1

Capitolo I17
continuità delle funzioni reali

Contenuti delle sezioni

a. funzioni-RtR continue p. 2
b. funzioni-RtR continue in insiemi chiusi e limitati p. 9
c. funzioni-RtR monotone continue e funzioni inverse p. 14
d. funzioni-RtR di funzioni-RtR e loro continuità p. 17

19 pagine

I17 0.01 In questo capitolo, proseguendo lo studio delle proprietà delle funzioni di una variabile reale a valori reali, si introduce la loro continuità, proprietà che rende le funzioni più maneggevoli, meglio conoscibili e più utili per molteplici applicazioni.

I17 a. funzioni-RtR continue

I17 a.01 Consideriamo una quaterna-fDAx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0\rangle$ con $f(x)$ funzione-RtR, $D := \mathsf{dom}(f)$, $\mathsf{A} := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f))$ e $x_0 \in \mathsf{dom}(f) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f))$.

La funzione f si dice **funzione continua nel punto** x_0 sse $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ esiste ed è uguale al valore che la funzione assume in x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; f(x_0)\ . \tag{1}$$

Più dettagliatamente la $f(x)$ si dice continua in x_0 sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap \mathsf{dom}(f) \;:\; |f(x)-f(x_0)| < \epsilon\ . \tag{2}$$

In parole povere si può dire che una funzione è continua per una data ascissa x_0 sse in corrispondenza delle ascisse prossime a essa assume valori poco diversi da $f(x_0)$.

Osserviamo esplicitamente che il limite che garantisce la continuità deve essere finito, come ogni valore assunto da una funzione-RtR in corrispondenza di un'ascissa del suo dominio.

Si conviene che una funzione-RtR sia continua per ogni ascissa isolata del suo dominio: questo si giustifica con il fatto che per ogni punto isolato del dominio della funzione la condizione (2) non viene contraddetta da alcun x, ovvero si può considerare soddisfatta in quanto nihil obstat, ovvero si usa dire che risulta una **condizione soddisfatta per evanescenza**.

Osserviamo che la definizione precedente può riguardare funzioni con dominio discreto, in particolare funzioni di $\lceil\, \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\,\rceil$. Non può invece riguardare successioni del genere $\lceil\, \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}\,\rceil$ il cui dominio è privo di punti di accumulazione al finito.

Inoltre va segnalato subito che presenta interesse soprattutto la continuità delle funzioni $f(x)$ in punti x_0 interni a intervalli contenuti nel loro dominio D.

I17 a.02 Della definizione di continuità di una funzione in un punto del suo dominio si possono dare altre formulazioni equivalenti.

Presentiamone alcune attraverso enunciati di equivalenza, cominciando da una cosiddetta **caratterizzazione ϵ/δ della continuità**.

(1) Prop.: La funzione-RtR f è continua nel punto $x_0 \in \mathsf{dom}(f) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f))$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$: $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$.

Dim.: Questa caratterizzazione riesprime la definizione in a01 utilizzando direttamente le disuguaglianze alla base della nozione di limite ∎

È evidente che questa proprietà è soddisfatta in quanto nihil obstat da ogni x_0 punto isolato di $\mathsf{dom}(f)$.

Un'altra caratterizzazione si esprime mediante intorni, cioè mediante insiemi selezionabili con ampia arbitrarietà i quali conducono naturalmente alla possibilità di caratterizzazioni topologiche, di portata molto generale e di elevata versatilità.

(2) Prop.: La funzione-RtR f è continua nel punto $x_0 \in \mathsf{dom}(f) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f))$ sse, posto $y_0 := f(x_0)$, a ogni intorno di y_0 , V_{y_0} si può associare un intorno di x_0 , U_{x_0} tale che

$$\forall x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\} \;:\; |f(x)-y_0| < \epsilon\ .$$

Dim.: L'equivalenza con la caratterizzazione (1) discende dal fatto che la disponibilità di intervalli del dominio e del codominio equivale alla disponibilità di intorni dei punti del dominio e del codominio ∎

I17 a.03 Un'altra caratterizzazione si serve una successione di ascisse $\langle n \in \mathbb{N} :| x_{[n]} \rangle$ che converge al punto x_0 nel quale si vuole garantire la continuità, successione che può essere invocata per prospettare un potenziale procedimento di verifica mediante l'avvicinarsi di valori della funzione al valore limite $f(x_0)$.

(1) Prop.: La funzione-RtR f è continua nel punto x_0 sse posto $y_0 := f(x_0)$, per qualunque successione $\langle k \in \mathbb{N} :| x_{[k]} \rangle$ di punti di $D := \mathsf{dom}(f)$ tali che $\lim_{k \to +\infty} x_{[k]} = x_0$ si ha $\lim_{k \to +\infty} f\left(x_{[k]}\right) = f(x_0)$.

Dim.: Si osserva facilmente l'equivalenza con la caratterizzazione in a02(2) considerando che la tendenza delle ascisse a x_0 e la conseguente tendenza dei valori ad $f(x_0)$ equivalgono ai comportamenti espressi mediante le disuguaglianze per la δ e la ϵ ∎

Questa caratterizzazione induce ad affermare che, come per le successioni, se di una funzione continua in x_0 si riduce il dominio ma si mantiene l'appartenenza di x_0 al dominio stesso, la continuità in x_0 si conserva. Infatti con una tale riduzione le condizioni per la continuità nei punti del nuovo dominio rimangono valide.

Si osserva che anche la restrizione del dominio della $f(x)$ al solo $\{x_0\}$ mantiene la continuità, in accordo con la convenzione segnalata alla fine di a01.
Viceversa è evidente che vi sono funzioni continue in un punto che in conseguenza di certi ampliamenti del dominio perdono la continuità.
Per esempio la funzione $\lceil\!\lceil\, x \in \mathbb{Q} \mapsto x \,\rceil\!\rceil$ è continua per ogni $x_0 \in \mathbb{Q}$, mentre la sua estensione con la funzione $\lceil\!\lceil\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mapsto x + 1 \,\rceil\!\rceil$ non è continua per alcuna delle sue ascisse.

I17 a.04 Si osserva in particolare che se una funzione $f(x)$ continua in x_0 ivi assume un valore $f(x_0) \neq 0$, allora esiste un intervallo contenente x_0 nel quale essa assume valori dello stesso segno di $f(x_0)$.

La **continuità di una funzione** $f(x)$ in un punto x_0 va considerata una proprietà locale, in quanto collega una sua proprietà puntuale, il valore $f(x_0)$, con i valori che essa assume in un intorno di x_0. In effetti se di una funzione si alterano i valori ed anche il dominio al di fuori di un certo intervallo comprendente un punto di continuità, la continuità di questo punto non viene meno.

La continuità in x_0 della $f(x)$ costituisce un elemento a supporto di una sua regolarità negli intorni del valore x_0.
In effetti vedremo che la continuità tendenzialmente rende le funzioni più trattabili e più utilizzabili per molteplici applicazioni.

Vedremo anche che quando si studia una funzione-RtR $f(x)$ è spesso utile saper riconoscere la proprietà puntuale di continuità in particolari punti del suo dominio. Più estesamente può essere utile riconoscere la proprietà locale di continuità in un dato sottoinsieme del suo dominio $\mathsf{dom}(f)$ e la proprietà globale di continuità in tutti i punti del suo dominio.

I17 a.05 Dalla definizione segue immediatamente che sono continue in ogni x_0 reale le funzioni costanti $\overline{y}^{\text{cnst}}$ e la funzione $y = x$.
Più in generale sono continue per ogni $x \in \mathbb{R}$ le funzioni polinomiali in una variabile $P(x)$, grazie a quanto mostrato in I16a03.

Similmente risultano continue su tutto $\mathbb{R}$ funzioni come quelle di tipo esponenziale b^x per ogni b reale positivo e le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$.

Si ha inoltre che, grazie a quanto mostrato in I16a10, ogni funzione razionale è continua in ogni intervallo di $\mathbb{R}$ nei quali essa assume valori finiti, cioè in ogni intervallo reale che esclude i punti nei quali si annulla il denominatore di una sua espressione ridotta.

