1

Capitolo I20
derivate delle funzioni reali

Contenuti delle sezioni

a. derivata di una funzione-RtR p. 2
b. derivabilità e continuità, derivate di derivate p. 6
c. derivate di combinazioni lineari, prodotti e quozienti di funzioni p. 9
d. derivate di funzioni composte e di funzioni inverse p. 12

13 pagine

I20 0.01 In questo capitolo viene introdota la nozione di derivata di una funzione-RtR e di alcune sue varianti.
Più precisamente sono definite le derivate delle funzioni a valori reali aventi un dominio costituito da un intervallo reale limitato o illimitato e conseguentemente anche le derivate delle funzioni il cui dominio è costituito da un numero finito di intervalli.

Dopo le definizioni fondamentali sulla derivazione, viene esposta la tecnica per il calcolo di derivate delle funzioni date da espressioni contenenti operazioni algebriche e funzioni trascendenti basilari.

Con le considerazioni di questo capitolo vengono introdotte le prime nozioni del cosiddetto "calcolo differenziale".

I20 a. derivata di una funzione-RtR

I20 a.01 Il calcolo differenziale trova una sua motivazione nel fatto che una grande varietà di problemi della matematica e delle sue applicazioni richiedono di conoscere il comportamento di fenomeni quantitativi che variano in dipendenza da uno o più parametri continui e quindi nella necessità di conoscere il comportamento di funzioni di una o più variabili reali con valori che possono essere numeri reali od oggetti più elaborati, come valori complessi [B50, B53, I37, I38] o come valori facenti parte di uno spazio metrico [B46].

In genere tra i primi aspetti di un fenomeno quantitativo occorre esaminare i suoi comportamenti in "prossimità" di alcune situazioni particolari; sul piano matematico si tratta di iniziare a esaminare il comportamento di una funzione considerando regioni "ristrette" del suo dominio di variabilità, in particolare intervalli di piccole estensioni.

Molti dei fenomeni che si studiano nell'ambito di modelli quantitativi riguardano l'evoluzione nel tempo di processi o di sistemi: ne sono esempi i movimenti di un corpo, i cambiamenti di grandezze come temperatura e pressione di un fluido sottoposto a un qualche trattamento industriale e i valori di documenti di credito nel corso di un qualche definito arco temporale.

I più semplici dei problemi accennati possono essere descritti facilmente in termini puramente geometrici; nei casi meno elaborati l'evoluzione viene rappresentata dall'andamento di una curva nel piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: per esempio sono di grande interesse le traiettorie di corpi puntiformi rappresentate da porzioni di parabola (nella balistica) o da ellissi (nella meccanica celeste).

Altri fenomeni più elaborati vengono rappresentati mediante superfici nello spazio tridimensionale; altri ancor più complessi si possono trattare, di solito con qualche semplificazione, mediante modelli che richiedono di combinare più di una delle rappresentazioni relativamente semplici sopra accennate.

I20 a.02 Innanzi tutto si incontra spesso la necessità di confrontare due valori assunti da una funzione reale $f(x)$ in due ascisse tendenzialmente vicine x_0 e x_1 appartenenti a un intervallo che fa parte del suo dominio.

In genere ha grande rilievo la differenza di tali valori $f(x_1) - f(x_0)$, numero reale che viene detto **incremento della funzione** $f(x)$ attinente alla variazione da x_0 a x_1 della variabile indipendente.

Ai due punti x_0 e x_1, sia per motivi imposti dal problema, sia per la mera opportunità di semplificare la descrizione, risulta opportuno assegnare un ordine e distinguere un punto x_0 che si assume come centro delle considerazioni e un punto x_1 che costituisce una sua modifica tendenzialmente lieve.
Questo secondo valore spesso conviene esprimerlo nella forma $x_1 + h$ o $x_1 + \Delta x$ servendosi di quello che si chiama **incremento della variabile indipendente** denotato più chiaramente come Δx o, più concisamente con una lettera, la h, alla quale solitamente si attribuisce tale ruolo.

Spesso interessa un incremento positivo, $\Delta x > 0$ o $h > 0$ e tipicamente questo accade quando si studiano processi evolutivi. In questi casi la variabile indipendente rappresenta lo scorrere del tempo e spesso si preferisce denotare questo parametro con la lettera t piuttosto che con la x.
Se si conosce una grandezza variabile fino all'istante t_0 risulta spesso utile cercare di prevedere quanto varrà nell'istante $t_0 + h$.

Potrebbe invece interessare un incremento negativo, cioè una quantità per la quale si può preferire il termine **decremento della funzione**. Questo per esempio accade quando si conosce una situazione corrente espressa dal valore $f(x_0)$ valutato in corrispondenza al valore x_0 della variabile indipendente e si vuole

conoscere un valore assunto in precedenza, in corrispondenza di un valore minore $x_0 + \Delta x$ con $\Delta x < 0$, al fine di potersi orientare sulle origini della situazione attuale.

La generalità che è opportuno perseguire per gli strumenti matematici che stiamo per introdurre induce a considerare in partenza la possibilità di incrementi sia positivi che negativi e in genere induce anche a non trascurare l'incremento nullo.

In considerazioni più specifiche può essere necessario distinguere gli incrementi negativi dai positivi: per coerenza con altri termini geometrici introdotti e da introdurre chiameremo **incremento sinistro della variabile indipendente** un $\Delta x < 0$ e **incremento destro della variabile indipendente** un $\Delta x > 0$.

