1

Capitolo I16
limiti delle funzioni reali

Contenuti delle sezioni

36 pagine

I160.01 Il processo di passaggio al limite si applica a una grande varietà di oggetti matematici, sostanzialmente varietà di funzioni.
Il passaggio al limite è stato incontrato in B35 per le successioni e per le serie di numeri razionali, in B36 trattando le funzioni a valori razionali, in B42 per una introduzione dei numeri reali e in B46 studiando gli spazi metrici.
Nel seguito avremo modo di incontrare i limiti di molti altri oggetti.

Qui, proseguendo lo studio delle funzioni-RtR, le funzioni di una variabile reale a valori reali, si introducono i vari tipi di passaggi al limite che si possono loro applicare ampliando le argomentazioni e i risultati ottenuti in B37.

Le pagine che seguono intendono esporre le costruzioni dei limiti in modo autonomo e completo e si propongono di presentare un buona corredo di esempi.

Inizialmente i limiti sono introdotti con le cosiddette disuguaglianze (ϵ, δ) riguardanti codominio e dominio della funzione distinguendo i vari casi dei valori delle variabili dipendente e indipendente al finito e/o all'infinito.

Successivamente si dà al complesso delle definizioni una veste più unitaria attraverso la nozione di intorno applicata alla retta reale completata o alla compattificata considerate come gli ambienti più opportuni per il dominio e per il codominio delle funzioni da esaminare.

In tal modo si riesce a ricondurre la nozione di limite di una successione di numeri reali a quella di limite per le funzioni-RtR e ci si avvicina alla più generale nozione di limite che viene formulata attraverso nozioni topologiche.

Nella parte finale si discute in quale misura la definizione astratta di limite può tradursi in procedimenti effettivi.

I16 a. limiti al finito delle funzioni reali

I16a.01 In questo capitolo faremo spesso riferimento alle liste che abbiamo chiamato **quaterne-fDAx** delle funzioni-RtR [I15a03], cioè a quaterne della forma $\langle f_\alpha(x), D_\alpha, \mathsf{A}_\alpha, x_0 \rangle$, dove $f_\alpha(x)$ è una funzione del genere $\lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ $D_\alpha := \mathsf{dom}(f_\alpha)$ è il suo dominio, $\mathsf{A}_\alpha := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f\alpha))$ è l'insieme dei suoi punti di accumulazione e x_0 ùno particolare di tali punti.

Per una funzione-RtR $f_\alpha(x)$ in genere sarà necessario distinguere se D_α e A_α sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, ossia se sono costituiti solo da numeri reali al finito, oppure se sono da collocare nell'insieme dei reali ampliato $\mathbb{R}_{\pm\mathfrak{i}} := \mathbb{R} \dot\cup \{-\infty, +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$ in modo da includere $+\infty$ e $-\infty$ tra i possibili elementi del dominio, del codominio e dei rispettivi insiemi dei punti di accumulazione, oppure se sono da vedere entro l'insieme dei reali compattificato. $\overline{\overline{\mathbb{R}}} := \mathbb{R} \dot\cup \{\infty\}$; ; qui compare l'entità ∞ che colloquialmente possiamo introdurre come "fusione di $-\infty$ e $+\infty$.

Seguendo il primo punto di vista, che associamo alla scrittura $\mathsf{POV}(\mathbb{R})$, consideriamo soltanto funzioni con dominio e codominio limitati e quindi ci serviremo solo di intervalli finiti, intervalli con entrambe le estremità in $\mathbb{R}$.

In generale se U denota un insieme illimitato, per segnalare che E è un suo sottoinsieme limitato scriviamo $E \subset_{Ltd} U$.
In particolare caratterizziamo le funzioni-RtR $f(x)$ con dominio e codominio limitati scrivendo $\mathsf{dom}(f) \subset_{Ltd} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Quando si adotta il punto di vista dell'insieme dei reali ampliato, che caratterizziamo con la scrittura $\mathsf{POV}(\overline{\mathbb{R}})$, potremo servirci anche di intervalli illimitati, aventi estremità costituita da $-\infty$ o da $+\infty$ sia per la variabile indipendente, che per la dipendente.
Per il punto di vista dell'insieme dei reali compattificato useremo la scrittura $\mathsf{POV}(\overline{\overline{\mathbb{R}}})$

Nella prima sezione del capitolo ci limitiamo al $\mathsf{POV}(\mathbb{R})$, nella seconda allargheremo il discorso al $\mathsf{POV}(\mathbb{R}_{\pm\mathfrak{i}})$ e al $\mathsf{POV}(\overline{\overline{\mathbb{R}}})$.

Occorre aggiungere che in talune circostanze risulta opportuno fare riferimento all'insieme dei reali ampliato e compattificato $\overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}} := \mathbb{R} \dot\cup \{-\infty, +\infty, \infty\}$.

Osserviamo anche che per molte situazioni specifiche sarà importante distinguere per ciascun punto di accumulazione del dominio D_α della funzione $f_\alpha(x)$ se appartiene o meno al suddetto D_α.

I16a.02 Consideriamo una quaterne-fDAx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0 \rangle$.

Defin. Si dice che al tendere di $x \in D$ al valore x_0 la **funzione-RtR** $f(x)$ **tende al limite finito** Y, o che converge a tale Y, e si scrive

$$(1) \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = Y \ ,$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

$$(2) \qquad \forall x \in \Big(\big(x_0 - \delta, x_0 + \delta\big) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \ \ : \ \ |f(x) - Y| < \epsilon \ .$$

Il parametro ϵ della definizione si può chiamare **scostamento dei valori della funzione consentito dal limite**.
Dall'arbitrarietà del parametro ϵ presente nella definizione segue una proprietà che si può chiamare **illimitato avvicinamento al limite** Y dei valori assunti dalla $f(x)$, avvicinamento che l'enunciato dalla definizione garantisce potersi migliorare illimitatamente mediante una adeguata diminuzione del parametro δ.

La definizione precedente, si può riesprimere con metafora cinematica, dicendo che quando la variabile x, che pensiamo mobile, si avvicina progressivamente ad x_0, cioè quando procede ad assumere valori sempre più prossimi ad x_0, ma rimanendo diversa da tale ascissa, allora i valori della $f(x)$ diventano prossimi a Y quanto si vuole (eventualmente coincidendo con Y).

I16a.03 **(1) Prop.**: Per ogni funzione reale costante $\overline{y}^{cnst}$ e per ogni x_0 reale si ha $\lim_{x\to x_0} \overline{y}^{cnst} = \overline{y}$

Dim.: Infatti per qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ accade che per ogni $\delta \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$\forall x \in \Big((x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D\Big) \setminus \{x_0\} \;:\; |f(x) - \overline{y}| = 0 < \epsilon \;\blacksquare$$

(2) Prop.: Per ogni intero positivo n e per ogni x_0 reale si ha

$$\lim_{x\to x_0} x^n \;=\; {x_0}^n \;.$$

Dim.: Si osserva che $|x^n - {x_0}^n| \;=\; |x - x_0| \cdot \left|x^{n-1} + x^{n-2}\,x_0 + \cdots + x\,x_0^{n-2} + {x_0}^{n-1}\right|$.
In relazione a un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), occorre individuare un $\delta \in \mathbb{R}_+$ che soddisfi la a02(2).
Per questo introduciamo il reale positivo

$$\overline{x} \;:=\; |x_0| + \delta \qquad \text{ossia} \qquad \overline{x} \;:=\; \begin{cases} x_0+\delta & \text{sse} \quad x_0 \geq 0 \\ |x_0-\delta| & \text{sse} \quad x_0 < 0 \end{cases} .$$

Si osserva che $\forall i = 0, 1, ..., n-1 \;:\; |x^{n-i}\,{x_0}^{i-1}| \leq \overline{x}^{n-1}$ e quindi

$$|x^n - {x_0}^n| \;\leq\; |x - x_0| \cdot n \cdot \overline{x}^{n-1} \;.$$

Quindi se assumiamo $\delta := \dfrac{\epsilon}{n\cdot \overline{x}^{n-1}}$ abbiamo $|x^n - {x_0}^n| \;\leq\; \epsilon$ e di conseguenza l'asserto $\blacksquare$

I16a.04 Come vedremo della definizione in a02 si possono considerare parecchie varianti. Per rendere più scorrevoli le considerazioni che le riguardano conviene introdurre altri termini e notazioni.

Un insieme della forma $(a,b\,) \setminus \{x_0\}$ con $a, x_0, b \in \mathbb{R}$ e $a < x_0 < b$ verrà detto **intervallo perforato**.
Un intervallo perforato della forma $(x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}_+$ verrà detto **intervallo perforato simmetrico** di x_0 e verrà denotato con $\mathsf{IntvPS}(x_0, \delta)$.

Una versione meno generale della definizione in a02, ma un po' più semplice da utilizzare in molte situazioni comuni riguarda quaterne-fDAx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0\rangle$ nelle quali $f(x)$ risulta definita almeno in un intervallo perforato simmetrico $\mathsf{IntvPS}(x_0, \Delta)$. Per una tale quaterna-fDAx si può dare la seguente definizione (o proprietà)

$$(1)\;\; \lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; Y \quad\iff\quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \;:\; \Big\lfloor\, \exists \delta \in (0, \Delta) \;\P\; \forall x \in \mathsf{IntvPS}(x_0, \delta) \;:\; |f(x) - Y| < \epsilon \,\Big\rfloor \;.$$

I16a.05 Talora conviene assumere l'atteggiamento opposto a quello della variante precedente per rendere disponibile una definizione di limite più versatile di quella in a02.

Definiamo **intorno-i [bilaterale] del valore** x_0 ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene un intervallo aperto al quale appartiene x_0. La specificazione -i ricorda la presenza di un intervallo.

Questo consente di riformulare la definizione di limite in termini più geometrici.

(1) Defin.: Si dice che la funzione-RtR $f(x)$ tende al limite $Y \in \mathbb{R}$ per x tendente a $x_0 \in \boldsymbol{Adrn}(D)$ con $D := \mathsf{dom}(f)$ sse per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste un intorno di x_0 $V = V(\epsilon)$ tale che $\forall x \in V \cap D \;:\; |f(x) - Y| < \epsilon$.

Esplicitiamo l'equivalenza di questa definizione con la a02(1).

Da un lato l'ultima definizione è più esigente da quella data in precedenza, in quanto riguarda la totalità degli intorni di x_0, oggetti più generali degli intervalli richiesti da a02(1) e quindi a05(1) $\Longrightarrow$ a02(1) .

Dall'altro se la conclusione è garantita dalla totalità degli intervalli dalla prima definizione, ciascuno degli intorni di x_0 deve contenere un intervallo; quindi a02(1) $\Longrightarrow$ a05(1) .

I16a.06 Il passaggio al limite si può considerare come un tentativo di costruzione senza garanzia di successo da applicare a una **coppia-fx** $\big\langle f(x), x_0 \big\rangle$, nella quale $f(x)$ è una funzione-RtR e $x_0 \in \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f))$, ossia è una ascissa nell'aderenza del suo dominio .

Dopo aver visto alcuni casi di esistenza del limite, è quindi opportuno vedere alcune coppie-fx, ossia coppie $\langle$ funzione , punto di accumulazione del relativo dominio $\rangle$, per le quali la costruzione fallisce.

Prima di questo conviene dare una ulteriore variante della definizione del limite $\lim_{x \to x_)} f(x)$ formulata in termini di oscillazione della funzione in intervalli perforati simmetrici $\mathsf{IntvPS}(x_0, \delta)$ via via più stretti.
A questo proposito ricordiamo la definizione di oscillazione

$$\forall f(x) \in \textsf{FunRtR} \ , \ S \subseteq \mathbb{R} \quad \vdots \quad \boldsymbol{oscl}\Big(f(x), S\Big) \ := \sup_{x_1, x_2 \in S \cap \mathsf{dom}(f)} \big(|f(x_1) - f(x_2)|\big) \ .$$

(1) Prop.: $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \lim_{\delta \to 0} \boldsymbol{oscl}\Big(f(x), \mathsf{IntvPS}(x_0, \delta)\Big) = 0$.

Dim.: L'equivalenza segue dall'applicazione delle definizioni ▮

Conviene esplicitare anche la proposizione equivalente ottenuta dalla negazione dei due enunciati equivalenti in (1), in quanto direttamente invocabile per escludere l'esistenza di un limite.

(2) Prop.: $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \lim_{\delta \to 0} \boldsymbol{oscl}\Big(f(x), [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\Big) \neq 0$ ▮

I16a.07 Consideriamo la funzione $\ulcorner x \in \mathbb{R}_{nz} \mapsto \dfrac{1}{x} \urcorner$ e $x_0 = 0$ punto di accumulazione del suo dominio $\mathbb{R}_{nz}$.
Non esiste il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$: infatti l'espressione $\dfrac{1}{x}$ per $x > 0$ fornisce valori positivi arbitrariamente grandi, mentre per $x < 0$ fornisce valori negativi arbitrariamente grandi in modulo; quindi si ha $\lim_{\delta \to 0} \boldsymbol{oscl}\Big(f(x), \mathsf{IntvPS}(x_0, \delta)\Big) = \dfrac{2}{\delta}$, cioè si ricade nella situazione di a06(2)

Considerazioni analoghe conducono alla non esistenza del limite per $x \to 0$ per la funzione $\text{sign}(x)$ e la non esistenza dei limiti $\lim_{x \to n} \text{mant}(x)$, per ogni n intero.

I16a.08 Esplicitiamo alcune prime semplici proprietà della costruzione passaggio al limite.