I17 a.06 Una funzione $d(x)$ che non è continua in un punto $\overline{x}$ che appartiene al suo dominio D e che è punto di accumulazione di D si dice **funzione discontinua nel punto** $\overline{x}$.
Questo valore x_0 dell'ascissa si chiama **ascissa di discontinuità** della funzione.

Vediamo alcuni esempi di punti di discontinuità.
La funzione $d_1(x)$ uguale a $\dfrac{1}{x}$ per $x \in \mathbb{R}_{nz}$ e uguale a un qualche determinato $Y \in \mathbb{R}$ per $x = 0$, è discontinua per tale ascissa; infatti $\lim\limits_{x\to 0\pm} d_1(x) = \pm\infty \neq d_1(0) = Y$.
La funzione segno $\mathrm{sign}(x) := \left[\!\left[x \in \mathbb{R}_- \right]\!\right] - 1 \left[\!\left[\cup \langle 0,0\rangle \cup \right]\!\right] x \in \mathbb{R}_+ \left[\!\left[\right]\!\right] + 1$ è discontinua per $x = 0$; infatti $\lim\limits_{x\to 0\pm} \mathrm{sign}(x) = \pm 1 \neq \mathrm{sign}(0) = 0$.
La funzione mantissa $\mathrm{mant}(x) := x - \lfloor x \rfloor$ è discontinua per ogni $x = n \in \mathbb{Z}$; infatti $\lim\limits_{x\to n-} \mathrm{mant}(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to n+} \mathrm{mant}(x) = 0$.
Similmente componendo e trasformando opportunemente le funzioni pavimento $\lfloor x \rfloor$ e soffitto $\lceil x \rceil$ si possono ottenere facilmente funzioni discontinue in un insieme di ascisse in biiezione con $\mathbb{Z}$.

I17 a.07 La continuità è una proprietà che si mantiene quando si effettuano varie composizioni di funzioni continue. Precisiamo questa considerazione attraverso generalizzazioni di corrispondenti enunciati riguardanti le successioni viste in I16f.

Procediamo facendo riferimento a due funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ continue in un punto x_0 appartenente all'insieme $\mathsf{dom}(f) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \mathsf{dom}(g) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$.

(1) Prop.: Se la funzione $|f(x)|$ è continua in un punto $x_0 \in \mathsf{dom}(f) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f))$, allora:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |f(x_0)| \ .$$

Dim.: È conseguenza del fatto che il limite in un punto del valore assoluto di una funzione dotata di limite in quel punto è il valore assoluto del limite della funzione [I16b02] ∎

(2) Prop.: Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in un punto $x_0 \in \mathsf{dom}(f) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \mathsf{dom}(g) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$, la loro funzione somma $f(x) + g(x)$ è funzione continua in x_0 e:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0) \ .$$

Dim.: Simile a quella in I16f04 ∎

(3) Prop.: Ogni funzione proporzionale a una funzione continua in x_0 è funzione continua in tale punto x_0 e:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \lim_{x\to x_0} [\alpha f(x)] = \alpha\, f(x_0) \ .$$

Dim.: Simile a quella in I16f05(1) ∎

In particolare abbiamo:

$$\lim_{x\to x_0} [-f(x)] = -f(x_0) \ ; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = f(x_0) - g(x_0) \ . \tag{5}$$

(6) Coroll.: Ogni combinazione lineare di funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue nel punto x_0 è funzione continua in tale punto e si ha:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \ \lim_{x \to x_0} [\alpha f(x) + \beta g(x)] \ = \ \alpha f(x_0) + \beta g(x_0) \ .$$

Dim.: La proprietà discende direttamente da (1) e (2) [v.a I16f06(2)] ∎

Si può quindi affermare che l'insieme delle funzioni-RtR definite in un intorno di un'ascissa x_0 e ivi continue costituiscono uno spazio vettoriale [B45d, G40a, T16a] e che il passaggio al limite per $x \to x_0$ è un operatore lineare su tale spazio.

I17 a.08 **(1) Prop.**: Il prodotto delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue nell'ascissa x_0 è funzione continua in x_0 e:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) \ = \ f(x_0) \cdot g(x_0) \ .$$

Dim.: La proprietà discende dal fatto che il limite in un punto del prodotto di due funzioni dotate di limite in quel punto è il prodotto dei due limiti delle funzioni [I16f07(2)] ∎

(2) Prop.: Se $g(x)$ è funzione continua nell'ascissa x_0 e $g(x_0) \neq 0$, allora la sua funzione reciproca $\dfrac{1}{g(x)}$ è continua in x_0 e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \ = \ \frac{1}{g(x_0)} \ .$$

Dim.: Simile a quella in I16f05(1) ∎

(8) Coroll.: Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni-RtR continue in x_0 e $g(x_0) \neq 0$, il quoziente delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ è funzione continua in x_0 e:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \ = \ \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \ .$$

Dim.: La proprietà discende dal fatto che il limite in un punto del quoziente di due funzioni dotate di limite in quel punto, la seconda con limite diverso da zero, è il quoziente dei due limiti delle funzioni [v.a. I16b03] ∎

I17 a.09 Riprendiamo ora le funzioni massimo e minimo introdotte in I15g01.

Prop. Consideriamo $f(x)$ e $g(x)$ funzioni-RtR con l'intersezione dei domini non vuota $D := \mathsf{dom}(f) \cap \mathsf{dom}(g)$ le quali sono continue in $x_0 \in D$; in D sono continue anche le corrispondenti funzioni massimo e minimo e si ha

$$\lim_{x \to x_0} \max(f, g) \ = \ \max [f(x_0), g(x_0)] \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to x_0} \min(f, g) \ = \ \min [f(x_0), g(x_0)] \ .$$

Dim.: Se $f(x_0) < g(x_0)$ si trova un intervallo contenente x_0 nel quale si può sostituire la $\max(f, g)$ con la $g(x)$ e la $\min(f, g)$ con la $f(x)$; se viceversa $f(x_0) > g(x_0)$ si trova un intervallo contenente x_0 nel quale si può sostituire la $\max(f, g)$ con la $f(x)$ e la $\min(f, g)$ con la $g(x)$. In entrambi i casi le uguaglianze enunciate risultano dimostrate.

Se invece $f(x_0) = g(x_0)$, dato un qualsiasi (idip) $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si trova un $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \ : \ f(x_0) - \epsilon < f(x), g(x) < f(x_0) + \epsilon \ .$$

Queste disuguaglianze implicano

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ \lim_{x \to x_0} g(x) \ = \ f(x_0) \ = \ g(x_0)$$

e quindi le uguaglianze enunciate ∎

Evidentemente le due precedenti uguaglianze sono collegate dalla trasformazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$, ossia costituiscono una coppia duale-UD.

I17 a.10 Le proprietà precedenti consentono di ampliare significativamente la cerchia delle funzioni continue in domini chiaramente individuabili e in particolare in ampi intervalli e in collezioni di intervalli.

(1) Prop.: Le funzioni $\sin x$e $\cos x$ sono funzioni continue per ogni valore reale della variabile x.

Dim.: La funzione seno è continua per $x = 0$ ∎

(2) Prop.: Le funzioni $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ e $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ sono funzioni continue per ogni valore della variabile x a esclusione dei valori per i quali $\cos x = 0$; in altri termini sono funzioni continue per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \in \mathbb{Z} :| \ (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Dim.: Discende dalla continuità di $\sin x$e di $\cos x$, da a04(3) e da a04(4) ∎

(3) Prop.: Le funzioni $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ e $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ sono funzioni continue per ogni valore della variabile x a esclusione dei valori per i quali $\sin x = 0$; in altri termini sono funzioni continue per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \in \mathbb{Z} :| \ k\,\pi\}$.