I20 a.03 Consideriamo la funzione $f \in \left\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \right\rceil$, un intervallo aperto $I \subseteq D := \mathsf{dom}(f)$ e un $x_0 \in I$.
Per ogni $x \in I \setminus \{x_0\}$ si definisce **rapporto incrementale della funzione** f relativo alle ascisse x_0 e x il rapporto

$$\mathbf{IncRp}(f, x, x_0) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,. \tag{1}$$

Questo rapporto, fissato il punto $x_0 \in I$, definisce una funzione della variabile x

$$\left\lceil\, x \in I \setminus \{x_0\} \quad \mapsto \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,\right\rceil \tag{2}$$

che misura la variazione della funzione tra il suo valore nel punto di riferimento x_0 e il suo valore nel punto x rapportata all'incremento della variabile indipendente x rispetto a x_0.

Un rapporto incrementale relativo ai punti x_0 ed $x > x_0$, se positivo dice che la funzione al crescere della variabile indipendente, cioè al crescere dell'ascissa da x_0 a x, cresce; viceversa un rapporto incrementale negativo caratterizza una funzione che al crescere della variabile indipendente decresce.

Se esiste finito il limite per x tendente a x_0 del precedente rapporto incrementale, si dice che la f è una **funzione derivabile in un punto**, x_0; questo valore limite si chiama **derivata della funzione-RtR** f nel punto x_0 e si denota con una delle seguenti scritture

$$(\mathrm{D}_x f(x))_{x=x_0} = (\mathrm{D}\, f)(x_0) = f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f\,(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \,. \tag{3}$$

La derivata di una funzione f in x_0 indica quanto varia la f in un intorno "tendenzialmente piccolo" dell'ascissa x_0; Questo numero reale fornisce una informazione rilevante sul cosiddetto **comportamento puntuale della funzione** f.

Se poi $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ si dice che la funzione in x_0 ha come derivata $+\infty$; se invece $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ si dice che la funzione in x_0 ha come derivata $-\infty$.

I20 a.04 Se la funzione f è derivabile in tutti i punti x_0 di un intervallo I appartenente al suo dominio, si individua una nuova funzione la cui variabile indipendente può assumere ogni valore appartenente al suddetto I; questa funzione viene detta **funzione derivata** della f.

Spesso è utile raffigurare una funzione e la sua funzione derivata nello stesso diagramma cartesiano; in tal caso è usuale esprimere sia la funzione di partenza che la la funzione derivata come funzioni della stessa variabile indipendente x usata come segno per caratterizzare i valori che si individuano sull'asse delle ascisse.

Per queste situazioni conviene riferirsi al rapporto incrementale relativo ai punti x ed $x+h$, dove h viene detto incremento della variabile indipendente ed $f(x+h)-f(x)$ incremento della variabile dipendente; con tali elementi si scrive:

$$\forall x \in I \ : \ (\mathrm{D}_x f)(x) \ := \ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \ := \ f'(x) \ := \ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ .$$

Nei contesti nei quali si trattano solo funzioni di una variabile per la quale si usa la lettera x, è lecito semplificare la scrittura D_x con la più semplice D.

Alternativaamente può risultare più opportuno servirsi della scrittura Δf per l'incremento della f e della Δx per l'incremento della variabile indipendente al posto di h; con queste notazioni si ha la definizione

$$\forall x \in I \ : \ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \ := \ \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \ = \ \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ .$$

Va segnalato che nelle notazioni precedenti abbiamo introdotto le scritture $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}f$ per entità sulle quali risulta lecito si possano effettuare operazioni numeriche. Su queste possibilità, ora solo suggerite, dovremo tornare per dei doverosi chiarimenti.

Conviene osservare esplicitamente che la precedente definizione di derivata estende quella data in B36c per le sole funzioni-QtQ.

I20 a.05 Procediamo ora a stabilire alcune di formule di derivazione che associano alle espressioni di alcune funzioni le espressioni delle rispettive funzioni derivate.

Per la generica funzione lineare $f(x) \ = \ m\,x+q$, per ogni x reale il rapporto incrementale è dato da

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ = \ \frac{m(x+h)+q-m\,x-q}{h} = m$$

e quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(m\,x+q) \ = \ \frac{m\,h}{h} = m \ . \tag{1}$$

Questo consente di enunciare che su tutto $\mathbb{R}$ la derivata di una funzione lineare è una funzione costante.

Consideriamo per un generico $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f(x) \ := \ x^n$ definita sull'intero $\mathbb{R}$. Tenendo presente la espressione della potenza del binomio si trova

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h} \ = \ \frac{1}{h}\left[x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}\,h+\binom{n}{2}x^{n-2}\,h^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x\,h^{n-1}+h^n-x^n\right] \ =$$

$$n\,x^{n-1}+h\left[\binom{n}{2}x^{n-2}+\binom{n}{3}x^{n-3}\,h+\cdots+\frac{n(n-1)}{2}x^2\,h^{n-4}+n\,x\,h^{n-3}+h^{n-2}\right] \ .$$

Quindi passando al limite per $h\to 0$ si ottiene:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) \ = \ n\,x^{n-1} \ . \tag{2}$$

Si può quindi enunciare che la derivata della potenza n-esima della variabile indipendente è la potenza $n-1$-esima moltiplicata per n.