(1) Prop.: (**unicità del limite di una funzione**) Consideriamo una terna-fxS $\big\langle f(x), x_0, \mathsf{S} \big\rangle$ composta da: funzione-RtR $f(x)$, un punto del suo dominio x_0 e un suo sottodominio S.
Questa funzione non può tendere a due limiti diversi; formalmente

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = Y_1 \ , \ \lim_{x \to x_0} f(x) = Y_2 \quad \text{con} \quad Y_1, Y_2 \in \mathbb{R} \implies Y_1 = Y_2 \ .$$

Dim.: Se fosse $Y_1 \neq Y_2$, preso $\epsilon := \dfrac{|Y_1 - Y_2|}{2}$, si troverebbe un $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

$$\forall x \in \Big([x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \quad \vdots \quad |f(x) - Y_1| < \epsilon \ , \ |f(x) - Y_2| < \epsilon \ .$$

Di conseguenza $|f(x) - Y_1 - (f(x) - Y_2)| = |Y_1 - Y_2| < 2\,\epsilon = |Y_1 - Y_2|$, disuguaglianza che, a causa dell'arbitrarietà di ϵ, nega la possibilità della $Y_1 \neq Y_2$ ▮

(2) Prop.: Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = Y \neq 0$, allora esiste un intorno V di x_0 tale che in $V \cap D$ la $f(x)$ assume valori dello stesso segno di Y.

Dim.: In caso contrario per ogni $\delta \in \mathbb{R}_+$ si avrebbe una ascissa $\overline{x} \in D \cap (x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta)$ per la quale si avrebbe $|f(\overline{x}) - Y| \geq |Y|$, contro la proprietà tendere a 0 dell'oscillazione al tendere della x a x_0 ▮

I16a.09 Prima di proseguire conviene richiamare altre due dualità da accostare alla dualità-UD e alla dualità-UD generalizzata introdotte in I12c02 e I12c04.

Ricordiamo che per **dualità-LR** intendiamo la dualità associata alla riflessione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispetto all'asse Oy, ossia alla biiezione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}} := \lceil x \in \mathbb{R} \mapsto -x \rceil$.

Diciamo inoltre **dualità-LR generalizzata** la dualità derivante dalla riflessione del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ rispetto a una qualche retta verticale $x = \overline{x}$, ossia derivante da una biiezione della forma $\lceil x \in \mathbb{R} \mapsto 2\,\overline{x} - x \rceil$.

(1) Prop.: Sia $x_0 \in \mathbb{R}_+$; $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$.

Dim.: Le condizioni per la validità della relazione precedente possono ridursi ad individuare per ogni ϵ un $\delta(\epsilon) \in (0, x_0/2)$ tale che

$$(*) \qquad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \epsilon \iff \frac{|x - x_0|}{x\, x_0} < \epsilon.$$

L'ultima disuguaglianza è assicurata dalla $\frac{|x - x_0|}{(x_0 - \delta)\, x_0} < \epsilon$ e questa dalla $\frac{\delta}{{x_0}^2/2} < \epsilon$.

Quindi basta assumere $\delta(\epsilon) = \frac{1}{2}\, \epsilon\, {x_0}^2$ per garantire la validità della $(*)$, relazione che caratterizza il limite enunciato ▮

Per dualità-LR si può ottenere l'uguaglianza precedente per ogni $x_0 \in \mathbb{R}_-$ e quindi la relazione

$$(2) \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} \ .$$

I16a.10 Generalizziamo quanto provato nel paragrafo precedente.

(1) Prop.: consideriamo $m = 2, 3, 4, \ldots$ e $x_0 \in \mathbb{R}_+$; $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{{x_0}^m}$.

Dim.: Per dimostrare l'enunciato cerchiamo ancora di associare ad un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ un $\delta(\epsilon) \in (0, x_0/2)$ tale che

$$(*) \qquad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies \left|\frac{1}{x^m} - \frac{1}{{x_0}^m}\right| < \epsilon \iff \frac{|x^m - {x_0}^m|}{{x_0}^m\, x^m} < \epsilon \ .$$

Sviluppando l'ultima espressione si giunge alla disuguaglianza

$$|x - x_0|\ \frac{\sum_{i=0}^{m-1} {x_0}^i\, x^{m-i-1}}{{x_0}^m\, x^m} < \epsilon \ .$$

Trasformiamo ora questa disuguaglianza in una più semplice ma più stringente e in grado di assicurare quella richiesta. Per questo basta aumentare il numeratore sostituendo ogni x_0 con $x_0\,\frac{3}{2}$ e ridurre il denominatore sostituendo ogni x_0 con $\frac{x_0}{2}$, in modo da avere la disuguaglianza

$$|x - x_0|\ \frac{(m-1)\left[x_0\,\frac{3}{2}\right]^{m-1}}{{x_0}^{2m}\, 2^m} < \epsilon \ .$$

Dato che x_0 ed m non sono influenzati da ϵ, basta assumere

$$\delta < \frac{{x_0}^{2m}\,2^m}{(m-1)\left[x_0\,\dfrac{3}{2}\right]^{m-1}} \cdot \epsilon \ ,$$

per rendere soddisfatta la disuguaglianza che garantisce il limite enunciato ▮

Per dualità-LR si ottienere l'uguaglianza precedente per ogni $x_0 \in \mathbb{R}_-$ e quindi la relazione

(2) $$\forall x_0 \in \mathbb{R}_{nz} \ : \ \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^m} = \frac{1}{{x_0}^m} \ .$$

I16 b. limiti da sinistra, da destra, per difetto, per eccesso

I16b.01 Talora risulta utile associare alle quaterne -fDAx $\langle f(x), D, A, x_0\rangle$ anche due costruzioni con obiettivi più ridotti di quello della richiesta $\lim_{x\to x_0} f(x) =?$, ma che possono avere successo in casi in cui la suddetta richiesta fallisce: si tratta del passaggio al limite da sinistra e del passaggio al limite da destra, due costruzioni per le quali si prendono in considerazione, risp., solo intorni a sinistra e solo intorni a destra del punto di accumulazione x_0.

Si dice che la funzione $f(x)$ al **tendere da sinistra** di $x \in D$ al punto x_0 tende al limite finito Y e si scrive

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \;=\; Y$$

sse per ogni ϵ reale positivo (idap) si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \;\; \vdots \;\; |f(x) - Y| < \epsilon \;.$$

Si dice che la funzione $f(x)$ al **tendere da destra** di $x \in D$ al punto x_0 tende al limite finito Y e si scrive

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = Y$$

sse per ogni ϵ reale positivo si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D \;\; \vdots \;\; |f(x) - Y| < \epsilon \;.$$

Quando occorre distinguere la costruzione di un limite da quella del limite da sinistra e/o da quella del limite da destra, questi due vengono chiamati **limiti unilaterali**, mentre il primo viene chiamato **limite bilaterale**.

I16b.02 Chiaramente tra la costruzione del limite da sinistra e quella del limite da destra sono collegate dalla dualità-LR.

Evidentemente se a una funzione e a un punto di accumulazione del suo dominio si può associare un limite Y, allora esistono sia il limite da sinistra che quello da destra e questi coincidono con Y.

Viceversa se una funzione possiede sia il limite da sinistra che quello da destra, essa possiede il limite bilaterale sse i due suddetti limiti coincidono.

Consideriamo la funzione $h(x) := \dfrac{x}{|x|}$ definita in $\mathbb{R}_{nz}$ (e ivi coincidente con la funzione $\text{sign}(x)$); si trova $\lim_{x\to 0-} h(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0+} h(x) = +1$; quindi non esiste $\lim_{x\to 0} h(x)$.
Consideriamo la funzione $g(x) := \lfloor x \rfloor$ definita su tutto $\mathbb{R}$; $\lim_{x\to 1-} g(x) = 0$, $\lim_{x\to 1+} g(x) = 1$; quindi non esiste $\lim_{x\to 1} g(x)$.
Più in generale per ogni $n \in \mathbb{Z}$ abbiamo $\lim_{x\to n-} g(x) = n - 1$ e $\lim_{x\to n+} g(x) = n$; quindi per ogni $n \in \mathbb{Z}$ non esiste $\lim_{x\to n} g(x)$.

I16b.03 Introduciamo ora due precisazioni per la determinazione del limite al finito di una funzione-RtR $f(x)$ riguardanti la possibilità di stabilire se la funzione quando la variabile tende a un punto di accumulazione del dominio da sinistra si avvicina al limite presentando valori in eccesso oppure assumendo valori in difetto.

Si dice che la $f(x)$ per $x \to x_0-$ tende dal basso o **tende per difetto** al limite Y e si scrive

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = Y- \;, \tag{1}$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0) \cap D \Big) \ \colon \ 0 \leq Y - f(x) < \epsilon \ .$$

La definizione duale-UD è la seguente. Si dice che la $f(x)$ per $x \to x_0-$ **tende dall'alto** o **tende per eccesso** al limite Y e si scrive

(2) $$\lim_{x \to x_0-} f(x) = Y+ \ ,$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0) \cap D \Big) \ \colon \ 0 \leq f(x) - Y < \epsilon \ .$$

Alcuni esempi: $\forall m \in \mathbb{N} : \ \lim_{x \to 0-} x^{2m+1} = 0-$; $\forall m \in \mathbb{P} : \ \lim_{x \to 0-} -x^{2m} = 0-$.

I16b.04 Evidentemente può essere utile anche la distinzione duale-LR della precedente, ossia la distinzione tra limite per la variabile tendente da destra per eccesso e limite per la variabile tendente da destra per difetto.

Si dice che la $f(x)$ per $x \to x_0+$ **tende per difetto** al limite Y, e si scrive

(1) $$\lim_{x \to x_0+} f(x) = Y- \ ,$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

(1) $$\forall x \in \Big((x_0, x_0 + \delta) \cap D \Big) \ \colon \ 0 \leq Y - f(x) < \epsilon \ .$$

Si dice che la $f(x)$ per $x \to x_0+$ **tende per eccesso** al limite Y,e si scrive

(2) $$\lim_{x \to x_0+} f(x) = Y+ \ ,$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0, x_0 + \delta) \cap D \Big) \ \colon \ 0 \leq f(x) - Y < \epsilon \ .$$

Alcuni esempi: $\lim_{x \to 0+} \cos x = 1-$; $\lim_{x \to 0+} \sin x = 0+$.

I16b.05 La tendenza per difetto e la tendenza per eccesso si possono introdurre anche per i limiti bilaterali delle funzioni-RtR.

Si dice che la $f(x)$ per $x \to x_0$ **tende per difetto** al limite $Y \in \mathbb{R}$ e si scrive

(1) $$\lim_{x \to x_0} f(x) \ = \ Y- \ ,$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \ \colon \ 0 \leq Y - f(x) < \epsilon \ .$$

Si dice che la $f(x)$ per $x \to x_0$ **tende per eccesso** al limite $Y \in \mathbb{R}$ e si scrive

(3) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = Y+ \ ,$$

sse a ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che

(4) $$\forall x \in \Big((x_0, x_0 + \delta) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \ \colon \ 0 \leq f(x) - Y < \epsilon \ .$$

Alcuni esempi: $\lim_{x \to 0} \exp(-x^2) = 1-$; $\lim_{x \to 0} \cosh x = 0+$.

Chiaramente valgono le seguenti equivalenze (duali-UD)

(5) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = Y- \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = Y- \;\wedge\; \lim_{x\to x_0+} f(x) = Y- \;.$$

(6) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = Y+ \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = Y+ \;\wedge\; \lim_{x\to x_0+} f(x) = Y+ \;.$$

l16b.06 Alla definizione data in a02 dell'enunciato

(∗) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = Y,$$

ed alle sue varianti date negli ultimi paragrafi precedenti, va attribuito carattere puntuale, in quanto riguardano i punti x_0 e Y da collocare, risp., sull'asse Ox e sull'asse Oy.

Conviene individuare anche un'altra variante della definizione (∗), definizione equivalente che concerne due intervalli, nel primo dei quali si trovano i valori della variabile indipendente e nel secondo i valori che viene assumendo la variabile dipendente. A questa variante va attribuito il carattere locale.

Affermare la validità della (∗) equivale a dire che ad ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e all'intervallo per la variabile y $\mathsf{J} := (Y-\epsilon, Y+\epsilon)$ si può associare un intervallo perforato per la variabile x

$$\mathsf{I}(\epsilon) := \mathsf{IntvPS}(X_0, \delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\} \text{ con } \delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$$

tale che trasformando tale I mediante la f si ottiene un sottoinsieme $f(\mathsf{I} \setminus \{x_0\}) \subset \mathsf{J}$.

I16 c. limiti all'infinito delle funzioni reali

I16c.01 Introduciamo ora altre costruzioni di limite per funzioni-RtR che prendono in considerazione come valori della variabile indipendente e/o come valori della variabile dipendente gli oggetti $-\infty$, $+\infty$ e ∞ che si collocano dell'insieme dei reali arricchito $\overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}} = \mathbb{R} \dot{\cup} \{-\infty, +\infty, \infty\}$.
È inoltre opportuno riferire alcuni enunciati all'insieme dei reali ampliato $\mathbb{R}_{\pm\mathfrak{i}} = \mathbb{R} \dot{\cup} \{-\infty, +\infty\}$ e all'insieme dei reali compattificato $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \dot{\cup} \{\infty\}$.

Anche tra le costruzioni di limite che seguono si individuano vari collegamenti interni assicurati dalla dualità-UD e dalla dualità-LR.

Anche per queste costruzioni facciamo riferimento a quaterne-fDAx della forma

$$\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0 \rangle \quad \text{con} \quad D := \mathsf{dom}(f) \;,\; \mathsf{A} := \boldsymbol{Adrn}(D) \text{ e } x \in \mathsf{A} \;.$$

I16c.02 Iniziamo con due costruzioni di limiti per funzioni-RtR che conducono, risp., all'elemento $-\infty$ e all'elemento $+\infty$ di $\mathbb{R}_{\pm\mathfrak{i}}$. Queste due costruzioni sono collegate dalla dualità-UD.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto $x_0 \in \mathsf{A}$ **diverge a** $-\infty$ o **tende a** $-\infty$, e si scrive

(1) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \;,$$

sse a ogni K reale positivo (idag) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \qquad : \qquad f(x) < -K \;.$$

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto x_0 **diverge a** $+\infty$ o **tende a** $+\infty$, e si scrive

(2) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;,$$

sse a ogni K reale positivo (idag) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \qquad : \qquad K < f(x) \;.$$

Esempi: $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} \;=\; +\infty$; $\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{x \to a} -\dfrac{1}{(x-a)^4} \;=\; -\infty$
$\forall m \in \mathbb{P} : \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{2m}} \;=\; +\infty$.

