro reale $\theta := \dfrac{\xi - x_0}{h}$, si ottengono le formule equivalenti

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \;=\; f'(x_0+\theta\,h) \quad , \quad f(x_0+h) \;=\; f(x_0) + h\,f'(x_0+\theta\,h) \qquad \text{con} \quad 0<\theta<1\ .$$

Si può quindi affermare che il valore della funzione $f(x)$ per un'ascissa variata $f(x_0+h)$ è dato dal valore nell'ascissa iniziale $f(x_0)$ aumentato del prodotto dell'incremento h per la derivata per un'ascissa intermedia $f'(x_0+\theta h)$, ove θ è un opportuno numero tale che $0<\theta<1$.

I21b.04 Dalla precedente proprietà seguono vari conseguenze.

Se la funzione $f(x)$ ha derivata nulla in tutti i punti di un intervallo, allora è costante su tale intervallo.

Se la funzione $f(x)$ per ogni $x \in I$ ha derivata $f'(x) \geq 0$, allora la funzione è nondecrescente.
Se viceversa la $f(x)$ per ogni $x \in I$ ha derivata $f'(x) \leq 0$, allora la funzione è noncrescente.
Se in I $f'(x) > 0$ la funzione è crescente, mentre se $f'(x) < 0$ la funzione è decrescente.

Se si trovano due numeri reali m e M tali che per ogni $x \in$ (a,b) si abbia $m \leq f'(x) \leq M$, allora

$$\text{per } \alpha \in \{a, b\} \quad : \quad m\,(x - \alpha) \leq f(x) - f(\alpha) \leq M\,(x - \alpha).$$

I21 c. teorema di Cauchy sul rapporto degli incrementi di due funzioni

I21c.01 Teorema (teorema degli accrescimenti finiti di Cauchy)
Consideriamo l'intervallo aperto $I := (a,b)$, il corrispondente chiuso $\overline{I}$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil \overline{I} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ continue in $\overline{I}$ e dotate di derivate finite o infinite in I.

(1) Se le due funzioni non assumono valore infinito nello stesso punto, allora $\overline{I} \ni \xi$ tale che

$$(1) \qquad (f(b) - f(a))\, g'(\xi) \;=\; (g(b) - g(a))\, f'(\xi) \;.$$

(2) Se inoltre $g(a) \neq g(b)$ e le funzioni $f'(x)$ e $g'(x)$ non si annullano contemporaneamente, allora $(a,b) \ni \overline{x}$ tale che

$$(2) \qquad f'(\overline{x}) \;=\; g'(\overline{x}) \qquad \text{oppure} \qquad \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \;.$$

Dim.: (1) Consideriamo la seguente funzione associata ad $\overline{I}$, $f(x)$ e $g(x)$

$$F(x) := \big[f(b) - f(a)\big]\, g(x) - \big(g(b) - g(a)\big)\, f(x) \;.$$

Essa è continua in $\overline{I}$ e derivabile in I: infatti è derivabile per tutte le ascisse x per le quali il limite del rapporto incrementale non si presenta nella forma di indecisione ∞/∞, e quindi lo è per tutte le x in cui $f'(x)$ e $g'(x)$ non sono entrambe infinite.
Inoltre $F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. Quindi, per il teorema di Rolle [a01], $(a,b) \ni \xi$ tale che sia $F'(\xi) = 0$. Questa uguaglianza equivale alla (1).

(2) Le ipotesi ulteriori garantiscono che da (1) si possa ricavare (2) ▮

I21c.02 Ipotesi sufficienti per la validità della (2), ipotesi spesso facilmente verificabili, sono
(2') $g(a) \neq g(b)$ e $g'(x)$ finita e diversa da 0 per ogni $x \in (a,b)$.

Nel caso sia $g(x) = x$ la (1) (o la (2)) si riduce al teorema del valor medio b01 .

I21 d. teorema di Peano sugli incrementi di tre funzioni

I21d.01 Teorema (**teorema di Peano**)
Consideriamo l'intervallo aperto $I := (a,b)$, il corrispondente chiuso $\overline{I}$ e tre funzioni $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ del genere $\lceil \overline{I} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ continue in $\overline{I}$ e dotate di derivate finite o infinite in I.
Se in ogni punto di I le funzioni derivate $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$ sono finite, o anche se una sola di esse è infinita, allora $(a,b) \ni \xi$ tale che sia

$$\det \begin{bmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{bmatrix} = 0 \ . \qquad (1)$$

Dim.: Introduciamo la funzione

$$F(x) \ := \ \det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{bmatrix}$$

e osserviamo che alla (1) si può dare la forma

$$\mathrm{D}_x F(x) \ = \ \Phi_{gh} f'(\xi) + \Phi_{hf} g'(\xi) + \Phi_{fg} h'(\xi) \ = \ 0 \quad , \quad \text{con}$$

$$\Phi_{gh} \ := \ \det \begin{bmatrix} g(a) & h(a) \\ g(b) & h(b) \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi_{hf} \ := \ \det \begin{bmatrix} h(a) & f(a) \\ h(b) & f(b) \end{bmatrix} \quad , \quad \Phi_{fg} \ := \ \det \begin{bmatrix} f(a) & g(a) \\ f(b) & g(b) \end{bmatrix} \ .$$

All'intervallo $\overline{I}$ si può applicare il teorema di Rolle: infatti $F(x)$ è continua in $\overline{I}$, è derivabile in I e $F(a) = F(b) = 0$. Quindi $I \ni \xi$ tale che $F'(\xi) = 0$. Derivando l'espressione della $F(x)$ si ottiene l'asserto ▮

Si osserva che quando si assume $h(x) = 1$ l'enunciato precedente si riduce al teorema di Cauchy c01; se invece si assume $g(x) = x$ e $h(x) = 1$ l'enunciato si riduce al teorema del valor medio di Cavalieri-Lagrange b01 .