Dalla (2) discende che la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n-1$.

I20 a.06

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathsf{e}^x) \ = \ \mathsf{e}^x \ . \tag{1}$$

Si può quindi enunciare che la e^x è la funzione esponenziale il cui valore per ogni ascissa coincide con la propria pendenza.

Si trova anche che per ogni x reale

(2)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathsf{e}^{-x}) \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}(\mathsf{e}^{-x}) \;=\; -\mathsf{e}^{-x} \qquad \text{e} \qquad \forall a \in \mathbb{R}_{nz} \;:\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathsf{e}^{a\,x}) \;=\; a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(a\,x)}(\mathsf{e}^{a\,x}) \;=\; a\,\mathsf{e}^{a\,x}\;.$$

In generale per ogni funzione-RtR $f(x)$ derivabile in un intorno di x, e definita in un intorno di $-x$, evidentemente, è derivabile in un intorno di $-x$ e si ha

(3)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(-x) \;=\; -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\;.$$

I20 a.07 Consideriamo la funzione logaritmo naturale, cioè logaritmo in base e, di argomento $x \in \mathbb{R}_+$ e il corrispondente rapporto incrementale funzione di x e h:

$$\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \;=\; \frac{1}{h}\Big[\ln\Big(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\Big)-\ln x\Big] \;=$$

$$\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \;=\; \frac{1}{x}\frac{x}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \;=\; \frac{1}{x}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\;.$$

Passando al limite per $h \to 0$, cioè per $t := \dfrac{h}{x} \to 0$, ricordando quanto trovato in I16c, si trova

(1)
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \;:\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x \;=\; \mathrm{D}_x(\log_e x) \;=\; \frac{1}{x}\;.$$

I20 a.08 La formula di addizione per l'argomento del seno $\sin(x+h) \;=\; \sin h\cos x + \cos h \sin x$ e due limiti notevoli implicano

(1)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin h}{h}\cos x + \frac{\cos h - 1}{h}\sin x\right] \;=\; \cos x\;.$$

Similmente, per la formula di addizione per l'argomento del coseno $\cos(x+h) \;=\; \cos h\cos x - \sin h \sin x$, si trova

(2)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\left[\frac{\cos h - 1}{h}\cos x - \frac{\sin h}{h}\sin x\right] \;=\; -\sin x\;.$$

I20 a.09 Per le funzioni seno e coseno iperbolico si ricavano direttamente dalle definizioni e da a06 le seguenti formule di derivazione

(1)
$$\mathrm{D}_x\sinh(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{D}_x\mathsf{e}^x - \mathrm{D}_x\mathsf{e}^{-x}\right) \;=\; \frac{\mathsf{e}^x+\mathsf{e}^{-x}}{2} \;=\; \cosh(x)\;,$$

(2)
$$\mathrm{D}_x\cosh(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{D}_x\mathsf{e}^x + \mathrm{D}_x\mathsf{e}^{-x}\right) \;=\; \frac{\mathsf{e}^x-\mathsf{e}^{-x}}{2} \;=\; \sinh(x)\;.$$

I20 b. derivabilità e continuità, derivate di derivate

I20 b.01 Teorema Se la funzioneRtR $f(x)$ è derivabile nell'ascissa x_0, per tale numero reale essa è anche continua.

Dim.: Consideriamo l'incremento della f relativo alle ascisse x_0 e $x \neq x_0$

$$f(x) - f(x_0) \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,(x - x_0)\ .$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene

$$\lim_{x\to x_0}\,[f(x) - f(x_0)] \;=\; \lim_{x\to x_0}\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\cdot\,\lim_{x\to x_0}\,(x - x_0) \;=\; f'(x_0)\cdot 0 \;=\; 0\ \blacksquare$$

Dunque la derivabilità di una funzione in un punto del suo dominio implica la sua continuità in tale punto: equivalentemente si può affermare che l'operazione di derivazione in una certa ascissa si può applicare solo a funzioni che per quella ascissa sono continue.

Viceversa la continuità per una ascissa non implica la sua derivabilità. Vediamo infatti due esempi di funzioni continue e non derivabili in un particolare punto del loro dominio.

La funzione $f(x) = |x|$ è continua per ogni x reale, ma è derivabile solo per $x \neq 0$: infatti per $x > 0$ si ha $\mathrm{D}_x(|x|) = 1$, per $x < 0$ si ha $\mathrm{D}_x(|x|) = -1$, mentre il rapporto incrementale **IncRp**$(|x|, 0, x)$ per $x \neq 0$ è $\dfrac{|x| - 0}{x - 0} = \mathrm{sign}(x)$, funzione della quale non esiste il limite per $x \to 0$.
Consideriamo la funzione

$$F(x) \;:=\; \left\lceil\ 0 \mapsto 0\ \right\rceil\ \dot\cup\ \left\lceil\ x \in \mathbb{R}_{nz} \mapsto x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \right\rceil\ .$$

Per essa si trova $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = 0$ e si dimostra che essa è continua in $x = 0$.
Si dimostra tuttavia che essa, sostanzialmente a causa delle sue oscillazioni sempre più fitte all'avvicinarsi della x allo 0 da destra in vicinanza di $x = 0$, non è derivabile per tale valore della variabile indipendente. Infatti non esiste finito

$$\lim_{h\to 0}\,\frac{h\,\sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\,\sin\left(\frac{1}{h}\right)\ .$$

I20 b.02 Il primo dei due esempi precedenti suggerisce di introdurre per le funzioni reali due costruzioni locali meno esigenti della derivazione, la derivata a sinistra e la derivata a destra. Si tratta di di due costruzioni unilaterali che costituiscono una coppia duale-LR che consentono di ampliare la derivazione definita in a03, manovra che può vedersi come costruzione bilaterale.