I16c.03 Introduciamo anche una costruzione meno stringente: si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto $x_0 \in \mathsf{A}$ **tende a** ∞ o **diverge a** ∞, e si scrive

(1) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{sse} \quad \lim_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty \;,$$

cioè sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che

(2) $$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \Big) \setminus \{x_0\} \quad : \quad K < |f(x)| > \;.$$

Esempi: $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \;=\; \infty$; $\forall m \in \mathbb{P} : \lim_{x \to 0} x^{-2m+1} \;=\; \infty$; $\lim_{x \to \pi/2} \tan x = \infty$.

Si osserva che nelle situazioni presentate in c02, c04 e c04 accade che $x_0 \not\in D$.
Ẽ inoltre evidente che

(3) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \;\vee\; \lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; \infty \;.$$

I16c.04 Anche per le costruzioni di limiti divergenti all'infinito per la variabile tendente a un reale finito si possono introdurre le varianti unilaterali.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto x_0 da sinistra // da destra tende (o diverge) a $+\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) \;=\; +\infty$$

sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che per tutti gli $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D$ // per tutti gli $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D$ si ha $K < f(x)$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto x_0 da sinistra // da destra tende (o diverge) a $-\infty$ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) \;=\; -\infty,$$

sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che per tutti gli $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D$ // per tutti gli $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D$ si ha $f(x) < -K$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto x_0 da sinistra // da destra tende (o diverge) a ∞ e si scrive

$$\lim_{x \to x_0 \pm} f(x) \;=\; \infty\ ,$$

sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che per tutti gli $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D$ // per tutti gli $x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D$ si ha $K < |f(x)|$.

Sono evidenti i collegamenti tra queste definizioni stabiliti dalla dualità-UD e dalla dualità-LR.

I16c.05 Chiameremo **predicati multiconnettivi** gli enunciati formalizzati nei quali compaiono più connettivi logici.

Le definizioni precedenti e tutte le altre presentate in questo capitolo si possono esprimere in modo conciso con predicati multiconnettivi.

Alle definizioni in c03 e in c04 corrispondono i seguenti enunciati formalizzati:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \;=\; -\infty \quad \text{sse} \quad \forall K \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni \delta(K) \;\text{⁋}\; x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \implies f(x) < -K\ .$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \;=\; -\infty \quad \text{sse} \quad \forall K \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni \delta(K) \;\text{⁋}\; x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D \implies f(x) < -K\ .$$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \;=\; +\infty \quad \text{sse} \quad \forall K \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni \delta(K) \;\text{⁋}\; x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \implies K < f(x)\ .$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \;=\; -\infty \quad \text{sse} \quad \forall K \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni \delta(K) \;\text{⁋}\; x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D \implies K < f(x)\ .$$

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \;=\; \infty \quad \text{sse} \quad \forall K \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni \delta(K) \;\text{⁋}\; x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap D \implies K < |f(x)|\ .$$

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) \;=\; -\infty \quad \text{sse} \quad \forall K \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni \delta(K) \;\text{⁋}\; x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D \implies K < |f(x)|\ .$$

(7) Eserc. Scrivere i predicati multiconnettivi che traducono concisamente le altre definizioni di limiti trattate nei paragrafi precedenti.

I16c.06 Alcuni esempi.

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} \;=\; +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} \;=\; -\infty \qquad ; \qquad \forall m \in \mathbb{P} \;\vdots\; \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^{2m+1}} \;=\; -\infty \qquad ;$$

$$\forall m \in \mathbb{P} \;\vdots\; \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x^{2m}} \;=\; +\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to -\pi/2-} \tan x \;=\; -\infty \qquad ; \qquad \lim_{x \to \pi/2-} \tan x = +\infty\ .$$

Consideriamo un $m \in \mathbb{N}$ e la richiesta $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2m+1}}$? ; possiamo dire che questo limite non esiste se si opera in $\mathbb{R}_{\pm i}$, mentre vale ∞ se si opera in $\overline{\mathbb{R}}$. Considerazione analoga per $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x$? .

Più in generale per tutte le coppie-fx $\langle f(x), x_0\rangle$ per le quali si è trovato che $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) \;=\; \pm\infty$ oppure che $\lim_{x\to x_0\pm} f(x) \;=\; \mp\infty$ e ci si chiede $\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; \infty$? .
Possiamo dire che $\lim_{x\to x_0}$ non esiste se ci si colloca in $\mathbb{R}_{\pm i}$, mentre esiste se si opera in $\overline{\mathbb{R}}$.

Considerazioni analoghe si possono enunciare per molti limiti unilaterali.

I16c.07 Costruzioni di limiti si introducono anche per funzioni-RtR che hanno domini illimitati in corrispondenza di valori della variabile indipendente illimitatamente elevati, in positivo, in negativo o in modulo.

La prima distinzione tra queste funzioni vede da una parte funzioni che a un crescere illimitato della variabile assumono valori che si avvicinano ad un reale finito e dall'altra funzioni che assumono valori che a loro volta sono illimitatamente elevati, in positivo, in negativo o in modulo.

Per queste considerazioni può essere utile considerare che $-\infty$ e $+\infty$, i cosiddetti **punti all'infinito della retta reale**, hanno il compito di fare da punti di accumulazione per gli insiemi di numeri reali, risp., illimitati inferiormente e illimitati superiormente.

Diciamo **intorno di** $-\infty$ ogni insieme di reali che contiene un intervallo della forma $(-\infty, H)$ per qualche H reale. Diciamo dualmente-LR **intorno di** $+\infty$ ogni insieme di reali che contiene un intervallo della forma $(H, +\infty)$ per qualche H reale.

I16c.08 Diamo ora le definizioni dei limiti finiti di funzioni-RtR con dominio illimitato in positivo, in negativo o in modulo.

Consideriamo una terna-fDA $\langle f(x), D, \mathsf{A}\rangle$ con il dominio D illimitato inferiormente.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a $-\infty$ **tende al limite finito** Y ovvero **converge al limite finito** Y e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=\; Y \;,$$

sse per ogni ϵ reale positivo (idap) si può trovare un numero reale $H = H(\epsilon)$ tale che per tutti gli $x \in (-\infty, H) \cap D$ si ha

$$|f(x) - Y| < \epsilon \;.$$

Consideriamo il caso duale-LR del precedente: si abbia una terna-fDA $\langle f(x), D, \mathsf{A}\rangle$ con il dominio D illimitato superiormente.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a $+\infty$ **tende al limite finito** Y e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; Y \;,$$

sse per ogni ϵ reale positivo (idap) si può trovare un numero reale $H = H(\epsilon)$ tale che per tutti gli $x \in (H, +\infty) \cap D$ si ha $|f(x) - Y| < \epsilon$.

Consideriamo una terna-fDA $\langle f(x), D, \mathsf{A}\rangle$ con il dominio D illimitato superiormente in modulo.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a ∞ **tende o converge al limite finito** Y e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; Y \;,$$

sse per ogni ϵ reale positivo (idap) si può trovare un numero reale $H = H(\epsilon)$ tale che per tutti gli $x \in \big((-\infty, H) \cup (H, +\infty)\big) \cap D$ si ha $|f(x) - Y| < \epsilon$.

I16c.09 Dei limiti precedenti si possono considerare le varianti più esigenti che riguardano il tendere dei valori della funzione verso il limite per eccesso o dall'alto, oppure per difetto o dal basso.

Vengono così introdotti altri sei tipi di costruzioni caratterizzate dalle scritture

(1) $$\lim_{x\to-\infty} = Y- \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} = Y- \quad , \quad \lim_{x\to\infty} = Y- \quad ,$$

(2) $$\lim_{x\to-\infty} = Y+ \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} = Y+ \quad , \quad \lim_{x\to\infty} = Y+ \quad .$$

I16c.10 Consideriamo ora terne $\langle f, D, \mathsf{A}\rangle$ con il dominio illimitato inferiormente e/o superiormente e che presentano valori anch'essi illimitati.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a $-\infty$ **tende a** $-\infty$, ossia **diverge a** $-\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \ ,$$

sse per ogni H reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che per tutti gli $x \in (-\infty, -K) \cap D$ si ha $f(x) < -H$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a $-\infty$ **tende a** $+\infty$, ossia **diverge a** $+\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

sse per ogni H reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che per tutti gli $x \in (-\infty, -K) \cap D$ si ha $H < f(x)$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a $+\infty$ **tende a** $-\infty$, ossia **diverge a** $-\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ ,$$

sse per ogni H reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che per tutti gli $x \in (K, +\infty) \cap D$ si ha $f(x) < -H$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a $+\infty$ **tende a** $+\infty$, ossia **diverge a** $+\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che

$$\forall x \in (K, +\infty) \cap D \ \ \vdots \ \ H < f(x) \ .$$

I16c.11 Vediamo ora i limiti che corrispondono al tendere di x a ∞ che divergono a $-\infty$, oppure a $+\infty$, oppure allo stesso ∞.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a ∞ **tende a** $-\infty$, ossia **diverge a** $-\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ ,$$

sse per ogni H reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che per tutte le $x \in \big((-\infty, -K) \cup (K, +\infty)\big) \cap D$ si ha $f(x) < -H$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a ∞ **tende a** $+\infty$, ossia **diverge a** $+\infty$, e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

sse per ogni H reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che per tutte le $x \in \big((-\infty, -K) \cup (K, +\infty)\big) \cap D$ si ha $H < f(x)$.

Si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ a ∞ **tende a** ∞, ossia **diverge a** ∞, e si scrive

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \;=\; \infty \;,$$

sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un numero reale $K = K(H)$ tale che per tutte le $x \in \big((-\infty, -K) \cup (K, +\infty)\big) \cap D$ si ha $H < |f(x)|$.

I16c.12 Forse conviene osservare esplicitamente che non ha senso introdurre le distinzioni tra il tendere per valori per difetto o per eccesso a $\pm\infty$. Infatti se si ha divergenza a $-\infty$ si tende per eccesso, se si ha divergenza a $+\infty$ si tende per difetto.

Il caso della divergenza a ∞ può considerarsi la costruzione rispetto alla quale la divergenza a $-\infty$ e la divergenza a $+\infty$ costituiscono due varianti più stringenti e contrapposte.

Si può anche dichiarare che le costruzioni $\lim_{a\to-\infty}$ e $\lim_{a\to+\infty}$ sono le varianti unilaterali della costruzione bilaterale $\lim_{a\to\infty}$.

Queste considerazioni conviene vederle considerando le funzioni-RtR come sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$.

I16c.13 **(1) Prop.**: Per ogni intero positivo n e per ogni x_0 reale si ha $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

Dim.: Fissato $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, definiamo $\delta(\epsilon) \;:=\; \min\left(\frac{3}{8}\,{x_0}^2\,\epsilon, \frac{1}{2}\,x_0\right)$.
Introduciamo poi l'intervallo perforato simmetrico $I \;:=\; (x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$ e per $x \in I$ la differenza

$$d(x) \;:=\; \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \;=\; \frac{|x-x_0|}{x\,x_0} \;.$$

Abbiamo allora $\quad \forall x \in I \quad : \quad d(x) \le \left|\frac{1}{x_0-\delta} - \frac{1}{x_0+\delta}\right| \;=\; \frac{2\,\delta}{{x_0}^2-\delta^2} < \frac{2\,\delta}{{x_0}^2(1-1/4)} \;=\; \frac{8\,\delta}{3\,{x_0}^2} \le \epsilon$ ∎

(2) Prop.: Se per la funzione-RtR $f(x)$ vale la relazione $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to+\infty}(-f(x)) = -\infty$ ∎

(3) Prop.: Con le assunzioni della (1) abbiamo $\lim_{x\to-\infty} x^n \;=\; (-1)^n\infty$ ∎

I16c.14 **Eserc.** Precisare i seguenti fatti:

(a) $\lim_{x\to\pm\infty} \lfloor x \rfloor \;=\; \pm\infty$.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty} \lceil x \rceil \;=\; \pm\infty$.

(c) Per ogni h intero positivo si ha $\lim_{x\to-\infty} x^{2h} \;=\; +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} x^{2h-1} \;=\; -\infty$ ∎

(d) Non esistono i seguenti limiti $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{mant}(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \tan x$ ∎

I16c.15 Una funzione reale $f(x)$ si dice **funzione regolare in un punto di accumulazione**, finito o infinito, del suo dominio sse esiste il suo limite per la variabile indipendente tendente a tale punto. In caso contrario si parla di **funzione oscillante** negli intorni di un tale punto.

Consideriamo la funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ negli intorni dell'ascissa $x = 0$, punto che appartiene alla aderenza del suo dominio ma non al suo dominio.
Questa funzione è oscillante in ogni intorno di $x = 0$ in quanto in ogni intervallo perforato $(-a, a) \setminus \{0\}$ essa assume tutti i valori dell'intervallo chiuso $[-1, +1]$.

Consideriamo la funzione $\tan x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ e gli intorni del punto $\infty \in \overline{\mathbb{R}}$. A ciascuno dei suoi intorni si può dare la forma $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > H\}$ per qualche $H \in \mathbb{R}_+$. In ciascuno di questi intorni la funzione tangente è oscillante, in quanto in esso assume tutti i valori reali.

I16c.16 Le funzioni-RtR monotone hanno comportamenti più definiti delle rimanenti, ossia hanno più possibilità di soddisfare criteri di regolarità.

(1) Prop.: Consideriamo una funzione $f(x)$ monotona nel suo dominio D e questo sia un insieme limitato superiormente; sia b l'estremo superiore di D e tale punto sia punto di accumulazione di D. La funzione è regolare in b.

Dim.: Consideriamo il caso di una funzione $f(x)$ nondecrescente nel suo intero dominio D. Nel caso in cui il codominio della f sia limitato, sia M l'estremo superiore di tale insieme. In questo caso $\lim_{x\to b} f(x) = M$.
Gli altri casi seguono applicando al caso considerato la trasformazione destra-sinistra, cioè la $\lceil x \in \mathbb{R} \mapsto -x \rceil$, e/o la trasformazione alto-basso, cioè la $\lceil f(x) \mapsto -f(x) \rceil$ ∎

(2) Prop.: Consideriamo una funzione $f(x)$ monotona nel suo dominio D e questo sia un insieme limitato inferiormente; sia b l'estremo inferiore di D e tale punto sia punto di accumulazione di D. La funzione è regolare in b.