Dim.: Discende dalla continuità di $\sin x$e di $\cos x$, da a04(3) e da a04(4) ∎

I17 a.11 **(1) Prop.**: Per ogni p reale la funzione potenza x^p è continua per ogni x reale positivo ∎

Dim.: Si ottiene applicando un numero opportuno doi volte a08(1) ∎

(2) Prop.: Per ogni b reale positivo la funzione di tipo esponenziale b^x è continua per ogni x reale ∎

(6) Prop.: Per ogni b reale positivo la funzione di tipo logaritmico $\log_b x$ è continua per ogni x reale positivo ∎

I17 a.12 È utile una classificazione dei punti di discontinuità delle funzioni-RtR. Qui ne diamo una per funzioni definite in un intervallo reale facendo riferimento a due caratterizzazioni meno esigenti della continuità definita in a01, cioè alle due proprietà meno stringenti, alla continuità da sinistra e alla continuità da destra.

Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo della forma $\mathbf{(}x_1, \overline{x}\mathbf{]}$ si dice **funzione continua da sinistra** in $\overline{x}$ sse $\lim\limits_{x \to \overline{x}-} = f(\overline{x})$.
Più dettagliatamente la $f(x)$ si dice continua da sinistra in $\overline{x}$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in \mathbf{(}\overline{x} - \delta, \overline{x}\mathbf{]} \ : \ |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon \ .$$

Una funzione $f(x)$ definita in un intervallo della forma $\mathbf{[}\overline{x}, x_2\mathbf{)}$ si dice **funzione continua da destra** in $\overline{x}$ sse $\lim\limits_{x \to \overline{x}+} = f(\overline{x})$.
Più esplicitamente la $f(x)$ si dice continua da destra in $\overline{x}$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in \mathbf{[}\overline{x}, \overline{x} + \delta\mathbf{)} : \ |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon \ .$$

Per esempio la funzione $\mathrm{mant}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ è continua da destra ma noncontinua da sinistra.

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $\mathbf{(}x_1, x_2\mathbf{)}$ e un punto $\overline{x}$ interno a tale intervallo. Evidentemente essa è continua in $\overline{x}$ sse in tale punto essa è continua da sinistra e continua da destra.

Spesso sono utili le due seguenti scritture per limiti, risp., da sinistra e da destra

$$f(\overline{x}-) \;:=\; \lim_{x\to\overline{x}-} f(x) \qquad \text{e} \qquad f(\overline{x}+) \;:=\; \lim_{x\to\overline{x}+} f(x)\ ,$$

ammesso naturalmente che i limiti invocati abbiano senso ed esistano.

Si usa il termine **continuità unilaterale di una funzione** in un punto per enunciare che essa nel dato punto è continua solo da sinistra oppure è continua solo da destra. Per enunciare la continuità *tout court* di una funzione in un punto, in contrapposizione alla continuità unilaterale, si usa il termine **continuità bilaterale di una funzione**.

I17 a.13 Per la classificazione dei punti di discontinuità $\overline{x}$ di una funzione-RtR $f(x)$ si devono prendere in considerazione tre elementi: l'eventuale valore della funzione $f(\overline{x})$, il suo eventuale limite da sinistra $f(\overline{x}-)$ e il suo eventuale limite da destra $f(\overline{x}+)$.

Diciamo che la funzione $f(x)$ ha una **discontinuità eliminabile in un punto**, $\overline{x}$ sse $f(\overline{x}-) = f(\overline{x}+) \neq f(\overline{x})$; il termine serve a enunciare che si può modificare la funzione nel solo punto $\overline{x}$ per avere una funzione "poco diversa" che è continua in $\overline{x}$ e che si ritiene più adatta ad essere utilizzata profichamente.

Diciamo che la funzione $f(x)$ ha in $\overline{x}$ una **discontinuità di prima specie** quando, quale che sia la situazione in $\overline{x}$, i due limiti $f(\overline{x}-)$ e $f(\overline{x}+)$ esistono finiti ma sono diversi.
La differenza $f(\overline{x}+) - f(\overline{x}-)$ si dice **salto della funzione nel punto di discontinuità** $\overline{x}$.

Per esempio i numeri interi sono punti di discontinuità di prima specie per le funzioni $\mathrm{mant}(x)$, $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ e per tutte queste ascisse presentano un salto uguale a -1.
Lo zero è punto di discontinuità di prima specie per la funzione $\mathrm{sign}(x)$ e qui essa presenta un salto uguale a 2.

Diciamo che la funzione $f(x)$ ha in $\overline{x}$ una **discontinuità di seconda specie** quando, quale che sia la situazione in $\overline{x}$, non esiste finito almeno uno dei due limiti $f(\overline{x}-)$ e $f(\overline{x}+)$.
La funzione data per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\overline{x}\}$ dall'espressione $\dfrac{1}{x-\overline{x}}$ per $x = \overline{x}$ presenta una discontinuità di seconda specie, in quanto $\lim\limits_{x\to\overline{x}\pm} \dfrac{1}{x-\overline{x}} = \pm\infty$.
La funzione $\sin\dfrac{1}{x}$ presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità di seconda specie, in quanto questa funzione in tale punto non possiede né il limite da sinistra né il limite da destra.
I valori reali $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di discontinuità di seconda specie per la funzione $\tan x$.
La funzione $\mathsf{e}^{\frac{1}{x}}$ presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità di seconda specie, in quanto in tale punto ha come limite da sinistra $0+$, mentre ha come limite da destra $+\infty$.

I17 a.14 Per lo studio delle funzioni reali sono importanti elementi dirimenti alcune proprietà delle funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato e ivi continue.

Diciamo esplicitamente che per una **funzione continua in un intervallo chiuso e limitato** $D = [a,b]$ intendiamo una funzione continua in ogni punto interno ad D, continua da destra nell'estremità inferiore a dell'intervallo e continua da sinistra nell'estremità superiore b.

Similmente si definiscono le funzioni continue in un intervallo illimitato della forma $[a, +\infty)$ o della forma $(-\infty, b]$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

I17 a.15 Spesso si rivela opportuno fare riferimento agli insiemi delle funzioni reali continue in un dato punto $\overline{x}$, continue in un certo intervallo I o continue in un altro determinato sottoinsieme $C \subset \mathbb{R}$.

Denotiamo, risp., con $\mathsf{FunRtRCnt}_{\overline{x}}$, con $\mathsf{FunRtRCnt}_I$ e con $\mathsf{FunRtRCnt}_C$ questi insiemi di funzioni.

Per quanto dimostrato in a03(1) gli insiemi $\mathsf{FunRtRCnt}_{\overline{x}}$ costituiscono degli spazi vettoriali sopra il campo $\mathbb{R}_{Fld}$.

Altri spazi vettoriali sopra il campo dei reali hanno come terreno l'insieme di funzioni $\mathsf{FunRtRCnt}_I$ o l'insieme $\mathsf{FunRtRCnt}_C$. Questi spazi si possono ottenere come intersezioni degli spazi delle funzioni continue in un punto.

$$\mathsf{FunRtRCnt}_I = \bigcap_{\overline{x}\in I} \mathsf{FunRtRCnt}_{\overline{x}} \quad , \quad \mathsf{FunRtRCnt}_C = \bigcap_{\overline{x}\in C} \mathsf{FunRtRCnt}_{\overline{x}} \ .$$

I17 b. funzioni-RtR continue in insiemi chiusi e limitati

I17 b.01 Affrontiamo ora un complesso di proprietà che riguardano funzioni-RtR, ma che possono essere formulate anche per funzioni molto generali riguardanti spazi cartesiani (vettoriali) di dimensione finita, spazi metrici e anche spazi topologici.

Prima di trattare queste proprietà di funzioni è opportuno dimostrare un lemma riguardante solo degli insiemi di punti dovuto ad Heinrich Heine , Salvatore Pincherle ed Emile Borel; anche questa proprietà qui viene esaminata solo nella sua versione riguardante intervalli reali.

Preliminarmente richiamiamo e introduciamo un certo numero di definizioni e notazioni.