I21d.02 Il teorema precedente possiede una interessante interpretazione geometrica.

Consideriamo lo spazio tridimensionale che riferiamo alle tre coordinate cartesiane X, Y e Z; in tale spazio consideriamo la curva Γ espressa dalle tre equazioni parametriche

$$X = f(x) \quad , \quad Y = g(x) \quad , \quad Z = h(x) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq b \ ,$$

dove ancora $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ sono continue in $\overline{I}$ e derivabili in I con derivate finite, o al più con una sola infinita in qualche punto dell'intervallo (queste ipotesi implicano che la curva si sviluppa con una certa regolare continuità).

Consideriamo inoltre i vettori $\mathbf{a} = \langle f(a), g(a), h(a) \rangle$, $\mathbf{b} = \langle f(b), g(b), h(b) \rangle$ e $\mathbf{t}(x) = \langle f'(x), g'(x), h'(x) \rangle$. I primi due costituiscono le due estremità della Γ e il terzo è il vettore derivato tangente della curva nel punto $\langle X, Y, Z \rangle$; i suoi coseni direttori sono dati, a meno di un fattore positivo, da $f'(x)$, $g'(x)$ e $h'(x)$; fanno eccezione gli eventuali punti nei quali una delle tre funzioni vale $-\infty$ o $+\infty$; in tali punti si conviene di assumere per i coseni direttori la terna $\langle 0, 0, \pm 1 \rangle$ se $h'(x) = \pm\infty$, la terna $\langle 0, \pm 1, 0 \rangle$ se $g'(x) = \pm\infty$ e la terna $\langle 0, 0, \pm 1 \rangle$ se $g'(x) = \pm\infty$

Il teorema di Peano dice che per un opportuno $x = \xi$ i tre vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{t}(\xi)$ sono complanari, cioè dice che esiste un punto della curva nel quale il vettore tangente giace nel piano determinato dai punti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e dall'origine $\langle X, Y, Z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$.

Da queste osservazioni si può ricavare un equivalente "enunciato più intrinseco", cioè non legato a un sistema di riferimento.

I21d.03 **Teorema** Si consideri una curva nello spazio tridimensionale continua e fornita di tangente in ogni suo punto, due suoi punti qualsiasi A e B, la sua corda AB e un arbitrario piano Pi passante per A e B. Sull'arco $\widehat{AB}$ esiste un punto Ξ nel quale la tangente è parallela al piano Π.

Dim.: La conseguenza geometrica del teorema di Peano garantisce l'esistenza di un punto con la tangente parallela al particolare piano per A e B che contiene l'origine delle coordinate.
Questo punto è tuttavia inessenziale, in quanto una traslazione del sistema di riferimento $X \to X + \overline{f}$, $Y \to Y + \overline{g}$, $Z \to X + \overline{h}$, può modificare l'origine in qualsiasi altro punto e di conseguenza il piano dell'enunciato in qualsiasi altro piano contenente la corda.
La traslazione modifica le funzioni parametriche della Γ, risp., nelle $f(x) - \overline{f}$, $g(x) - \overline{g}$ e $h(x) - \overline{h}$, non cambia le loro proprietà di continuità e derivabilità e consente di mantenere l'arbitrarietà del piano per A e B ▮

I21d.04 Nel caso in cui $h(x) = 1$ la curva Γ è piana e giace nel piano $Z = 1$.
Il teorema di Cauchy e in particolare il teorema della media dicono che esiste un $\xi \in I$ per il quale la retta tangente alla curva è parallela alla corda $\overline{\mathbf{ab}}$ e quindi che è parallela a ogni piano dello spazio delle coordinate X, Y e Z passante per $\mathbf{a}$ e bSd. In questo caso della curva Γ piana il vettore tangente $\mathbf{t}(\xi)$ è indipendente dal piano edè unico.

I21 e. regole di de l'Hopital per la forma di indecisione 0/0

I21e.01 Spesso si rende necessario calcolare limiti della forma $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con a numero reale o $\pm\infty$ per funzioni $f(x)$ e $g(x)$ per le quali si sappia che $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oppure si sappia che $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.
Da queste informazioni sui limiti di $f(x)$ e $g(x)$ non si sanno trarre conclusioni generali sul limite cercato e si parla di limiti di **forme di indecisione** o di **forme indeterminate**, risp., del tipo $0/0$ e del tipo ∞/∞.

Forme di indecisione analoghe si hanno quando si devono calcolare limiti di composizioni di due funzioni diverse dal quoziente, funzioni di cui si conoscono i limiti ma che composte non consentono di decidere il limite della composizione.
Specifichiamo queste situazioni.
Si deve calcolare un limite della forma $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ e si sa che $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e che $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$; in tal caso si parla di forma di indecisione del tipo $\infty \cdot 0$.
Si deve calcolare un limite della forma $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ e si sa che $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$; in tal caso si parla di forma di indecisione del tipo $\infty - \infty$.
Si deve calcolare un limite della forma $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ e si sa (a) che $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e che $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ oppure (b) che $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oppure (c) che $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e che $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.
In questi casi si parla, risp., di forma di indecisione del tipo (a) 1^∞, (b) del tipo 0^0 e del tipo (c) ∞^0.