Dim.: Si tratta della proprietà duale-UD della (1) ∎

I16c.17 Le definizioni di limite si possono unificare facendo riferimento a $\overline{\mathbb{R}}$.
Nello studio delle funzioni reali spesso accade di giungere a enunciati dipendenti da un parametro α che sono validi quando tale α può essere un numero reale, oppure $+\infty$, oppure $-\infty$, oppure ∞.
In questi casi in genere risulta conveniente fare riferimento agli insiemi $\mathbb{R}_{\pm i} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Per esempio possiamo affermare che in questa sezione abbiamo introdotto situazioni che ricadono sotto l'espressione

(1) $$\lim_{x\to A} f(x) \;=\; Y \quad \text{con} \quad A, Y \in \overline{\mathbb{R}} \;.$$

Più genericamente si dice che la funzione $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto x_0 tende (o diverge) a ∞ e si scrive

(2) $$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; \infty \quad \text{sse} \quad \lim_{x\to x_0} |f(x)| \;=\; +\infty \;,$$

cioè sse per ogni K reale positivo (idag) si può trovare un reale positivo $\delta = \delta(K)$ tale che

(3) $$\forall x \in \Big(\big(x_0 - \delta, x_0 + \delta\big) \cap D\Big) \setminus \{x_0\} \quad : \quad |f(x)| > K \;.$$

I16 d. limiti specifici [1]

I16d.01 **(1) Prop.**: Consideriamo un numero reale B maggiore di 1.
$\lim_{x\to+\infty} B^x \;=\; +\infty$ e $\lim_{x-\infty} B^x \;=\; 0.$

Dim.: Dalla uguaglianza $\lim_{n\to+\infty} B^n \;=\; +\infty$, dal fatto che $x<\overline{x} \Longrightarrow B^x < B^{\overline{x}} \;=\; B^x\cdot B^{\overline{x}-x}$ e dal fatto che $B^{\lfloor x\rfloor} \le B^x \le B^{\lceil x\rceil}$ segue la prima uguaglianza.

La seconda uguaglianza segue da $\lim_{x\to-\infty} B^x \;=\; \lfloor_{\mathbb{N}}\, \overline{x} := -x \,\rfloor_{\mathbb{N}} \;=\; \left(\lim_{\overline{x}\to+\infty} B^{\overline{x}}\right)^{-1}$ e da $\lim_{x\to c} f(x) \;=\; 0+ \iff \lim_{x\to c} 1 \to f(x) \;=\; +\infty$.

(2) Prop.: Considеriamo un numero reale $b\in(0,1)$. $\lim_{x\to+\infty} b^x \;=\; 0$ *e* $\lim_{x\to-\infty} b^x \;=\; +\infty$.

Dim.: Introduciamo $B := \dfrac{1}{b}$ e osserviamo che $B>1$, che $\lim_{b\to 0+} B \;=\; +\infty$ e che $\lim_{B\to+\infty} b \;=\; 0+$.
Quindi la (1) porta alle due implicazioni $\lim_{x\to+\infty} B^x \;=\; +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} b^x \;=\; +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} B^x \;=\; 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} b^x \;=\; 0$ ▮

(3) Prop.: $\forall x_0\in\mathbb{R}\;:\; \lim_{x\to x_0} b^x \;=\; b^{x_0}$.

Dim.: ▮

(4) Prop.: $\forall x,x_0\in\mathbb{R}_+\;,\; a\in\mathbb{R}\;:\; \lim_{x\to x_0} x^a \;=\; {x_0}^a$.

Dim.: ▮

(5) Coroll.: $\forall c\in\mathbb{R}\;:\; \lim_{x\to x_0} c = c\;;\quad \lim_{x\to x_0} x = x_0$ ▮

I16d.02 Consideriamo il reale positivo B e la funzione $f(x) \;=\; B^x$.

$$\lim_{x\to+\infty} B^x \;=\; \begin{cases} +\infty & \text{sse} \quad B>1 \\ 1 & \text{sse} \quad B=1 \\ 0+ & \text{sse} \quad B<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} B^x \;=\; \begin{cases} 0+ & \text{sse} \quad B>1 \\ 1 & \text{sse} \quad B=1 \\ +\infty & \text{sse} \quad B<1 \end{cases}$$

I16d.03 Sia x variabile in $\mathbb{R}_+$ e sia $a\in\mathbb{R}$; si consideri la funzione x^a.

$$\lim_{x\to+\infty} x^a \;=\; \begin{cases} +\infty & \text{sse} \quad a>0 \\ 1 & \text{sse} \quad a=0 \\ 0+ & \text{sse} \quad a<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^a \;=\; \begin{cases} 0+ & \text{sse} \quad a>0 \\ 1 & \text{sse} \quad a=0 \\ +\infty & \text{sse} \quad a<0 \end{cases}$$

I16d.04 Sia x variabile in $\mathbb{R}_+$, sia $a\in(0,1)\,\dot\cup\,(1,+\infty)$ e si consideri la funzione $\log_b x$.

$$\lim_{x\to+\infty} \log_b x \; = \; \begin{cases} -\infty & \text{sse} \quad 0 < b < 1 \\ +\infty & \text{sse} \quad 1 < b \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \log_b x \; = \; \begin{cases} +\infty & \text{sse} \quad 0 < b < 1 \\ -\infty & \text{sse} \quad b > 1 \end{cases}$$

I16 e. coppie limite e rettangoli coprenti

I16e.01 Ci proponiamo ora di introdurre collezioni di figure geometriche che permettono di dare una utile veste visiva a molte situazioni formali riguardanti le determinazioni dei limiti di funzione-RtR. Anche per queste considerazioni conviene introdurre alcune nuove entità formali.

Prendiamo in considerazione una quaterna-fDSx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0 \rangle$ nella quale $f(x)$ è una funzione-RtR, D il suo dominio, S un sottoinsieme di S e $x \in S$. Consideriamo anche un enunciato $\lim_{x \to x_0} f(x) = y$ e chiamiamo **quintupla-fDSxy** la sequenza $\langle f(x), D, \mathsf{S}, x_0, Y \rangle$. Chiamiamo inoltre **coppia limite** relativa alla $f(x)$ la coppia $\langle x_0, Y \rangle$.

Inizialmente esaminiamo solo il caso in cui $x_0, Y \in \mathbb{R}$ [a02] ripromettendoci di riprenderlo nella situazione più generale relativa a $x_0, Y \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$.

Riprendiamo dunque la definizione di limite in a02 nella forma seguente

$$(1) \qquad \begin{array}{l} \lim_{x \to x_0} \; = \; y \quad \text{sse} \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+ \;\colon\; \mathcal{I}_\delta \qquad \text{dove} \\ \qquad \mathcal{I}_\delta \;:=\; \ulcorner \exists \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+ \rrbracket\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D \setminus \{x_0\} \;\colon\; |Y - f(x)| < \epsilon \urcorner \end{array} .$$

Introduciamo inoltre le notazioni che seguono relative alla quintupla-fDAxy $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0, y_0 \rangle$ o più semplicisticamente, (lecito quando si possono sottintendere $f(x)$, D e A), alla coppia $\langle x_0, y_0 \rangle$, nonché ai reali positivi ϵ e δ.

Intervallo per il codominio, o per la ordinata y_0 $\;\mathsf{J}(\epsilon) \;:=\; (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$.

Intervallo per il dominio, o per la ascissa x_0 $\;\mathsf{I}(\delta) \;:=\; \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D\Big) \setminus \{x_0\}$.

rettangolo coprente simmetrico

Su quest'ultimo osserviamo che riconosciuta una dipendenza di δ da ϵ, si può semplificare la sua scrittura con la $\mathsf{RtngCS}(\epsilon)$

Osserviamo che i termini intervallo e rettangolo sono semplficazioni, risp., di intervallo forato e di rettangolo privato di croce; queste precisazioni le lasciamo alle capacità di adattamento del lettore.

Il termine rettangolo coprente simmetrico usato per ogni $\mathsf{RtngCS}(\epsilon) \;:=\; \mathsf{I} \times \mathsf{J}$ richiama il fatto che il grafico della restrizione al dominio I della $f(x)$ si vuole interamente contenuto nel rettangolo stesso.
Osserviamo che un processo di passaggio al limite locale spesso può essere presentato efficacemente da una successione di rettangoli coprenti.

I16e.02 Possiamo quindi dire che l'enunciato $\lim_{x \to x_0} f(x) \; = \; Y$ equivale a richiedere la possibilità di associare alla coppia $\langle x_0, Y \rangle$ una collezione di rettangoli coprenti simmetrici $\mathsf{RtngCS}(\epsilon)$ per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

Questa collezione è tale che al decrescere di ϵ corrisponde il restringersi del rettangolo $\mathsf{RtngCS}(\epsilon)$, in verticale oltre che in orizzontale.

Va osservato che non si richiede che la dipendenza del parametro δ da ϵ si riesca ad esprimere come una ben definita funzione: in effetti a una ϵ si potrebbero associare diversi δ e si richiede soltanto che se ne possa garantire almeno uno.

È inoltre evidente che se $\mathsf{R}(\epsilon, \delta)$ è un rettangolo coprente simmetrico è tale anche ogni $\mathsf{R}(\epsilon, \delta')$ quale che sia $\delta' \in (0, \delta)$.

Alla nozione di intervallo coprente conviene dare una portata maggiore. Gli intervalli coprenti considerati in e01 hanno il punto $\langle x_0, Y \rangle$ nella posizione centrale e per questo sono stati qualificati simmetrici.

Questa simmetria dipende dall'aver utilizzato nella definizione di limite un incremento uguale al decremento sia per la x che per la y.

Potrebbe rivelarsi opportuno far cadere queste due uguaglianze. A questo scopo possiamo considerare **rettangolo coprente** della $f(x)$ relativo a una coppia limite $\langle x_0, Y\rangle$ ogni rettangolo della forma

$$\mathsf{RtngC}(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta_1,\delta_2) \;=\; \mathsf{I}(\delta_1,\delta_2)\times\mathsf{J}(\epsilon_1,\epsilon_2) \quad \text{dove}$$
$$\mathsf{I}(\delta_1,\delta_2) \;:=\; \Big((x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)\cap D\Big)\setminus\{x_0\} \quad \text{e} \quad \mathsf{J}(\epsilon_1,\epsilon_2) \;:=\; (Y-\epsilon_1, Y+\epsilon_2)$$

tale che il grafico della restrizione al dominio I della $f(x)$ sia interamente contenuto nel rettangolo stesso.

Per la collezione di questi rettangoli abbiamo che se contiene il rettangolo $\mathsf{RtngC}(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta_1,\delta_2)$ essa contiene anche il rettangolo $\mathsf{RtngC}(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta'_1,\delta'_2)$ per ogni $\delta'_1\in[0,\delta_1)$ e ogni $\delta'_2\in[0,\delta_2)$ con $\delta'_1+\delta'_2>0$.

Possiamo affermare che l'enunciato $\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; Y$ equivale a richiedere la possibilità di associare a $\langle x_0, y\rangle$ una collezione di rettangoli coprenti non necessariamente simmetrici che denotiamo con $\mathsf{RtngC}(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta_1,\delta_2)$ per ogni coppia di reali nonnegativi $\langle\epsilon_1,\epsilon_2\rangle$ con $\epsilon_1+\epsilon_2>0$.

Infatti se è soddisfatta la richiesta dei rettangoli coprenti simmetrici, lo è anche quella dei rettangoli coprenti *tout court*; viceversa se è soddisfatta la richiesta dei rettangoli coprenti in generale ciascuno degli $\mathsf{R}(\epsilon_1,\epsilon_2,\delta_1,\delta_2)$ si può sostituire con $\mathsf{R}(\epsilon,\delta)$ con $\epsilon:=\min(\epsilon_1,\epsilon_2)$ e $\delta:=\min(\delta_1,\delta_2)$.

I16e.03 Notiamo esplicitamente che la precedente definizione di limite (come tante altre) è assai generale in quanto si rivolge alla grandissima varietà delle quaterne-fDAx, ma è anche poco stringente, in quanto non pretende di indicare alcuna possibilità di individuare effettivamente un $\delta(\epsilon)$ per ogni $\epsilon\in\mathbb{R}_+$.

L'esistenza di $\delta(\epsilon)$ viene proposta programmaticamente, non conduce a procedimenti per la costruzione di funzioni $\delta(\epsilon)$ e si guarda bene dal pretendere una sua univocità.

Quindi chi è interessato a individuare e utilizzare un limite preciso, come avremo modo di vedere, in situazioni specifiche (ovvero per particolari terne-fDA) non può evitare di affrontare i problemi della determinazione di valori per la δ, anche solo per grandi linee.

Come si è visto in vari momenti questa determinazione in genere conduce a problemi di approssimazione e si serve non tanto di uguaglianze, quanto di disuguaglianze.

Anche i presenti cenni vogliono sottolineare la complessità della relazione che intercorre tra esigenze di generalità ed esigenze applicative.

I16e.04 Vogliamo ora cercare di introdurre l'effettività con uno scenario corrispondente a una possibile ricerca di un limite definita come $\lim_{x\to x_0} f(x)$? o a una possibile dimostrazione di un enunciato della forma $\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; Y$.

Vediamo una procedura che in linea di principio si può adottare in varie circostanze nelle quali si chiede di calcolare un valore limite e che può suggerire effettivi procedimenti empirici per la approssimazione di limiti specifici.

Consideriamo il caso $\lim_{x\to x_0+} \;=\; Y-$ con $x_0, Y\in\mathbb{R}$ definito in b04.

La procedura annunciata si può descrivere come un alternarsi di richieste che fa un committente che vuole conferma del fatto (all'inizio ipotetico) che il limite sia Y e delle conseguenti ricerche che effettua un addetto alla individuazione di intervalli per la x che ha il compito di garantire la disuguaglianza caratteristica.

La procedura inizia con il committente che propone un primo valore ϵ_0 per il parametro con il ruolo corrente di ϵ e con la ricerca del corrispondente $\delta(\epsilon)$ che scriviamo δ_0 che supponiamo possa essere individuato.
La conclusione di questo stadio 0 si può visualizzare con un primo rettangolo coprente R_0 con centro in $\langle x_0, Y\rangle$ della forma $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \times (Y - \epsilon_0, Y + \epsilon_0)$.