Ciascuna delle due derivate unilaterali si trova che è effettuabile per un insieme di funzioni-RtR più esteso dell'insieme delle funzioni-RtR derivabili; esse in effetti si rivelano utili per taluni problemi nei quali giocano coppie della forma $\langle$ funzione, ascissa del suo dominio $\rangle$ per le quali non è possibile costruire una derivata bilaterale.

Consideriamo la funzione $f(x)$ definita in un intervallo chiuso $\mathbf{[}x', x''\mathbf{]}$. Si dice **derivata a sinistra** della funzione $f(x)$ nel punto $x_0 \in \mathbf{(}x', x''\mathbf{]}$ il seguente limite, se esiste finito o infinito:

$$(D_{x-} f(x))_{x=x_0} \;:=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x-) \;:=\; f'_-(x_0) \;:=\; \lim_{x\to x_0-}\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ . \tag{1}$$

Si dice **derivata a destra** della funzione $f(x)$ nel punto $x_0 \in [x', x'')$ il seguente limite, se esiste finito o infinito:

$$(D_{x+}f(x))_{x=x_0} \;:=\; \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x+) \;:=\; f'_+(x_0) \;:=\; \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ . \tag{2}$$

Chiaramente una funzione è derivabile in un punto x_0 di un intervallo aperto che fa parte del suo dominio sse essa possiede sia la derivata a sinistra che la derivata a destra in tale punto e si tratta di due numeri reali che coincidono.

I20 b.03 **Esempio** La funzione $|x|$ per $x = 0$ non possiede derivata, ma possiede derivata a sinistra uguale a -1 e derivata a destra uguale a 1.

La funzione $\sqrt{|x|}$, che è continua sull'intero $\mathbb{R}$, in $x = 0$ possiede derivata a sinistra uguale a $-\infty$, possiede derivata a destra uguale a $+\infty$ ed è continua.

Consideriamo la funzione $\mathrm{sign}(x) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{se } x<0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ 1 & \text{se } x>0 \end{cases}$.

Essa per ogni $x \neq 0$ ha derivata nulla, mentre per l'ascissa $x = 0$ abbiamo

$\lim\limits_{h\to 0\mp} \dfrac{\mathrm{sign}(h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0\mp} \dfrac{\mp 1}{h} = +\infty.$

Si tratta quindi di una funzione che per $x = 0$ non è continua e possiede derivata sinistra e destra coincidenti ma non finite.

Considerazioni analoghe si svolgono per la funzione $\mathsf{e}^{\frac{1}{x}}$.

I20 b.04 Denotiamo con FDrvbl_{x_0} l'insieme delle funzioni reali che in x_0 sono derivabili (e quindi sono continue in x_0 e sono definite in un intervallo aperto J contenente x_0).

Denotiamo invece con FDrvbl_I l'insieme delle funzioni-RtR il cui dominio contiene l'intervallo aperto I e che in tale insieme sono derivabili (con derivata finita).

Con queste notazioni si possono ottenere varie formule insiemistiche significative e concise utili alla comprensione dei comportamenti delle funzioni-RtR.
In particolare, dando a x_0 ed I i significati assegnati nella presente sezione, si hanno le formule che seguono.

$$\mathsf{FDrvbl}_I \;=\; \cup_{x_0\in I}\mathsf{FDrvbl}_{x_0}\text{, dalle definizioni .}$$

$$\mathsf{FDrvbl}_{x_0} \subset \mathsf{FunCnt}_{x_0} \quad \text{e} \quad \mathsf{FDrvbl}_I \subset \mathsf{FunCnt}_I\text{, da b01 .}$$

I20 b.05 Consideriamo una funzione reale derivabile in un intervallo reale $\boldsymbol{I}$, $f(x) \in \mathsf{FDrvbl}_{\boldsymbol{I}}$ e la sua derivata $\mathrm{D}_x f(x) \;=\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) \;=\; f'(x)$.
Spesso risulta utile sapere se questa funzione è a sua volta derivabile in $\boldsymbol{I}$ o in una sua parte; in caso affermativo per la sua derivata si usano scritture come le seguenti:

$$\mathrm{D}_x{}^{\circ 2} f(x) \;:=\; \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) \;:=\; f''(x) \;:=\; f^{(2)}(x) \;:=\; \mathrm{D}_x(\mathrm{D}_x f(x)) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\ .$$

Questa nuova funzione si dice **derivata seconda** della $f(x)$.
Per la sua importanza rinviamo in particolare a I23.

L'operazione di derivazione sopra una funzione e sulle sue derivate può essere tentata e se possibile effettuata quante volte si vuole.

Sia dunque $n \in \mathbb{P}$ ed $f(x)$ sia una funzione derivabile $n-1$ volte in x_0. Si dice **derivata n-esima** o **derivata di ordine** n della funzione $f(x)$, se esiste, la derivata della funzione derivata $(n-1)$-esima

$$\mathrm{D}_x{}^{\circ n} f(x) \;:=\; \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}} f(x) \;:=\; f^{(n)}(x) \;:=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{\,n-1}}\right) f(x) \;=\; \mathrm{D}_x\left(\mathrm{D}_x{}^{\circ n-1} f(x)\right) \;.$$

In queste considerazioni è comodo trattare la funzione di partenza come la derivata di ordine 0 di se stessa: $\mathrm{D}_x{}^{\circ 0}\, f(x) \;:=\; f(x)$.