I21e.02 Per ottenere i limite cercati nelle situazioni di indecisione è necessario analizzare le caratteristiche specifiche delle due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.
Problemi analoghi si possono porre per la ricerca di limiti unilaterali, cioè da sinistra oppure da destra.

Molti casi, ma non tutti, possono essere risolti ricorrendo ai cosiddetti `teoremi di de l'Hopital (wi)` attribuiti a Guillaume de l'Hopital).

I21e.03 Prop. Consideriamo un intervallo $I = [x_0, x_0 + d)$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue da destra in x_0, cioè $\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0) = 0$ e $\lim_{x\to x_0+} g(x) = g(x_0) = 0$

(c) in I $g(x) \neq 0$,

(d) esistono le derivate destre $f'(x_0+)$ e $g'(x_0+)$,

(e) $g'(x_0+) \neq 0$.

Allora esiste, finito o infinito, il limite $\lim_{x\to x_0+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim.: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$ e passando al limite per $x \to a+$ i due rapporti incrementali tendono, risp., a $f'(x_0+)$ e $g'(x_0+)$. Da questo segue l'asserto ∎

I21e.04 La proposizione precedente può essere enunciata anche in una versione unilaterale simmetrica della precedente ed in una versione bilaterale.

(1) Prop.: Consideriamo un intervallo $I = (x_0 - c, x_0]$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue da sinistra in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) = 0$ e $\lim_{x \to x_0-} g(x) = g(x_0) = 0$

(c) in I $g(x) \neq 0$,

(d) esistono le derivate sinistre $f'(x_0-)$ e $g'(x_0-)$,

(e) $g'(x_0-) \neq 0$.

Allora esiste, finito o infinito, il limite $\lim_{x \to x_0-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim.: È la duale-LR della precedente dimostrazione ▮

(2) Prop.: Consideriamo un intervallo $I = (x_0 - c, x_0 + d)$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$

(c) in I $g(x) \neq 0$,

(d) esistono le derivate $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$,

(e) $g'(x_0) \neq 0$.

Allora esiste, finito o infinito, il limite $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim.: Le ipotesi implicano le ipotesi di e03 e di e04(1) e di conseguenza le due tesi; queste equivalgono all'asserto ▮

I21e.05 Prop. Consideriamo un intervallo $I = [x_0, x_0 + d)$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in I,

(c) in I $g(x) \neq 0$,

(d) esistono le derivate $f'(x)$ e $g'(x)$ per $x_0 < x < x_0 + d$ (mentre potrebbero non esistere $f'(x_0+)$ e $g'(x_0+)$),

(e) per $x_0 < x < x_0 + d$ sia $f'(x)$ che $g'(x)$ sono finite e $g'(x+) \neq 0$.

Allora si hanno le implicazioni alternative

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} /\!/ L+ /\!/ L- /\!/ -\infty /\!/ +\infty \implies \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L /\!/ L+ /\!/ L- /\!/ -\infty /\!/ +\infty .$$

Dim.: Le ipotesi implicano il teorema di Cauchy degli accrescimenti finiti c01, cioè l'esistenza, per ogni $x \in (x_0, x_0 + d)$ di un $\xi = \xi(x) \in (x_0, x)$ per il quale si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Dato che $x \to x_0+$ implica $\xi(x) \to x_0+$, l'esistenza di $\lim_{\xi \to x_0+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ implica l'esistenza di $\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)}$ e la coincidenza dei due limiti, cioè l'asserto ▮

l21e.06 Anche la proposizione precedente può essere enunciata in una versione unilaterale sua duale-LR ed in una versione bilaterale.

(1) Prop.: Consideriamo un intervallo $I = (x_0 - c, x_0]$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue da sinistra in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0) = 0$ e $\lim_{x \to x_0-} g(x) = g(x_0) = 0$

(c) in I $g(x) \neq 0$,

(d) esistono le derivate sinistre $f'(x_0-)$ e $g'(x_0-)$,

(e) $g'(x_0-) \neq 0$.

Allora esiste, finito o infinito, il limite $\lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim.: Duale-LR della precedente dimostrazione ▮

(2) Prop.: Consideriamo un intervallo $I = (x_0 - c, x_0 + d)$ e due funzioni $f(x), g(x) \in \lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni

(a) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(b) $f(x)$ e $g(x)$ sono continue in x_0, cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$

(c) in I $g(x) \neq 0$,

(d) esistono le derivate $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$,

(e) $g'(x_0) \neq 0$.

Allora esiste, finito o infinito, il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim.: Le ipotesi implicano le ipotesi di e03 e di e04(1) e di conseguenza le due tesi; queste implicano l'asserto ▮

l21e.07 Il tentativo di calcolare il limite del rapporto tra due derivate potrebbe condurre a un'altra forma di indecisione della forma $\frac{0}{0}$ o della forma $\frac{\infty}{\infty}$ (situazione per molti aspetti simile a quella trattata nella sezione attuale che vedremo in f01-f04].