Consideriamo un insieme S costituente un sottoinsieme di un ambiente U sulla cui natura non poniamo alcuna restrizione.
Si dice **copertura dell'insieme** una collezione $\mathbf{C}$ di sottoinsiemi di U tale che per ogni $x \in S$ esiste almeno un $C_x \in \mathbf{C}$ contenente x. Con $\mathbf{Cover}(S)$ denotiamo la collezione delle coperture dell'insieme S.

Si possono avere coperture finite, numerabili o con cardinale più che numerabile.

Per le collezioni delle coperture dell'insieme S denoteremo con $\mathbf{Cover}_m(S)$ la sottocollezione delle coperture costituite da un numero $m \in \mathbb{P}$ di insiemi, con $\mathbf{Cover}_{\mathbb{P}}(S)$ la collezione delle coperture finite di S; più in generale e per ogni $i \in \mathbb{N}$ denotiamo con $\mathbf{Cover}_{\aleph_i}(S)$ la collezione delle coperture di S aventi cardinale $\aleph_i$.

Dato un intervallo reale chiuso di ampiezza positiva $\boldsymbol{I} = \mathbf{[}$a,b $\mathbf{]}$, denotata la sua ampiezza con $w := b-a$, la sequenza $\left\langle a, a+\dfrac{w}{m}, a+2\dfrac{w}{m}, ..., a+(m-1)\dfrac{w}{m}, b \right\rangle$ si dice **decomposizione uniforme dell'intervallo $\boldsymbol{I}$** costituita da $m \in \mathbb{P}$ sottointervalli, o equivalentemente costituita da sottointervalli di ampiezza $\dfrac{w}{m}$. Tale decomposizione la denotiamo con $\mathsf{dcmpu}_{[m]}(\boldsymbol{I})$ o con $\mathsf{dcmpu}_{(w/m)}(\boldsymbol{I})$.

Ricordiamo anche che per qualsiasi σ che indentifica una sequenza o una successione di date entità denotiamo con $\mathsf{SetY}(\sigma)$ l'insieme delle entità che sono componenti di σ, ovvero $\mathsf{cod}(\sigma)$.

In particolare σ può individuare la sequenza o la successione crescente dei punti che determinano una decomposizione Δ di un intervallo di reali. In tale caso ci riserviamo di denotare l'insieme $\mathsf{cod}(\sigma)$ con $\mathsf{SetY}(\sigma)$ o anche con $\mathsf{SetY}(\Delta)$.

Ricordiamo anche che se $c \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}_+$, denotiamo con $\mathsf{ball}(c, \delta)$ l'intervallo aperto $\mathbf{(}c-\delta, c+\delta\mathbf{)}$, intervallo avente come punto medio c e come raggio δ (ovvero avente diametro 2δ).

Ricordiamo che per ogni funzione-RtR $f(x)$ e ogni $E \subseteq \mathsf{dom}(f)$ denotiamo con $\boldsymbol{oscl}(f, E)$ l'oscillazione della f in E.
Conveniamo di attribuire un'oscillazione a ogni funzione-RtR e ad ogni sottoinsieme del suo dominio. Possiamo quindi avere funzioni con oscillazione illimitata, ovvero consentiamo di trattare oscillazioni che possono appartenere a $\mathbb{R}_{0+} \dot\cup \{+\infty\}$.

Vogliamo infine osservare che spesso si incontrano definizioni di funzioni-RtR consistenti nella richiesta della soddisfazione di proprietà tali che la individuazione del loro dominio e del loro codominio possono costituire problemi impegnativi.

I17 b.02 Lemma: (**lemma sulla copertura finita di Heine-Pincherle-Borel**) versione monodimensionale
Dato un intervallo reale chiuso e limitato $\boldsymbol{I} = \mathbf{[}$a,b $\mathbf{]}$, posto $w := b-a > 0$ e data una qualsiasi copertura $\mathbf{C}$ di $\boldsymbol{I}$ costituita da intervalli aperti, da tale $\mathbf{C}$ si può estrarre una copertura finita di $\boldsymbol{I}$.

Dim.: Consideriamo la successione di decomposizioni uniformi di $\boldsymbol{I}$ costituite, risp., da 2, 4, ... ,2^p, ... sottointervalli, e la equivalente successione di sequenze di ascisse

$$\langle p = 1, 2, 3, \ldots :| \ \mathsf{dcmpu}_{[2^p]}(\boldsymbol{I})\rangle = \langle p = 1, 2, 3, \ldots :| \ \mathsf{dcmpu}_{(w/2^p)}(\boldsymbol{I})\rangle \ .$$

Per ogni $p \in \mathbb{P}$ denotiamo con $SID_{[2^p]}(\boldsymbol{I})$ l'insieme dei 2^p sottointervalli chiusi, ciascuno di ampiezza $\dfrac{w}{2^p}$, individuati da $\mathsf{dcmpu}_{[2^p]}(\boldsymbol{I})$.

Per la relazione tra la successione dei $SID_{2^p}(\boldsymbol{I})$ e la copertura data $\mathbf{C}$ dimostriamo la seguente proprietà.

(a) Esiste un intero p elevato tanto che ogni sottointervallo in $SID_{[2^p]}(\boldsymbol{I})$ è contenuto in un intervallo C della copertura $\mathbf{C}$.

La dimostrazione si conduce per assurdo trovando che la negazione della (a) è insostenibile.

Negare la (a) equivale ad affermare che per ogni $p \in \mathbb{P}$ esiste un sottointervallo chiuso $K_p \in SID_{[2^p]}(\boldsymbol{I})$ non interamente contenuto in alcun intervallo aperto $C \in \mathbf{C}$. Per ogni p denotiamo con m_p il punto medio di K_p e osserviamo che la successione $\mathsf{m} := \langle p \in \mathbb{P} :| \ m_p\rangle$ è una successione di reali tutti differenti, dato che m_p è il punto medio di $\mathsf{SetY}(\mathsf{dcmpu}_{[2^{p+1}]}(\boldsymbol{I}))$ necessariamente diverso dal punto medio di $\mathsf{SetY}(\mathsf{dcmpu}_{[2^p]}(\boldsymbol{I}))$.

Introduciamo l'insieme $\mathsf{m} := \{p \in \mathbb{P} :| \ m_p\}$ e osserviamo che questo insieme è contenuto, strettamente, nell'intervallo chiuso $\boldsymbol{I}$.

Per il principio di Bolzano-Weierstrass esiste almeno un punto di accumulazione per questo insieme mSs e noi lo denotiamo con $\overline{m}$.

Per l'ipotesi (a) che intendiamo confermare $\overline{m}$ appartiene a un intervallo $^{\searrow} C_{\overline{m}} \in \mathbf{C}$; denotiamo allora con δ la minima distanza tra $\overline{m}$ e le estremità di $C_{\overline{m}}$.

Dato che $\lim\limits_{p\to+\infty} m_p = \overline{m}$, esiste $\overline{p} \in \mathbb{P}$ grande quanto basta perché sia verificata la disuguaglianza $|m_{\overline{p}} - \overline{m}| < \dfrac{\delta}{2}$, e quindi che sia $\dfrac{w}{2^{\overline{p}}} < \dfrac{\delta}{2}$; per questa basta avere $2^{\overline{p}} > \dfrac{2w}{\delta}$, ossia $\overline{p} > \log_2\left(\dfrac{2\,w}{\delta}\right)$.

Per tale $\overline{p}$ si ha $|m_{\overline{p}} - \overline{m}| + \dfrac{w}{2^{\overline{p}}} < \delta$ e questa disuguaglianza garantisce che il sottointervallo chiuso $K_{\overline{p}}$ di ampiezza $\dfrac{w}{2^{\overline{p}}}$ è interamente contenuto in $C_{\overline{m}}$, fatto che contraddice la negazione della (a), ovvero che dimostra la (a).