In genere le notazioni della forma $\mathrm{D}_x{}^{\circ n} f(x)$ che significativamente fanno riferimento alla potenza di composizione di ordine n della trasformazione D_x si semplificano con le corrispondenti $\mathrm{D}_x{}^{n} f(x)$ che fanno riferimento ad una non meglio identificata potenza n-esima.

Consideriamo il polinomio $P(x) \;=\; a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$. Per le sue deivate troviamo

$$\mathrm{D}_x P(x) \;=\; 4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + 2\,c\,x + d \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^2 P(x) \;=\; 12\,a\,x^2 + 6\,b\,x + 2\,c \quad,$$
$$\mathrm{D}_x{}^3 P(x) \;=\; 24\,a\,x + 6\,b \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^4 P(x) \;=\; 24], a \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^5 P(x) \;=\; 0 \;.$$

Si dimostrano facilmente le seguenti formule:

$$\mathrm{D}_x{}^2 \sin x = -\sin x \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^3 \sin x = -\cos x \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^4 \sin x = \sin x \;.$$
$$\mathrm{D}_x{}^2 \cos x = -\cos x \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^3 \cos x = \sin x \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^4 \cos x = \cos x \;.$$

I20 b.06 Le sequenze delle derivate degli ordini successivi di talune funzioni sono controllabili con formule abbastanza semplici che si rivelano utili per la formulazione di vari problemi computazionali.

Evidentemente si trova

$$\forall h \in \mathbb{P}\;,\; a \in \mathbb{R} \;:\; \mathrm{D}_x{}^h \mathsf{e}^x = \mathsf{e}^x \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^h \mathsf{e}^{-x} = (-1)^h\, \mathsf{e}^{-x} \quad,\quad \mathrm{D}_x{}^h \mathsf{e}^{ax} = a^h\, \mathsf{e}^{ax} \;. \tag{1}$$

Le precedenti espressioni per le derivate successive di $\sin x$ mostrano una periodicità di periodo 4 esprimibile come

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} \quad :\quad & \mathrm{D}_x{}^{4k} \sin x = \sin x \;\;,\;\; \mathrm{D}_x{}^{4k+1} \sin x = \cos x \;\;, \\ & \mathrm{D}_x{}^{4k+2} \sin x = -\sin x \;\;,\;\; \mathrm{D}_x{}^{4k+3} \sin x = -\cos x. \end{aligned} \tag{2}$$

Le corrispondenti espressioni per le derivate successive di $\cos x$ si ricavano dalla seguente espressione per lo "sfasamento" tra derivate

$$\forall h \in \mathbb{N} \;:\; \mathrm{D}_x{}^h \cos x \;=\; \mathrm{D}_x{}^{h+1} \sin x \;. \tag{3}$$

Si possono controllare anche le successive derivate delle potenze della variabile:

$$\forall n \in \mathbb{N}, h = 0, 1, ..., n \;:\; \mathrm{D}_x{}^h x^n \;=\; n(n-1)\cdots(n-h+1)\, x^{n-h} \;=\; n^{\underline{h}}\, x^{n-h} \;; \tag{4}$$

qui si è utilizzato il fattoriale decrescente [B13e07] definito da $n^{\underline{h}} \;:=\; n(n-1)\cdots(n-h+1)$.

I20 c. derivate di combinazioni lineari, prodotti e quozienti di funzioni

I20 c.01 **(1) Prop.**: Se $f \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e $c \in \mathbb{R}$, allora $c \cdot f \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[c \cdot f(x)] \;=\; c \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]$.

Dim.: Dimostriamo quanto enunciato limitatamente a un qualsiasi $x_0 \in I$.
Per questo basta considerare il rapporto incrementale della $c \cdot f$ relativo a x_0 e x

$$\frac{(c \cdot f)(x) - (c \cdot f)(x_0)}{x - x_0} \;=\; c\,\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e passare al limite per $x \to x_0$ ∎

(2) Prop.: Se $f, g \in \mathsf{FDrvbl}_I$, allora $f + g \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) + g(x)] \;=\; \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)] + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)]$.

Dim.: Dimostriamo per ogni $x_0 \in I$ che $f, g \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0} \implies f(x) + g(x) \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0}$ e $\mathrm{D}_x[f(x) + g(x)]_{x=x_0} = \mathrm{D}_x[f(x)]_{x=x_0} + \mathrm{D}_x[g(x)]_{x=x_0}$.
Per questo basta considerare il rapporto incrementale della $(f + g)(x)$ relativo a x_0 e x

$$\frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

e passare al limite per $x \to x_0$ ∎

I20 c.02 **Prop.** Sia $d \in \mathbb{N}$. Se per $i = 1, 2, ..., d$ si ha $f_i(x) \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e $c_1, c_2, ..., c_d \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot f_i(x) \in \mathsf{FDrvbl}_I \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{i=1}^{d} c_i \cdot f_i(x)\right]_{x=x_0} \;=\; \sum_{i=1}^{d} c_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f_i(x)] \;.$$

Dim.: Basta combinare e reiterare le due precedenti proposizioni ∎

A questo punto si può affermare che per ogni intervallo reale I l'insieme FDrvbl_I costituisce uno spazio vettoriale sul campo dei i numeri reali [B45]; inoltre la derivazione si può considerare un operatore lineare sul suddetto spazio.