Nel successivo stadio 1 ci si può aspettare che il committente proponga un ϵ_1 significativamente inferiore a ϵ_0; successivamente si procede alla ricerca del corrispondente δ_1 che ancora supponiamo possa essere determinato.

La conclusione di questo stadio si visualizza con un rettangolo coprente R_1 visibilmente più ridotto di R_0 e avente la forma $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_0) \times (Y - \epsilon_1, Y + \epsilon_1)$.

Si può ipotizzare che questo modo di procedere prosegua illimitatamente: individuando una successione di rettangoli coprenti $\langle R_0, R_1, R_2, ...\rangle$ ciascuno più ridotto del precedente.
Questa successione si dice costituire una **successione telescopica**.

Una tale prospettiva vedrebbe la possibilità di approssimare il limite ipotizzato con scarti sempre più ridotti, idealmente con scarti quanto si vuole ridotti.
In questo caso si dice di disporre di una **successione telescopica unilimite**

I16e.05 L'esistenza del limite

$$(*) \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; Y,$$

può visualizzarsi con uno schizzo di alcuni membri della corrispondente famiglia telescopica che si può facilmente immaginare.

//input pI16e05

Inoltre un sottoinsieme di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ della forma $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (Y - \epsilon, Y + \epsilon))\setminus\langle x_0, Y\rangle$ viene detto **rettangolo coprente perforato** e verrà denotato con $RF(x_0, \delta, Y, \epsilon)$.

Per la comprensione del nostro tipo di limite può essere utile fissare l'attenzione sul cambiamento del rettangolo coprente $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (Y - \epsilon, Y + \epsilon)$ in corrispondenza di una diminuzione di ϵ e della conseguente diminuzione di $\delta(\epsilon)$, ricordando che questa viene garantita, in linea di principio, dalla definizione.

I16e.06 Ci occupiamo ora della possibilità di individuare effettivamente i limiti.
Ancora ci limitiamo a trattare solo limiti al finito ma facciamo riferimento all'enunciato

$$(*) \qquad \lim_{x\to x_0} = Y \quad \text{con} \quad x_0, Y \in \mathbb{R}\ .$$

Si possono prospettare due tipi di attività. La prima presume la conoscenza di Y e consiste nel garantire l'enunciato $(*)$; la chiameremo attività con limite Y noto. La seconda consiste nella individuazione di un Y a priori incognito e la chiamiamo attività con limite Y incognito.

Quello che possiamo fare consiste nel delineare, senza definire precise operazioni, due modi di procedere che in ogni situazione specifica possono condurre a procedure meglio definite.

Gli schemi di procedura annunciati si possono descrivere come un alternarsi di richieste che fa un committente che nel primo tipo di situazioni vuole conferma del fatto che il limite in questione sia effettivamente uguale a Y e che nel secondo tipo di situazioni chiede sia individuato il valore che intende denotare con Y.

Ciascuna delle richieste comporta ricerche che l'addetto incaricato di individuare intervalli per la x effettua esaminando la $f(x)$ al fine di garantire la corrispondente disuguaglianza che caratterizza $(*)$.

Inizialmente il committente propone un ϵ_0 come valore iniziale per il parametro con il ruolo di ϵ e l'individuatore determina un possibile δ_0 con il ruolo di $\delta(\epsilon_0)$.

Se δ_0 può essere individuato si conclude uno stadio iniziale che si può visualizzare con il rettangolo coprente che denotiamo con R_0.
Questo nel caso Y noto si può denotare con $\mathsf{R}(\epsilon_0, \delta_0)$, rettangolo-hv, cioè rettangolo con lati disposti orizzontalmente e verticalmente, e con vertici opposti in $\langle x_0, Y\rangle$ e in $\langle x_0 + \delta_0, Y + \epsilon_0\rangle$.
Nel caso Y incognito è un più vago rettangolo-hd avente i lati delle lunghezze $2\,\delta_0$ e $2\,\epsilon_0$.

Nel successivo stadio 1 il committente propone un ϵ_1 significativamente inferiore a ϵ_0 e l'individuatore procede alla ricerca del corrispondente δ_1; se si trova tale valore porta a un rettangolo coprente R_1 che nel caso Y noto è $\mathsf{R}(\epsilon_1, \delta_1)$ con $\delta_1 \leq \delta_0$ e nel caso Y incognito si giunge a un rettangolo avente i lati delle lunghezze $2\,\delta_1$ e $2\,\epsilon_1$ e tale che sia $R_0 \supset R_1$.

Questi modi di procedere in linea di principio hanno la possibilità di proseguire illimitatamente attraverso successivi stadi 2, 3, 4, ... che conducono a una successione illimitata di rettangoli coprenti $\langle R_0, R_1, R_2, ...\rangle$ ciascuno più ridotto del predecessore.

Si cerca inoltre di individuare successioni caratterizzate da $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.
Una tale successione viene chiamata **successione unilimite di rettangoli coprenti** per la quintupla-fDAxy $\langle f(x), D = \mathsf{dom}(f), \mathsf{A} = \boldsymbol{Adrn}(D), x_0 \in \mathsf{A}, Y\rangle$.

I16e.07 Abbiamo quindi prospettata la possibilità di ottenere una garanzia illimitata ($\epsilon \to 0$) del valore del limite Y (noto) oppure una approssimazione di Y (incognito) con scarto ridotto quanto si vuole, in ogni caso grazie al fatto che $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$.

Con i due modi di procedere si ha la possibilità di estrarre dall'insieme dei rettangoli coprenti relativi a $f(x)$, x_0 e Y una successione decrescente.
Che la possibilità si possa concretare, lo ribadiamo, dipende dalle caratteristiche della $f(x)$ specifica e dalle conoscenze e dei metodi posseduti a riguardo dall'operatore che abbiamo chiamato individuatore.

In concreto questo dipende anche dalle risorse che si possono rendere disponibili per la attività di individuazione; in particolare il successo della attività può dipendere dalla disponibilità di prodotti software adatti allo studio delle funzioni con il ruolo $f(x)$.

Si osserva che la collezione dei rettangoli coprenti complessivamente disponibili ha il cardinale del continuo, in quanto ogni rettangolo è individuato da due o quattro reali e $|\mathbb{R}^4| = \aleph_1$, mentre una successione decrescente associabile ad un processo di precisazione illimitata ha il cardinale del numerabile.
Questa restrizione dell'ambito formale entro il quale si opera è inevitabile quando si cerca l'effettività dei modi di procedere.

I16e.08 Il modo di procedere che mira a individuare una successione decrescente di rettangoli coprenti si può ripresentare specializzato per ciascuno degli casi di limiti bilaterali e/o unilaterali e/o di limiti da sinistra o da destra e/o di limiti per difetto o per eccesso.

Per questi casi ci si riduce a rettangoli coprenti che hanno la coppia limite $\langle x_0, Y\rangle$ sopra un lato o in un vertice.

Anche per la individuazione di questi rettangoli ridotti si possono ripetere le considerazioni sulle risorse che possono di volta in volta essere messe a disposizione.

I16e.09 La ricerca dei rettangoli coprenti si può anche estendere ai limiti all'infinito. Per questo è necessario collocarsi in $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ e considerare rettangoli impropri con lati impropri corrispondenti a valori $-\infty$ o $+\infty$ per le coordinate di uno o più lati dei rettangoli.

Per tipi di limiti diversi da quello precedentemente esaminato si hanno successioni telescopiche diversamente collocate rispetto a $\langle x_0, Y \rangle$.
Lo schema operativo sopra descritto si può adattare ai vari limiti all'infinito senza sostanziali diffi coltà.

I diversi tipi di successioni di rettangoli possono servire a tenere sotto controllo la grande varietà dei limiti che si possono presentare.

//input pI16e09

I16e.10 Esplicitiamo i tipi di limiti che corrispondono alle 16 "regioni" di $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ che si possono prendere in esame.

$$\begin{array}{llll}
\text{regione } A: \ \lim\limits_{x\to x_0-} = Y- & ; & \text{regione } B: \ \lim\limits_{x\to x_0-} = Y+ & ; \\
\text{regione } C: \ \lim\limits_{x\to x_0+} = Y- & ; & \text{regione } D: \ \lim\limits_{x\to x_0+} = Y+ & ; \\
\text{regione } E: \ \lim\limits_{x\to x_0-} = -\infty & ; & \text{regione } F: \ \lim\limits_{x\to x_0-} = +\infty & ; \\
\text{regione } G: \ \lim\limits_{x\to x_0+} = -\infty & ; & \text{regione } H: \ \lim\limits_{x\to x_0+} = +\infty & ; \\
\text{regione } I: \ \lim\limits_{x\to -\infty} = Y- & ; & \text{regione } J: \ \lim\limits_{x\to -\infty} = Y+ & ; \\
\text{regione } K: \ \lim\limits_{x\to +\infty} = Y- & ; & \text{regione } L: \ \lim\limits_{x\to +\infty} = Y+ & ; \\
\text{regione } M: \ \lim\limits_{x\to -\infty} = -\infty & ; & \text{regione } N: \ \lim\limits_{x\to -\infty} = +\infty & ; \\
\text{regione } O: \ \lim\limits_{x\to +\infty} = -\infty & ; & \text{regione } P: \ \lim\limits_{x\to +\infty} = +\infty & .
\end{array}$$

I16e.11 Esplicitiamo anche i tipi di limiti che corrispondono alle più significative unioni delle regioni identificate nello schema grafico precedente.

$$\begin{array}{llll}
\text{regione } A\cup B: \ \lim\limits_{x\to x_0-} = Y & ; & \text{regione } C\cup D: \ \lim\limits_{x\to x_0+} = Y & ; \\
\text{regione } A\cup C: \ \lim\limits_{x\to x_0} = Y- & ; & \text{regione } B\cup D: \ \lim\limits_{x\to x_0} = Y+ & ;
\end{array}$$

$$\text{regione } A\cup B\cup C\cup D: \ \lim_{x\to x_0} = Y \quad .$$

$$\begin{array}{llll}
\text{regione } E\cup F: \ \lim\limits_{x\to x_0-} = \infty & ; & \text{regione } G\cup H: \ \lim\limits_{x\to x_0+} = \infty & ; \\
\text{regione } E\cup G: \ \lim\limits_{x\to x_0} = -\infty & ; & \text{regione } F\cup H: \ \lim\limits_{x\to x_0} = +\infty & ;
\end{array}$$

$$\text{regione } E\cup F\cup G\cup H: \ \lim_{x\to x_0} = \infty \quad .$$

$$\begin{array}{llll}
\text{regione } I\cup J: \ \lim\limits_{x\to -\infty} = Y & ; & \text{regione } K\cup L: \ \lim\limits_{x\to +\infty} = Y & ; \\
\text{regione } I\cup K: \ \lim\limits_{x\to \infty} = Y- & ; & \text{regione } J\cup L: \ \lim\limits_{x\to \infty} = Y+ & ;
\end{array}$$

$$\text{regione } I\cup J\cup K\cup L: \ \lim_{x\to \infty} = Y \quad .$$

$$\begin{array}{llll}
\text{regione } M\cup N: \ \lim\limits_{x\to -\infty} = \infty & ; & \text{regione } O\cup P: \ \lim\limits_{x\to +\infty} = \infty & ;
\end{array}$$

$$\text{regione } M \cup O\text{:}\quad \lim_{x\to\infty} = -\infty \qquad ; \qquad \text{regione } N \cup P\text{:}\quad \lim_{x\to\infty} = +\infty \qquad ;$$
$$\text{regione } M \cup N \cup O \cup P\text{:}\quad \lim_{x\to\infty} = \infty \qquad .$$

I16e.12 I limiti delle successioni a valori reali si possono ricondurre ai limiti di particolari funzioni reali aventi come dominio un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}_+$ A questo scopo definiamo le **funzioni a scala improprie**.

La costruzione del limite di una successione di $\lceil \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R} \rceil$ è coerente la costruzione del limite di una funzione $f(x) \in \lceil \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \rceil$ per la variabile x tendente a $+\infty$.
Infatti ogni successione $\mathsf{a} = \langle n \in \mathbb{N} :| a_n \rangle$ si può associare a una funzione a scala $f_{\mathsf{a}}(x)$ avente come dominio $\mathbb{R}_{0+}$ la quale per ogni n intero naturale assume il valore a_n per $x \in [n, n+1)$.
Si dimostra facilmente che

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n =: Y \iff \lim_{x\to+\infty} f_{\mathsf{a}}(x) = Y \ ,$$

dove Y può essere un numero reale, $-\infty$, $-\infty$ o ∞, cioè un elemento di $\overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$.

I16e.13 Osserviamo anche che i limiti per $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$ corrispondono ai limiti da sinistra e da destra (non è immediatamente chiaro in quale ordine). Questo accostamento tra tipi di limite si può chiarire attraverso la corrispondenza proiettiva tra la retta reale e la circonferenza stereografica. Su di questa si potrebbe parlare di limite per avvicinamento orario che raccoglie il limite da destra e il limite per $x \to -\infty$ e di limite per avvicinamento antiorario che raccoglie il limite da sinistra e il limite per $x \to +\infty$.

Considerazioni analoghe per limiti per eccesso e per difetto: la visione nel piano imporrebbe che ai primi sia accostato il limite per $x \to +\infty$ e che ai secondi il limite per $x \to -\infty$, ma una visione attraverso la circonferenza stereografica applicata alla variabile dipendente indurrebbe a parlare di limite con avvicinamento orario e di limite con avvicinamento antiorario.

I16 f. limiti di composizioni di funzioni-RtR

I16f.01 Nel seguito supponiamo che sia $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$.

(1) Prop.: $\lim_{x\to x_0} f(x) \ =: \ L \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}} \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| \ = \ |L|$.

Dim.: Nel caso $L \in \mathbb{R}$, preso $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap), per l'ipotesi si trova $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni $x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$ si ha $|f(x) - L| < \epsilon$.
Di conseguenza per tali x $||f(x)| - |L|| \le |f(x) - L| < \epsilon$, cioè l'asserto.