In conclusione per un opportuno $\overline{p} \in \mathbb{P}$ tutti i $2^{\overline{p}}$ sottointervalli di $\mathcal{K}_{\overline{p}}$ di $SID_{[2^{\overline{p}}]}(\boldsymbol{I})$ sono contenuti in al più $2^{\overline{p}}$ intervalli aperti facenti parte della $\mathbf{C}$ e questi individuano una copertura finita dell'intervallo $\boldsymbol{I}$ ∎

I17 b.03 Teorema Ogni funzione reale continua in un intervallo chiuso e limitato è limitata.

Dim.: Consideriamo ancora $\boldsymbol{I} = [\mathrm{a,b}]$, la sua ampiezza $w := b - a$, la funzione $f(x) \in \mathsf{FunCnt}(\boldsymbol{I})$ e una qualsiasi ascissa $x_0 \in \boldsymbol{I}$.

Da $\forall x_0 \in \boldsymbol{I} \ : \ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ segue che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta = \delta(\epsilon, x_0) \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in \boldsymbol{I} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \ : \ f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon \ . \tag{1}$$

Questa disuguaglianza dice che esiste una copertura $\mathbf{C}$ di $\boldsymbol{I}$ costituita da intervalli aperti (esprimibile come $(x_0 - \delta(\epsilon, x_0), x_0 + \delta(\epsilon, x_0))$) in ciascuno dei quali la $f(x)$ è limitata (ha oscillazione inferiore a 2ϵ).

Il lemma di Heine-Pincherle-Borel implica la possibilità di individuare una copertura di $\boldsymbol{I}$ costituita da una collezione finita di tali intervalli; dato che in ciascuno di questi intervalli l'oscillazione della funzione è limitata, risulta finita l'oscillazione $\boldsymbol{oscl}(f, \boldsymbol{I})$ ∎

I17 b.04 Teorema (**teorema di Cantor sulla continuità uniforme, caso monodimensionale**) Ancora consideriamo un intervallo chiuso limitato $\boldsymbol{I} = \mathbf{[}\mathrm{a,b}\,\mathbf{]}$ e poniamo $w := b - a$; sia inoltre $f \in \mathsf{FunRtRCnt}(\boldsymbol{I})$.
Scelto $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che $\forall d \in \boldsymbol{I} \ : \ \boldsymbol{oscl}(f, \boldsymbol{I} \cap \mathsf{ball}(d, \delta)) \leq \epsilon$.

Dim.: Quanto dimostrato in b03(1) si può riscrivere

$$\forall\, \frac{\epsilon}{4} \in \mathbb{R}_+ \quad : \quad \mathbb{R}_+ \ni \sigma = \sigma\left(\frac{\epsilon}{4}\right) \quad \P \quad \left\lceil \forall r \in \boldsymbol{I} \ : \ \boldsymbol{oscl}\big(f, \boldsymbol{I} \cap \mathsf{ball}(r, \sigma)\big) \ \leq \ 2\,\frac{\epsilon}{4} \ = \ \frac{\epsilon}{2} \right\rceil \ .$$

Il lemma di Heine-Pincherle-Borel garantisce che $\mathbb{P} \ni p = p(\sigma)$ (idsg, sufficientemente grande) tale che la decomposizione uniforme $\mathsf{dcmpu}_{[2^p]}(\boldsymbol{I})$ riguarda 2^p sottointervalli chiusi E_i, ciascuno dei quali ha ampiezza $\delta := \dfrac{w}{2^p}$ ed è contenuto in qualche intervallo aperto F facente parte di una collezione finita F costituita da intervalli della forma $\mathsf{ball}(d, \sigma)$.
Per ciascuno degli $F \in \mathsf{F}$ si ha $\boldsymbol{oscl}(f, \boldsymbol{I} \cap F)) \ < \ \dfrac{\epsilon}{2}$.
Consideriamo ora per ogni $x \in \boldsymbol{I}$ l'intervallo aperto $B_x := \mathsf{ball}\,(x, \delta)$; esso o coincide con un sottointervallo E_i privato degli estremi o, più in generale, è contenuto nell'unione $E_i \cup E_{i+1}$ di due sottointervalli adiacenti.
In ogni caso B_x si può considerare contenuto nell'unione di due intervalli di F aventi punti in comune (che potrebbero coincidere). Denotiamo con $\overline{x}$ uno dei punti in comune e con x' e x'' due arbitrari punti di B_x.
Per essi si trova

$$|f(x'') - f(x')| \leq |f(x'') - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

Di conseguenza $\boldsymbol{oscl}(f, \boldsymbol{I} \cap \mathsf{ball}(d, \delta)) \leq \epsilon$ ∎

I17 b.05 Una funzione-RtR $f(x)$ si dice **funzione-RtR uniformemente continua** in un sottoinsieme chiuso K contenuto nel suo dominio sse

$$\forall x \in K \ , \ \epsilon \in \mathbb{R}_+ \quad : \quad \mathbb{R}_+ \ni \delta = \delta(\epsilon) \quad \P \quad \left\lceil \forall x' \in \big(x - \delta, x + \delta\big) \cap K \ : \ |f(x') - f(x)| < \epsilon \right\rceil \ .$$

Il teorema b04 equivale quindi ad affermare che le funzioni continue in un intervallo chiuso limitato sono uniformemente continue.

In particolare per ogni intervallo chiuso $\boldsymbol{I} = \mathbf{[}\mathrm{a,b}\,\mathbf{]}$ la funzione continua b^x con $b \in \mathbb{R}_+$ è uniformemente continua. Se $b > 1$ si può anche affermare che la b^x è uniformemente continua in ogni intervallo limitato superiormente $\mathbf{(}-\infty, b\mathbf{]}$.

I17 b.06 Teorema (**teorema di Weierstrass sui valori minimo e massimo**) Una funzione-RtR continua in un intervallo chiuso e limitato K ivi assume un valore minimo e un valore massimo, ossia ivi ammette un minimo e un massimo.

Dim.: Scriviamo $m := \inf\limits_{x \in K} f(x)$ e $M := \sup\limits_{x \in K} f(x)$ e cominciamo con il dimostrare che

$$(a) \qquad K \ni x_m \quad \text{tale che} \quad f(x_m) = m \ .$$

Procediamo per assurdo assumendo che

$$\forall x \in K \ : \ m < f(x) \ .$$

In tal caso in K si può considerare la funzione

$$g(x) \ := \ \frac{1}{f(x) - m} \ .$$

la quale in tutto K è continua e positiva; essa quindi, grazie a b03, è limitata e, se $M_g(>0)$ denota il suo estremo superiore, si ha

$$\frac{1}{f(x)-m} \le M_g \quad \text{ovvero} \quad f(x) \ge m + \frac{1}{M_g} \ .$$

Di conseguenza per l'estremo inferiore della $f(x)$ deve essere $m + \dfrac{1}{Mg} \ge m$, relazione assurda.

Dunque K contiene almeno un x_m per il quale $f(x_m) = m$.

Modificando le argomentazioni precedenti con la applicazione della trasformazione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$ si giunge a garantire l'esistenza del minimo della funzione opposta $-f(x)$ e da questo segue che $K \ni x_M$ per il quale $f(x_M) = M$, affermazione duale-UD della precedente ∎

I17 b.07 Teorema (**teorema di Weierstrass sui valori intermedi**)
Una funzione reale continua sull'intervallo chiuso e limitato $\boldsymbol{I} = [a,b]$ assume ogni valore appartenente all'intervallo chiuso avente come estremi il suo valore minimo e il suo valore massimo.

Dim.: Poniamo $m := \min\limits_{x\in \boldsymbol{I}} f(x)$ e $M := \max\limits_{x\in \boldsymbol{I}} f(x)$ e siano x_m tale che $f(x_m) = m$ e x_M tale che $f(x_M) = M$. Si tratta di dimostrare per un qualsiasi elemento $\overline{y}$ di (m, M) che $J \ni \overline{x}$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{y}$ (le definizioni di m e M consentono di comprendee l'intero $[m, M]$).

Per semplificare le notazioni supponiamo sia $m < \overline{y} = 0 < M$; in caso contrario si passerebbe a considerare la funzione traslata $f(x) - \overline{y}$ e, dimostrato l'asserto per questa, si potrebbe ottenerlo per la $f(x)$ originaria ottenibile mediante una semplice traslazione in verticale.