In questo caso si può cercare di valutare anche il nuovo limite ricorrendo alle regole di de l'Hopital, cioè prendendo in esame il quoziente delle derivate seconde. Naturalmente questo tipo di tentativo può proseguire con derivate di ordine grande quanto possa servire.

I21e.08 Consideriamo alcuni esempi.

(1) Esempio $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\,x}{x} \;=\; \Big\lfloor\dfrac{0}{0}\Big\rfloor \;=\; \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+(\tan\,x)^2}{1} \;=\; \dfrac{1}{1}=1$.

(2) Esempio $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathsf{e}^x-1-x}{x^2} = \Big\lfloor\dfrac{0}{0}\Big\rfloor = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathsf{e}^x-1}{x} = \Big\lfloor\dfrac{0}{0}\Big\rfloor = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathsf{e}^x}{1} = \dfrac{1}{2}$

(3) Esempio $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin\,x}{x(1-\cos\,x)} = \Big\lfloor\dfrac{0}{0}\Big\rfloor = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\,x}{1-\cos\,x+x\,\sin\,x} = \Big\lfloor\dfrac{0}{0}\Big\rfloor = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\,x}{2\sin\,x+x\,\cos\,x}$
$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\,x}{2\,\cos\,x+\cos\,x-x\,\sin\,x} = \dfrac{1}{3}$.

I21e.09 I teoremi di de l'Hopital nella seconda forma hanno anche due varianti riguardanti i limiti per $x\to-\infty$ e per e $x\to+\infty$.
Si osservi inoltre che non ha senso cercare varianti dei teoremi di de l'Hopital nella prima forma, in quanto queste richiederebbero la conoscenza di derivate nell'estremo dell'intervallo analogo ad x_0.

(1) Prop.: Consideriamo un intervallo illimitato $I=(d,+\infty)$ e due funzioni $f(x),g(x)\in\lceil I\longmapsto\mathbb{R}\rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni:

(a) per ogni $x\in I$ $\vdots$ $f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili ,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

(c) per ogni $x\in I$ $\vdots$ $f'(x)$ e $g'(x)$ sono finite e $g(x)$ e $g'(x)$ sono diverse da 0 .

Allora
$$\exists\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Dim.: Possiamo supporre $d>0$ e introdurre la variabile $t:=\dfrac{1}{x}$ e le funzioni $F(t):=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=f(x)$ e $G(t):=f\left(\dfrac{1}{t}\right)=g(x)$; per esse si ha $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{F(t)}{G(t)}$, $f'(x)=\mathrm{D}_x t D_t F(t) = -\dfrac{1}{x^2}D_t F(t) = -t^2F'(t)$, $g'(x)=\mathrm{D}_x t D_t G(t) = -\dfrac{1}{x^2}D_t G(t) = -t^2G'(t)$ e $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{F'(t)}{G'(t)}$.
Alle funzioni $F(x)$ e $G(x)$ e all'intervallo $(0,1/d)$ si può applicare il teorema e05; questo garantisce l'esistenza di $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F'(t)}{G'(t)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e la sua uguaglianza con $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{F(t)}{G(t)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Questo corrisponde all'asserto ▮

(2) Prop.: Consideriamo un intervallo illimitato $I=(-\infty,c)$ e due funzioni $f(x),g(x)\in\lceil I\longmapsto\mathbb{R}\rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni:

(a) per ogni $x\in I$ $\vdots$ $f(x)$ e $g(x)$ sono continue e derivabili ,

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$,

(c) per ogni $x\in I$ $\vdots$ $f'(x)$ e $g'(x)$ sono finite e $g(x)$ e $g'(x)$ sono diverse da 0 .

Allora
$$\exists\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Dim.: Ottenibile per dualità-LR dalla dimostrazione di (1), ovvero ottenibile dalla argomentazione precedente servendosi della variabile $\zeta:=-x$ ▮

I21 f. regole di de l'Hopital per la altre forme di indecisione

I21f.01 Prop. Consideriamo un intervallo $I := (x_0, x_0 + d)$ e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ del genere $\lceil I \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ che soddisfano le seguenti condizioni:

(a) per ogni $x \in I$: $f(x)$ e $g(x)$ sono continue ;

(b) $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0+} g(x) = +\infty$;

(c) per ogni $x \in I$: $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili ; per ogni $x \in I$: $g'(x) \neq 0$.

In tali condizioni

$$\exists \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \implies \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Dim.: Consideriamo due ascisse x_1 e x tali che $x_0 < x_1 < x < x_0+d$; ad esse si può applicare il teorema di Cauchy c01, cioè si può garantire l'esistenza di $\xi \in (x_1, x)$ tale che sia

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{g(x_1) - g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

È lecito supporre che in I sia $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ (in caso contrario basterebbe ridurre l'ampiezza d dell'intervallo) e quindi riscrivere

$$\frac{f(x)\left[1 - \frac{f(x')}{f(x)}\right]}{g(x)\left[1 - \frac{g(x')}{g(x)}\right]} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad , \text{ ovvero } \quad \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \frac{g(x)}{g(x_1)}}{1 - \frac{f(x)}{f(x_1)}} .$$