Nel caso $L = +\infty$, per ogni $K \in \mathbb{R}_+$ (idag) esiste $\delta = \delta(\epsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che per ogni $x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$ si ha $K < f(x)$; a fortiori $K < |f(x)|$, cioè l'asserto.

In modo del tutto simile si dimostrano i casi $L = -\infty$ e $L = \infty$ ed i casi $x_0 = -\infty$ e $x_0 = +\infty$ ▮

(2) Eserc. Giustificare le seguenti affermazioni:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ =: \ Y\pm \quad \text{con} \ \ Y > 0 \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| \ = \ Y\pm \ .$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ =: \ Y\pm \quad \text{con} \ \ Y < 0 \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| \ = \ Y\mp \ .$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ = \ 0\pm \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| \ = \ Y+ \ .$$

(3) Prop.: $\lim_{x\to x_0} f(x) \ = \ \infty \iff \lim_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} \ = \ 0$.

Dim.: Scegliamo un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap); l'ipotesi implica che, posto $K := \dfrac{1}{\epsilon}$, esiste $\delta = \delta(K)$, ovvero $\delta = \delta[\epsilon]$ tale che per ogni $x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D) \setminus \{x_0\}$ si ha $|f(x)| > K = \dfrac{1}{\epsilon}$, cioè $\dfrac{1}{f(x)} < \epsilon$, disuguaglianza che implica l'asserto ▮

(4) Eserc. Giustificare le seguenti affermazioni:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ = \ \pm\infty \iff \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} \ = \ 0\mp \ .$$

I16f.02 **(1) Prop.**: (**processo di contenimento** o **processo di squeeze**) Consideriamo $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funzioni reali definite in un intorno I di $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e in $I \setminus \{x_0\}$ per le quali si ha $f(x) \le g(x) \le h(x)$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ = \ \lim_{x\to x_0} h(x) \ =: \ Y \implies \lim_{x\to x_0} g(x) \text{ esiste ed è uguale ad } Y \ .$$

Dim.: Nel caso siano $x_0, Y \in \mathbb{R}$ scegliamo un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap); l'ipotesi implica che esiste $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che per ogni $x \in \Big([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D\Big) \setminus \{x_0\}$ valgano le disuguaglianze $|f(x) - Y|, |h(x) - Y| < \epsilon$; ne consegue $|g(x) - Y| < \epsilon$, cioè l'asserto.

Nel caso siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $Y = +\infty$, scegliamo un qualsiasi $K \in \mathbb{R}_+$ (idag); l'ipotesi implica che esiste $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che per ogni $x \in \Big([x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap D\Big) \setminus \{x_0\}$ valgano le disuguaglianze $K < f(x), h(x)$; ne consegue $K < g(x)$, cioè l'asserto.

Tutti gli altri 7 casi si trattano in modo simile e risultano collegati grazie alla dualità-LR e alla dualità-UD ▮

(2) Coroll.: Se si ha $0 \le g(x) \le h(x)$ e $\lim_{x\to x_0} h(x) \ = \ 0$, allora $\lim_{x\to x_0} g(x) \ = \ 0$ ▮

(3) Coroll.: Sia $Y \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to x_0} |Y - f(x)| \ = \ 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) \ = \ L$ ▮

(4) Eserc. Giustificare le seguenti precisazioni:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; \lim_{x\to x_0} h(x) \;=:\; Y\mp \;\;\Longrightarrow\;\; \lim_{x\to x_0} g(x) \;=\; Y\mp\,.$$

I16f.03 Premettiamo una definizione equivalente a quella formulata in a02, facendo ancora riferimento a una quaterna-fDAx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0\rangle$.

(1) Defin.: Si dice che la funzione-RtR $f(x)$ al tendere di $x \in D$ al punto x_0 tende al limite finito Y, e si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; Y \quad ,$$

sse a ogni ϵ reale positivo (idap) si può associare un reale positivo $\delta = \delta(\epsilon)$ tale che si trova un $\alpha \in \mathbb{R}_+$ che consente di affermare

$$\forall x \in \Big(\big(x_0-\delta, x_0+\delta\big)\cap D\Big)\setminus\{x_0\} \;\;:\;\; |f(x)-Y| < \alpha\,\epsilon\,.$$

L'equivalenza discende dalla libertà lasciata alla scelta di ϵ e riguarda una semplice variante della disuguaglianza fulcro della definizione ($<\epsilon$ diventa $<\alpha\,\epsilon$).

In termini della geometria dei rettangoli coprenti va osservata l'equivalenza nell'esprimere l'altezza di tali figure come $2\,\epsilon$ o come $2\,\alpha\,\epsilon$: in altre parole si consente di ampliare formalmente la scelta per l'unità di misura dei lati verticali.

I16f.04 **(1) Prop.**: Consideriamo le funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ e un $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ che appartiene all'insieme $\boldsymbol{D} \;:=\; \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=:\; F\in\mathbb{R};\quad \lim_{x\to x_0} g(x) \;=:\; G\in\mathbb{R} \;\;\Longrightarrow\;\; \lim_{x\to x_0}\,(f(x)+g(x)) \;\text{ esiste ed è uguale ad } F+G\,.$$

Dim.: Iniziamo con il caso $x_0, Y \in \mathbb{R}$, ove $Y := F+G$.

Scelto un qualsiasi $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) per l'ipotesi si trovano $\delta(\epsilon)$ e $\sigma(\epsilon)$ tali che

$$\forall x \in \Big(\big(x_0-\delta, x_0+\delta\big)\cap \mathsf{dom}(f)\Big)\setminus\{x_0\} \;\;:\;\; |f(x)-F| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{e}$$

$$\forall x \in \Big(\big(x_0-\sigma, x_0+\sigma\big)\cap \mathsf{dom}(g)\Big)\setminus\{x_0\} \;\;:\;\; |f(x)-G| < \frac{\epsilon}{2} \qquad .$$

Questo implica che, posto $\rho := \min(\delta,\sigma)$,

$$\forall x \in \Big(\big(x_0-\rho, x_0+\rho\big)\cap \mathsf{dom}(f)\cap\mathsf{dom}(g)\Big)\setminus\{x_0\} \quad :$$

$$|f(x)+g(x)-F-G| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \text{ossia la tesi}\,.$$

Nel caso sia $x_0 = +\infty$, scelto un arbitrario $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si trovano due reali H e K (idag) tali che

$$\forall x \in (H, +\infty)\cap \mathsf{dom} f \;\;:\;\; |f(x)-F| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Quindi, posto $M := \max(H, K)$

$$\forall x \in (M, +\infty)\cap\mathsf{dom}(f)\cap\mathsf{dom}(g) \quad:\quad |f(x)+g(x)-F-G| < \epsilon \qquad \text{ossia la tesi}\,.$$

Il caso $x_0 = -\infty$ si ottiene dal precedente per dualità-LR. Il caso $x_0 = \infty$ si ottiene dalla congiunzione dei risultati per $x_0 = -\infty$ e $x_0 = +\infty$ ▮

La proposizione precedente si può esprimere colloquialmente dicendo che il limite della somma di funzioni-RtR è la somma dei limiti.

(2) Eserc. Dimostrare sulla falsariga di (1) le uguaglianze seguenti.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=\; \pm\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \;=:\; G\in\mathbb{R} \;\;\Longrightarrow\;\; \lim_{x\to x_0}\,(f(x)+g(x)) \;=\; \pm\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty \implies \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = -\infty$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty \implies \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = +\infty\ .$$

Nulla si può invece concludere in generale, cioè indipendentemente dalle caratteristiche della $f(x)$ e della $g(x)$ nel caso si abbia

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to x_0} (x) = -\infty\ .$$

I16f.05 **(1) Prop.**: Consideriamo la quaterna-fDAx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0\rangle$ con $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ e $Y \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$.
$\lim_{x\to x_0} f(x) =: Y \implies \forall\beta\in\mathbb{R} \ \vdots\ \lim_{x\to x_0} (\beta\, f(x)) = \beta\, Y$.

Dim.: Basta considerare che a ogni rettangolo coprente R per la $f(x)$ corrisponde un rettangolo coprente per la $\beta\, f(x)$ ottenuto trasformando ciascuno dei suoi 4 vertici $\langle a_i, b_i\rangle$ nel vertice $\langle \beta\, a_i, \beta\, b_i\rangle$ ▮

(2) Coroll.: $\lim_{x\to x_0} f(x) = Y \iff \lim_{x\to x_0} (-f(x)) = -Y$ ▮

Osserviamo che la precedente uguaglianza si può dimostrare anche utilizzando rettangoli coprenti per la $-f(x)$ ottenuti applicando la riflessione $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}} = \lceil y \in \mathbb{R} \mapsto -y \rceil$ ai rettangoli coprenti della $f(x)$.

(3) Eserc. Giustificare le seguenti precisazioni:

$\lim_{x\to x_0} f(x) =: Y\pm \implies \forall\beta\in\mathbb{R}_+ \ \vdots\ \lim_{x\to x_0} (\beta\, f(x)) = \beta\, Y\pm$.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \implies \forall\beta\in\mathbb{R}_+ \ \vdots\ \lim_{x\to x_0} (\beta\, f(x)) = \pm\infty$.

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \implies \forall\beta\in\mathbb{R} \ \vdots\ \lim_{x\to x_0} (\beta\, f(x)) = \infty$.

I16f.06 **(1) Prop.**: Consideriamo le funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ e un $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ che appartiene all'insieme $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$.

$\lim_{x\to x_0} f(x) =: F\in\mathbb{R};\quad \lim_{x\to x_0} g(x) =: G\in\mathbb{R} \implies \lim_{x\to x_0} (f(x)-g(x))$ esiste ed è uguale ad $F-G$.

Dim.: Segue da f04(1) e da f05(2) ▮

Il precedente enunciato si può generalizzare significativamente.

(2) Prop.: Consideriamo le funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ e un $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ che appartiene all'insieme $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$; siano inoltre α e β due arbitrari numeri reali. Allora

$\lim_{x\to x_0} f(x) =: F\in\mathbb{R};\quad \lim_{x\to x_0} g(x) =: G\in\mathbb{R} \implies \lim_{x\to x_0} (\alpha\, f(x)+\beta\, g(x))$ esiste ed è uguale ad $\alpha\, F+\beta\, G$.

Dim.: Seguono, risp., da f04(1) e da f05(2) ▮

La proposizione precedente consente di affermare che il passaggio al limite per le le funzioni-RtR è un operatore lineare.
Segnaliamo che la linearità del passaggio al limite si può ampliare in misura notevole.

I16f.07 In questo paragrafo e nel prossimo consideriamo due funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ ed un $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ che appartiene all'insieme $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$.

Prop. Se in un intorno I di x_0 (contenuto in $\boldsymbol{I}$) la $f(x)$ è limitata e $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$.

Dim.: Consideriamo un $M\in\mathbb{R}_+$ tale che per $x\in I$ si ha $|f(x)| < M$.

Inoltre scegliamo $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) e determiniamo di conseguenza $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che sia

$$\forall x \in \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap \mathsf{dom}(f) \cap \mathsf{dom}(g)\Big) \setminus \{x_0\} \ \because \ |g(x)| < \frac{\epsilon}{M} \ .$$

Per i suddetti x abbiamo $f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$ e l'arbitrarietà di ϵ implica l'asserto ▮

I16f.08 Il risultato precedente si può generalizzare significativamente.

Prop. Consideriamo le funzioni-RtR $f(x)$ e $g(x)$ e un $x_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ che appartiene all'insieme $\boldsymbol{D} := \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(f)) \cap \boldsymbol{Adrn}(\mathsf{dom}(g))$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ =: \ F \in \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ =: \ G \in \mathbb{R} \implies \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x))$ esiste ed è uguale ad $F \cdot G$.

Dim.: $|f(x)\cdot g(x) - F\cdot G| \ = \ |G(F - f(x)) + f(x)(G - g(x))|$.

Le ipotesi implicano $\lim\limits_{x\to x_0} F - f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} G - g(x) = 0$. Possiamo restringerci a intorni di x_0 nei quali $f(x)$ è limitata, cioè nei quali si trova un $M \in \mathbb{R}_+$ tale che $|f(x)| < M$.

Quindi, grazie alle ipotesi, $\lim\limits_{x\to x_0} [G(F - f(x)] \ = \ 0$ e $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)(G - g(x))] \ = \ 0$ e di conseguenza $\lim\limits_{x\to x_0} [F\cdot G - f(x)\cdot g(x)] \ = \ 0$, ovvero $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) \ = \ F \cdot G$ ▮

Il risultato precedente si può esprimere colloquialmente asserendo che il limite del prodotto di due funzioni-RtR è dato dal prodotto dei corrispondenti limiti.

I16f.09 **(1) Prop.**: $f(x)$ è limitata in I e $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) \ = \ 0.$

Dim.: ▮

I16f.10 **(1) Prop.**: Per ogni polinomio sui reali $P(x)$ e per ogni x_0 reale si ha $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) \ = \ P(x_0)$

Dim.: ▮

I16f.11 **(2) Prop.**: Per ogni polinomio sui reali $P(x) = a_n \cdot x^n + \cdots$ si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) \ = \ \mathrm{sign}(a_n)\cdot\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) \ = \ (-1)^n \cdot \mathrm{sign}(a_n) \cdot \infty$ ▮

I16f.12 Consideriamo α e β reali positivi ed m e p interi positivi. Allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha\, x^{m+p} - \beta\, x^m = +\infty \ .$$

▮

(2) Prop.: Consideriamo il polinomio $P(x) \ = \ a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$; $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) \ = \ \infty$ ▮

I16f.13 **(1) Prop.**: $\forall x \in I \because f(x) > 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to A} f(x) \ =: F > 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to B} g(x) \ =: \ G \implies$ $\lim\limits_{x\to A} f(x)^{g(x)}$ esiste ed è uguale ad F^G . ▮

I16f.14 **Prop.** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ =: \ G$ con $|G| > 0 \implies \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{g(x)}$ esiste ed è uguale ad $\dfrac{1}{G}$. ▮

In parole povere si otrebbe affermare che, data una funzione, il limite della sua funzione reciproca, se diverso da 0, è il reciproco del limite della funzione in esame.