Procediamo per assurdo assumendo che non esista alcun punto di $\boldsymbol{I}$ nel quale la $f(x)$ si annulla. Dovendo essere $\forall x \in \boldsymbol{I} : \ |f(x)| > 0$, si può considerare la funzione $g(x) := \dfrac{1}{|f(x)|}$ definita e continua in tutto $\boldsymbol{I}$; posto $M_g := \sup\limits_{x\in \boldsymbol{I}} g(x)$, in tutto J deve essere $|f(x)| \ge \dfrac{1}{M_g} > 0$.
Ma in J vi sono punti nei quali la $f(x)$ assume valori negativi, dato che in un x_m assume il valore $m < 0$ e punti nei quali assume valori positivi (dato che $f(x_M) = M$.
Scelto un qualsiasi $\epsilon \in (0, M_g)$, in forza di b04 si può individuare una decomposizione uniforme di J $\mathsf{dcmpu}_{[2^p]}$ tale che in ciascuno dei sottointervalli chiusi associati H_i sia $\boldsymbol{oscl}(f, H_i) < \epsilon$.
Se non vi fosse alcuno degli H_i nel quale la $f(x)$ assume sia valori positivi che negativi, per contiguità in tutti gli sottointervalli, cioè in tutto J, la $f(x)$ dovrebbe assumere lo stesso segno. Scriviamo dunque H_j un sottointervallo nel quale si trovano due ascisse x' e x'' tali che $f(x') < 0 < f(x'')$.
Si ha dunque $|f(x'') - f(x')| = f(x'') + |f(x')| < \epsilon < \dfrac{1}{M_g}$; e quindi $|f(x')| < \dfrac{1}{M_g} - f(x'') < 0$, disuguaglianza in contrasto con la $\forall x \in J \ : \ |f(x)| \ge \dfrac{1}{M_g}$ ∎

I17 b.08 Dal teorema precedente seguono altri enunciati interessanti riguardanti funzioni $f(x)$ continue in un intervallo chiuso $J = [a,b]$.

(1) Coroll.: Se la $f(x)$ in due punti di $\boldsymbol{I}$ assume i valori $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2) > y_1$, allora essa assume qualsiasi valore $\overline{y} \in (y_1, y_2)$.

Dim.: Infatti $\overline{y} \in \Big(\min\limits_{x\in J} f(x), \max\limits_{x\in J} f(x) \Big)$ ∎

(2) Coroll.: Se, in particolare la $f(x)$ in $\boldsymbol{I}$ assume valori di segno opposto, allora essa si annulla in almeno un punto di $\boldsymbol{I}$ ∎

(3) Coroll.: Denotiamo gli estremi della funzione $f(x)$ nell'intervallo $\boldsymbol{I}$, risp., con $m := \min_{x\in\boldsymbol{I}} f(x)$ e con $M := \max_{x\in\boldsymbol{I}} f(x)$. Se l'intervallo $[m, M]$ è contenuto in $\boldsymbol{I}$, cioè se $a \le m \le M \le b$, esiste almeno un $u \in [m, M]$ tale che $f(u) = u$, ovvero la trasformazione continua $\left\lceil\, x \in [\mathrm{a,b}\,] \mapsto f(x) \,\right\rceil$ ammette almeno un punto unito.

Dim.: Si considera la funzione $g(x) := f(x) - x$ e si osserva che essa è continua in $[m, M]$, che $g(m) = f(m) - m \ge 0$ e che $g(M) = f(M) - M \le 0$. Applicando a essa (2) si ricava la presenza di un suo zero $u \in [m, M]$ e questo è il punto unito richiesto ∎

Anche questo enunciato ha una raffigurazione piuttosto evidente.

Va anche segnalato che esso costituisce un caso particolare di un risultato della topologia di portata molto ampia noto come `teorema di Brouwer (wi)`.

I17 b.09 Il teorema b07 non si applica agli insiemi chiusi e limitati che non sono semplici intervalli. Per esempio non vale per la funzione identità x nel dominio chiuso e limitato $D := [0, 1] \dot\cup [2, 3]$: infatti essa in D non assume nessuno dei valori dell'intervallo $(1, 2)$. A questo dominio manca la proprietà della connessione, goduta dagli intervalli.

Una funzione-RtR $f(x)$ definita in un intervallo chiuso e limitato $[\mathrm{a,b}\,]$ si dice che possiede la **proprietà di Darboux** sse per qualsiasi sottointervallo proprio chiuso $[c, d]$ con $a \le c < d \le b$ essa assume qualunque valore compreso tra $f(c)$ e $f(d)$.

L'enunciato b08(1) equivale a dire che ogni $f(x)$ continua in $[\mathrm{a,b}\,]$ in tale intervallo gode della proprietà di Darboux.

Non è invece garantito che una funzione che gode della proprietà di Darboux in un intervallo chiuso sia ivi continua. Per esempio la funzione $\langle 0, 0\rangle \dot\cup \left\lceil\, x \in (0, 1] \mapsto \sin \dfrac{1}{x} \,\right\rceil$ gode la proprietà di Darboux in $[0, 1]$, ma presenta una discontinuità di seconda specie per $x = 0$.

Vedremo che la continuità è garantita per le funzioni che possiadono sia la proprietà di Darboux che la monotonia, non soddisfatta dalla funzione del precedente controesempio.

I17 c. funzioni-RtR monotone continue e funzioni inverse

I17 c.01 (1) Prop.: Consideriamo una funzione-RtR $f(x)$ nondecrescente sull'intervallo chiuso e limitato $\boldsymbol{I} = [\text{a,b}\,]$.
La funzione è continua su $\boldsymbol{I} \iff$ la funzione assume ogni valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.

Dim.: L'implicazione "$\Longrightarrow$" discende dal teorema b07 applicato a una funzione monotona.
Dimostriamo l'implicazione "$\Longleftarrow$" partendo dalla considerazione che per ogni $\overline{x} \in (\text{a,b}\,)$ accade che $f(a) \le f(\overline{x}) \le f(b)$.
Nel caso sia più specificamente $f(a) < f(\overline{x}) < f(b)$, consideriamo un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) che soddisfi le disuguaglianze $\epsilon < f(\overline{x}) - f(a)$ ed $\epsilon < f(b) - f(\overline{x})$; si ha quindi $f(a) < f(\overline{x}) - \epsilon < f(\overline{x}) + \epsilon < f(b)$.
Per ipotesi esistono in $(\text{a,b}\,)$ un reale $\overline{x}_-$ tale che $f(\overline{x}_-) = f(\overline{x}) - \epsilon$ e un reale e $\overline{x}_+$ tale che $f(\overline{x}_+) = f(\overline{x}) + \epsilon$.
Per la nondecrescenza della $f(x)$ valgono le disuguaglianze $a < \overline{x}_- < \overline{x} < \overline{x}_+ < b$ e le implicazioni

$$\forall x \in (\overline{x}_-, \overline{x}) \;:\; f(x) \in [f(\overline{x}) - \epsilon, f(\overline{x})] \quad , \quad \forall x \in (\overline{x}, \overline{x}_+) \;:\; f(x) \in [f(\overline{x}) - \epsilon, f(\overline{x})] \; .$$

Ne consegue l'implicazione

$$\forall x \in (\overline{x}_-, \overline{x}_+) \;:\; |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon \; ,$$

cioè la continuità della $f(x)$ in $\overline{x}$.
Nel caso sia $f(a) = f(\overline{x}) < f(b)$ rimane valida la deduzione precedente pur di assumere $\overline{x}_- = \overline{x}$ e nel caso sia $f(a) = f(\overline{x}) < f(b)$ rimane valida la deduzione precedente pur di assumere $\overline{x}_+ = \overline{x}$.
Nel caso sia $f(a) = f(b)$ la continuità discende banalmente dalla costanza della funzione ∎

Trasformandoo per dualità-UD la dimostrazione precedente, ovvero applicando (1) alla funzione $-f(x)$, si giunge all'enunciato che segue.