A questo punto è necessario considerare x variabile e far dipendere l'ascissa x_1 dalla x, cioè considerare $x_1 = x_1(x)$; per una determinata x, dato che $f(x)$ e $g(x)$ per $x \to x_0$ divergono a $+\infty$ e sono continue, si può supporre che sia $f(x_1) > f(x)$ e $g(x_1) > g(x)$ (in caso contrario si basterebbe ridurre la x). Chiediamo allora che x_1 sia la massima ascissa w per la quale si verificano entrambe le disuguaglianze attenuate $\sqrt{f(w)} \geq f(x)$ e $\sqrt{g(w)} \geq g(x)$ e per almeno una di esse si abbia l'uguaglianza. Evidentemente $x \to x_0$ implica $x_1(x) \to x_0$. Con questa dipendenza di x_1 da x possiamo scrivere

$$\frac{f(x)}{f(x_1)} =: \frac{\alpha(x_1)}{\sqrt{f(x_1)}} \text{ con } 0 < \alpha(x) \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{g(x)}{g(x_1)} =: \frac{\beta(x_1)}{\sqrt{g(x_1)}} \text{ con } 0 < \beta(x) \leq 1 .$$

Si può quindi scrivere

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \frac{\beta(x)}{\sqrt{g(x)}}}{1 - \frac{\alpha(x)}{\sqrt{f(x)}}} \quad \text{per} \quad x_0 < x < \xi < x' < x_0 + d .$$

A questo punto si osserva che $x \to x_0$ implica $\xi \to x_0$, $x_1 \to 0$ e inoltre $1 - \dfrac{\alpha(x)}{\sqrt{f(x)}} \to 1$ e $1 - \dfrac{\beta(x)}{\sqrt{g(x)}} \to 1$.

Da qui segue l'asserto ▮

I21f.02 Anche del teorema precedente si possono enunciare una versione unilaterale simmetrica e una versione bilaterale.

Inoltre si hanno versioni nelle quali le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ divergono a $\pm\infty$ per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$.

I21f.03 Vediamo alcuni esempi.

(1) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to 0+} \dfrac{\log(\exp(x^\alpha)-1)}{\log x} = \lim_{x\to 0+} \dfrac{\frac{\alpha\ \exp(x^\alpha)x^{\alpha-1}}{\exp(x^\alpha)-1}}{\frac{1}{x}} = \alpha \lim_{x\to 0+} \dfrac{x^\alpha\ \exp(x^\alpha)}{\exp(x^\alpha)-1} =$
$\lfloor_N\, x \to 0+ \Longrightarrow x^\alpha \to 0\ ,\ \exp(x^\alpha) \to 1\ ,\ \rfloor_N =$
$= \alpha \lim_{x\to 0+} \dfrac{x^\alpha}{\exp(x^\alpha)-1} = \alpha \lim_{x\to 0+} \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{\alpha x^{\alpha-1}\exp(x^\alpha)} = \alpha \lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{\exp(x^\alpha)} = \alpha \cdot 1 = \alpha$.

I21f.04 Consideriamo la forma di indecisione $0 \cdot \infty$, cioè il caso di un prodotto della forma $f(x) \cdot g(x)$ con $f(x)$ tendente a 0 e $g(x)$ tendente a $+\infty$ o a $-\infty$ per x tendente a un valore finito, unilateralmente o bilateralmente oppure per x tendente a $+\infty$ o a $-\infty$.

Il calcolo di uno di tali limiti si può cercare di effettuarlo servendosi delle regole di de l'Hopital o di altri risultati riguardanti il quoziente $\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ afferente alla forma di indecisione $\dfrac{0}{0}$ oppure a quanto si può fare per il quoziente $\dfrac{\frac{1}{f(x)}}{g(x)}$ appartenente alla forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Quale delle due strade scegliere dipende dalle caratteristiche di $f(x)$ e $g(x)$; in particolare contano la facilità di calcolare le derivate di $f(x)$ e di $\dfrac{1}{g(x)}$ per la prima strada e la facilità di calcolare le derivate di $\dfrac{1}{f(x)}$ e di $g(x)$ per la seconda strada.

I21f.05 Vediamo alcuni esempi

(1) Per calcolare $\lim_{x\to 0+} x \ln x$ ci si riconduce alla forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ trasformando l'espressione nella $\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$ e quindi nel rapporto tra derivate $\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$; questo tende a 0 e si conclude che $\lim_{x\to 0+} x \ln x = 0$.

Presentiamo poi sinteticamente un calcolo secondo lo stesso schema.

(2) $\lim_{x\to 0+} x \ln x = \lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lfloor_N$ passando al quoziente delle derivate $\rfloor_N \lim_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0-$.

(3) Sia $\alpha \in \mathbb{R}_+$; $\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = -\dfrac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{x^{-\alpha-1}} = -\dfrac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0+} x^\alpha = 0$.

I21f.06 Consideriamo ora l'espressione $f(x)^{g(x)}$ nei tre casi

$$\text{(a)}\ \ f(x) \to 1\ ,\ g(x) \to \infty \quad , \quad \text{(b)}\ \ f(x) \to 0\ ,\ g(x) \to 0 \quad , \quad \text{(c)}\ \ f(x) \to \infty\ ,\ g(x) \to 0\ .$$

relativi ad x tendente a un valore finito, unilateralmente o bilateralmente, oppure a $+\infty$, oppure a $-\infty$. Se non si vogliono distinguere queste situazioni alternative si conviene di scrivere $\lim_{x\to *}$.