I16f.15 **Prop.** $\lim\limits_{x\to A} f(x) \ =: \ F \quad \lim\limits_{x\to B} g(x) \ =: \ G$ con $|G| > 0 \implies$

$\lim\limits_{x\to A} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ esiste ed è uguale ad $\dfrac{F}{G}$.

Dim.: Discende da f08 e da f13, osservando che $\dfrac{f(x)}{g(x)} \ = \ f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$ ▮

In parole povere si può asserire che il limite del quoziente di due funzioni è il quoziente dei due limiti, ammesso che il limite della funzione divisore sia diverso da 0.

I16f.16 **(3) Prop.**: $\lim_{x \to A} f(x) \;=:\; F > 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x \to A} \ln f(x)$ esiste ed è uguale a $\ln F$. ▮

In parole povere si può asserire che il limite del logaritmo di una funzione data a valori positivi è il logaritmo del limite della funzione stessa.

I16 g. altre proprietà generali del passaggio al limite

I16g.01 Abbiamo già visto gli effetti sull'operazione di passaggio al limite per funzioni-RtR della riflessione rispetto l'asse Ox $\lceil f(x) \in \mathsf{FunRtR} \mapsto -f(x) \rceil$ [f05(2)] e più in generale dell'omotetia secondo la direzione Oy, $\lceil f(x) \in \mathsf{FunRtR} \mapsto \alpha\, f(x) \rceil$ [f05(1)).

Ci proponiamo ora di ampliare l'esame sopra le conseguenze sui limiti dovute ad altre permutazioni fondamentali del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in grado di trasformare intervalli in intervalli e tali da trasformare una funzione-RtR in un'altra funzione dello stesso genere.
Iniziamo con le omotetie che lasciano fissa l'origine $\mathbf{0}_2 = \langle 0, 0\rangle$, permutazioni tra le quali si trovano le riflessioni rispetto all'asse Ox e rispetto l'asse Oy.

Sia β un qualsiasi reale nonnullo e consideriamo l'omotetia secondo la direzione Ox $\boldsymbol{Hmtt}_{Ox,\beta} := \left\lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle \beta\, x, y\rangle \right\rceil$. L'effetto sopra le funzioni è dato da $\lceil f(x) \in \mathsf{FunRtR} \mapsto f(\beta\, x) \rceil$.

(1) Prop.: Se $\lim_{x\to x_0} f(y) = y_0$ con $x_0, y_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ e $g(x) := \boldsymbol{Hmtt}_{Ox,\beta}[f(x)]$, allora $\lim_{x\to\beta\, x_0} g(y) = y_0$.

Dim.: Anche per questo enunciato è sufficiente considerare che se $R = \mathsf{Rctng}(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle)$ è un rettangolo coprente la $f(x)$ in un opportuno intorno di $\langle x_0, y_0\rangle$, allora l'omotetia in esame lo trasforma in $\boldsymbol{Hmtt}_{Ox,\beta}[\mathsf{R}] = \mathsf{Rctng}(\langle \beta\, x_1, y_1\rangle, \langle \beta\, x_3, y_3\rangle)$ che è rettangolo coprente per la $g(x)$ ▮

In particolare per $\beta = -1$ si ha la riflessione di $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ rispetto all'asse Oy e per essa si ha:

(2) Coroll.: $\lim_{x\to x_0} f(y) = y_0 \implies \lim_{x\to -x_0} g(x) = y_0$ ▮

Evidentemente questa riflessione, come ogni omotetia $\boldsymbol{Hmtt}_{Ox,\beta}$ riguardante $\beta < 0$, trasforma limiti da destra in limiti da sinistra e viceversa e scambia i limiti per $x \to -\infty$ con limiti per $x \to +\infty$

I16g.02 Consideriamo la traslazione del piano $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$\mathsf{T}_{t_x,t_y} := \left\lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle T_x(x), T_y(y)\rangle \right\rceil = \left\lceil \langle x, y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mapsto \langle x + t_x, y + t_y\rangle\ rFF \right. .$$

Questa trasformazione agisce sopra una funzione $f(x)$ come segue

$$\mathsf{T}_{t_x,t_y}[f(x)] = \left\lceil x \in T_x(D) \mapsto \langle x, T_y[f(T_x{}^{-\mathbf{1}}(x)]\rangle \right\rceil = \left\lceil x \in T_x(D) \mapsto \langle x, f(x - t_x) + t_y\rangle \right\rceil .$$

(1) Prop.: Se $\lim_{x\to x_0} f(y) =: y_0$ con $x_0, y_0 \in \overline{\overline{\overline{\mathbb{R}}}}$ e $g(x) := \mathsf{T}_{t_x,t_y}[f(x)]$, allora

$$\lim_{x\to x_0+t_x} g(y) = y_0 + t_y .$$

Dim.: Anche per questa dimostrazione è sufficiente considerare che se $\mathsf{R} := \mathsf{Rctng}\Big(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle\Big)$ è un rettangolo coprente la $f(x)$ per un opportuno intorno di x_0, allora la traslazione in esame lo trasforma in

$$\mathsf{T}_{t_x,t_y}[\mathsf{R}] = \mathsf{Rctng}\Big(\langle x_1 + t_x, y_1 + t_y\rangle, \langle x_3 + t_x, y_3 + t_y\rangle\Big) ,$$

che è rettangolo coprente per la $g(x)$ ▮

I16g.03 Vediamo come si comporta l'operazione di passaggio al limite quando si applica a una funzione di funzione.

(1) Prop.: Consideriamo le quintuple-fDAxy $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0, y_0\rangle$ e $\langle g(y), E, \mathsf{B}, y_0, w_0\rangle$; consideriamo anche le relazioni

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to x_0} = y_0 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)}\ \lim_{y\to y_0} g(y) = w_0,$$

per le quali chiediamo $x_0, y_0, w_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \boldsymbol{Adrn}(E)$.

Consideriamo inoltre la funzione-RtR $h(x) := \lceil x \in \overline{D} \mapsto g(f(x)) \rceil$, avente come dominio $\overline{D} \subseteq D$ tale che $\forall \overline{x} \in \overline{D} \,:\, f(\overline{x}) \in E$.

Allora $\lim_{x \to x_0} h(x)$ esiste ed è uguale a w_0.

Dim.: Grazie ad (a), scelto un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in V(\epsilon) := \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D\Big) \setminus \{x_0\} \;:\; |f(x) - y_0| < \epsilon \,.$$

Grazie a (b), scelto un $\sigma \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\rho \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall w \in V_\rho \;:=\; \Big((y_0 - \rho, y_0 + \rho) \cap E \cap f(D)\Big) \setminus \{y_0\} \;:\; |g(y) - y_0| < \epsilon \,.$$

Di conseguenza, scelto un $\sigma \in \mathbb{R}_+$ (idap) esiste $\delta \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\forall x \in V_\delta := \Big((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D\Big) \setminus \{x_0\} \quad:\quad |g(f(x)) - W| < \sigma \;\blacksquare$$

Osserviamo che la dimostrazione precedente si può visualizzare come costruzione di un rettangolo coprente per $\langle x_0, w_0 \rangle$ a partire da un rettangolo coprente per $\langle x_0, y_0 \rangle$ e da un rettangolo coprente per $\langle y_0, w_0 \rangle$.

Un esempio: $\lim_{x \to 0\pm} \mathrm{e}^{\cos x} = e\pm$.

I16g.04 Valgono anche varianti dell'enunciato precedente e della relativa dimostrazione, varianti nelle quali si ipotizza qualche limite intermedio non finito. Le relative dimostrazioni, ottenibili modificando gli intorni ied i rettangoli coprenti in gioco, si possono esplicitare senza difficoltà.

(1) Eserc. Dimostrare l'enunciato

$$\forall x_0, y_0 \in \mathbb{R} \,,\; \Omega \in \{-\infty, +\infty, \infty\} \;:\; \lim_{x \to x_0} f(x) \;=:\; y_0 \;\text{ e }\; \lim_{y \to y_0} g(y) \;=\; \Omega \;\Longrightarrow\; \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \;=\; \Omega \,.$$

(2) Eserc. Dimostrare l'enunciato

$$\forall x_{0,0} \in \mathbb{R} \,,\; \Xi \in \{-\infty, +\infty, \infty\} \;:\; \lim_{x \to x_0} f(x) \;=:\; \Xi \;\text{ e }\; \lim_{y \to \Xi} g(y) \;=:\; w_0 \;\Longrightarrow\; \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \;=\; w_0 \,.$$

(3) Eserc. Dimostrare l'enunciato

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \,,\; \Xi, \Omega \in \{-\infty, +\infty, \infty\} \;:\; \lim_{x \to x_0} f(x) \;=:\; \Xi \;\; e \;\; \lim_{y \to \Xi} g(y) \;=:\; \Omega \;\Longrightarrow\; \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \;=\; \Omega \,.$$

(4) Eserc. Dimostrare l'enunciato

$$\forall y_0, w_0 \in \mathbb{R} \,,\; \Psi \in \{-\infty, +\infty, \infty\} \;:\; \lim_{x \to \Psi} f(x) \;=:\; y_0 \;\; e \;\; \lim_{y \to y_0} g(y) \;=:\; w_0 \;\Longrightarrow\; \lim_{x \to \Psi} g(f(x)) \;=\; w_0 \,.$$

(5) Eserc. Dimostrare l'enunciato

$$\forall w_0 \in \mathbb{R} \,,\; \Psi, \Xi \in \{-\infty, +\infty, \infty\} \;:\; \lim_{x \to \Psi} f(x) = \Xi \;\text{ e }\; \lim_{y \to \Xi} g(y) = w_0 \;\Longrightarrow\; \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = w_0 .$$

(6) Eserc. Dimostrare l'enunciato

$$\forall \Psi, \Xi, \Omega \in \{-\infty, +\infty, \infty\} \;:\; \lim_{x \to \Psi} f(x) \;=:\; \Xi \;\; e \;\; \lim_{y \to \Xi} g(y) \;=:\; \Omega \;\Longrightarrow\; \lim_{x \to x_0} g(f(x)) \;=:\; \Omega \,.$$

I16g.05 A questo punto siamo in grado di affrontare il comportamento del passaggio al limite in conseguenza di tutte le permutazioni ottenibili come composizioni delle permutazioni viste in precedenza. In particolare possiamo trattare trasformazioni lineari di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che mantengono la direzione degli assi e sono invertibili e possiamo trattare le riflessioni rispetto a rette orizzontali e verticali.

I16g.06 **Teorema (caratterizzazione del limite di Cauchy)**
Consideriamo una quaterna-fDAx $\langle f(x), D, \mathsf{A}, x_0\rangle$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.
$\lim_{x\to x_0} f(x) \;=:\; y_0 \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) $\;\vdots\;$ $\mathbb{R}_+ \ni \delta = \delta(\epsilon)$ tale che per due punti qualsiasi x' e x'' appartenenti a $V(\epsilon) \;:=\; \overline{V}_{\delta(\epsilon)} \;:=\; \Big((x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D\Big) \setminus \{x_0\}$ si abbia $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Dim.: "$\Longrightarrow$" : Per l'ipotesi a ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ possiamo associare un δ tale che

$$\forall x', x'' \in V(\epsilon) \;\vdots\; |f(x') - y_0| < \frac{\epsilon}{2} \wedge |f(x'') - y_0| < \frac{\epsilon}{2} \text{ e di conseguenza } |f(x') - f(x'')| < \epsilon \;.$$

"$\Longleftarrow$" : Partiamo da un $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e dal parametro $\delta(\epsilon)$ garantito dall'ipotesi tale che $\forall x', x'' \in \overline{V}_\delta \;\vdots\; |f(x') - f(x'')| < \epsilon$.
Osserviamo che in $V(\epsilon)$ si ha $f(x'') - \epsilon < f(x') < f(x'') + \epsilon$ e quindi la $f(x)$ deve essere limitata in $\overline{V}_\delta$.
Denotiamo con i_0 e con s_0, risp., l'infimo e il supremo della $f(x)$ in $V(\epsilon)$; in tale insieme deve quindi essere $\boldsymbol{oscl}(f) < \epsilon$.

Queste considerazioni si possono ripetere per una successione di intervalli forati con centro in x_0 le cui ampiezze costituiscono una successione infinitesima come la $\left\langle \epsilon \;,\; \frac{\epsilon}{2} \;,\; \frac{\epsilon}{2^2} \;,\; \frac{\epsilon}{2^3} \;,\; \dots \right\rangle$.
Si viene quindi a individuare una successione di intervalli reali:

$$\Big\langle (i_0, s_0), (i_1, s_1), (i_2, s_2), \dots \Big\rangle \quad \text{dove } \forall n \in \mathbb{N} \;\vdots\; i_n := \inf_{V(\epsilon/2^j)} (f(x)) \quad \text{e} \quad s_n := \sup_{V(\epsilon/2^j)} (f(x)) \;.$$

Questa successione, dato che $s_n - i_n < \dfrac{\epsilon}{2^n}$, è convergente e individua un numero reale che denotiamo con y_0.
Abbiamo quindi che per ogni $\rho \in \mathbb{R}_+$ (idap) si trova $n \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{\epsilon}{2^n} < \rho$: per questo basta assumere $n = \left\lceil \log_2\left(\dfrac{\rho}{\epsilon}\right)\right\rceil$. Di conseguenza

$$\forall x \in V(\rho) \;\vdots\; i_n \le f(x) \le s_n \qquad , \qquad i_n \le y_0 \le s_n \qquad \text{e} \qquad |f(x) - y_0| < \rho \;,$$

e questa espressione equivale alla tesi ▮

I16g.07 Ora possiamo dire che disponiamo di una nuova definizione (di Cauchy) di convergenza a un limite finito di una $f(x)$.
Questa definizione ha il vantaggio di non dovere ricorrere alla conoscenza del valore del limite.

Lo schema di procedura per la ricerca del limite che emerge dal procedimento dimostrativo visto in precedenza fa riferimento a questa nuova definizione, con maggiore realismo per quanto riguarda la gestione delle informazioni di quanto possano fare la definizione in a02 e le altre derivate da questa e viste sopra.