(2) Prop.: Consideriamo una funzione-RtR $f(x)$ noncrescente sull'intervallo chiuso e limitato $\boldsymbol{I} = [\text{a,b}\,]$.
La funzione è continua su $\boldsymbol{I} \iff$ la funzione assume ogni valore compreso tra $f(b)$ e $f(a)$ ∎

I17 c.02 Prop. Consideriamo una funzione $f(x)$ definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $\boldsymbol{I} = [\text{a,b}\,]$.
Se la funzione $f(x)$ è (strettamente) crescente in $\boldsymbol{I}$ essa assume una e una sola volta ogni valore appartenente a $f(\boldsymbol{I})$ l'insieme dei valori che essa assume in corrispondenza dei punti del dominio $\boldsymbol{I}$, insieme che costituisce l'intervallo chiuso $[f(a), f(b)]$.

Vale inoltre la proposizione duale-UD: se la funzione $f(x)$ è (strettamente) decrescente in $\boldsymbol{I}$ essa assume una e una sola volta ogni valore appartenente a $f(\boldsymbol{I})$, l'insieme dei valori che essa assume in corrispondenza dei punti del dominio $\boldsymbol{I}$, insieme che costituisce l'intervallo chiuso $[f(b), f(a)]$ ∎

La precedente $f(x)$ costituisce quindi una biiezione tra $\boldsymbol{I}$ e $f(\boldsymbol{I})$, cioè una funzione invertibile; quindi si può considerare la sua funzione inversa $f^{-1} \in \left\lceil\, f(\boldsymbol{I}) \lhd\!\!\longrightarrow\!\!\rhd \boldsymbol{I} \,\right\rceil$.
Anche questa funzione è monotona e continua su un intervallo chiuso, in questo caso $f(\boldsymbol{I})$.

Il passaggio alla funzione inversa si può considerare una costruzione che consente di individuare nuove funzioni. In effetti, come vedremo tra poco, molte funzioni speciali importanti vengono introdotte come inverse di funzioni note in precedenza, eventualmente dopo aver ridotto una di queste "funzioni dirette" a una sua restrizione significativa che sul nuovo dominio risulti monotona in senso stretto.

I17 c.03 Per trattare la funzione inversa di una data in precedenza con una notazione delle forma $y = f(x)$ si possono assumere due atteggiamenti.

Assumendo il primo, che può chiamarsi **rispetto dei significati delle variabili** x e y, si denota l'inversa di una $f(x)$ con una notazione delle forma $x = \phi(y)$.

Questo in particolare è l'atteggiamento che si assume in fisica nelle relazioni che riguardano variabili letterali introdotte con definizioni operative che attribuiscono loro precisi significati associati a osservazioni.
Per esempio, si può esprimere la legge di Ohm con l'uguaglianza $V = R \cdot i$ o con l'equivalente $i = \dfrac{V}{R}$; la prima può ricondursi alla notazione funzionale $V = f_R(i)$, la seconda alla notazione $i = \phi_R(V)$.

Assumendo il secondo atteggiamento, che può chiamarsi **rispetto dei ruoli contrapposti delle variabili** x e y, si presenta il grafico della funzione inversa sul piano cartesiano insieme al grafico della $y = f(x)$ caratterizzando i punti dell'insieme di coppie $\{v \in f(I) :| \langle v, f^{-1}(v)\rangle\}$ con una scrittura che segue lo schema $y = \phi(x)$.

Confrontando le due scritture emerge il rischio di ambiguità di una scrittura delle forma $y = f(x)$ non accompagnata da un adeguato inquadramento, ambiguità derivante dal carattere abbreviativo della stessa notazione della forma $y = f(x)$; questa notazione presenta il vantaggio della concisione, ma che può essere fonte di perplessità.

La funzione inversa di una data funzione monotona si può raffigurare sullo stesso piano nel quale si raffigura la funzione di partenza; il suo grafico si ottiene da quello della $f(x)$ riflettendolo rispetto alla diagonale principale del piano cartesiano, cioè la retta $y = x$.

I17 c.04 Presentiamo ora alcune funzioni inverse preferendo il "rispetto dei significati di x e y".

Prop. La funzione inversa della funzione di tipo esponenziale $y = b^x$ con $b \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, avente dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}_+$ è la funzione di tipo logaritmico $x = \log_b y$ con $y \in \mathbb{R}_+$.

La funzione inversa della funzione "parabolica" $y = x^2$ ristretta al dominio $\mathbb{R}_{0+}$ è la funzione radice quadrata $x = \sqrt{y}$, anch'essa avente come dominio l'insieme dei reali nonnegativi.

La funzione $y = \sin x$ per $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ è crescente e assume valori variabili con continuità da -1 a $+1$.
Si può quindi considerare la variabile x come funzione della y variabile in $\mathbf{[}-1, +1\mathbf{]}$; questa funzione si denota con $x = \arcsin y$ e andrebbe letta "arco compreso tra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$ il cui seno è y"; tuttavia in genere viene chiamata sbrigativamente "arcoseno di y".

La funzione $y = \cos x$ quando x varia tra 0 e π è decrescente e assume valori ch variano con continuità da 1 a -1.
Si può quindi considerare la variabile x come funzione della y fatta variare in $\mathbf{[}-1, +1\mathbf{]}$; questa funzione si denota con $x = \arccos y$ e andrebbe letta "arco compreso tra 0 e π il cui coseno è y", ma in genere viene in breve chiamata "arcocoseno di y".

La funzione $y = \tan x$ quando x varia in $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ è crescente e assume tutti i valori reali.
Si può quindi considerare la variabile x come funzione della y variabile in tutto $\mathbb{R}$; questa funzione si denota con $x = \arctan y$ e andrebbe letta "arco compreso tra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$ la cui tangente è y", ma in breve viene detta "arcotangente di y".

Similmente si possono introdurre le funzioni inverse delle altre funzioni circolari cotangente, secante e cosecante.

I17 c.05 Da molte relazioni concernenti le funzioni-RtR alle quali sono associate le funzioni inverse si possono ricavare piuttosto facilmente utili relazioni concernenti queste ultime funzioni-RtR.
Per esempio sono collegate in questo modo le uguaglianze

$$b^{x_1+x_2} \;=\; b^{x_1}\cdot b^{x_2} \qquad \text{e} \qquad \log_b(y_1\cdot y_2) \;=\; \log_b y_1 + \log_b y_2 \;.$$

Consideriamo l'espressione riguardante la funzione tangente

$$\tan(x_1+x_2) \;=\; \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1-\tan x_1\cdot\tan x_2} \;.$$

Limitandoci a x_1 e x_2 tali che $|x_1|, |x_2|, |x_1+x_2| < \dfrac{\pi}{2}$, utilizziamo la funzione arcotangente e ricaviamo

$$x_1+x_2 \;=\; \arctan\frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1-\tan x_1\cdot\tan x_2} \;;$$

posto $y_1 := \tan x_1$ e $y_2 := \tan x_2$ si hanno le uguaglianze $x_1 \;=\; \arctan y_1$ e $x_2 \;=\; \arctan y_2$ e da queste

$$\arctan y_1 + \arctan y_2 \;=\; \arctan\frac{y_1+y_2}{1-y_1\,y_2} \;.$$

Questa identità è detta **formula di addizione per l'arcotangente**.

I17 d. funzioni-RtR di funzioni-RtR e loro continuità

I17 d.01 Riprendiamo la nozione generale di composizione di due funzioni, ovvero la nozione di funzione di funzione, nel caso si tratti di funzioni-RtR continue.

Come vedremo con la composizione di funzioni continue specifiche si possono introdurre moltissime funzioni speciali che si rivelano strumenti computazionali utili sia nell'ambito della matematica che per le sue applicazioni.