Questi casi riguardano, risp., le forme di indecisione

$$\text{(a)}\ \ 1^\infty \qquad , \qquad \text{(b)}\ \ 0^0 \qquad , \qquad \text{(c)}\ \ \infty^0\ .$$

Questi limiti si possono studiare passando allo studio dei corrispondenti logaritmi, cioè considerando

$$\lim_{x\to *} \log\left[f(x)^{g(x)}\right] \ = \ \lim_{x\to *}\,[g(x) \cdot \log\, f(x)]$$

e, quando si riesce a valutare il nuovo limite, tornando a prendere in considerazione l'esponente del risultato.

Il nuovo limite nei tre casi ricade, risp., nelle forme di indecisione

$$\text{(a)}\ \infty \cdot 0 \quad , \quad \text{(b)}\ 0 \cdot \infty \quad , \quad \text{(c)}\ 0 \cdot \infty$$

e può essere affrontato come esposto in f04 .

I21f.07 Presentiamo sinteticamente alcuni esempi.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0+}\cos x^{\ln x} = \exp\left\{\lim_{x\to0+}[\ln x\cdot\ln\cos x]\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0+}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\log x}}\right\}$

$\displaystyle = \exp\left\{\lim_{x\to0+}\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right):\left(-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0+}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{(\log x)^2}\right\}$

$= \exp\{1\cdot1\cdot0+\} = \mathrm{e}^{0+} = 1+$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0+}x^x = \exp\left\{\lim_{x\to0+}\ln[x^x]\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0+}[x\ln x]\right\} = \lfloor \text{e07(2)} \rfloor = \exp\{0-\} = 1-$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2-}(\tan x)^{\sqrt{\cos x}} = \mathrm{e}^{0+} = 1+$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}} = \lfloor 1^\infty \rfloor = \exp\left\{\ln\left[\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}\right]\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}\right\} = \lfloor \text{derivando} \rfloor$

$\displaystyle = \exp\left(\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right) = \exp(-1) = \frac{1}{e}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} = \lfloor \infty^0 \rfloor = \exp\left\{\log\left[\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}\right]\right\} = \exp\left\{\lim_{x\to0+}\tan x\cdot\log\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$

$\displaystyle = \exp\left\{-\lim_{x\to0+}\log x\,\tan x\right\} = \exp\left\{-\lim_{x\to0+}(x\ln x)\frac{\tan x}{x}\right\} = \exp(-0\cdot1) = 1$

I21f.08 Consideriamo la forma di indecisione $\infty-\infty$, cioè il caso di una differenza della forma $f(x)-g(x)$ con $f(x)$ e $g(x)$ tendenti a $+\infty$ per x tendente a un valore finito, unilateralmente o bilateralmente oppure per x tendente a $+\infty$ o a $-\infty$.

Il calcolo di un tale limite si può affrontare riconducendolo ad una delle forme di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ e $0\cdot\infty$ attraverso opportune manipolazioni.
Esse si avvalgono della considerazione che, al limite, sia la $f(x)$ che la $g(x)$ sono definitivamente diverse da 0.

I21f.09 Una prima strada si basa sull'uguaglianza $f(x)-g(x) = f(x)\left[1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right]$ e sulla valutazione del limite di $\dfrac{g(x)}{f(x)}$.
Se si conosce tale limite L, finito o infinito, e questo è diverso da 1 si può concludere:

$$f(x)-g(x) \to +\infty(1-L) = \begin{array}{rl}\infty & \text{se } L<1\\ -\infty & \text{se } L>1\end{array} .$$

Se invece $\dfrac{g(x)}{f(x)}\to1$ si deve affrontare una forma di indecisione $\infty\cdot0$; questa, in forza dell'uguaglianza

$$f(x)-g(x) = \frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} ,$$

si riconduce a una forma $\dfrac{0}{0}$.

L'uguaglianza $f(x)-g(x) = \ln\{\exp[f(x)-g(x)]\} = \ln\left\{\dfrac{\exp[f(x)]}{\exp[g(x)]}\right\}$ consente di ricondursi allo studio di una forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$.

L'uguaglianza $f(x) - g(x) = \dfrac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/f(x)\,g(x)}$ consente di ricondursi allo studio di una forma di indecisione $\dfrac{0}{0}$.

I21f.10 Presentiamo ancora sinteticamente alcuni esempi.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\log x}{x}\right) == \lim_{x\to+\infty} x\,(1 - 0+) = +\infty$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \tan x}{x \tan x}\right) = \lfloor$ considerando il quoziente delle derivate $\rfloor$ =

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - 1/(\cos x)^2}{\tan x - x/(\cos x)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x)^2 - 1}{\sin x \cos x + x} = -\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{\sin x\,\cos x + x} =$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x/\sin x + \cos x} = -\frac{0}{1+1} = 0-$.

I21f.11 Nella valutazione di molti limiti di espressioni riconducibili a forme di indecisione si rende necessario di effettuare manipolazioni delle espressioni che, oltre a servirsi degli enunciati precedentemente visti, possono richiedere cambiamenti di variabili, semplificazioni e altre manipolazioni che dipendono dalle caratteristiche delle funzioni in gioco e non si possono ridurre a ricette di semplice applicazione e di ampia validità.

I21 g. formula di Taylor e formula di MacLaurin

I21g.01 Una problematica importante e di ampia portata che si pone nello studio delle funzioni numeriche, a partire dalle funzioni-RtR, consiste nella loro **approssimazione di funzioni attraverso funzioni più semplici**, in particolare attraverso funzioni polinomiali .