Procedendo con argomentazioni simili si possono dimostrare anche i criteri per l'esistenza di limiti finiti al tendere di x a uno degli infiniti che si possono prendere in considerazione.

(1) Prop.: $\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=:\; y_0 \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+ \;\vdots\; \mathbb{R}_+ \ni K = K(\epsilon)$ tale che per due punti qualsiasi x' e x'' appartenenti a $\boldsymbol{VX}(\epsilon) \;:=\; \boldsymbol{VY}_{K(\epsilon)} \;:=\; (K, +\infty) \cap D$ si abbia $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Dim.: La dimostrazione si conduce come quella in g06, ma individuando una successione di intervalli della retta reale con l'estremità iniziale illimitatamente crescente $(n\,K, +\infty)$ ▮

(2) Prop.: $\lim_{x\to-\infty} f(x) \;=:\; y_0 \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si può determinare un reale positivo $H = H(\epsilon)$ tale che per due punti qualsiasi x' e x'' appartenenti a $\boldsymbol{VX}(\epsilon) \;:=\; \boldsymbol{VY}_{H(\epsilon)} \;:=\; (-\infty, -H) \cap D$ si abbia $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Dim.: La dimostrazione si conduce trasformando con $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}}$ la dimostrazione della (1) ▮

(3) Prop.: $\lim_{x\to\infty} f(x) =: y_0 \iff \forall\epsilon \in \mathbb{R}_+$ si può determinare un reale positivo $K = K(\epsilon)$ tale che per due punti qualsiasi x' e x'' appartenenti a $\boldsymbol{VX}(\epsilon) := \boldsymbol{VY}_{K(\epsilon)} := \Big(\big(-\infty, -K\big) \cup \big(K, +\infty\big)\Big) \cap D$ si abbia $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Dim.: Si tratta di fare riferimento a funzioni ottenibili con l'unione di funzioni con domini digiunti, una prima funzione con dominio della forma $\big(-\infty, -K\big) \cap D$ a cui applicare (3) e una seconda funzione con dominio della forma $\big(K, +\infty\big) \cap D$ a cui applicare (2) ▮

I16g.08 Le funzioni-RtR monotòne, cioè le funzioni nondecrescenti o noncrescenti, sono tendenzialmente più regolari di quelle che presentano oscillazioni illimitate.
Questo è chiarito dalle proposizioni che seguono.

(1) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione-RtR nondecrescente; il suo dominio $D := \mathsf{dom}(f)$ sia limitato superiormente e sia $x_0 := \sup(D)$; inoltre x_0 appartenga ad $\mathsf{A} := \boldsymbol{Adrn}(D)$.
Con queste premesse esiste un limite per x tendente ad x_0 da sinistra; più precisamente:

se $f(x)$ è limitata superiormente vale una formula del tipo $\lim_{x\to x_0-} f(x) = y_0-$;

se $f(x)$ non è limitata si ha $\lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty$.

Dim.: Nel caso di $f(x)$ limitata, introduciamo $Y := \sup_{x\in D}(f(x))$. Per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ (idap) si trova $x_- = x_0 - \delta(\epsilon)$ tale che $Y - \epsilon < f(x_-) \le Y$. In virtù della monotonia nondecrescente della $f(x)$ abbiamo $\forall x \in \big(x_-, x_0\big) \;\colon\; Y - \epsilon < f(x) < Y$; questo per l'arbitrarietà di ϵ implica che $\lim_{x\to x_0-} f(x) = y_0-$.

Sia invece $f(x)$ illimitata, cioè sia $\sup_D(f(x) = +\infty$. Fissato $K \in \mathbb{R}_+$ (idag) esiste $x_- \in \big(-\infty, x_0\big)$ tale che $K < f(x_-)$. Ma la monotonia nondecrescente della $f(x)$ implica $\forall x \in \big(x_-, x_0\big) \colon K < f(x)$; questo per l'arbitrarietà di K implica che $\lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty$ ▮

I16g.09 Evidentemente valgono anche le tre proposizioni ottenute dalla precedente applicando a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Ox}}$, $\mathsf{Mirr}_{\mathsf{Oy}}$ e la composizione delle due, la simmetria centrale di centro nell'origine.

(1) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione-RtR nondecrescente; il suo dominio $D := \mathsf{dom}(f)$ sia limitato inferiormente e sia $x_0 := \inf(D)$; inoltre x_0 appartenga ad $\mathsf{A} := \boldsymbol{Adrn}(D)$.
Allora esiste un limite per x tendente ad x_0 da destra e più precisamente:

se $f(x)$ è limitata inferiormente vale una formula del tipo $\lim_{x\to x_0+} f(x) =: y_0+$;

se $f(x)$ non è limitata si ha $\lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty$ ▮

(2) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione-RtR noncrescente; il suo dominio $D := \mathsf{dom}(f)$ sia limitato superiormente e sia $x_0 := \sup(D)$; inoltre x_0 appartenga ad $\mathsf{A} := \boldsymbol{Adrn}(D)$.
Sotto queste ipotesi esiste un limite per x tendente ad x_0 da sinistra e più precisamente:

se $f(x)$ è limitata inferiormente vale una formula del tipo $\lim_{x\to x_0-} f(x) =: y_0+$;

se $f(x)$ non è limitata si ha $\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty$ ▮

(3) Prop.: Sia $f(x)$ una funzione-RtR noncrescente; il suo dominio $D := \mathsf{dom}(f)$ sia limitato inferiormente e sia $x_0 := \inf(D)$; inoltre x_0 appartenga ad $\mathsf{A} := \boldsymbol{Adrn}(D)$.
Esiste allora un limite per x tendente ad x_0 da destra e più precisamente:

se $f(x)$ è limitata inferiormente vale una formula del tipo $\lim_{x\to x_0+} f(x) =: y_0-$;

se $f(x)$ non è limitata si ha $\lim_{x \to x_0+} f(x) \;=\; +-\infty$ ▮

Le proposizioni sulla regolarità delle funzioni monotone si possono applicare a molte cosiddette **funzioni monotone a pezzi**, funzioni che presentano sottodomini non infinitesimi tali che la riduzione della funzione a ciascuno di essi costituisce una funzione monotona.

Per esempio la funzione limitata seno è monotona crescente in tutti gli intervalli

$$\left[(4\,k-1)\frac{\pi}{2}\ ,\ (4\,k+1)\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}\ ,$$

mentre è monotona decrescente in tutti gli intervalli

$$\left[(4k+1)\frac{\pi}{2}\ ,\ (4k+3)\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}\ .$$

Accade invece che la funzione illimitata tangente è monotona crescente in ciascuno degli intervalli $\left((2k-1)\frac{\pi}{2}\ ,\ (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

I16 h. limiti specifici [2]

I16h.01 **(1) Prop.:** $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Dim.: Per $x \in \big(-\pi/2, \pi/2\big) \setminus \{0\}$ si ha $0 < |\sin x| < |x|$; da questo, grazie a f02(3), segue l'asserto ▮

Più precisamente si ha, in accordo con il carattere dispari della funzione seno

(2) $$\lim_{x\to 0-} \sin x = 0- \quad , \quad \lim_{x\to 0+} \sin x = 0+ \ .$$

Inoltre per la periodicità della funzione $\sin x$

(3) $$\forall k \in \mathbb{Z} \ : \ \lim_{x\to 2\,k\,\pi\pm} \sin x = 0\pm \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ : \ \lim_{x\to (2\,k+1)\pi\pm} \sin x = 0\mp \ .$$

I16h.02 Ricordiamo la formula di addizione per la funzione coseno

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

e la sua conseguenza

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \ .$$

(1) Prop.: $\lim_{x\to 0} \cos x = 1-$.

Dim.: $|1-\cos x| = 2\left|\sin^2 \frac{x}{2}\right| < 2\frac{x^2}{4}$; da qui, dato che $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2} = 0$ e grazie a b03(3), segue

$$\lim_{x\to 0} |1-\cos x| = 0 \ ;$$

quindi, tenuto conto che $x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \setminus \{0\}$, segue l'asserto ▮

Tenendo conto della periodicità della funzione coseno e del fatto che $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \cos(x+\pi) = -\cos x$ si ottiene

(2) $$\forall k \in \mathbb{Z} \ : \ \lim_{x\to 2\,k\,\pi} \cos x = 1- \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \ : \ \lim_{x\to (2k+1)\pi} \cos x = -1+ \ .$$

Tenendo conto della relazione per la traslazione $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ risultano noti i valori dei limiti delle funzioni seno e coseno per tutti gli argomenti multipli di $\frac{\pi}{2}$.

I16h.03 **Prop.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1-$.

Dim.: Osserviamo che la funzione $f(x) := \frac{\sin x}{x}$ è definita in $\mathbb{R}_{nz}$ ed è pari. cominciamo quindi a considerare archi di cerchio relativi ad angoli misurati in radianti da x limitandoci all'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

//input pI16h03

Confrontando i piccoli archi delle circonferenza di raggio 1 relativi a corde verticali vicine al punto $\langle 1, 0\rangle$ con i corrispondenti seni si ricava

$$\forall x \in \Big(0, \frac{\pi}{2}\Big) \ : \ \sin x < \mathsf{arc}\, AB < \tan x \ .$$

e quindi $\sin x < x < \tan x$. Questa implica $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ e dunque $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

Essendo $\lim_{x\to 0+} \cos x = 1-$, si ottiene $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1-$.
Grazie al carattere pari della funzione in esame si ottiene la formula enunciata ▮

Osserviamo che se si misurano gli angoli in gradi sessagesimali o in quadranti la formula precedente e le sue varie conseguenze vengono complicate da fattori di conversione. Se $x^{[0]}$ denota la misura in gradi sessagesimali e $x^{[q]}$ la misura in quadranti, abbiamo $x^{[0]} = x\,\frac{180}{\pi}$ e $x^{[q]} = x\,\frac{2}{\pi}$ e quindi, convenendo che $\sin(x^{[0]}) = \sin(x^{[q]}) = \sin x$,

(2) $\lim_{x^{[0]}\to 0} \frac{\sin(x^{[0]})}{x^{[0]}} = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745\,32925\,2$ e $\lim_{x^{[q]}\to 0} \frac{\sin(x^{[q]})}{x^{[q]}} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57079\,63$.

A causa degli accennati fattori, per le formule dell'analisi infinitesimale concernenti le funzioni trigonometriche si considera decisamente preferibile servirsi delle misure degli angoli espresse in radianti.

I16h.04 Ricaviamo altre formule collegate alle precedenti.

(1) $$\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \because\ \lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \alpha\ .$$

Dim.: Nel saso sia $\alpha > 0$ abbiamo: $\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{\alpha}{x}\right) = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin(\alpha\, t)}{\alpha\, t}\,\alpha = \alpha-$.
La formula è affatto ovvia se $\alpha = 0$, mentre il caso $\alpha < 0$ si riconduce al caso $\alpha > 0$ in forza del carattere dispari nella α della funzione ▮

(2) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-} = 1+ ▮$$

(3) $$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ ,\ \beta \in \mathbb{R}_{nz} \ \because\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin\,\alpha\, x}{\sin\,\beta\, x} = \frac{\alpha}{\beta}\ .$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\,\alpha\, x}{\sin\,\beta\, x} = \lfloor t := \alpha\, x\ ,\ u := \beta\, x \rfloor = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\lim_{t\to 0} \sin\, t/t}{\lim_{u\to 0} \sin\, u/u} = \frac{\alpha}{\beta}$ ▮

I16h.05 Dalle relazioni precedenti si ricavano vari limiti per le altre funzioni trigonometriche.

(1) Prop.: $\lim_{x\to\pi/2\,=} \tan x = +\infty$, $\lim_{x\to 0\mp} \tan x = 0\mp$, $\lim_{x\to\pi/2+} \tan x = -\infty$ ▮

(2) Prop.: $\lim_{x\to 0\mp} \cot x = \mp\infty$, $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}\mp} \cot x = 0\pm$ ▮

Delle precedenti formule si ottengono facilmente le generalizzazioni ottenibili grazie alle caratteristiche di periodicità.

I16h.06 Presentiamo alcuni limiti per funzioni iperboliche.

(1) $\lim_{x\to\mp\infty} \sinh x = \mp\infty$ ▮ , $\lim_{x\to 0\mp} \sinh x = 0\mp$ ▮

(2) $\lim_{x\to\mp\infty} \cosh x = +\infty$ ▮ , $\lim_{x\to 0\mp} \cosh x = 1+$ ▮

(3) $\lim_{x\to\mp\infty} \tanh x = \mp 1$ ▮ , $\lim_{x\to 0\mp} \tanh x = 0\mp$ ▮

Si osserva che queste relazioni sono in accordo con il carattere pari della funzione $\sinh x$ e con il carattere dispari delle funzioni $\cosh x$ e $\tanh x$.

I16h.07 Ricordiamo che per ogni successione $\langle d_1, d_2, ..., d_n, ...\rangle$ divergente a $+\infty$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{x}{d_n}\right)^{d_n} = \mathtt{e}^x$.

(1) Prop.: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{\alpha}{x}\right)^x = \mathtt{e}^\alpha$ e in particolare $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathtt{e}$.

I16h.08 **(1) Prop.**: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Dim.: Basta modificare la h07(1) relativa ad $\alpha = 1$ sostituendo alla variabile x la reciproca $u := \dfrac{1}{x}$, la quale al tendere di x a $+\infty$ tende a $0+$ ▮

(2) Prop.: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Dim.: Si ottiene prendendo il logaritmo in base e dei due membri dell'uguaglianza precedente ▮

(3) Prop.: $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+x) = 0$ ▮

Dim.: Dalla (2), introdotto $\eta_x := \dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1$, si ottiene $\lim\limits_{x\to 0} \eta_x = 0$.
Quindi, essendo $\ln(1+x) = x\,(1+\eta_x)$, si giunge all'asserto ▮

Osserviamo che questo risultato si può ottenere, ma senza mettere a fuoco gli elementi specifici, come caso particolare della possibilità di commutare le operazioni di calcolo del logaritmo e di passaggio al limite.

(4) Prop.: $\forall c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \; : \; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{c^x - 1}{x} = \ln c$.