I20 c.03 Consideriamo il polinomio

$$P(x) \;=\; a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots + a_1\,x + a_0 \;. \tag{1}$$

Le proprietà precedenti implicano la sua derivabilità in tutto il suo dominio $\mathbb{R}$ e consentono di determinare la sua derivata per ogni x reale.
Chiaramente la sua derivata prima è il polinomio di grado $n - 1$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x) \;=\; n\,a_n\,x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\,x^{n-2} + \cdots + a_1 \;. \tag{2}$$

Espressioni simili forniscono le derivate successive del polinomio; evidentemente per $k = 1, 2, ..., n$ la derivata k-esima di $P(x)$ è un polinomio di grado $n - k$ e la n-esima derivata è la costante $n!\,a_n$. Inoltre tutte le derivate successive sono date dal polinomio nullo.

I20 c.04 L'insieme delle funzioni-RtR definite in un intervallo reale aperto I, $\lceil\, I \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$, munito delle operazioni di somma e moltiplicazione per un numero reale costituisce uno spazio vettoriale lineare: infatti tutte le combinazioni lineari di tali funzioni sono funzioni dello stesso tipo.

Per la stessa ragione il sottoinsieme proprio delle funzioni-RtR continue in I, che denotiamo con $\mathsf{FunRtRCnt}_I$, costituisce un sottospazio del precedente; inoltre l'insieme FDrvbl_I delle funzioni derivabili in I è sottoinsieme proprio di FunCnt_I e costituisce un sottospazio proprio di quello che ha come terreno $\lceil\, I \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$.

La derivazione costituisce un operatore lineare in questo spazio. Va osservato che la derivata di una funzione derivabile può non essere derivabile; possiamo solo dire che la derivazione è una trasformazione lineare da FDrvbl_I in $\lceil\, I \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$.

Per ogni $n \in \mathbb{P}$ denotiamo con $\mathsf{FDrvbl}_I^{(\circ n)}$ l'insieme delle funzioni derivabili n volte nell'intervallo I. Chiaramente ciascuno di questi insiemi costituisce uno spazio vettoriale; inoltre se h e k sono interi positivi con $h < k$ lo spazio costituito $\mathsf{FDrvbl}_I^{(\circ k)}$ è sottospazio dello spazio costituito da $\mathsf{FDrvbl}_I^{(\circ h)}$.

Quando disporremo della nozione di integrale sarà facile dimostrare che queste inclusioni sono forti, cioè sarà facile trovare, per ogni $n \in \mathbb{P}$, funzioni derivabili n volte ma non $n+1$ volte.

I20 c.05 Prop. Se $f, g \in \mathsf{FDrvbl}_I$, allora $f \cdot g \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)\cdot g(x)] \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)]\cdot g(x) + f(x)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[g(x)] \;.$$

Dim.: Basta dimostrare per ogni $x_0 \in I$ e che $f, g \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0} \implies f \cdot g \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0}$ e

$$\mathrm{D}_x[f(x)\cdot g(x)]_{x=x_0} \;=\; \mathrm{D}_x[f(x)]_{x=x_0}\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot \mathrm{D}_x[g(x)]_{x=x_0} \;.$$

Per questo basta considerare il rapporto incrementale della funzione $f \cdot g$ relativo a x_0 e x

$$\begin{aligned}\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x) + f(x_0)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0}\\ &= g(x)\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\end{aligned}$$

e passare al limite per $x \to x_0$ ∎

I20 c.06 Prop. Se $g \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e $g(x)$ non si annulla in I , allora $\dfrac{1}{g(x)} \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e

$$\forall x \in I \;:\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{g(x)}\right] \;=\; -\frac{g'(x)}{g^2(x)} \;.$$

Dim.: Dimostriamo per ogni $x_0 \in I$ che $g \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0}$, $g(x_0) \neq 0 \implies \dfrac{1}{g} \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0}$ e

$$\mathrm{D}_x\left[\frac{1}{g(x)}\right]_{x=x_0} \;=\; -\frac{\mathrm{D}_x[g(x)]_{x=x_0}}{g^2(x_0)} \;.$$

Per questo basta considerare il rapporto incrementale della $\dfrac{1}{g(x)}$ relativo a x_0 e x

$$\frac{1/g(x) - 1/g(x_0)}{x - x_0} \;=\; \frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)\,g(x_0)\,(x-x_0)} \;=\; \frac{-1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

e passare al limite per $x \to x_0$ ∎

I20 c.07 Alcuni esempi

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} \;=\; -\frac{1}{x^2} \qquad , \qquad \forall m \in \mathbb{P} \;:\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-m} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^m} \;=\; -\frac{m\,x^{m-1}}{x^{2\,m}} \;=\; -m\,x^{-m-1} \;.$$