Consideriamo una funzione-RtR calcolabile $f(x)$ definita in un intorno V del valore x_0 della variabile indipendente e supponiamo che il calcolo effettivo dei valori che essa assume richieda elaborazioni impegnative.

In molte circostanze risulta utile conoscere un procedimento che fornisca valori approssimati della funzione attraverso elaborazioni inquadrabili in schemi ben definiti.
La cosa può riguardare singole ascisse o, per questioni di più estesa applicazione, la individuazione di una funzione $p(x)$ definita in un intervallo che tendenzialmente in tale dominio si possa calcolare "facilmente" e differisca "poco" dalla $f(x)$; una tale $p(x)$ viene detta **funzione approssimante**.

Interessa particolarmente il caso in cui la $p(x)$ sia data da un'espressione facile da sottoporre a elaborazioni numeriche e simboliche.
Questo è primariamente il caso delle funzioni approssimanti polinomiali.

Qui dunque ci proponiamo di individuare dei **polinomi approssimanti** polinomi di diversi gradi che forniscono "buone approssimazioni" per un ampio numero di dunzioni-RtR, approssimazioni ottenibili concretamente con le sole operazioni di somma, differenza e prodotto sopra numeri razionali (in parte approssimazioni di numeri reali costruibili).

Conviene tuttavia segnalare che, ai fini dell'approssimazione delle funzioni, possono essere vantaggiose funzioni approssimanti di altri tipi; citiamo le funzioni razionali, le `funzioni spline (wi)` (date da polinomi relativi a successivi intervalli costituenti il dominio della funzione) e le combinazioni lineari di funzioni trigonometriche seno e coseno.

I21g.02 Consideriamo una funzione $f(x) \in \lceil D \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ con $D \subseteq \mathbb{R}$ che abbia un andamento piuttosto regolare; più precisamente supponiamo che essa in un punto x_0, al quale qui diamo il ruolo di punto iniziale, possegga alcune derivate $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ...

Consideriamo anche un valore variato della variabile indipendente $x_0 + h \in V$ tendenzialmente poco diverso da x_0. La funzione data da

$$(1) \qquad y \;=\; p_1(x) \;:=\; f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

è raffigurata dalla tangente nel punto x_0 alla curva che raffigura la $y = f(x)$.

Ci si aspetta che per incrementi $h = x - x_0$ abbastanza piccoli la funzione $p_1(x)$ risulti poco differente dalla $y = f(x)$; in particolare è ragionevole pensare che essa approssimi la $f(x)$ meglio di quanto faccia la funzione costante $y = f(x_0)$.

Se la $f(x)$ (oltre alla derivata prima) possiede la derivata seconda in x_0, si può considerare la funzione

$$(2) \qquad y \;=\; p_2(x) \;:=\; f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\, f''(x_0) \;;$$

Questa è raffigurata da una parabola che passa per $\langle x_0, f(x_0)\rangle$ ed ha in comune con la $f(x)$ la tangente (1); è ragionevole aspettarsi che essa in un intorno opportunamente piccolo di x_0 approssimi la $f(x)$ meglio di quanto lo faccia la retta (1).

In questa direzione si può procedere quanto si vuole. Se la $f(x)$ possiede $n-1$ derivate in x_0, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... $f^{(n-1)}(x_0)$ è ragionevole aspettarsi che vi sia un polinomio di grado $n-1$ che dipende dalle suddette derivate che fornisce un'approssimazione della $f(x)$ ancor migliore di quella data da (2).

Per precisare queste aspettative si ricorre alla classica formula di Taylor.

I21g.03 Si dice **formula di Taylor** o formula di Taylor-Lagrange arrestata al grado $n-1$ per la suddetta funzione $f(x)$ attinente al punto iniziale x_0 e al punto variato x_0+h l'espressione

$$(1)\quad f(x_0+h) \;=\; f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\mathtt{T}_n(f,x_0,h)\ ,$$

dove $\mathtt{T}_n(f,x_0,h)$ è chiamato **termine complementare della formula di Taylor**.

La precedente espressione può essere considerata come la mera definizione del termine complementare e potrebbe scriversi

$$\mathtt{T}_n(f,x_0,h) \;:=\; f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)-\frac{h^2}{2}f''(x_0)-\frac{h^3}{3!}f^{(3)}(x_0)-\cdots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)\ .$$

Essa costituisce il punto di partenza per le considerazioni riguardanti le approssimazioni polinomiali della $f(x)$ nel punto x_0+h.

Alla formula di Taylor si può dare anche la forma seguente:

$$(2)\quad f(x) \;=\; f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)+\mathtt{T}_n(f,x_0,x-x_0)\ ,$$

Questa espressione si può essere meglio utilizzata per passare da considerazioni puntuali a considerazioni locali.

I21g.04 Il termine complementare si può caratterizzare in molti modi che dipendono da proprietà da specificare caso per caso. Cominciamo con la loro presentazione.