Consideriamo la funzione-RtR $f(x)$ il cui dominio denotiamo con D e inoltre la funzione-RtR g definita e continua nel codominio della precedente $C := \mathsf{cod}(f)$.
Si introduce la funzione composta che denotiamo con l'espressione $f \circ_{lr} g$ o con l'equivalente $g \circ_{rl} f$, mediante la definizione

$$h \;:=\; f \circ_{lr} g \;=\; g \circ_{rl} f \;:=\; \lceil\, x \in D \mapsto f(x) \,\rceil \circ_{lr} \lceil\, y \in C \mapsto g(y) \,\rceil \;=\; \lceil\, x \in D \mapsto g(f(x)) \,\rceil \;.$$

In breve possiamo dire che si considerano le due funzioni $y = f(x)$ e $z = g(y)$ e la funzione ottenuta dalla loro composizione $z = h(x) = g(f(x)) = (g \circ_{rl} f)(x) = (f \circ_{lr} g)(x)$.

I17 d.02 L'uso dello stesso simbolo per la variabile dipendente della f e per la variabile indipendente della g corrisponde a un atteggiamento adottato di sovente nella fisica e nello studio degli automi.

In fisica x, y e z spesso rappresentano grandezze tali che si osserva la dipendenza della y dalla x secondo la legge espressa matematicamente da una funzione f e si osserva la dipendenza della z dalla y secondo la legge espressa da una funzione g; di conseguenza si riscontra la dipendenza della z dalla x secondo la legge espressa dalla funzione $f \circ_{lr} g$.

Nella teoria degli automi la x rappresenta un segnale che viene inviato al dispositivo f che lo trasforma nel segnale che rappresentiamo con y e questo viene inviato al dispositivo g che lo trasforma nel segnale che rappresentiamo con z.

L'evidenza di questi modelli giustifica l'uso delle notazioni abbreviate $y = f(x)$ e $z = g(y)$ per le due funzioni in gioco.

Inoltre, come vedremo, hanno interesse soprattutto le funzioni che sono fornite da espressioni nelle quali intervengono simboli di operazioni (simboli delle operazioni aritmetiche, potenze, radici, sommatorie, ...) e identificatori di funzioni speciali (sin, log, arctan, ...), sia gli uni che le altre dotate di rilevante significato fisico.

Le scritture generiche come $y = f(x)$ presentano il vantaggio di potersi associare facilmente a simboli come i comuni x e y disponibili per rappresentare grandezze fisiche e segnali di ogni genere.
Esse quindi rendono agevole contribuire alle molteplici espressioni che consentono di individuare numerose funzioni di elevato interesse applicativo.

I17 d.03 Consideriamo ora la funzione-RtR $f(x)$ definita e continua in un intervallo chiuso e limitato D; il suo codominio contiene il suo minimo m, il suo massimo M e ogni punto dell'intervallo chiuso $C := \mathbf{[}m, M\mathbf{]}$.
Consideriamo inoltre la funzione g definita e continua in $\mathbf{[}m, M\mathbf{]}$ e la funzione composta $h := f \circ_{lr} g$ che ad ogni $x \in D$ fa corrispondere $(f \circ_{lr} g)(x) \;:=\; g(f(x))$.

(1) Prop.: La funzione di funzione $g(f(x))$ è funzione continua in D.

Dim.: Prendiamo in considerazione un generico $x_0 \in D$, il valore che la f gli associa $y_0 := f(x_0)$ e il valore che la g associa a y_0, $z_0 := g(y_0) = h(x_0)$.

Grazie alla continuità della g, scelto un σ reale positivo, si trova un $\epsilon = \epsilon(\sigma)$ tale che per tutti i punti $y \in C$ per i quali sia $|y - y_0| < \epsilon$ si abbia $|g(y) - g(y_0)| < \sigma$.
Inoltre, grazie alla continuità della f, si trova un $\delta = dlt(\epsilon)$ (che può anche considerarsi funzione di σ) tale che per tutti i punti di $x \in D$ per i quali sia $|x - x_0| < \delta$ si abbia $|y - y_0| = |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ e di conseguenza si abbia $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \sigma$.

Questo equivale alla continuità della $h(x)$ nel punto x_0, elemento qualsiasi di D ∎

I17 d.04 Nelle definizioni precedenti si è considerata la composizione di funzioni definite in precisi intervalli chiusi.
A questi casi si riconducono anche funzioni come la tangente definite in intervalli aperti e funzioni definite in intervalli illimitati, come accade per i logaritmi nelle diverse basi positive diverse da 1.

Per la funzione tangente si possono considerare le sue riduzioni ad intervalli chiusi contenuti in un intervallo aperto come $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, intervalli della forma $\left(-\frac{\pi}{2} + \tau, \frac{\pi}{2} - \tau\right)$ con τ numero che può essere scelto piccolo a piacere.

Per la funzione logaritmo naturale, definita per ogni valore dell'argomento x reale positivo, si possono considerare intervalli chiusi della forma (τ, M) con τ tendenzialmente piccolo ed M tendenzialmente grande.

I17 d.05 La composizione di funzioni continue apre la possibilità di ampliare illimitatamente (o almeno in misura rilevante) la gamma delle funzioni continue.

Particolarmente importanti sono le funzioni continue fornite da espressioni nelle quali entrano le operazioni aritmetiche, le loro varianti e inverse e le funzioni cosiddette trascendenti elementari.

Come si è detto [B43b02], se una funzione viene data da una espressione, la determinazione del dominio di definizione può richiedere un esame impegnativo. Per la determinazione della funzione composta $g \circ f$ ottenuta da due funzioni f e g date da due espressioni che denotiamo, risp., con $F(x)$ e $G(y)$, oltre alla determinazione dei domini $\mathsf{dom}(f)$ e $\mathsf{dom}(g)$, si pone il problema della relazione tra $\mathsf{cod}(f)$ e $\mathsf{dom}(g)$.

Naturalmente ha senso considerare $g \circ_{lr} f$ solo se l'intersezione $I := \mathsf{cod}(f) \cap \mathsf{dom}(g)$ non è vuota: in tal caso $g \circ_{lr} f$ ha come dominio $\mathsf{dom}(f) \cap (f^{-1}(I))$ e come codominio $g(I)$.

Consideriamo alcuni esempi di queste funzioni composte.

Funzioni come $2^{\sin x}$ o $\mathsf{e}^{(x-m)^2}$ sono definite per ogni x reale, in quanto lo sono le funzioni componenti 2^y, $\sin x$, e^y e $(x-m)^2$.

La funzione $\log_b\left(\arctan(\sqrt{4-x^2}-1)\right)$ è definita solo se $4 - x^2 \geq 0$, cioè se $-2 \leq x \leq 2$; in tal caso è definita la sottoespressione radice quadrata ed è definita la sottoespressione arcotangente; questo tuttavia non basta, in quanto deve essere positivo l'argomento del logaritmo, cioè l'arcotangente deve avere argomento positivo, e questo richiede che sia $4 - x^2 > 1$, cioè $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$.

I17 d.06 L'espressione delle funzioni composte si può ottenere dalle espressioni delle funzioni componenti mediante il semplice meccanismo della sostituzione formale.

Per esempio se si compongono la $y = \pi x^2$ con la $z = \sin(y)$ si ottiene la funzione $z = \sin\left(\pi x^2\right)$.

Queste composizioni possono essere esaminate per tutte le espressioni nelle quali intervengono operazioni binarie come somme, differenze, prodotti, divisioni, scelte di massimo o minimo; infatti tali operazioni si possono considerare ottenute applicando funzioni a due o più argomenti come

$$\mathrm{sum}(a,b) = a + b \qquad \mathrm{dif}(a,b) = a - b \qquad \mathrm{prd}(a,b) = a \cdot b \qquad \mathrm{div}(a,b) = \frac{a}{b} \ldots.$$

Per esempio la funzione $y = \sin x + \cos x$ si può considerare ottenuta come funzione composta della $z = \mathrm{sum}(y_1 + y_2)$ con la $y_1 = \sin x$ o la $y_2 = \cos x$.

Testo fruibile in https://www.mi.imati.cnr.it/alberto/ e https://arm.mi.imati.cnr.it/Matexp/matexp_main.php