Quindi per ogni $x \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

(1) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n \;=\; n\,x^{n-1} \;.$$

Dopo aver osservato che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathsf{e}^{-x} \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\mathsf{e}^x} \;=\; -\frac{\mathrm{D}_x\,(\mathsf{e}^x)}{(\mathsf{e}^x)^2} \;=\; -\mathsf{e}^{-x} \;,$$

si ottiene

$$\forall n \in \mathbb{P} \;:\; \mathrm{D}_x{}^{\circ n}\, \mathsf{e}^{-x} \;=\; (-1)^n\, \mathsf{e}^{-x} \quad . \tag{2}$$

Per i quozioni di due funzioni trigonometriche si trova

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\cos x}\right] \;=\; \frac{\sin x}{\cos^2 x} \;=\; \frac{\tan x}{\cos x} \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \csc x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{\sin x}\right] \;=\; -\frac{\cos x}{\sin^2 x} \;=\; \frac{\cot x}{\sin x} \,. \tag{3}$$

Venendo alle funzioni razionali, consideriamo n e m interi positivi qualsiasi; si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(x+a)^n} \;=\; -\frac{n}{(x+a)^{n+1}} \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(x+a)^n(x+b)^m} \;=\; -\frac{(n+m)x + n\,b + m\,a}{(x+a)^{n+1}(x+b)^{m+1}} \quad . \tag{4}$$

I20 c.08 **(1) Prop.**: Se $f, g \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e $g(x)$ non si annulla in I , allora $\dfrac{f(x)}{g(x)} \in \mathsf{FDrvbl}_I$ e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \;=\; \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)} \,.$$

Dim.: Dimostriamo per ogni $x_0 \in I$ che $f, g \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0} \implies \dfrac{f}{g} \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0}$ e

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\right)_{x=x_0} \;=\; \mathrm{D}_x[f(x)]_{x=x_0} \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \mathrm{D}_x\left[\frac{1}{g(x)}\right]_{x=x_0} \,.$$

La prima affermazione discende dalle corrispondenti affermazioni in c05 e c06.
Per la seconda formula si ottiene

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]\right)_{x=x_0} \;=\; \lfloor\!\!\lfloor \,:c.05\, \rfloor\!\!\rfloor \;=\; f'(x_0)\cdot\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{g(x)}\right]\right)_{x=x_0}$$

$$=\; \lfloor\!\!\lfloor\, \mathsf{c06} \,\rfloor\!\!\rfloor \;=\; \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{g^2(x)} \quad \blacksquare$$

I20 c.09 Alcuni esempi:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] \;=\; \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \;=\; 1 + \tan^2 x \;=\; \frac{1}{\cos^2 x} \,; \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right] \;=\; \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \;=\; -1 - \cot^2 x \;=\; -\frac{1}{\sin^2 x} \,. \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\sinh x}{\cosh x}\right] \;=\; \frac{\sinh' x\cdot\cosh x - \cosh' x\cdot\sinh x}{\cosh^2 x} \;=\; \frac{1}{\cosh^2 x} \;=\; 1 - \tanh^2 x \,. \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x+a}{x+b}\right] \;=\; \frac{a+b}{(x+b)^2} \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x^2+b\,x+c}{x^2+B\,x+C}\right] \;=\; \frac{(B-b)x^2 + (C-c)x + b - B}{(x^2+Bx+C)^2} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x+a}{x+b}\right]^2 \;=\; \frac{2(x+a)(b-a)}{(x+b)^3} \qquad , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x+a}{x+b}\right]^n \;=\; \frac{n(x+a)^{n-1}(b-a)}{(x+b)^{n+1}} \,. \tag{5}$$

Si osserva che la derivazione porta da una funzione razionale ad un'altra funzione della stessa classe che in genere è definita nello stesso dominio o in un suo sovrainsieme, ma che viene fornita da un'espressione più complessa di quella di partenza.
Questo è in contrasto con quello che accade per la derivazione delle funzioni razionali intere: la derivata di un polinomio è infatti un polinomio di grado inferiore.

I20 d. derivate di funzioni composte e di funzioni inverse

I20 d.01 Prop. Consideriamo la funzione continua $f \in \lceil\, \boldsymbol{I} \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$, l'intervallo $\boldsymbol{J} \supseteq \mathsf{cod}(f)$, la funzione continua $g \in \lceil\, \boldsymbol{J} \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$ e la funzione composta $h := f \circ_{lr} g \in \lceil\, \boldsymbol{I} \longmapsto g(\mathsf{cod}(f)) \,\rceil$ avente come sovradominio $\mathsf{dom}(f)$ e come codominio un sottoinsieme di $\mathsf{cod}(g)$.

$$f \in \mathsf{FDrvbl}_{\boldsymbol{I}}\,,\ g \in \mathsf{FDrvbl}_{\boldsymbol{J}} \implies h \in \mathsf{FDrvbl}_{\boldsymbol{I}} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[g(f(x))\right] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g(y)\right]_{y=f(x)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\ .$$

I20 d.02 Consideriamo tre numeri reali $A > 0$, $\omega \neq 0$ e δ e la funzione $h(x) := A\cos(\omega\, x + \delta)$; essa si può considerare ottenuta per composizione della $y = f(x) := \omega\, x + \delta \in \lceil\, \mathbb{R} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd \mathbb{R} \,\rceil$ con la $w = g(y) := A\cos y \in \lceil\, \mathbb{R} \lhd\!\longrightarrow\!\rhd [-A, A] \,\rceil$: $h(x) = g(f(x)) = (g \circ_{rl} f)(x) = x_{\text{¡}}(f \circ_{lr} gf)$.