Termine complementare nella forma di Peano:

$$(1)\qquad \mathtt{T}_n(f,x_0,x-x_0) \;=\; \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)+\epsilon_n(x)\right] \quad \text{con} \quad \lim_{x\to x_0+}\epsilon_n(x)=0\ .$$

Termine complementare nella forma di Lagrange:

$$(2)\qquad \mathtt{T}_n(f,x_0,x-x_0) \;=\; \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{con} \quad x_0<\xi_n<x \quad \text{oppure} \quad x<\xi_n<x_0\ .$$

Termine complementare nella forma di Cauchy:

$$(3)\quad \mathtt{T}_n(f,x_0,x-x_0) \;=\; \frac{(1-\theta_n)^{n-1}(x-x_0)^n}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{con} \quad x_0<\xi_n<x \ \text{ oppure } \ x<\xi_n<x_0\ .$$

Termine complementare nella forma di Schloemilch-Roche:

$$\mathtt{T}_n(f,x_0,x-x_0) \;=\; \frac{(1-\theta_n)^{n-p}(x-x_0)^n}{p(n-1)!}f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{con} \quad x_0<\xi_n<x \quad \text{oppure} \quad x<\xi_n<x_0$$

$$(4)\qquad \text{e} \quad p\in\mathbb{R}_+ \ \text{ sse } \ x>x_0\ ,\ p\in\mathbb{P} \ \text{ sse } \ x>x_0\ .$$

Termine complementare nella forma di Schloemilch:

$$\mathtt{T}_n(f,x_0,x-x_0) \;=\; \frac{(1-\theta_n)^{n-1}\,(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{G(x)-G(x_0)}{G'(\xi_n)}\,f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{dove}\ :$$

$x_0<\xi_n<x$ aut $x<\xi_n<x_0$ e $G(x)$ continua per $x_0\le\xi_n\le x$ oppure $x\le\xi_n\le x_0$

(5) e dotata di derivata nonnulla per $x_0 < \xi_n < x$ oppure per $x < \xi_n < x_0$

Termine complementare in forma integrale:

$$\mathtt{T}_n(f, x_0, x - x_0) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t\,(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)$$

(6)
$$= \frac{(x-x_0)^n}{(n-1)!} \int_0^1 \mathrm{d}u\ (1-u)^{n-1} f^{(n)}(x_0 + (x-x_0)u)$$

I21g.05 Nel caso particolare in cui $x_0 = 0$ si ottengono espressioni sensibilmente più semplici delle precedenti per le quali si parla di **formula di MacLaurin**:

(0)
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \mathtt{T}_n(f, 0, x) \ ,$$

Occorre segnalare esplicitamente che dalla situazione particolare $x_0 = 0$ si può risalire a quella generale attraverso la semplice traslazione sull'asse delle ascisse $x \to x + x_0$.

Per il termine complementare della formula di MacLaurin si hanno le espressioni che seguono.

Termine complementare nella forma di Peano:

(1)
$$\mathtt{T}_n(f, 0, x) = \frac{x^n}{n!} \left[f^{(n)}(0) + \epsilon_n(x) \right] \quad \text{con} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon_n(x) = 0 \ .$$

Termine complementare nella forma di Lagrange:

(2)
$$\mathtt{T}_n(f, 0, x) = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{con} \quad 0 < \xi_n < x \quad \text{oppure} \quad x < \xi_n < 0 \ .$$

Termine complementare nella forma di Cauchy:

(3)
$$\mathtt{T}_n(f, 0, x) = \frac{(1-\theta_n)^{n-1}\, x^n}{(n-1)!} f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{con} \quad 0 < \xi_n < x \quad \text{oppure} \quad x < \xi_n < 0 \ .$$

Termine complementare nella forma di Schloemilch-Roche:

$$\mathtt{T}_n(f, 0, x) = \frac{(1-\theta_n)^{n-p}\, x^n}{p\,(n-1)!} f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{con} \quad 0 < \xi_n < x \quad \text{oppure} \quad x < \xi_n < 0$$

(4)
$$\text{e} \quad p \in \mathbb{R}_+ \ \text{sse} \ x > 0 \ , \ p \in \mathbb{P} \ \text{sse} \ x > 0 \ .$$

Termine complementare nella forma di Schloemilch:

$$\mathtt{T}_n(f, 0, x) = \frac{(1-\theta_n)^{n-1}\, x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{G(x) - G(0)}{G'(\xi_n)} f^{(n)}(\xi_n) \quad \text{dove} \ :$$

$0 < \xi_n < x$ oppure $x < \xi_n < 0$ e $G(x)$ continua per $0 \le \xi_n \le x$ aut $x \le \xi_n \le 0$

(5) e dotata di derivata nonnulla per $0 < \xi_n < x$ oppure $x < \xi_n < 0$.

Termine complementare in forma integrale:

$$\mathtt{T}_n(f, 0, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \mathrm{d}t\ (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)$$

(6)
$$= \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 \mathrm{d}u\ (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu) \ .$$

I21g.06 Ogni funzione polinomiale è continua e derivabile tante volte quante si vuole per ogni x reale. Di conseguenza la formula di Taylor si può applicare a ogni polinomio nella variabile reale x

$$P(x) = a_m\,x^m + a_{m-1}\,x^{m-1} + \cdots + a_1\,x + a_0 \qquad \text{con} \quad a_n \neq 0\ ,$$

a ogni punto iniziale x_0, a ogni punto variato x e con il troncamento a un qualunque ordine n.

Dato che $P^{(m)}(x) = n!\,a_n$ e $P^{(k)}(x) = 0$ per ogni $k > m$, la formula di MacLaurin g05(1) diventa la seguente uguaglianza esplicativa:

$$P(x) \ = \ P(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}\,P'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}\,P^{(n)}(x_0)\ .$$