Per la derivata della h abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[A\cos(\omega\, x + \delta)\right] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(A\cos y)\right]_{y=\omega\, x+\delta} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\omega\, x+\delta) = -A\sin(\omega x+\delta)\,\omega = -A\,\omega\,\sin(\omega\, x+\delta)\ .$$

Per la sua derivata seconda

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^{\,2}}\left[A\cos(\omega\, x + \delta)\right] = -A^2\,\omega^2\cos(\omega\, x + \delta) = \quad .$$

Più in generale per ogni $k \in \mathbb{P}$ e $n := 4\,k$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}}\left[A\cos(\omega\, x + \delta)\right] = A^n\,\omega^n\cos(\omega\, x + \delta)\ .$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{\,n+1}\left[A\cos(\omega\, x + \delta)\right]} = -A^{n+1}\,\omega^{n+1}\sin(\omega\, x + \delta)\ .$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+2}}{\mathrm{d}x^{\,n+2}\left[A\cos(\omega\, x + \delta)\right]} = -A^{n+2}\,\omega^{n+2}\cos(\omega\, x + \delta)\ .$$

$$\frac{\mathrm{d}^{n+3}}{\mathrm{d}x^{\,n+3}\left[A\cos(\omega\, x + \delta)\right]} = A^{n+3}\,\omega^{n+3}\sin(\omega\, x + \delta)\ .$$

I20 d.03 Prop. Consideriamo la funzione $f \in \lceil\, \boldsymbol{I} \longmapsto \mathbb{R} \,\rceil$ strettamente monotona, cioè crescente o decrescente (in senso stretto); scriviamo inoltre $\boldsymbol{C} := \mathsf{cod}(f) = f(\boldsymbol{I})$ per l'insieme dominio della funzione inversa $f^{-\mathbf{1}}$.

Conveniamo che x sia variabile in $\boldsymbol{I}$ e y in $\boldsymbol{C}$, in modo che si possa scrivere $y = f(x)$ per $x \in \boldsymbol{I}$ e $x = f^{-\mathbf{1}}(y)$ per $y \in \boldsymbol{C}$.

$$f \in \mathsf{FDrvbl}_{\boldsymbol{I}} \implies f^{-\mathbf{1}} \in \mathsf{FDrvbl}_{\boldsymbol{C}} \quad \text{e} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-\mathbf{1}}(y) = \frac{1}{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right]_{x=f^{-\mathbf{1}}(y)}}\ .$$

Dim.: Sia x_0 una qualsiasi ascissa di $\boldsymbol{I}$, scriviamo $y_0 := f(x_0)$ e osserviamo che $f^{-\mathbf{1}}(y_0) = x_0$, che la $f(x)$ è continua in $\boldsymbol{I}$, che la $f^{-\mathbf{1}}(y)$ è continua in C e di conseguenza $x \to x_0 \iff y \to y_0$.

Dimostriamo che $f \in \mathsf{FDrvbl}_{x_0} \implies f^{-\mathbf{1}} \in \mathsf{FDrvbl}_{y_0}$ e $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-\mathbf{1}}(y)\right]_{y=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)_{x=x_0}}$.

Consideriamo il rapporto incrementale della $f^{-\mathbf{1}}$ relativo a y_0 e y

$$\frac{f^{-\mathbf{1}}(y) - f^{-\mathbf{1}}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}\ ;$$

l'enunciato della proposizione riguardante x_0 e y_0 si ottiene passando al limite per $y \to y_0$, ed equivalentemente per $x \to x_0$ ∎

I20 d.04 Consideriamo un intero $n = 2, 3, 4, ...$ e la funzione $f(x) := x^{\frac{1}{n}}$ del genere $\lceil \mathbb{R}_{0+} \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \mathbb{R}_{0+} \rceil$; la sua funzione inversa è $x = (f^{-1})(y) = y^n$ e quindi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\mathrm{D}_y y^n} = \frac{1}{n\, y^{n-1}} = \frac{y}{n\, y^n} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{n\, x} = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} \,. \tag{1}$$

Sia $b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$; in conseguenza di I17a05 si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} b^x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\mathsf{e}^{x \ln b}\right] = \mathsf{e}^{x \ln b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln b) = \mathsf{e}^{x \ln b} \ln b = \ln b\, b^x \,. \tag{2}$$

Sia $r \in \mathbb{R}$, consideriamo per $x \in \mathbb{R}_+$ la funzione $h(x) := x^r$ ed esaminiamo la sua derivata

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\mathsf{e}^{r \ln x}\right] = \mathsf{e}^{r \ln x} \cdot r \frac{1}{x} = r\, x^{r-1} \,. \tag{3}$$

Questa formula generalizza quella riguardante le derivate delle potenze intere naturali della variabile indipendente.

I20 d.05 Consideriamo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\mathrm{D}_y \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,. \tag{1}$$

Per la penultima uguaglianza si tiene conto che $\arcsin x$ nell'intervallo scelto come suo dominio è funzione crescente.

Consideriamo $x \in [0, \pi]$ e ricordiamo che in tale intervallo $\arccos x$ è funzione decrescente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arccos x = \frac{1}{\mathrm{D}_y \cos y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \,. \tag{2}$$

Consideriamo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e teniamo conto che per questi valori dell'ascissa la funzione $\tan x$ è crescente.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{\mathrm{D}_y \tan y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} \,. \tag{3}$$

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php